代数性凝聚层

Jean Pierre Serre

原载：

Faisceaux Algébriques Cohérents (FAC)

The Annals of Mathematics, 2nd Ser.,
Vol. 61, No. 2 (Mar., 1955), p. 197-278.

目　录

引　论

我们知道，上同调的方法，尤其是层的理论，正在发挥着越来越大的作用，不仅是在多复变函数论中 (参照 [5])，而且是在经典的代数几何之中 (比如参看 Kodaira-Spencer 关于 Riemann-Roch 定理的工作)。由于这个方法具有纯代数的特征，这让我们觉得它有可能同样适用于抽象代数几何；本文的目的就是要证明这一点。

各章的内容大致如下：

第一章叙述层的一般理论。包含了所有将要使用在后面两章中的那些结果的证明。在 §1 中将介绍层上的各种代数性的操作；我们的陈述与 Cartan ([2], [5]) 十分接近。§2 将考察凝聚模层；它们是解析性凝聚层 (参照 [3], [5]) 的一种推广，并且具有类似的性质。在 §3 中，我们将给出拓扑空间 X 的以层 $\mathscr{F}$ 为系数的上同调群的定义。在后面的应用中， X 是一个代数多样体，带有 Zariski 拓扑，从而不是 Hausdorff 分离的拓扑空间， Leray [10] 和 Cartan [3] 所使用的方法 (建立在“单位分割”和“精细”层的基础上) 不能使用在这里；我们将采用 Čech 的方法，把上同调群 $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})$ 定义为一个极限 (相对于逐渐加细的开覆盖)。另一个困难，也与 X 的不分离性有关，出现在“上同调长正合序列”中 (参照 ¶24 和 25)：我们只在一些特殊情形下建立了这个正合序列，不过这对于我们后面的应用来说是足够的 (参照 ¶24 和 47)。

第二章首先定义什么是代数多样体，这与 Weil ([17], 第 VII 章) 的定义类似，不过我们把它扩展到可约多样体上 (因而与 Weil 的用法不同，我们所说的“多样体”将不局限于不可约的多样体)；我们定义代数多样体的方法是给出它的拓扑 (Zariski 拓扑) 和它的函数芽层 (结构层)。令 $\mathscr{O}_V$ 是代数多样体 V 的结构层，则 V 上的一个代数性凝聚层简单说就是一个凝聚 $\mathscr{O}_V$ 模层；我们将在 §2 中给出若干例子。§3 考察仿射多样体。这里的一些主要结果与 Stein 多样体上的结果很相似 (参照 [3], [5])：若 $\mathscr{F}$ 是仿射多样体 V 上的一个代数性凝聚层，则对任意 $q>0$，均有 $\mathrm{H}^q(V,\mathscr{F})=0$，并且对所有 $x\in V$， $\mathscr{F}_x$ 都可由 $\mathrm{H}^0(V,\mathscr{F})$ 所生成。进而 (§4)， $\mathscr{F}$ 可以完全被 $\mathrm{H}^0(V,\mathscr{F})$ 所确定，这里我们把后者看作是 V 的坐标环上的模。

第三章讨论射影多样体，这里集中了本文最重要的一些结果。我们首先要建立起射影空间 $X=\mathbf{P}^r(K)$ 上的代数性凝聚层 $\mathscr{F}$ 和满足条件 (TF) (¶56) 的分次 S 模之间的一个对应 (S 是指多项式代数 $K[t_0,\dots,t_r]$)；这个对应是一对一的，只要我们约定两个 S 模只要足够高次的齐次分量都相等的话就算是相等的 (更精确地陈述可以在 ¶57, 59 和 65 中找到)。由此出发，任何关于 $\mathscr{F}$ 的问题都可以转化为关于它的伴生 S 模 M 的问题。因此我们将在 §3 给出一套程序，使得从 M 出发可以用代数方法来计算 $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})$，特别地，我们可以借此来考察 $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F}(n))$ 在 n 趋于 $+\infty$ 时的性质 ($\mathscr{F}(n)$ 的定义参看 ¶54)；主要结果的陈述将在 ¶65 和 66 给出。在 §4 中，我们把这些群 $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})$ 与 Cartan-Eilenberg [6] 所引入的函子 Ext_S^q 建立联系；在此基础上，我们将在 §5 中研究这

[0]译注：本译文的术语系统将与 EGA, SGA 中译本保持一致，若干数学记号按照 EGA, SGA 的用法作了调整，与原文不同，请留意。日期：2018.11.8。

些 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}(n))$ 在 n 趋于 $-\infty$ 时的性质，并给出“k 简型”多样体的同调式特征描述。§6 中将讨论射影多样体上取值在代数性凝聚层中的 Euler-Poincaré 示性数的若干基本性质。

此外，我们还要解释一下如何把本文的一般结果应用到各种特殊问题上，尤其是怎样把 [15] 中的“对偶定理”推广到抽象代数几何中，以及 Kodaira-Spencer 关于 Riemann-Roch 定理的部分结果；在这些应用中，¶66, 75 和 76 中的那些定义都发挥着重要的作用。我们还可以证明，如果基域是复数域，则代数性凝聚层的理论本质上与解析性凝聚层的理论是一回事 (参照 [4])。

第一章　层

§1　层理论的基本事实

※1　层的定义

设 X 是一个拓扑空间。X 上的一个 *Abel群层*（或简称层）是由下面一些构件所组成的：

(a) 一个函数 $x \mapsto \mathscr{F}_x$，它把每个点 $x \in X$ 都对应到一个 Abel 群 $\mathscr{F}_x$，
(b) 一个拓扑，定义在这些集合 $\mathscr{F}_x$ 的无交并集 $\mathscr{F}$ 上。

若 f 是 $\mathscr{F}_x$ 中的一个元素，则我们令 $\pi(f) = x$，并且把这个映射 π 称为从 $\mathscr{F}$ 到 X 上的投影；$\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ 中的一个子集，即由满足 $\pi(f) = \pi(g)$ 的二元组 (f, g) 所组成的集合，我们记之为 $\mathscr{F} \oplus \mathscr{F}$。

基于这些定义，我们现在可以陈述 (a) 和 (b) 所需满足的两条公理：

(I) 对任意 $f \in \mathscr{F}$，均可找到 f 的一个邻域 V 和 $\pi(f)$ 的一个邻域 U，使得 π 在 V 上的限制是 V 到 U 上的一个同胚。

（换句话说，π 必须是一个局部同胚）。

(II) 映射 $f \mapsto -f$ 是 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{F}$ 的一个连续映射，并且映射 $(f, g) \mapsto f + g$ 是 $\mathscr{F} \oplus \mathscr{F}$ 到 $\mathscr{F}$ 的一个连续映射。

我们可以观察到，即使 X 是分离的（我们将不假设这个条件成立），$\mathscr{F}$ 也未必是分离的，函数芽层的例子就可以说明这一点 (参照※3)。

层的例子 — G 是一个 Abel 群，对任意 $x \in X$，令 $\mathscr{F}_x = G$，则集合 $\mathscr{F}$ 可以等同于乘积 $X \times G$，我们再给它赋予乘积拓扑，即 X 上的拓扑与 G 上的离散拓扑的乘积，这就得到一个层，称为 G 系数的常值层，通常也记为 G。

※2　层的截面

设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 上的一个层，并设 U 是 X 的一个子集。所谓 $\mathscr{F}$ 在 U 上的截

面，是指这样一个连续映射 $s:U\mapsto \mathscr{F}$，它使得 $\pi\circ s$ 就是 U 到自身的恒同映射。从而对任意 $x\in U$，均有 $s(x)\in\mathscr{F}_x$。我们把 $\mathscr{F}$ 在 U 上的全体截面的集合记为 $\Gamma(U,\mathscr{F})$；公理 (II) 表明 $\Gamma(U,\mathscr{F})$ 是一个 Abel 群。若 $U\subseteq V$，并且 s 是 V 上的一个截面，则 s 在 U 上的限制是 U 上的一个截面；故得一个同态 $\rho_U^V:\Gamma(V,\mathscr{F})\to\Gamma(U,\mathscr{F})$。

若 U 在 X 中是开的，则 $s(U)$ 在 $\mathscr{F}$ 中是开的，并且如果 U 跑遍 X 的一个拓扑基，则 $s(U)$ 也跑遍 $\mathscr{F}$ 的一个拓扑基：这不过是公理 (I) 另一种表述方式。

注意到公理 (I) 有这样一个推论：对任意 $f\in\mathscr{F}_x$，均可找到一个截面 s，定义在 x 的某个邻域上，且满足 $s(x)=f$，进而若有两个截面都具有这个性质，则它们在 x 的一个更小的邻域上是重合的。换句话说，$\mathscr{F}_x$ 就是这些 $\Gamma(U,\mathscr{F})$ 沿着 x 邻域的滤相有序集的归纳极限。

§3 层的构造方法

假设对任意开集 $U\subseteq X$ 都给了一个 Abel 群 $\mathscr{F}[U]$，并且对任意一对开集 $U\subseteq V$，都给了一个同态 $\varphi_U^V:\mathscr{F}[V]\to\mathscr{F}[U]$，且使得传递性条件 $\varphi_U^V\circ\varphi_V^W=\varphi_U^W$ 对于每一组 $U\subseteq V\subseteq W$ 都是成立的。

从这些 $(\mathscr{F}[U],\varphi_U^V)$ 出发就可以定义出一个层 $\mathscr{F}$，[1] 方法如下：

(a) 我们令 $\mathscr{F}_x=\varinjlim\mathscr{F}[U]$（这个归纳极限是沿着 x 的开邻域 U 的滤相有序集取的）。从而若 x 落在开集 U 之中，则有一个典范同态 $\varphi_x^U:\mathscr{F}[U]\to\mathscr{F}_x$。

(b) 设 $t\in\mathscr{F}[U]$，我们用 $t(U)$ 来表示诸 $\varphi_x^U(t)$ 所组成的集合，其中 x 跑遍 U，则有 $t(U)\subseteq\mathscr{F}$，现在我们给 $\mathscr{F}$ 赋予由这些 $t(U)$ 所生成的拓扑。这样一来，元素 $f\in\mathscr{F}_x$ 在 $\mathscr{F}$ 中的一个邻域基 [2] 就是由这样一些集合 $t(U)$ 所组成的，其中 $x\in U$ 且 $\varphi_x^U(t)=f$。

可以立即验证 (a) 和 (b) 中的这些构件满足公理 (I) 和 (II)，换句话说，$\mathscr{F}$ 确实是一个层。我们把它称为由这组 $(\mathscr{F}[U],\varphi_U^V)$ 所定义的层。

若 $t\in\mathscr{F}[U]$，则映射 $x\mapsto\varphi_x^U(t)$ 是 $\mathscr{F}$ 在 U 上的一个截面；故有一个典范同态 $\iota:\mathscr{F}[U]\to\Gamma(U,\mathscr{F})$。

命题 1. – 为了使 $\iota:\mathscr{F}[U]\to\Gamma(U,\mathscr{F})$ 是单的 [3]，必须且只需下面的条件是成立的:

对于一个元素 $t\in\mathscr{F}[U]$，如果可以找到 U 的一个开覆盖 (U_i)，使得对任意 i，均有 $\varphi_{U_i}^U(t)=0$，则有 $t=0$。

[1] 译注：后来把这组 $(\mathscr{F}[U],\varphi_U^V)$ 称为“预层”，把它们做出来的层称为“预层的拼续层”。

[2] 译注：或称“基本邻域组”。

[3] 还记得 (参照 [1]) 所谓一个映射 $f:E\to E'$ 是单的，是指 $f(e_1)=f(e_2)$ 蕴涵 $e_1=e_2$，所谓它是满的，是指 $f(E)=E'$，所谓它是一一的，是指它既是单的又是满的。

若 $t \in \mathscr{F}[U]$ 满足上述条件，则有

$$\varphi_x^U(t) \;=\; \varphi_x^{U_i} \circ \varphi_{U_i}^U(t) \;=\; 0$$

其中 $x \in U_i$，这就意味着 $\iota(t) = 0$。反过来，假设我们有 $\iota(t) = 0$，其中 $t \in \mathscr{F}[U]$，则因为对于 $x \in U$ 有 $\varphi_x^U(t) = 0$，故我们可以找到 x 的一个开邻域 $U(x)$，使得 $\varphi_{U(x)}^U(t) = 0$，这是根据归纳极限的定义。于是这些 $U(x)$ 构成 U 的一个开覆盖，并且满足上述条件。

命题 2. – *设 U 是 X 的一个开集，并假设对任意开集 $V \subseteq U$，$\iota : \mathscr{F}[V] \to \Gamma(V, \mathscr{F})$ 都是单的。则为了使 $\iota : \mathscr{F}[U] \to \Gamma(U, \mathscr{F})$ 是满的 (从而是一一的)，必须且只需下面的条件是成立的:*

对于 U 的任意开覆盖 $\{U_i\}$，和任意一组元素 $t_i \in \mathscr{F}[U_i]$，只要对每一对 (i, j)，均有 $\varphi_{U_i \cap U_j}^{U_i}(t_i) = \varphi_{U_i \cap U_j}^{U_j}(t_j)$，则必可找到 $t \in \mathscr{F}[U]$，使得对任意 i，均有 $\varphi_{U_i}^U(t) = t_i$。

条件是必要的：每个 t_i 都定义了 U_i 上的一个截面 $s_i = \iota(t_i)$，且在 $U_i \cap U_j$ 上我们有 $s_i = s_j$；从而可以找到 U 上的一个截面 s，使得对任意 i，它在 U_i 上都重合于 s_i；若 $\iota : \mathscr{F}[U] \to \Gamma(U, \mathscr{F})$ 是满的，则可以找到 $t \in \mathscr{F}[U]$，使得 $\iota(t) = s$。若我们令 $t'_i = \varphi_{U_i}^U(t)$，则 t'_i 在 U_i 上所定义的截面刚好就是 s_i；故得 $\iota(t_i - t'_i) = 0$，这就表示说 $t_i = t'_i$，因为 ι 已假设是单的。

条件是充分的：若 s 是 $\mathscr{F}$ 在 U 上的一个截面，则可以找到 U 的一个开覆盖 $\{U_i\}$，和一组元素 $t_i \in \mathscr{F}[U_i]$，使得 $\iota(t_i)$ 就等于 s 在 U_i 上的限制；由此可知，元素 $\varphi_{U_i \cap U_j}^{U_i}(t_i)$ 和 $\varphi_{U_i \cap U_j}^{U_j}(t_j)$ 在 $U_i \cap U_j$ 上定义了同一个截面，从而是相等的，这是根据对 ι 所作的假设。若 $t \in \mathscr{F}[U]$ 满足 $\varphi_{U_i}^U(t) = t_i$，则 $\iota(t)$ 在每个 U_i 上都与 s 重合，从而在 U 上重合，证明完毕。

命题 3. – *若 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个 Abel 群层，则由 $(\Gamma(U, \mathscr{F}), \rho_U^V)$ 所定义的层可以典范同构于 $\mathscr{F}$。*

这可由 ¥2 中所说的关于截面的那些性质立得。

命题 3 表明，每一个层都可以用适当的一组 $(\mathscr{F}[U], \varphi_U^V)$ 来定义。注意到不同的组有可能会定义出同一个层 $\mathscr{F}$；然而若我们要求这组 $(\mathscr{F}[U], \varphi_U^V)$ 满足命题 1 和 2 中的那些条件 [4]，则 (在只差一个同构的意义下)，这个组是唯一的；它就是由 $(\Gamma(U, \mathscr{F}), \rho_U^V)$ 所组成的。

例子 — 设 G 是一个 Abel 群，我们取 $\mathscr{F}[U]$ 是 U 上的 G 值函数的集合；再定义 $\varphi_U^V : \mathscr{F}[V] \to \mathscr{F}[U]$ 就是函数的限制。这样我们就得到一组 $(\mathscr{F}[U], \rho_U^V)$，进而得到一个层 $\mathscr{F}$，称为 G 值函数芽层。很容易验证 $(\mathscr{F}[U], \varphi_U^V)$ 满足命题 1 和 2 中的条件；由此可知，我们可以把 $\mathscr{F}$ 在开集 U 上的截面等同于 $\mathscr{F}[U]$ 中的元素。

[4] 译注：这些条件后来就被称为“层的条件”或者“层的公理”。

§4 层的黏合

设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个层，并设 U 是 X 的一个子集，则集合 $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathscr{F}$ 连同 $\mathscr{F}$ 在其上所诱导的拓扑就构成 U 上的一个层，称为 $\mathscr{F}$ 在 U 上的稼入层，且记为 $\mathscr{F}|_U$（甚至也写成 $\mathscr{F}$，只要不会导致误解）。

我们下面来说明，反过来可以从 X 的开覆盖上的一些层出发定义出 X 上的一个层：

命题 4. – *设 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的一个开覆盖，对每个 $i \in I$，设 $\mathscr{F}_i$ 是 U_i 上的一个层；对任意一组 (i,j)，设 θ_{ij} 是 $\mathscr{F}_j|_{U_i\cap U_j}$ 到 $\mathscr{F}_i|_{U_i\cap U_j}$ 的一个同构；假设对任意一组 (i,j,k)，在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 的所有点处均有 $\theta_{ij}\circ\theta_{jk} = \theta_{ik}$。*

则我们有一个层 $\mathscr{F}$，以及对每个 $i \in I$ 从 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 到 $\mathscr{F}_i$ 的一个同构 η_i，使得在 $U_i \cap U_j$ 的所有点处均有 $\theta_{ij} = \eta_i \circ \eta_j^{-1}$。进而，$\mathscr{F}$ 和这些 η_i 被上述条件所唯一确定，在只差同构的意义下。

$\{\mathscr{F}, \eta_i\}$ 的唯一性是显然的；为了证明存在性，我们可以设法把 $\mathscr{F}$ 定义为这些 $\mathscr{F}_i$ 的和空间的某个商空间。我们将主要采用 §3 中的作法：对于 X 中的一个开集 U，设 $\mathscr{F}[U]$ 是这样一个群，其中的每个元素就是这样一组 $\{s_k\}_{k\in I}$，其中 $s_k \in \Gamma(U\cap U_k, \mathscr{F}_k)$，并且在 $U\cap U_j\cap U_k$ 上有 $s_k = \theta_{kj}(s_j)$；若 $U \subseteq V$，则可以用明显的方法来定义 φ_U^V。则由这组 $(\mathscr{F}[U], \varphi_U^V)$ 所定义的层就是我们所要的层 $\mathscr{F}$；进而，若 $U \subseteq U_i$，则把一组 $\{s_k\} \in \mathscr{F}[U]$ 对应到元素 $s_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{F}_i)$ 的映射就是一个从 $\mathscr{F}[U]$ 到 $\Gamma(U, \mathscr{F}_i)$ 同构，这是根据传递性条件；于是我们得到一个同构 $\eta_i : \mathscr{F}|_{U_i} \to \mathscr{F}_i$，它显然就满足上面的条件。

我们把层 $\mathscr{F}$ 称为由这些层 $\mathscr{F}_i$ 借助同构 θ_{ij} 黏合而成的。

§5 层的延拓和限制

设 X 是一个拓扑空间，Y 是 X 的一个闭子空间，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一个层。所谓 $\mathscr{F}$ 集中在 Y 上，或者在 Y 之外等于 0，是指对任意 $x \in X \smallsetminus Y$，均有 $\mathscr{F}_x = 0$。

命题 5. – *若层 $\mathscr{F}$ 集中在 Y 上，则同态*

$$\rho_Y^X \ : \ \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathscr{F}|_Y)$$

是一一的。

若 $\mathscr{F}$ 在 X 上的一个截面在 Y 上等于 0，则它处处等于 0，因为对于 $x \notin Y$ 总有 $\mathscr{F}_x = 0$，这就证明了 ρ_Y^X 是单的。反过来，设 s 是 $\mathscr{F}|_Y$ 在 Y 上的一个截面，则我们可以把 s 延拓到 X 上，即在 $x \notin Y$ 处令 $s(x) = 0$；映射 $x \mapsto s(x)$ 在 $X \smallsetminus Y$ 上显然是连续的；另一方面，若 $x \in Y$，则可以找到 $\mathscr{F}$ 在 x 的某个邻域 U 上的一个截面 s'，使得 $s'(x) = s(x)$；由于 s 在 Y 上是连续的，这是根据前提条件，故可找到 x 的一个包含在 U 中的邻域 V，使得对任意 $y \in V \cap Y$，均有 $s'(y) = s(y)$；由于当 $y \notin Y$ 时 $\mathscr{F}_y = 0$，故对于 $y \in V \smallsetminus (V\cap Y)$，我们也有 $s'(y) = s(y)$；从

而 s 和 s' 在 V 上是重合的，这就证明了 s 在 Y 的邻域上是连续的，从而它是处处连续的。因此 ρ_Y^X 是满的，这就完成了证明。

现在我们来证明，层 $\mathscr{F}|_Y$ 可以唯一地确定层 $\mathscr{F}$ ：

命题 6. – 设 Y 是拓扑空间 X 的一个闭子空间，$\mathscr{G}$ 是 Y 上的一个层。对于 $x \in Y$，令 $\mathscr{F}_x = \mathscr{G}_x$，且对于 $x \notin Y$，令 $\mathscr{F}_x = 0$，并设 $\mathscr{F}$ 是这些 $\mathscr{F}_x$ 的无交并集。则可以给 $\mathscr{F}$ 赋予一个定义在 X 上的层结构，使得 $\mathscr{F}|_Y = \mathscr{G}$，并且这个层结构是唯一的。

设 U 是 X 的一个开集；若 s 是 $\mathscr{G}$ 在 $U \cap Y$ 上的一个截面，则可以把 s 在 $U \smallsetminus (U \cap Y)$ 上进行零延拓；于是当 s 跑遍 $\Gamma(U \cap Y, \mathscr{G})$ 时，我们就得到一个从 U 到 $\mathscr{F}$ 的映射群 $\mathscr{F}[U]$。命题 5 表明，若给 $\mathscr{F}$ 赋予这样的层结构，使之满足 $\mathscr{F}|_Y = \mathscr{G}$，则有 $\mathscr{F}[U] = \Gamma(U, \mathscr{F})$，这就证明了层结构的唯一性。而它的存在性也可以通过 §3 中的作法来得到，只要把该方法应用到 $\mathscr{F}[U]$ 和限制同态 $\varphi_U^V : \mathscr{F}[V] \to \mathscr{F}[U]$ 上。

我们把层 $\mathscr{F}$ 称为由层 $\mathscr{G}$ 通过在 Y 之外进行零延拓而得到的，记作 $\mathscr{G}^Y$，甚至简记为 $\mathscr{G}$，只要不会导致误解。

§6　环层和模层

§1 中所定义的层只相当于 *Abel* 群层。易见类似的定义方法也适用于任意的代数结构（甚至可以定义“集合层”，此时 $\mathscr{F}_x$ 上没有任何代数结构，问题只涉及公理 (I)）。在下文中，我们将主要讨论环层和模层：

环层 $\mathscr{A}$ 是指这样一个 Abel 群层 $\mathscr{A}_x$，$x \in X$，其中每个 $\mathscr{A}_x$ 都带有一个环结构，并且映射 $(f, g) \mapsto f.g$ 是 $\mathscr{A} + \mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的一个连续映射（记号与 §1 相同）。我们总假设每个 $\mathscr{A}_x$ 都具有单位元，且随着 x 连续变化。

若 $\mathscr{A}$ 是一个满足上述条件的环层，则 $\Gamma(U, \mathscr{A})$ 是一个含单位元的环，并且对于 $U \subseteq V$，$\rho_U^V : \Gamma(V, \mathscr{A}) \to \Gamma(U, \mathscr{A})$ 是一个典式同态。反过来，若给了一组含单位元的环 $\mathscr{A}[U]$，及一组典式同态 $\varphi_U^V : \mathscr{A}[V] \to \mathscr{A}[U]$，且满足 $\varphi_U^V \circ \varphi_V^W = \varphi_U^W$，则由这组 $(\mathscr{A}[U], \varphi_U^V)$ 所定义的层 $\mathscr{A}$ 就是一个环层。举例来说，若 G 是一个含单位元的环，则 G 值函数芽层（定义见 §3）是一个环层。

设 $\mathscr{A}$ 是一个环层。所谓一个层 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{A}$ 模层，是指每个 $\mathscr{F}_x$ 都带有一个保单位元的 $\mathscr{A}_x$ 模结构（为明确起见，考虑左模），且随着 x “连续”地变化，意思是说：若 $\mathscr{A} + \mathscr{F}$ 是 $\mathscr{A} \times \mathscr{F}$ 的这样一个子集，由全体满足 $\pi(a) = \pi(f)$ 的二元组 (a, f) 所组成，则映射 $(a, f) \mapsto a.f$ 是 $\mathscr{A} + \mathscr{F}$ 到 $\mathscr{F}$ 的一个连续映射。

若 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{A}$ 模层，则 $\Gamma(U, \mathscr{F})$ 是 $\Gamma(U, \mathscr{A})$ 上的一个保单位元的模。反过来，假设 $\mathscr{A}$ 是由一组 $(\mathscr{A}[U], \varphi_U^V)$ 所定义的，并设 $\mathscr{F}$ 是由这样一组 $(\mathscr{F}[U], \psi_U^V)$ 所定义的层，其中每一个 $\mathscr{F}[U]$ 都是一个保单位元的 $\mathscr{A}[U]$ 模，并且对于 $a \in \mathscr{A}[V]$, $f \in \mathscr{F}[V]$，总有 $\psi_U^V(a.f) = \varphi_U^V(a).\psi_U^V(f)$，则 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{A}$ 模层。

任何Abel群层都可以看作是一个$\mathbb{Z}$模层，这里的$\mathbb{Z}$是指同构于整数环的常值层。因此我们在下面可以限于考虑模层。

§7 子层和商层

设$\mathscr{A}$是一个环层，$\mathscr{F}$是一个$\mathscr{A}$模层。对任意$x \in X$，设$\mathscr{G}_x$是$\mathscr{F}_x$的一个子集。所谓$\mathscr{G} = \bigcup \mathscr{G}_x$是$\mathscr{F}$的一个子层，是指：

(a) 对任意$x \in X$，$\mathscr{G}_x$都是$\mathscr{F}_x$的一个$\mathscr{A}_x$子模，
(b) $\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的一个开子集。

条件(b)也可以表达成下面的形式：

(b′) 若x是X的一个点，并且s是$\mathscr{F}$在x的某个邻域上的一个截面，且满足$s(x) \in \mathscr{G}_x$，则对任意充分接近x的y，均有$s(y) \in \mathscr{G}_y$。

易见，若这些条件得到满足，则$\mathscr{G}$是一个$\mathscr{A}$模层。

设$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的一个子层，并且对任意$x \in X$，令$\mathscr{H}_x = \mathscr{F}_x/\mathscr{G}_x$。我们给$\mathscr{H} = \bigcup \mathscr{H}_x$赋予$\mathscr{F}$的拓扑下的商拓扑，则容易看出，这样就可以得到一个$\mathscr{A}$模层，称为$\mathscr{F}$除以$\mathscr{G}$后的商层，且记作$\mathscr{F}/\mathscr{G}$。我们也可以使用§3中的作法来给出一个另外的定义：即若U是X的一个开集，则令$H[U] = \Gamma(U,\mathscr{F})/\Gamma(U,\mathscr{G})$，并且$\varphi_U^V$就是通过对$\rho_U^V : \Gamma(V,\mathscr{F}) \to \Gamma(U,\mathscr{F})$取商而得到的同态；于是这组$(\mathscr{H}[U], \varphi_U^V)$所定义的层刚好就是$\mathscr{H}$。

$\mathscr{H}$的上述任何一个定义都表明，若s是$\mathscr{H}$在x的邻域上的一个截面，则可以找到$\mathscr{F}$在x的邻域上的一个截面t，使得在任意充分接近x的y处，$t(y) \bmod \mathscr{G}_y$的等价类都等于$s(y)$。我们知道，这件事在整体上一般是不对的：即若U是X的一个开集，则我们仅有正合序列：

$$0 \longrightarrow \Gamma(U,\mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(U,\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(U,\mathscr{H}) ,$$

同态$\Gamma(U,\mathscr{F}) \to \Gamma(U,\mathscr{H})$一般来说不是满的(参照§24)。

§8 层的同态

设$\mathscr{A}$是一个环层，$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$是两个$\mathscr{A}$模层。则$\mathscr{F}$到$\mathscr{G}$的一个$\mathscr{A}$同态(即$\mathscr{A}$线性同态，或简称同态)是指对任意$x \in X$，均给出了一个$\mathscr{A}_x$同态$\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$，且使得由这些$\varphi_x$所定义的同态$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是连续的。这个条件也可以表达成这样：若$s$是$\mathscr{F}$在$U$上的一个截面，则$x \mapsto \varphi_x(s(x))$是$\mathscr{G}$在$U$上的一个截面(我们将把它记为$\varphi(s)$，或者$\varphi \circ s$)。举例来说，若$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的一个子层，则含入$\mathscr{G} \to \mathscr{F}$和投影$\mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{G}$都是同态。

命题 7. – 设φ是$\mathscr{F}$到$\mathscr{G}$的一个同态。对任意$x \in X$，设$\mathscr{N}_x$是φ_x的核，并设$\mathscr{I}_x$是φ_x的像。则$\mathscr{N} = \bigcup \mathscr{N}_x$是$\mathscr{F}$的一个子层，$\mathscr{I} = \bigcup \mathscr{I}_x$是$\mathscr{G}$的一个子层，并且$\varphi$定义了$\mathscr{F}/\mathscr{N}$到$\mathscr{I}$的一个同构。

因为φ_x是一个$\mathscr{A}_x$同态，所以$\mathscr{N}_x$和$\mathscr{I}_x$分别是$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$的子模，并且φ_x定义了$\mathscr{F}_x/\mathscr{N}_x$到$\mathscr{I}_x$的一个同构。另一方面，若$s$是$\mathscr{F}$的一个局部截面，且满足$s(x)\in\mathscr{N}_x$，则有$\varphi\circ s(x)=0$，因而对于充分接近$x$的$y$，我们都有$\varphi\circ s(y)=0$，故得$s(y)\in\mathscr{N}_y$，这就证明了$\mathscr{N}$是$\mathscr{F}$的一个子层。若$t$是$\mathscr{G}$的一个局部截面，且满足$t(x)\in\mathscr{I}_x$，则可以找到$\mathscr{G}$的一个局部截面$s$，使得$\varphi\circ s(x)=t(x)$，从而在$x$的邻域上有$\varphi\circ s=t$，这就证明了$\mathscr{I}$是$\mathscr{G}$的一个子层，且同构于$\mathscr{F}/\mathscr{N}$。

我们把层$\mathscr{N}$称为φ的核，且记作$\mathrm{Ker}(\varphi)$；把层$\mathscr{I}$称为φ的像，且记作$\mathrm{Im}(\varphi)$；把层$\mathscr{G}/\mathscr{I}$称为φ的余核，且记作$\mathrm{Coker}(\varphi)$。所谓一个同态φ是单的，是指每个φ_x都是单的，这也等价于$\mathrm{Ker}(\varphi)=0$；所谓它是满的，是指每个φ_x都是满的，这也等价于$\mathrm{Coker}(\varphi)=0$；所谓它是一一的，是指它既是单的又是满的，此时命题7表明，它是$\mathscr{F}$到$\mathscr{G}$的一个同构，并且φ^{-1}也是一个同态。所有关于模同态的那些定义都可以搬到模层同态上；比如说，所谓一个同态序列是正合的，是指每一个同态的像都重合于下一个同态的核。若$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是一个同态，则序列

$$0\longrightarrow\mathrm{Ker}(\varphi)\longrightarrow\mathscr{F}\longrightarrow\mathrm{Im}(\varphi)\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow\mathrm{Im}(\varphi)\longrightarrow\mathscr{G}\longrightarrow\mathrm{Coker}(\varphi)\longrightarrow 0$$

都是正合序列。

若φ是$\mathscr{F}$到$\mathscr{G}$的一个同态，则映射$s\mapsto\varphi\circ s$是一个从$\Gamma(U,\mathscr{F})$到$\Gamma(U,\mathscr{G})$的$\Gamma(U,\mathscr{A})$同态。反过来，假设$\mathscr{A},\mathscr{F},\mathscr{G}$分别是由$(\mathscr{A}[U],\varphi_U^V)$, $(\mathscr{F}[U],\psi_U^V)$, $(\mathscr{G}[U],\chi_U^V)$所定义的（按照¶6的方法），并且对任意开集$U\subseteq X$，都给了一个$\mathscr{A}[U]$同态$\varphi_U:\mathscr{F}[U]\to\mathscr{G}[U]$，满足$\chi_U^V\circ\varphi_V=\varphi_U\circ\psi_U^V$，则通过取归纳极限，这些$\varphi_U$可以定义出一个同态$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$。

¶9 层的直和

设$\mathscr{A}$是一个环层，$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$是两个$\mathscr{A}$模层；对任意$x\in X$，我们都可以做出$\mathscr{F}_x$和$\mathscr{G}_x$作为模的直和$\mathscr{F}_x+\mathscr{G}_x$，则$\mathscr{F}_x+\mathscr{G}_x$中的一个元素就是一个二元组$(f,g)$，其中$f\in\mathscr{F}_x$且$g\in\mathscr{G}_x$。设$\mathscr{H}$就是这些$\mathscr{F}_x+\mathscr{G}_x$的无交并集，其中$x$跑遍$X$，则可以把$\mathscr{H}$等同于$\mathscr{F}\times\mathscr{G}$的这样一个子集，由所有满足$\pi(f)=\pi(g)$的二元组$(f,g)$所组成。若我们给$\mathscr{H}$赋予由$\mathscr{F}\times\mathscr{G}$所诱导的拓扑，则很容易验证$\mathscr{H}$是一个$\mathscr{A}$模层；称为$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$的直和，并且记作$\mathscr{F}+\mathscr{G}$。$\mathscr{F}+\mathscr{G}$在开集$U\subseteq X$上的每一个截面都具有$x\mapsto(s(x),t(x))$的形状，其中$s$和$t$分别是$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$在$U$上的截面。换个说法就是，$\Gamma(U,\mathscr{F}+\mathscr{G})$同构于直和$\Gamma(U,\mathscr{F})+\Gamma(U,\mathscr{G})$。

这个直和的定义可以归纳地扩展到有限个$\mathscr{A}$模层上。特别地，我们将把p个同构于$\mathscr{F}$的层的直和层记作$\mathscr{F}^p$。

¶10 层的张量积

设$\mathscr{A}$是一个环层，$\mathscr{F}$是一个$\mathscr{A}$右模层，$\mathscr{G}$是一个$\mathscr{A}$左模层。对任意$x\in$

X，令 $\mathscr{H}_x = \mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{A}_x} \mathscr{G}_x$（比如参照[6], 第II章§2）；设 $\mathscr{H}$ 是这些 $\mathscr{H}_x$ 的无交并集。

命题8. – 在集合 $\mathscr{H}$ 上恰好有唯一一个层结构满足下面的条件：若 s 和 t 分别是 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 在开集 U 上的截面，则映射 $x \mapsto s(x) \otimes t(x) \in \mathscr{H}_x$ 是 $\mathscr{H}$ 在 U 上的一个截面。

我们把这样定义出来的层 $\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 在 $\mathscr{A}$ 上的张量积，且记之为 $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}$；若这些 $\mathscr{A}_x$ 都是交换的，则它是一个 $\mathscr{A}$ 模层。

若 $\mathscr{H}$ 上带有一个满足所述条件的层结构，并且 s_i 和 t_i 分别是 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 在开集 $U \subseteq X$ 上的截面，则映射 $x \mapsto \sum s_i(x) \otimes t_i(x)$ 是 $\mathscr{H}$ 在 U 上的一个截面。现在任何 $h \in \mathscr{H}_x$ 都可以写成 $h = \sum f_i \otimes g_i$ 的形状，其中 $f_i \in \mathscr{F}_x, g_i \in \mathscr{G}_x$，从而也可以写成 $\sum s_i(x) \otimes t_i(x)$ 的形状，其中 s_i 和 t_i 都是定义在 x 的某个邻域 U 上的截面；由此可知，$\mathscr{H}$ 的任何截面在局部上都必然等于上述形状的一个截面，这就证明了 $\mathscr{H}$ 上的层结构的唯一性。

现在证明其存在性。我们可以假设 $\mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathscr{G}$ 分别是由 $(\mathscr{A}[U], \varphi_U^V)$, $(\mathscr{F}[U], \psi_U^V)$, $(\mathscr{G}[U], \chi_U^V)$ 所定义的（按照§6的方法）。现在令 $\mathscr{H}[U] = \mathscr{F}[U] \otimes_{\mathscr{A}[U]} \mathscr{G}[U]$，则这些同态 ψ_U^V 和 χ_U^V 通过取张量积定义了同态 $\eta_U^V : \mathscr{H}[V] \to \mathscr{H}[U]$；进而，我们有 $\lim_{x\in U} \mathscr{H}[U] = \lim_{x\in U} \mathscr{F}[U] \otimes_{\mathscr{A}_x} \lim_{x\in U} \mathscr{G}[U] = \mathscr{H}_x$（根据张量积与归纳极限的交换性，比如参照[6], 第VI章, 习题18）。从而由这些 $(\mathscr{H}[U], \eta_U^V)$ 所定义的层可以等同于 $\mathscr{H}$，并且 $\mathscr{H}$ 由此获得了一个层结构，显然满足所述条件。最后，若这些 $\mathscr{A}_x$ 都是交换的，则可以假设这些 $\mathscr{A}[U]$ 也都是如此（只需取 $\mathscr{A}[U]$ 是环 $\Gamma(U, \mathscr{A})$），从而 $\mathscr{H}[U]$ 是一个 $\mathscr{A}[U]$ 模，$\mathscr{H}$ 是一个 $\mathscr{A}$ 模层。

现在设 φ 是 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{F}'$ 的一个 $\mathscr{A}$ 同态，ψ 是 $\mathscr{G}$ 到 $\mathscr{G}'$ 的一个 $\mathscr{A}$ 同态，则 $\varphi_x \otimes \psi_x$ 是一个同态（一般来说是Abel群同态，而当 $\mathscr{A}_x$ 交换时，则是 $\mathscr{A}_x$ 模同态），并且 $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}$ 的定义表明，这组 $\varphi_x \otimes \psi_x$ 是 $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}$ 到 $\mathscr{F}' \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}'$ 的一个同态；我们把这个同态记作 $\varphi \otimes \psi$；若 ψ 是恒同映射，则我们用记号 φ 取代 $\varphi \otimes 1$。

所有关于两个模的张量积的常规性质都可以搬到两个模层的张量积上。举例来说，任何正合序列

$$\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

都可以产生一个正合序列：

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}' \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}'' \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G} \longrightarrow 0 \quad 。$$

我们有典范同构：

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} (\mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_2) \cong \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}_1 + \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}_2 , \qquad \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{A} \cong \mathscr{F} \quad 。$$

并且（为了简化记号，假设 $\mathscr{A}_x$ 都是交换的）：

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G} \cong \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{F} , \qquad \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} (\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{K}) \cong (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{K} \quad 。$$

¶ 11 两个层的同态芽层

设 $\mathscr{A}$ 是一个环层，$\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是两个 $\mathscr{A}$ 模层。若 U 是 X 的一个开集，则我们设 $\mathscr{H}[U]$ 是 $\mathscr{F}|_U$ 到 $\mathscr{G}|_U$ 的同态群（我们把"$\mathscr{F}|_U$ 到 $\mathscr{G}|_U$ 的同态"也称为"$\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的定义在 U 上的同态"）。同态的限制运算定义了 $\varphi_U^V : \mathscr{H}[V] \to \mathscr{H}[U]$；我们把这组 $(\mathscr{H}[U], \varphi_U^V)$ 所定义的层称为 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的同态芽层，且记为 $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$。若这些 $\mathscr{A}_x$ 都是交换的，则 $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ 是一个 $\mathscr{A}$ 模层。

$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x$ 中的一个元素，作为 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的一个定义在 x 的某个邻域上的同态芽，唯一地定义了一个从 $\mathscr{F}_x$ 到 $\mathscr{G}_x$ 的 $\mathscr{A}_x$ 同态；故有一个典范同态

$$\rho : \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x) \ 。$$

然而，与到目前为止我们遇到的那些运算不同，同态 ρ 一般来说不是一一的；我们将在 ¶ 14 中给出一个使之成为一一映射的充分条件。

若 $\varphi : \mathscr{F}' \to \mathscr{F}$ 和 $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$ 是两个同态，则我们可以用明显的方法定义出一个同态

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\varphi, \psi) : \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}', \mathscr{G}') \ 。$$

任何正合序列 $0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}' \to \mathscr{G}''$ 都可以引出一个正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}') \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}'') \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \ 。$$

我们还有典范同构：$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}, \mathscr{G}) \cong \mathscr{G}$，

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_2) \cong \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}_1) + \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}_2) \ ,$$

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2, \mathscr{G}) \cong \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}_1, \mathscr{G}) + \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}_2, \mathscr{G}) \ 。$$

§ 2 凝聚模层

在本节中，X 表示一个拓扑空间，$\mathscr{A}$ 表示 X 上的一个环层。假设所有 $\mathscr{A}_x$ $(x \in X)$ 都是交换的，并且具有一个单位元，随着 x 连续变化。直到 ¶ 16，我们考虑的层都是 $\mathscr{A}$ 模层，并且所有同态都是 $\mathscr{A}$ 同态。

¶ 12 一些定义

设 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{A}$ 模层，并设 $s_1, \ldots, s_p$ 是 $\mathscr{F}$ 在开集 $U \subseteq X$ 上的一组截面。若我们把 $\mathscr{A}_x$ 中的一组元素 $f_1, \ldots, f_p$ 对应到 $\mathscr{F}_x$ 中的元素 $\sum_{i=1}^{p} f_i.s_i(x)$，则可以得到一个同态 $\varphi : \mathscr{A}^p \to \mathscr{F}$，定义在开集 U 上（更准确地说，φ 是 $\mathscr{A}^p|_U$ 到 $\mathscr{F}|_U$ 的一个同态，这是在 ¶ 4 的记号下）。同态 φ 的核 $\mathscr{R}(s_1, \ldots, s_p)$ 是 $\mathscr{A}^p$ 的一个子层，称为这

些 s_i 之间的关系层；φ 的像就是这些 s_i 在 $\mathscr{F}$ 中所生成的子层。反过来，任何一个同态 $\varphi: \mathscr{A}^p \to \mathscr{F}$ 都定义了 $\mathscr{F}$ 的一组截面 $s_1, \ldots, s_p$，即通过下面的公式：

$$s_1(x) \;=\; \varphi_x(1, 0, \ldots, 0) \;, \quad \ldots \quad , \; s_p(x) \;=\; \varphi_x(0, \ldots, 0, 1) \;。$$

定义 1. – 所谓一个 $\mathscr{A}$ 模层 $\mathscr{F}$ 是有限型的，是指它在局部上可由有限个截面所生成。

换句话说，对任意点 $x \in X$，均可找到一个包含 x 的开集 U，和 $\mathscr{F}$ 在 U 上的有限个截面 $s_1, \ldots, s_p$，使得对任意 $y \in U$，$\mathscr{F}_y$ 中的任何元素都可以写成这些 $s_i(y)$ 的一个 $\mathscr{A}_y$ 系数的线性组合。根据上面所述，这也相当于说，$\mathscr{F}$ 在 U 上的限制可以同构于某个层 $\mathscr{A}^p$ 的商层。

命题 1. – 设 $\mathscr{F}$ 是一个有限型层。若 $s_1, \ldots, s_p$ 是 $\mathscr{F}$ 的一组截面，定义在点 $x \in X$ 的某个邻域上，并可生成 $\mathscr{F}_x$，则对任意充分接近 x 的 y，它们也能生成 $\mathscr{F}_y$。

因为 $\mathscr{F}$ 是有限型的，所以我们能 $\mathscr{F}$ 在 x 的邻域上的有限个截面，设为 $t_1, \ldots, t_q$，使得对于充分接近 x 的 y，它们都可以生成 $\mathscr{F}_y$。而因为这些 $s_j(x)$ 也可以生成 $\mathscr{F}_x$，所以我们能够在 x 的邻域上找到一组截面 f_{ij}，使得 $t_i(x) = \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x).s_j(x)$；因而对于充分接近 x 的 y，我们有：

$$t_i(y) \;=\; \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(y).s_j(y) \;\;,$$

这就表示说，这些 $s_j(y)$ 也可以生成 $\mathscr{F}_y$，证明完毕。

定义 2. – 所谓一个 $\mathscr{A}$ 模层 $\mathscr{F}$ 是凝聚的，是指:
(a) $\mathscr{F}$ 是有限型的，
(b) 若 $s_1, \ldots, s_p$ 是 $\mathscr{F}$ 在开集 $U \subseteq X$ 上的一组截面，则这些 s_i 之间的关系层是一个有限型层（在开集 U 上）。

注意到定义 1 和 2 都具有局部化的特征。

命题 2. – 在局部上，任何凝聚层都同构于一个同态 $\varphi: \mathscr{A}^q \to \mathscr{A}^p$ 的余核。

这可由上述定义以及定义 1 之前的注解立得。

命题 3. – 凝聚层的有限型子层都是凝聚层。

事实上，若一个层 $\mathscr{F}$ 满足定义 2 中的条件 (b)，则易见 $\mathscr{F}$ 的所有子层也满足此条件。

§13 凝聚层的主要性质

定理 1. – 设 $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$ 是一个同态的正合序列。若这三个层 $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}$ 中有两个是凝聚的，则第三个也是如此。

假设$\mathscr{G}$和$\mathscr{H}$是凝聚的。从而在局部上我们有一个满同态$\gamma : \mathscr{A}^p \to \mathscr{G}$；设$\mathscr{I}$是$\beta \circ \gamma$的核；因为$\mathscr{H}$是凝聚的，所以$\mathscr{I}$是一个有限型层(条件(b))；从而$\gamma(\mathscr{I})$是一个有限型层，因而是凝聚的，这是根据命题3；由于α是$\mathscr{F}$到$\gamma(\mathscr{I})$的同构，故由此得知$\mathscr{F}$是凝聚的。

假设$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$是凝聚的。因为$\mathscr{G}$是有限型的，所以$\mathscr{H}$也是有限型的，只消再来证明$\mathscr{H}$满足定义2中的条件(b)。设$s_1, \ldots, s_p$是$\mathscr{H}$在点$x \in X$的邻域上的有限个截面。问题是局部性的，故可假设我们能找到$\mathscr{G}$的一组截面$s'_1, \ldots, s'_p$，使得$s_i = \beta(s'_i)$。另一方面，设$n_1, \ldots, n_q$是$\mathscr{F}$在x的邻域上的有限个截面，且对于充分接近x的y，它们都可以生成$\mathscr{F}_y$。为了使$\mathscr{A}_y$中的一组元素$f_1, \ldots, f_p$落在$\mathscr{R}(s_1, \ldots, s_p)_y$中，必须且只需能找到$g_1, \ldots, g_q \in \mathscr{A}_y$，使得在$y$处

$$\sum_{i=1}^{p} f_i . s'_i \ = \ \sum_{j=1}^{q} g_j . \alpha(n_j) \quad 。$$

现在这些s'_i和$\alpha(n_j)$之间的关系层是有限型的，因为$\mathscr{G}$是凝聚的。从而层$\mathscr{R}(s_1, \ldots, s_p)$，作为上述关系层在$\mathscr{A}^{p+q}$到$\mathscr{A}^p$上的典范投影下的像，也是有限型的，这就证明了$\mathscr{H}$是凝聚的。

假设$\mathscr{F}$和$\mathscr{H}$是凝聚的。由于问题是局部性的，故可假设$\mathscr{F}$（切转：$\mathscr{H}$）可由有限个截面$n_1, \ldots, n_q$（切转：$s_1, \ldots, s_p$）所生成；进而可以假设我们能找到$\mathscr{G}$的一组截面s'_i，使得$s_i = \beta(s'_i)$。此时易见这些截面s'_i和$\alpha(n_j)$可以生成$\mathscr{G}$，这就证明了$\mathscr{G}$是一个有限型层。现在设$t_1, \ldots, t_r$是$\mathscr{G}$在点x的邻域上的有限个截面，则因为$\mathscr{H}$是凝聚的，故可找到$\mathscr{A}^r$的一组定义在x的邻域上的截面f^i_j $(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s)$，它们可以生成这些$\beta(t_i)$之间的关系层。令$u_j = \sum_{i=1}^{r} f^i_j . t_i$；因为$\sum_{i=1}^{r} f^i_j . \beta(t_i) = 0$，所以这些$u_j$都包含在$\alpha(\mathscr{F})$之中，且由于$\mathscr{F}$是凝聚的，故知这些$u_j$之间的关系层在$x$的邻域上可由有限个截面所生成，设为$g^i_k$ $(1 \leqslant j \leqslant s, 1 \leqslant k \leqslant t)$。我们指出，这些$\sum_{i=1}^{r} g^j_k . f^i_j$在$x$的邻域上就可以生成层$\mathscr{R}(t_1, \ldots, t_r)$。事实上，若在$y$处有$\sum_{i=1}^{r} f_i . t_i = 0$，其中$f_i \in \mathscr{A}_y$，则有$\sum_{i=1}^{r} f_i . \beta(t_i) = 0$，于是可以找到$g_j \in \mathscr{A}_y$，使得$f_i = \sum_{j=1}^{s} g_j . f^i_j$；把$\sum_{i=1}^{r} f_i . t_i = 0$展开，我们得到$\sum_{j=1}^{s} g_j . u_j = 0$，故知这些$g_j$都是$g^j_k$的线性组合，这就证明了上述事项。因此$\mathscr{G}$满足条件(b)，这就完成了证明。

推论 — *有限个凝聚层的直和还是一个凝聚层。*

定理 2. – *设φ是凝聚层$\mathscr{F}$到凝聚层$\mathscr{G}$的一个同态。则φ的核、余核、像都是凝聚层。*

因为$\mathscr{F}$是凝聚的，所以$\mathrm{Im}(\varphi)$是有限型的，从而是凝聚的，这是根据命题3。把定理1应用到正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0$$

上，则我们看到 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 和 $\mathrm{Coker}(\varphi)$ 都是凝聚的。

推论 — *设 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是凝聚层 $\mathscr{H}$ 的两个凝聚子层。则层 $\mathscr{F}+\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ 都是凝聚的。*

对于 $\mathscr{F}+\mathscr{G}$，这是缘自命题3；至于 $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$，它就是 $\mathscr{F}\to\mathscr{H}/\mathscr{G}$ 的核。

§14　凝聚层上的一些运算

我们刚刚看到，有限个凝聚层的直和仍然是凝聚层。现在我们要证明，类似的结果对于函子 $\otimes$ 和 Hom 也成立。

命题 4. – *若 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是两个凝聚层，则 $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ 也是凝聚层。*

根据命题2，$\mathscr{F}$ 在局部上同构于某个同态 $\varphi:\mathscr{A}^q\to\mathscr{A}^p$ 的余核；从而 $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ 在局部上同构于 $\varphi:\mathscr{A}^q\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}\to\mathscr{A}^p\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ 的余核。然而 $\mathscr{A}^q\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{A}^p\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ 分别同构于 $\mathscr{G}^q$ 和 $\mathscr{G}^p$，它们都是凝聚的 (定理1的推论)。从而 $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ 是凝聚的 (定理2)。

命题 5. – *设 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是两个层，其中 $\mathscr{F}$ 是凝聚的。则对任意 $x\in X$，$\mathscr{A}_x$ 模 $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})_x$ 都同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x)$。*

更确切地说，我们要证明 §11 中所定义的同态

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x)$$

是一一的。首先设 $\psi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是一个定义在 x 的某邻域上的同态，并且在 $\mathscr{F}_x$ 上是0，则由于 $\mathscr{F}$ 是有限型的，故可立即推出 ψ 在 x 的邻域上是0，这就证明了 ρ 是单的。下面证明 ρ 是满的，换句话说，若 φ 是 $\mathscr{F}_x$ 到 $\mathscr{G}_x$ 的一个 $\mathscr{A}_x$ 同态，则可以找到一个定义在 x 的某邻域上的同态 $\psi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$，使得 $\psi_x=\varphi$。设 $m_1,\dots,m_p$ 是 $\mathscr{F}$ 在 x 的邻域上的有限个截面，且对任意充分接近 x 的 y，它们都可以生成 $\mathscr{F}_y$，再设 f^i_j $(1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q)$ 是 $\mathscr{A}^p$ 在 x 的邻域上的一组截面，且可以生成 $\mathscr{R}(m_1,\dots,m_p)$。则可以找到 $\mathscr{G}$ 的一组局部截面，设为 $n_1,\dots,n_p$，使得 $n_i(x)=\varphi(m_i(x))$。令 $p_j=\sum_{i=1}^{p} f^i_j.n_i,\ 1\leqslant j\leqslant q$，则这些 p_j 作为 $\mathscr{G}$ 的局部截面在 x 处是0，从而在 x 的某个邻域 U 中的所有点处都是0。因此，对于 $y\in U$，公式 $\sum f_i.m_i(y)=0$ (其中 $f_i\in\mathscr{A}_y$) 蕴涵着 $\sum f_i.n_i(y)=0$；从而对任意元素 $m=\sum f_i.m_i(y)\in\mathscr{F}_y$，我们都可以令：

$$\psi_y(m)=\sum_{i=1}^{p} f_i.n_i(y)\in\mathscr{G}_y\ ,$$

因为这个公式可以唯一地定义出 $\psi_y(m)$。于是这组 ψ_y $(y\in U)$ 就给出一个同态 $\psi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$，定义在 U 上，且使得 $\psi_x=\varphi$，这就完成了证明。

命题 6. – 若 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是两个凝聚层，则 $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ 也是凝聚层。

问题是局部性的，故根据命题 2，可以假设我们有一个正合序列 $\mathscr{A}^q \to \mathscr{A}^p \to \mathscr{F} \to 0$。于是由上一命题知，序列

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}^p,\mathscr{G}) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}^q,\mathscr{G})$$

是正合的。现在层 $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}^p,\mathscr{G})$ 同构于 $\mathscr{G}^p$，从而是凝聚的，同理可知，层 $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}^q,\mathscr{G})$ 也是如此。因而定理 2 表明，$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ 是凝聚的。

⁑15 凝聚环层

环层 $\mathscr{A}$ 也可以看作是一个 $\mathscr{A}$ 模层；若这个 $\mathscr{A}$ 模层是凝聚的，则我们说 $\mathscr{A}$ 是一个凝聚环层。由于 $\mathscr{A}$ 显然是有限型的，这就意味着 $\mathscr{A}$ 满足命题 2 中的条件 (b)。换句话说：

定义 3. – 所谓层 $\mathscr{A}$ 是一个凝聚环层，是指 $\mathscr{A}$ 在任何开集 U 上的有限个截面之间的关系层都是 U 上的有限型层。

例子 — (1) 若 X 是一个复解析流形，则 X 上的全纯函数芽层是一个凝聚环层，这是根据 K. Oka 的一个定理 (参照 [3], 报告 XV, 或者 [5], §5)。

(2) 若 X 是一个代数多样体，则 X 的结构层是一个凝聚环层 (参照⁑37, 命题 1)。

如果 $\mathscr{A}$ 是一个凝聚环层，则我们有下面的结果：

命题 7. – 为了使一个 $\mathscr{A}$ 模层是凝聚的，必须且只需它在局部上可以同构于某个同态 $\varphi : \mathscr{A}^q \to \mathscr{A}^p$ 的余核。

必要性刚好就是命题 2；充分性缘自 $\mathscr{A}^p$ 和 $\mathscr{A}^q$ 都是凝聚的这个事实以及定理 2。

命题 8. – 为了使 $\mathscr{A}^p$ 的一个子层是凝聚的，必须且只需它是有限型的。

这是命题 3 的一个特殊情形。

推论 — 凝聚层的有限个截面之间的关系层也是一个凝聚层。

事实上，这个层是有限型的，这正是根据凝聚层的定义。

命题 9. – 设 $\mathscr{F}$ 是一个凝聚 $\mathscr{A}$ 模层。对任意 $x \in X$，设 $\mathscr{I}_x$ 是 $\mathscr{A}_x$ 的这样一个理想，它是由那些对任意 $f \in \mathscr{F}_x$ 均满足 $a.f = 0$ 的元素 $a \in \mathscr{A}_x$ 所组成的。则这些 $\mathscr{I}_x$ 构成一个凝聚理想层 (称为 $\mathscr{F}$ 的零化子)。

事实上，$\mathscr{I}_x$ 是同态 $\mathscr{A}_x \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x,\mathscr{F}_x)$ 的核；于是我们可以应用命题 5 和 6，以及定理 2。

更一般地，一个凝聚层 $\mathscr{G}$ 到它的一个凝聚子层 $\mathscr{F}$ 的传输子 $\mathscr{F} : \mathscr{G}$ 是一个凝聚

理想层（它是$\mathscr{G}/\mathscr{F}$的零化子）。

§16 改变环

有限型层和凝聚层等概念与给定的环层$\mathscr{A}$密切相关。如果我们同时考虑多个环层，则我们将使用“在$\mathscr{A}$上是有限型的”、“$\mathscr{A}$凝聚的”等方式来指明这是关于$\mathscr{A}$模层的性质。

定理 3. – *设$\mathscr{A}$是一个凝聚环层，$\mathscr{I}$是$\mathscr{A}$的一个凝聚理想层，$\mathscr{F}$是一个$\mathscr{A}/\mathscr{I}$模层。则为了使$\mathscr{F}$是$\mathscr{A}/\mathscr{I}$凝聚的，必须且只需它是$\mathscr{A}$凝聚的。特别地，$\mathscr{A}/\mathscr{I}$是一个凝聚环层。*

易见“在$\mathscr{A}$上是有限型的”等价于“在$\mathscr{A}/\mathscr{I}$上是有限型的”。另一方面，若$\mathscr{F}$是$\mathscr{A}$凝聚的，并且$s_1, \ldots, s_p$是$\mathscr{F}$在开集U上的一组截面，则这些s_i之间的$\mathscr{A}$系数关系层在$\mathscr{A}$上是有限型的；由此立知，这些s_i之间的$\mathscr{A}/\mathscr{I}$系数关系层在$\mathscr{A}/\mathscr{I}$上是有限型的，因为它就是上一个关系层在典范同态$\mathscr{A}^p \to (\mathscr{A}/\mathscr{I})^p$下的像。从而$\mathscr{F}$是$\mathscr{A}/\mathscr{I}$凝聚的。特别地，因为$\mathscr{A}/\mathscr{I}$是$\mathscr{A}$凝聚的，所以它也是$\mathscr{A}/\mathscr{I}$凝聚的，换句话说，$\mathscr{A}/\mathscr{I}$是一个凝聚环层。反过来，若$\mathscr{F}$是$\mathscr{A}/\mathscr{I}$凝聚的，则它在局部上同构于某个同态$\varphi : (\mathscr{A}/\mathscr{I})^q \to (\mathscr{A}/\mathscr{I})^p$的余核，且由于$\mathscr{A}/\mathscr{I}$是$\mathscr{A}$凝聚的，故知$\mathscr{F}$是$\mathscr{A}$凝聚的，这是根据定理 2。

§17 凝聚层的延拓和限制

设Y是空间X的一个闭子空间。若$\mathscr{G}$是Y上的一个层，则我们用$\mathscr{G}^X$来记由$\mathscr{G}$通过在Y之外进行零延拓而得到的层；这是X上的一个层 (参照§5)。若$\mathscr{A}$是Y上的一个环层，则$\mathscr{A}^X$是X上的一个环层，而若$\mathscr{F}$是一个$\mathscr{A}$模层，则$\mathscr{F}^X$是一个$\mathscr{A}^X$模层。

命题 10. – *为了使$\mathscr{F}$在$\mathscr{A}$上是有限型的，必须且只需$\mathscr{F}^X$在$\mathscr{A}^X$上是有限型的。*

设U是X的一个开集，并设$V = U \cap Y$。则V上的任何同态$\varphi : \mathscr{A}^p \to \mathscr{F}$都定义了$U$上的一个同态$\varphi^X : (\mathscr{A}^X)^p \to \mathscr{F}^X$，并且反之，为了使$\varphi$是满的，必须且只需$\varphi^X$是如此。命题由此立得。

同理可证：

命题 11. – *为了使$\mathscr{F}$是$\mathscr{A}$凝聚的，必须且只需$\mathscr{F}^X$是$\mathscr{A}^X$凝聚的。*

再取$\mathscr{F} = \mathscr{A}$，则有：

推论. — *为了使$\mathscr{A}$是一个凝聚环层，必须且只需$\mathscr{A}^X$是一个凝聚环层。*

§ 3 拓扑空间的层系数上同调

在本节中，X 表示一个拓扑空间，未必是分离的。

⁑18 开覆盖所定义的上链

设 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的一个开覆盖。若 $s = (i_0, \ldots, i_p)$ 是 I 中的一个有限序列，则我们令：

$$U_s \;=\; U_{i_0\ldots i_p} \;=\; U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \quad 。$$

设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 上的一个 Abel 群层。若 p 是一个非负整数，则所谓 $\mathfrak{U}$ 的一个取值在 $\mathscr{F}$ 中的 p 阶上链，是指这样一个函数 f，它把 I 中的一组 $p+1$ 个元素的序列 $s = (i_0, \ldots, i_p)$ 对应到 $\mathscr{F}$ 在 $U_{i_0\ldots i_p}$ 上的一个截面 $f_s = f_{i_0\ldots i_p}$。这些 p 阶上链构成一个 Abel 群，记作 $\mathrm{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$；它就是乘积群 $\prod \Gamma(U_s, \mathscr{F})$，这个乘积跑遍 I 中任意 $p+1$ 个元素的序列 s。我们把这些 $\mathrm{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, $p = 0, 1, \ldots$ 的族记作 $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$。$p$ 阶上链也被称为次数为 p 的上链。

所谓一个 p 阶上链 f 是交错的，是指：

(a) 只要在 $i_0, \ldots, i_p$ 中有两个指标相等，就有 $f_{i_0\ldots i_p} = 0$，
(b) $f_{i_{\sigma 0}\ldots i_{\sigma p}} = \varepsilon_\sigma f_{i_0\ldots i_p}$，其中 σ 是集合 $\{0, \ldots, p\}$ 上的一个置换（ε_σ 表示 σ 的符号）。

全体交错 p 阶上链构成 $\mathrm{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 的一个子群 $\mathrm{C}'^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$；我们把这些 $\mathrm{C}'^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 所构成的族记作 $\mathrm{C}'^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$。

⁑19 单形合组运算

设 $S(I)$ 是这样一个单形，它的顶点集就是集合 I；$S(I)$ 中的一个（有序）单形是指一个由 I 中元素所组成的序列 $s = (i_0, \ldots, i_p)$；p 称为 s 的维数。设 $K(I) = \sum_{p=0}^{\infty} K_p(I)$ 是由 $S(I)$ 所定义的复形：根据定义，$K_p(I)$ 就是以 $S(I)$ 中的 p 维单形的集合为基底的自由 Abel 群。

若 s 是 $S(I)$ 中的一个单形，则我们用 $|s|$ 来记 s 的顶点集。

所谓一个映射 $h : K_p(I) \to K_q(I)$ 是一个单合同态，是指

(i) h 是一个同态，
(ii) 对于 $S(I)$ 中的任意 p 维单形 s，均有

$$h(s) \;=\; \sum_{\varepsilon'} c_s^{s'}.s' \,, \qquad \text{其中} \;\; c_s^{s'} \in \mathbb{Z} \;\;，$$

并且这个和式跑遍满足 $|s'| \subseteq |s|$ 的 q 维单形 s'。

设 h 是一个单合同态，并设 $f \in \mathrm{C}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 是一个 q 阶上链。对任意 p 维单形 s，我们令：

$$({}^t hf)_s \;=\; \sum_{\varepsilon'} c_s^{s'} . \rho_s^{s'}(f_{s'}) \ ,$$

其中 $\rho_s^{s'}$ 表示限制同态：$\Gamma(U_{s'}, \mathscr{F}) \to \Gamma(U_s, \mathscr{F})$，它是有意义的，因为 $|s'| \subseteq |s|$。映射 $s \mapsto ({}^t hf)_s$ 是一个 p 阶上链，记作 ${}^t hf$。映射 $f \mapsto {}^t hf$ 是一个同态

$${}^t h \ : \ \mathrm{C}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \ \longrightarrow \ \mathrm{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \ ,$$

并且很容易验证下面这些公式：

$${}^t(h_1 + h_2 \;=\; {}^t h_1 + {}^t h_2 \,, \qquad {}^t(h_1 \circ h_2) \;=\; {}^t h_2 \circ {}^t h_1 \,, \qquad {}^t 1 \;=\; 1 \ 。$$

备注：在实际计算中，我们经常把限制同态 $\rho_s^{s'}$ 从记号中省去。

§20 上链复形

现在我们把上面所述应用到这样一个单合同态

$$\partial \ : \ K_{p+1}(I) \ \longrightarrow \ K_p(I)$$

上，它就是由我们熟悉的公式

$$\partial(i_0, \ldots, i_{p+1}) \;=\; \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_{p+1})$$

所定义的，记号 ^ 的意思和通常一样，就是把位于它下面的那个指标去掉。

这样我们就得到一个同态 ${}^t\partial : \mathrm{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$，记为 d；从而根据定义，我们有：

$$(df)_{i_0 \ldots i_{p+1}} \;=\; \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \rho_j (f_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{p+1}}) \ ,$$

其中 ρ_j 是指限制同态

$$\rho_j \ : \ \Gamma(U_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{p+1}}, \mathscr{F}) \ \longrightarrow \ \Gamma(U_{i_0 \ldots i_{p+1}}, \mathscr{F}) \ 。$$

因为 $\partial \circ \partial \;=\; 0$，故有 $d \circ d \;=\; 0$。这样一来 $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 上就具有了一个上边缘算子，使它成为一个复形。我们把这个复形 $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 的第 q 个上同调群记作 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$。则有：

命题 1. – $\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$。

一个 0 阶上链就是一组 $(f_i)_{i\in I}$，每个 f_i 是 $\mathscr{F}$ 在 U_i 上的一个截面；为了使这个上链是一个上圈，必须且只需在 $U_i \cap U_j$ 上我们有 $f_i - f_j = 0$，换句话说，可以找到 $\mathscr{F}$ 在整个 X 上的一个截面 f，对任意 $i \in I$，该截面在 U_i 上都与 f_i 重合。故得命题。

（这表明 $\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 与 $\mathfrak{U}$ 无关；但我们知道，一般的 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 并不是这样的）。

可以立即验证，若 f 是交错的，则 df 也是交错的。换句话说，d 使 $\mathrm{C}'^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 保持稳定，从而使它构成 $\mathrm{C}^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 的一个子复形。我们把 $\mathrm{C}'^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 的上同调群记作 $\mathrm{H}'^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$。

命题 2. – 对任意 $q \geqslant 0$，$\mathrm{C}'^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 到 $\mathrm{C}^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 的含入都定义了一个从 $\mathrm{H}'^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 到 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 的同构。

我们给集合 I 赋予一个全序结构，并且在 $K(I)$ 上定义这样一个单合同态 h：

$h((i_0, \ldots, i_q)) = 0$，只要这些指标 $i_0, \ldots, i_q$ 中有两个是相等的，
$h((i_0, .., i_q)) = \varepsilon_\sigma(i_{\sigma 0}, \ldots, i_{\sigma q})$，这里的指标 $i_0, \ldots, i_q$ 两两不同，并且 σ 是指 $\{0, \ldots, q\}$ 的这样一个置换，它使得 $i_{\sigma 0} < i_{\sigma 1} < \cdots < i_{\sigma q}$。

很容易验证 h 与 d 可交换，并且当 $\dim(s) = 0$ 时 $h(s) = s$；由此可知 (参照 [7], 第 VI 章 § 5)，我们有一个单合同态 k，它把维数增加 1，且使得 $1 - h = \partial \circ k + k \circ \partial$。故在 $\mathrm{C}^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 上我们有

$$1 - {}^t h \;=\; {}^t k \circ d + d \circ {}^t k \quad 。$$

然而可以立即验证，${}^t h$ 是 $\mathrm{C}^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 到 $\mathrm{C}'^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 上的一个投影算子，而上面的公式又表明，这是一个同伦算子，命题于是得证（对照 [7], 第 VI 章, 定理 6.10）。

推论 — 对于 $q > \dim(\mathfrak{U})$，我们有 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$。

根据 $\dim(\mathfrak{U})$ 的定义，当 $q > \dim(\mathfrak{U})$ 时，若指标 $i_0, .., i_q$ 是两两不同的，则有 $U_{i_0 \ldots i_q} = \varnothing$；故得 $\mathrm{C}'^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$，这就表示说

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \;=\; \mathrm{H}'^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \;=\; 0 \quad 。$$

※21 开覆盖的加细

所谓一个开覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 比另一个开覆盖 $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ 精细，是指可以找到一个映射 $\tau : I \to J$，使得对任意 $i \in I$，均有 $U_i \subseteq V_{\tau i}$。若 $f \in \mathrm{C}^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$，则我们令：

$$(\tau f)_{i_0 \ldots i_q} \;=\; \rho_U^V(f_{\tau i_0 \ldots \tau i_q}) \quad ,$$

其中 ρ_U^V 是指 $U_{i_0 \ldots i_q}$ 到 $V_{\tau i_0 \ldots \tau i_q}$ 的含入所定义的限制同态。对任意 $q \geqslant 0$，映射 $f \mapsto \tau f$ 都是 $\mathrm{C}^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ 到 $\mathrm{C}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 的一个同态，并且与 d 可交换，从而可以定义出一组同态

$$\tau^* \;:\; \mathrm{H}^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \;\longrightarrow\; \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \quad 。$$

命题 3. – 同态 $\tau^*:\mathrm{H}^q(\mathfrak{V},\mathscr{F})\to\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ 只依赖于 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{V}$，而与映射 τ 的选择无关。

设 τ 和 τ' 是 I 到 J 的两个映射，满足 $U_i\subseteq V_{\tau i}$ 和 $U_i\subseteq V_{\tau' i}$；我们需要证明 $\tau^*=\tau'^*$。

设 $f\in\mathrm{C}^q(\mathfrak{V},\mathscr{F})$；我们令

$$(kf)_{i_0\ldots i_{q-1}} \;=\; \sum_{h=0}^{q-1}(-1)^h\rho_h(f_{\tau i_0\ldots\tau i_h\tau' i_h\ldots\tau' i_{q-1}})\ ,$$

其中 ρ_h 是指 $U_{i_0\ldots i_{q-1}}$ 到 $V_{\tau i_0\ldots\tau i_h\tau' i_h\ldots\tau' i_{q-1}}$ 的含入所定义的限制同态。

可以通过直接计算 (参照 [7], 第 VI 章 § 3) 来验证：

$$dkf+kdf \;=\; \tau' f-\tau f\ ,$$

这就证明了命题。

这样一来，若 $\mathfrak{U}$ 比 $\mathfrak{V}$ 精细，则对任意整数 $q\geqslant 0$，均有一个从 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ 到 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ 的典范同态。在下文中，我们将把这个同态记为 $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$。

§ 22 X 的取值在层 $\mathscr{F}$ 中的上同调群

"$\mathfrak{U}$ 比 $\mathfrak{V}$ 精细"（以下我们记之为 $\mathfrak{U}\preceq\mathfrak{V}$）这个关系是 X 的开覆盖之间的一个近序关系；进而，这个关系是滤相的，因为若 $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 和 $\mathfrak{V}=\{V_j\}_{j\in J}$ 是两个开覆盖，则 $\mathfrak{W}=\{U_i\cap V_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ 是一个比 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{V}$ 都精细的开覆盖。

所谓两个开覆盖 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{V}$ 是等价的，是指我们有 $\mathfrak{U}\preceq\mathfrak{V}$ 且 $\mathfrak{V}\preceq\mathfrak{U}$。任何一个开覆盖 $\mathfrak{U}$ 都等价于这样一个开覆盖 $\mathfrak{U}'$，它的指标集是 $\mathfrak{P}(X)$ 的一个子集。事实上，我们可以取 $\mathfrak{U}'$ 是由族 $\mathfrak{U}$ 中的那些开集所组成的集合。从而我们可以说，开覆盖在上述等价关系下的等价类构成一个集合；这是一个滤相有序集 [5]。

若 $\mathfrak{U}\preceq\mathfrak{V}$，则对任意整数 $q\geqslant 0$ 和 X 上的任意层 $\mathscr{F}$，我们在上一小节的末尾都定义了一个唯一确定的同态 $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}):\mathrm{H}^q(\mathfrak{V},\mathscr{F})\to\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$。易见 $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{U})$ 是恒同，并且当 $\mathfrak{U}\preceq\mathfrak{V}\preceq\mathfrak{W}$ 时，$\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})\circ\sigma(\mathfrak{V},\mathfrak{W})=\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{W})$。因此，若 $\mathfrak{U}$ 等价于 $\mathfrak{V}$，则 $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$ 和 $\sigma(\mathfrak{V},\mathfrak{U})$ 是互逆的同构。换句话说，$\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ 只依赖于开覆盖 $\mathfrak{U}$ 的等价类。

定义 — *所谓 X 的取值在层 $\mathscr{F}$ 中的第 q 个上同调群，记为 $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})$，是指这些群 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ 的归纳极限，这个极限定义在 X 的开覆盖等价类的滤相有序集上，并且是通过这些同态 $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$ 来连接。*

换个说法就是，$\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})$ 中的一个元素就是这样一个二元组 $(\mathfrak{U},x)$，其中 $x\in\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$，并且我们要把两个二元组 $(\mathfrak{U},x)$ 和 $(\mathfrak{V},y)$ 看作是等同的，只要能找

[5] 相反地，全体开覆盖并不能构成"集合"，因为开覆盖的指标集可以是任意的。

到 $\mathfrak{W}$，满足 $\mathfrak{W} \preceq \mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{W} \preceq \mathfrak{V}$，并且在 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{W}, \mathscr{F})$ 中有 $\sigma(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})(x) = \sigma(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})(y)$。从而对于 X 的任何开覆盖 $\mathfrak{U}$，我们都有一个典范同态 $\sigma(\mathfrak{U}) : \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$。

我们观察到，$\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ 也可以通过在开覆盖 $\mathfrak{U}$ 的一个共尾子族上对 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 取归纳极限而得到。这样一来，若 X 是拟紧的 (切转：拟仿紧的)，则可以限于考虑有限开覆盖 (切转：局部有限开覆盖)。

如果 $q = 0$，则应用命题 1，我们有：

命题 4. – $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$。

⁑23 层的同态

设 φ 是层 $\mathscr{F}$ 到层 $\mathscr{G}$ 的一个同态。若 $\mathfrak{U}$ 是 X 的一个开覆盖，则我们可以把一个 $f \in \mathrm{C}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 对应到这样一个元素 $\varphi f \in \mathrm{C}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$，它是用公式 $(\varphi f)_s = \varphi(f_s)$ 来定义的。映射 $f \mapsto \varphi f$ 是 $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 到 $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ 的一个同态，并且与上边缘运算可交换，从而可以定义出一组同态 $\varphi^* : \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$。我们有 $\varphi^* \circ \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) \circ \varphi^*$，故通过取极限，可以得到同态

$$\varphi^* \ : \ \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathscr{G}) \ 。$$

如果 $q = 0$，则 φ^* 与 $\Gamma(X, \mathscr{F})$ 到 $\Gamma(X, \mathscr{G})$ 的由 φ 所定义的自然同态是一致的。

在一般情形，这些同态 φ^* 具有下面一些常规性质：

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^* , \qquad (\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^* , \qquad 1^* = 1 \ 。$$

换个说法就是，对任意 $q \geqslant 0$，$\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ 都是 $\mathscr{F}$ 的一个加性协变函子。由此特别可知，若 $\mathscr{F}$ 是两个层 $\mathscr{G}_1$ 和 $\mathscr{G}_2$ 的直和，则 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ 就是 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{G}_1)$ 和 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{G}_2)$ 的直和。

假设 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{A}$ 模层。层 $\mathscr{A}$ 在整个 X 上的每个截面都定义了 $\mathscr{F}$ 的一个自同态，从而在每个 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ 上都定义了一个自同态。因而这些 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ 都是环 $\Gamma(X, \mathscr{A})$ 上的模。

⁑24 层正合序列：一般情形

设 $0 \to \mathscr{A} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{B} \xrightarrow{\beta} \mathscr{C} \to 0$ 是一个层正合序列。若 $\mathfrak{U}$ 是 X 的一个开覆盖，则序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{A}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{B}) \xrightarrow{\beta} \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{C})$$

显然是正合的，但同态 β 一般不是满的。我们用 $\mathrm{C}^\bullet_0(\mathfrak{U}, \mathscr{C})$ 来记这个同态的像；这是 $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{C})$ 的一个子复形，我们把它的上同调群记作 $\mathrm{H}^q_0(\mathfrak{U}, \mathscr{C})$。则复形的正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{A}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{B}) \xrightarrow{\beta} \mathrm{C}^\bullet_0(\mathfrak{U}, \mathscr{C}) \longrightarrow 0$$

可以引出一个上同调长正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{B}) \longrightarrow \mathrm{H}^q_0(\mathfrak{U},\mathscr{C}) \xrightarrow{d} \mathrm{H}^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{H}^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{B}) \longrightarrow \cdots ,$$

其中的上边缘算子d就是用通常方式来定义的。

现在设$\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$和$\mathfrak{V}=\{V_j\}_{j\in J}$是两个开覆盖，并设$\tau: I\to J$是一个映射，且满足$U_i\subseteq V_{\tau i}$；从而我们有$\mathfrak{U}\preceq\mathfrak{V}$。交换图表

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{V},\mathscr{A}) & \longrightarrow & \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{V},\mathscr{B}) & \longrightarrow & \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{V},\mathscr{C}) \\
& {\scriptstyle\tau}\big\downarrow & & {\scriptstyle\tau}\big\downarrow & & {\scriptstyle\tau}\big\downarrow \\
0 \longrightarrow & \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{A}) & \longrightarrow & \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{B}) & \longrightarrow & \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{C})
\end{array}$$

表明，τ把$\mathrm{C}^\bullet_0(\mathfrak{V},\mathscr{C})$映到$\mathrm{C}^\bullet_0(\mathfrak{U},\mathscr{C})$中，从而定义了一组同态$\tau^*:\mathrm{H}^q_0(\mathfrak{V},\mathscr{C})\to\mathrm{H}^q_0(\mathfrak{U},\mathscr{C})$。进而，这些同态$\tau^*$不依赖于映射$\tau^*$的选择：这是缘自下面的事实，即若$f\in\mathrm{C}^q_0(\mathfrak{V},\mathscr{C})$，则在命题3证明的记号下，我们有$kf\in\mathrm{C}^{q-1}_0(\mathfrak{U},\mathscr{C})$。这样就得到一组典范同态$\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}):\mathrm{H}^q_0(\mathfrak{V},\mathscr{C})\to\mathrm{H}^q_0(\mathfrak{U},\mathscr{C})$；此时我们可以把$\mathrm{H}^q_0(X,\mathscr{C})$定义为群$\mathrm{H}^q_0(\mathfrak{U},\mathscr{C})$关于$\mathfrak{U}$的归纳极限。

由于正合序列的归纳极限仍然是正合序列 (参照 [7], 第 VIII 章, 定理 5.4)，故我们有：

命题 5. – *序列*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^q(X,\mathscr{B}) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{H}^q_0(X,\mathscr{C}) \xrightarrow{d} \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{A}) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{B}) \longrightarrow \cdots$$

是正合的。

（d是指这些$d:\mathrm{H}^q_0(\mathfrak{U},\mathscr{C})\to\mathrm{H}^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{A})$通过取极限所得到的同态）。

为了能够应用上面这个命题，我们需要比较一下群$\mathrm{H}^q_0(X,\mathscr{C})$和$\mathrm{H}^q(X,\mathscr{C})$。$\mathrm{C}^\bullet_0(\mathfrak{U},\mathscr{C})$到$\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{C})$的含入可以定义出同态$\mathrm{H}^q_0(\mathfrak{U},\mathscr{C})\to\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{C})$，故通过在$\mathfrak{U}$上取极限，我们得到同态：

$$\mathrm{H}^q_0(X,\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X,\mathscr{C}) \quad 。$$

命题 6. – *典范同态*$\mathrm{H}^q_0(X,\mathscr{C})\to\mathrm{H}^q(X,\mathscr{C})$*当*$q=0$*时是一一的，当*$q=1$*时是单的。*

首先证明一个引理：

引理 1. – *设*$\mathfrak{V}=\{V_j\}_{j\in J}$*是一个开覆盖，并设*$f=(f_j)$*是*$\mathrm{C}^0(\mathfrak{V},\mathscr{C})$*中的一个元素。则可以找到一个开覆盖*$\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$*和一个映射*$\tau:I\to J$*，使得*$U_i\subseteq V_{\tau i}$*，并且*$\tau f\in\mathrm{C}^0_0(\mathfrak{U},\mathscr{C})$*。*

对任意$x\in X$，我们选取$\tau x\in J$满足$x\in V_{\tau x}$。因为$f_{\tau x}$是$\mathscr{C}$在$V_{\tau x}$上的一个截面，所以我们能找到x的一个包含在$V_{\tau x}$中的开邻域U_x，以及$\mathscr{B}$在U_x上的一

个截面 b_x，使得在 U_x 上有 $\beta(b_x)=f_{\tau x}$。这些 $\{U_x\}_{x\in X}$ 构成 X 的一个开覆盖 $\mathfrak{U}$，并且这些 b_x 构成 $\mathfrak{U}$ 的一个取值在 $\mathscr{B}$ 中的0阶上链 b；由于 $\tau f=\beta(b)$，故我们自然有 $\tau f\in \mathrm{C}_0^0(\mathfrak{U},\mathscr{C})$。

现在我们证明 $\mathrm{H}_0^1(X,\mathscr{C})\to \mathrm{H}^1(X,\mathscr{C})$ 是单的。这个映射的核中的一个元素可以表示成这样一个1阶上圈 $z=(z_{j_0j_1})\in \mathrm{C}_0'^{\bullet}(\mathfrak{V},\mathscr{C})$，即可以找到 $f=(f_j)\in \mathrm{C}^0(\mathfrak{V},\mathscr{C})$，使得 $df=z$；把引理1应用到 f 上，我们得到一个开覆盖 $\mathfrak{U}$，使得 $\tau f\in \mathrm{C}_0^0(\mathfrak{U},\mathscr{C})$，这就表示说 τz 在 $\mathrm{C}_0^{\bullet}(\mathfrak{U},\mathscr{C})$ 中上同调于0，从而它在 $\mathrm{H}_0^1(X,\mathscr{C})$ 中的像是0。同理可证，$\mathrm{H}_0^0(X,\mathscr{C})\to \mathrm{H}^0(X,\mathscr{C})$ 是一一的。

推论 1. – 我们有一个正合序列：

$$\begin{aligned}0\longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathscr{A})\longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathscr{B})\longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathscr{C})&\\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathscr{A})\longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathscr{B})\longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathscr{C})&\ 。\end{aligned}$$

这是命题5和6的一个直接推论。

推论 2. – 若 $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{A})=0$，则 $\Gamma(X,\mathscr{B})\to\Gamma(X,\mathscr{C})$ 是满的。

¶25 层正合序列：X 仿紧的情形

还记得所谓一个拓扑空间 X 是仿紧的，是指它是分离的，并且 X 的任意开覆盖都有一个局部有限的加细开覆盖。对于这样的空间，我们可以把命题6扩展到所有的 q 上（作者不知道这件事能不能扩展到不分离的空间上）：

命题 7. – 若 X 是仿紧的，则对任意 $q\geqslant 0$，典范同态

$$\mathrm{H}_0^q(X,\mathscr{C})\longrightarrow \mathrm{H}^q(X,\mathscr{C})$$

都是一一的。

这个命题是下面这个引理的一个直接推论，该引理类似于引理1：

引理2. – 设 $\mathfrak{V}=\{V_j\}_{j\in J}$ 是一个开覆盖，并设 $f=(f_{j_0\cdots j_q})$ 是 $\mathrm{C}^q(\mathfrak{V},\mathscr{C})$ 中的一个元素。则可以找到一个开覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 和一个映射 $\tau:I\to J$，使得 $U_i\subseteq V_{\tau i}$，并且 $\tau f\in \mathrm{C}_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{C})$。

因为 X 是仿紧的，故我们可以假设 $\mathfrak{V}$ 是局部有限的。此时可以找到一个开覆盖 $\{W_j\}_{j\in J}$，使得 $\overline{W}_j\subseteq V_j$。对任意 $x\in X$，我们选取 x 的一个开邻域 U_x，满足：

(a) 若 $x\in V_j$（切转：$x\in W_j$），则有 $U_x\subseteq V_j$（切转：$U_x\subseteq W_j$），
(b) 若 $U_x\cap W_j\neq\varnothing$，则有 $U_x\subseteq V_j$，
(c) 若 $x\in V_{j_0\cdots j_q}$，则可以找到 $\mathscr{B}$ 在 U_x 上的一个截面 b，使得在 U_x 上我们有 $\beta(b)=f_{j_0\cdots j_q}$。

条件 (c) 是能够实现的，这是基于商层的定义，以及下面的事实：x 只能落在有限个集合 $V_{j_0\dots j_q}$ 之中。一旦 (c) 得以实现，就只需适当地缩小 U_x 而使 (a) 和 (b) 也能够成立。

这些 $\{U_x\}_{x\in X}$ 构成一个开覆盖 $\mathfrak{U}$；对任意 $x\in X$，我们选取 $\tau x\in J$ 满足 $x\in W_{\tau x}$。下面验证 τf 落在 $\mathrm{C}_0^q(\mathfrak{U},\mathscr{C})$ 中，换句话说，$f_{\tau x_0\dots\tau x_q}$ 是 $\mathscr{B}$ 在 $U_{x_0}\cap\cdots\cap U_{x_q}$ 上的某个截面在 β 下的像。若 $U_{x_0}\cap\cdots\cap U_{x_q}$ 是空的，则这是显然的；若否，则对于 $0\leqslant k\leqslant q$，我们有 $U_{x_0}\cap U_{x_k}\neq\varnothing$，且由于 $U_{x_k}\subseteq W_{\tau x_k}$，故有 $U_{x_0}\cap W_{\tau x_k}\neq\varnothing$，这就表示说（根据 (b)）$U_{x_0}\subseteq V_{\tau x_k}$，故得 $x_0\in V_{\tau x_0\dots\tau x_q}$；现在应用 (c)，则我们看到，可以找到 $\mathscr{B}$ 在 U_{x_0} 上的一个截面 b，使得在 U_{x_0} 上有 $\beta(b)_x=f_{\tau x_0\dots\tau x_q}$，从而在 $U_{x_0}\cap\cdots\cap U_{x_q}$ 上当然也是如此，这就完成了证明。

推论 — *若 X 是仿紧的，则有一个正合序列：*

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{H}^q(X,\mathscr{B})\xrightarrow{\beta^*}\mathrm{H}^q(X,\mathscr{C})\xrightarrow{d}\mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{A})\xrightarrow{\alpha^*}\mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{B})\longrightarrow\cdots$$

（这里算子 d 的定义是 $\mathrm{H}_0^q(X,\mathscr{C})\to\mathrm{H}^q(X,\mathscr{C})$ 的逆同构与 $d:\mathrm{H}_0^q(X,\mathscr{C})\to\mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{A})$ 的合成）。

我们把上面这个正合序列称为层正合序列 $0\to\mathscr{A}\to\mathscr{B}\to\mathscr{C}\to 0$ 所定义的上同调长正合序列。更一般地，只要我们能证明 $\mathrm{H}_0^q(X,\mathscr{C})\to\mathrm{H}^q(X,\mathscr{C})$ 是一一的，这个序列就存在（我们将在 ⁋47 中看到，当 X 是一个代数多样体，并且 $\mathscr{A}$ 是一个代数性凝聚层时，这是对的）。

⁋26 闭子空间的上同调

设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 上的一个层，并设 Y 是 X 的一个子空间。设 $\mathscr{F}|_Y$ 是 $\mathscr{F}$ 在 Y 上的稼入层，在 ⁋4 的意义下。若 $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的一个开覆盖，则这些 $U_i'=Y\cap U_i$ 构成 Y 的一个开覆盖 $\mathfrak{U}'$；若 $f_{i_0\dots i_q}$ 是 $\mathscr{F}$ 在 $U_{i_0\dots i_q}$ 上的一个截面，则 $f_{i_0\dots i_q}$ 在 $U'_{i_0\dots i_q}=Y\cap U_{i_0\dots i_q}$ 上的限制是 $\mathscr{F}|_Y$ 的一个截面。限制运算是一个同态 $\rho:\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}',\mathscr{F}|_Y)$，且与 d 可交换，从而定义了 $\rho^*:\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}',\mathscr{F}|_Y)$。若 $\mathfrak{U}\preceq\mathfrak{V}$，则有 $\mathfrak{U}'\preceq\mathfrak{V}'$，并且 $\rho^*\circ\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})=\sigma(\mathfrak{U}',\mathfrak{V}')\circ\rho^*$；从而通过对 $\mathfrak{U}$ 取极限，这些同态 ρ^* 定义了一组同态 $\rho^*:\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})\to\mathrm{H}^q(Y,\mathscr{F}|_Y)$。

命题 8. – *假设 Y 在 X 中是闭的，并且 $\mathscr{F}$ 在 Y 之外等于 0。则对任意 $q\geqslant 0$，$\rho^*:\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})\to\mathrm{H}^q(Y,\mathscr{F}|_Y)$ 都是一一的。*

这个命题缘自下面两个事实：

(a) Y 的任何开覆盖 $\mathfrak{W}=\{W_i\}_{i\in I}$ 都具有 $\mathfrak{U}'$ 的形状，其中 $\mathfrak{U}$ 是 X 的一个开覆盖。

事实上，只需令 $U_i=W_i\cup(X\smallsetminus Y)$，因为 Y 在 X 中是闭的。

(b) 对于 X 的任意开覆盖 $\mathfrak{U}$，$\rho:\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}',\mathscr{F}|_Y)$ 都是一一的。

事实上，这是缘自 ¶5, 命题 5，应用到 $U_{i_0\dots i_q}$ 和层 $\mathscr{F}$ 上。

我们也可以把命题 8 表达成下面的形式：若 $\mathscr{G}$ 是 Y 上的一个层，并且 $\mathscr{G}^X$ 是由 $\mathscr{G}$ 通过在 Y 之外进行零延拓而得到的层，则对任意 $q \geqslant 0$，均有 $\mathrm{H}^q(Y,\mathscr{G}) = \mathrm{H}^q(X,\mathscr{G}^X)$。换句话说，$\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{G}^X$ 的等同与取上同调群是相容的。

§4 不同开覆盖下的上同调群之间的比较

在本节中，X 表示一个拓扑空间，$\mathscr{F}$ 表示 X 上的一个层。我们想要给出一些关于 X 的开覆盖 $\mathfrak{U}$ 的条件，用以保证对任意 $n \geqslant 0$，均有 $\mathrm{H}^n(\mathfrak{U},\mathscr{F}) = \mathrm{H}^n(X,\mathscr{F})$。

¶27 双复形

一个双复形 (参照 [6], 第 IV 章 §4) 就是一个双分次的 Abel 群

$$K = \sum_{p,q} K^{p,q} \qquad (p \geqslant 0,\ q \geqslant 0)$$

它带有两个自同态 d' 和 d''，且具有下面一些性质：

d' 把 $K^{p,q}$ 映入 $K^{p+1,q}$，d'' 把 $K^{p,q}$ 映入 $K^{p,q+1}$，并且

$d' \circ d' = 0$，$d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$，$d'' \circ d'' = 0$。

我们把 $K^{p,q}$ 中的元素称为双齐次的，次数为 (p,q)，并且总次数为 $p+q$。自同态 $d = d' + d''$ 满足 $d \circ d = 0$，并且我们把 K 关于这个缀算子的上同调群记作 $\mathrm{H}^n(K)$，n 是指总次数。

也可以给 K 赋予缀算子 d'，则由于 d' 与 K 的双分次结构是相容的，故我们可以得到上同调群 $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{p,q}(K)$；对于 d''，我们也有上同调群 $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}^{p,q}(K)$。

我们用 K_{II}^q 来表示 $K^{0,q}$ 的这样一个子群，它是由满足 $d'(x) = 0$ 的那些元素 x 所组成的，再用 K_{II} 来表示这些 K_{II}^q $(q = 0,1,\dots)$ 的直和。还可以类似地定义 $K_{\mathrm{I}} = \sum_{p=0}^{\infty} K_{\mathrm{I}}^p$。注意到

$$K_{\mathrm{II}}^q = \mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{0,q}(K) \qquad \text{且} \qquad K_{\mathrm{I}}^q = \mathrm{H}_{\mathrm{II}}^{0,q}(K) \quad 。$$

K_{II} 是 K 的一个子复形，并且算子 d 在 K_{II} 上与算子 d'' 是重合的。

命题 1. – 若对于 $p > 0$ 和 $q \geqslant 0$，均有 $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{p,q}(K) = 0$，则对任意 $n \geqslant 0$，含入 $K_{\mathrm{II}} \to K$ 都定义了一个从 $\mathrm{H}^n(K_{\mathrm{II}})$ 到 $\mathrm{H}^n(K)$ 的一一映射。

（参照 [4], 报告 XVII-6，我们把证明过程抄写在下面）。

把 K 换成 K/K_{II}，则可以归结为证明，若对于 $p \geqslant 0$ 和 $q \geqslant 0$，均有 $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{p,q}(K) = 0$，则对任意 $n \geqslant 0$，我们都有 $\mathrm{H}^n(K) = 0$。令

$$K_h = \sum_{q \geqslant h} K^{p,q} \quad 。$$

这些 K_h $(h = 0, 1, \dots)$ 是 K 的一列递减的子复形，并且 K_h/K_{h+1} 同构于 $\sum_{p=0}^{\infty} K^{p,h}$，连同缀算子 d'。从而对所有 n 和 h，我们都有 $\mathrm{H}^n(K_h/K_{h+1}) = \mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{h,n-h}(K) = 0$，故得 $\mathrm{H}^n(K_h) = \mathrm{H}^n(K_{h+1})$。由于当 $h > n$ 时 $\mathrm{H}^n(K_h) = 0$，故可由此得知(通过对 h 使用递降归纳)，对所有 n 和 h，均有 $\mathrm{H}^n(K_h) = 0$，且由于 K_0 就等于 K，命题因此得证。

¶28 由两个开覆盖所定义的双复形

设 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 和 $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ 是 X 的两个开覆盖。若 s 是 $S(I)$ 的一个 p 单形，且 s' 是 $S(J)$ 的一个 q 单形，则我们用 U_s 来记这些 U_i $(i \in s)$ 的交集 (参照 ¶18)，用 $V_{s'}$ 来记这些 V_j $(j \in s')$ 的交集，用 $\mathfrak{V}_s$ 来记 U_s 的这样一个开覆盖，由这些 $\{U_s \cap V_j\}_{j \in J}$ 所组成，并且用 $\mathfrak{U}_{s'}$ 来记 $V_{s'}$ 的这样一个开覆盖，由这些 $\{V_{s'} \cap U_i\}_{i \in I}$ 所组成。

我们要定义一个双复形 $\mathrm{C}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F}) = \sum_{p,q} \mathrm{C}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$，方法如下：

$\mathrm{C}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F}) = \prod \Gamma(U_s \cap V_{s'}, \mathscr{F})$，这个乘积跑遍所有的二元组 (s, s')，其中 s 是 $S(I)$ 中的 p 维一个单形，s' 是 $S(J)$ 中的 q 维一个单形。

从而一个元素 $f \in \mathrm{C}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$ 就是 $\mathscr{F}$ 在这些 $U_s \cap V_{s'}$ 上的一组截面 $(f_{s,s'})$，或者在 ¶18 的记号下，这是一组

$$f_{i_0 \dots i_p, j_0 \dots j_q} \in \Gamma(U_{i_0 \dots i_p} \cap V_{j_0 \dots j_q}, \mathscr{F}) \quad 。$$

我们也可以把 $\mathrm{C}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$ 等同于 $\prod_{s'} \mathrm{C}^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathscr{F})$；由于对每个 s'，我们都有一个上边缘运算 $d : \mathrm{C}^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathscr{F}) \to \mathrm{C}^{p+1}(\mathfrak{U}_{s'}, \mathscr{F})$，故可由此导出一个同态

$$d_{\mathfrak{U}} : \mathrm{C}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{C}^{p+1,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F}) \quad 。$$

把 $d_{\mathfrak{U}}$ 的定义具体写出来，我们就得到：

$$(d_{\mathfrak{U}} f)_{i_0 \dots i_{p+1}, j_0 \dots j_q} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \rho_k (f_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}, j_0 \dots j_q}) \quad ,$$

其中 ρ_k 是指

$$U_{i_0 \dots i_{p+1}} \cap V_{j_0 \dots j_q} \quad 到 \quad U_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}} \cap V_{j_0 \dots j_q}$$

的含入所定义的限制同态。

可以同样地定义 $d_{\mathfrak{V}}: \mathrm{C}^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F}) \to \mathrm{C}^{p,q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$，并且有：

$$(d_{\mathfrak{V}}f)_{i_0\dots i_p,j_0\dots j_{q+1}} = \sum_{h=0}^{q+1}(-1)^h\rho_h(f_{i_0\dots i_p,j_0\dots\hat{j}_h\dots j_{q+1}}) \ 。$$

易见 $d_{\mathfrak{U}}\circ d_{\mathfrak{U}}=0$，$d_{\mathfrak{U}}\circ d_{\mathfrak{V}}=d_{\mathfrak{V}}\circ d_{\mathfrak{U}}$，$d_{\mathfrak{V}}\circ d_{\mathfrak{V}}=0$。于是若令 $d'=d_{\mathfrak{U}}$, $d''=(-1)^p d_{\mathfrak{V}}$，则我们给 $\mathrm{C}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ 赋予了一个双复形的结构。从而可以把上一小节的那些定义应用到 $K=\mathrm{C}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ 上；我们把上面那些群和复形 $\mathrm{H}^n(K)$, $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{p,q}(K)$, $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}^{p,q}(K)$, K_{I}, K_{II} 在这个特殊情况下分别记作 $\mathrm{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$, $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$, $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$, $\mathrm{C}_{\mathrm{I}}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ 和 $\mathrm{C}_{\mathrm{II}}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$。

根据 d' 和 d'' 的定义，我们显然有：

命题 2. – $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ 同构于 $\prod_{s'}\mathrm{H}^p(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F})$，这个乘积跑遍 $S(J)$ 中的所有 q 维单形。特别地，

$$\mathrm{C}_{\mathrm{II}}^{q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F}) = \mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{0,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$$

同构于 $\prod_{s'}\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F})=\mathrm{C}^q(\mathfrak{V},\mathscr{F})$。

我们用 ι'' 来记典范同构：$\mathrm{C}^{\bullet}(\mathfrak{V},\mathscr{F})\to\mathrm{C}_{\mathrm{II}}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$。从而若 $(f_{j_0\dots j_q})$ 是 $\mathrm{C}^q(\mathfrak{V},\mathscr{F})$ 中的一个元素，则有：

$$(\iota''f)_{i_0,j_0\dots j_q} = \rho_{i_0}(f_{j_0\dots j_q}) \ ,$$

其中 ρ_{i_0} 是指

$$U_{i_0}\cap V_{j_0\dots j_q} \quad 到 \quad V_{j_0\dots j_q}$$

的含入所定义的限制同态。

容易看到，对于 $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$，命题 2 的类似结果是成立的，并且我们有一个同构 $\iota':\mathrm{C}^{\bullet}(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to\mathrm{C}_{\mathrm{I}}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$。

¶29 应用

记号与上一小节相同，我们有：

命题 3. – 假设对任意 s' 和任意 $p>0$，均有 $\mathrm{H}^p(\mathfrak{U}_{s'},\mathscr{F})=0$。则对任意 $n\geqslant 0$，由 ι'' 所定义的同态 $\mathrm{H}^n(\mathfrak{V},\mathscr{F})\to\mathrm{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{V};\mathscr{F})$ 都是一一的。

这是命题 1 和 2 的一个直接推论。

在陈述命题 4 之前，我们先来证明一个引理：

引理 1. – 设 $\mathfrak{W}=\{W_i\}_{i\in I}$ 是空间 Y 的一个开覆盖，并设 $\mathscr{F}$ 是 Y 上的一个层。于是若有 $i\in I$ 使得 $W_i=Y$，则对任意 $p>0$，均有 $\mathrm{H}^p(\mathfrak{W},\mathscr{F})=0$。

设 $\mathfrak{W}'$ 是 Y 的由唯一一个开集 Y 所组成的开覆盖，则显然有 $\mathfrak{W} \preceq \mathfrak{W}'$，而 $\mathfrak{W}$ 上的前提条件又意味着 $\mathfrak{W}' \preceq \mathfrak{W}$。由此可知 (¶22)，当 $p > 0$ 时，$\mathrm{H}^p(\mathfrak{W}, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^p(\mathfrak{W}', \mathscr{F}) = 0$。

命题 4. – 假设开覆盖 $\mathfrak{V}$ 比开覆盖 $\mathfrak{U}$ 精细。则对任意 $n \geqslant 0$，$\iota'' : \mathrm{H}^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$ 都是一一的。进而，同态 $\iota' \circ \iota''^{-1} : \mathrm{H}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ 与 ¶21 中的同态 $\sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ 是一致的。

把引理 1 应用到 $\mathfrak{W} = \mathfrak{U}_{s'}$ 和 $Y = V_{s'}$ 上，我们看到对任意 $p > 0$，均有 $\mathrm{H}^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathscr{F}) = 0$，从而命题 3 表明，对任意 $n \geqslant 0$，

$$\iota'' \ : \ \mathrm{H}^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$$

都是一一的。

设 $\tau : J \to I$ 是一个映射，且满足 $V_j \subseteq U_{\tau j}$；为了证明命题的第二部分，我们必须证明若 f 是 $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 中的一个 n 阶上圈，则上圈 $\iota'(f)$ 和 $\iota''(\tau f)$ 在 $\mathrm{C}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$ 中是上同调的。

对任意整数 p, $0 \leqslant p \leqslant n-1$，我们定义 $g^p \in \mathrm{C}^{p,n-p-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$，即通过下面的公式：

$$g^p_{i_0\dots i_p, j_0\dots j_{n-p-1}} \ = \ \rho_p(f_{i_0\dots i_p, \tau j_0 \dots \tau j_{n-p}}) \ ,$$

其中 ρ_p 是指

$$U_{i_0\dots i_p} \cap V_{j_0\dots j_{n-p-1}} \quad 到 \quad U_{i_0\dots i_p, \tau j_0\dots\tau j_{n-p-1}}$$

的含入所定义的限制同态。

通过直接计算 (有见于 f 是一个上圈的事实) 可以验证：

$$d''(g^0) \ = \ \iota''(\tau f) \, , \quad \dots \quad , d''(g^p) \ = \ d'(g^{p-1}) \, , \quad \dots \quad , d'(g^{n-1}) \ = \ (-1)^n \iota'(f) \ ,$$

故得 $d(g^0 - g^1 + \cdots + (-1)^{n-1} g^{n-1}) = \iota''(\tau f) - \iota'(f)$，这就足以证明 $\iota''(\tau f)$ 和 $\iota'(f)$ 是上同调的。

命题 5. – 假设 $\mathfrak{V}$ 比 $\mathfrak{U}$ 精细，并且对任意 s 和任意 $q > 0$，均有 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{V}_s, \mathscr{F}) = 0$。则对任意 $n \geqslant 0$，同态 $\sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}) : \mathrm{H}^n(U, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ 都是一一的。

若把 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{V}$ 的位置互换来使用命题 3，则可以看到 $\iota' : \mathrm{H}^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathscr{F})$ 是一一的。于是这个命题直接缘自命题 4。

定理 1. – 设 X 是一个拓扑空间，$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的一个开覆盖，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一个层。假设可以找到 X 的一族开覆盖 $\mathfrak{V}^\alpha$, $\alpha \in A$，满足下面两个条件:
(a) 对于 X 的任意开覆盖 $\mathfrak{W}$，均可找到 $\alpha \in A$，使得 $\mathfrak{V}^\alpha \preceq \mathfrak{W}$。
(b) 对任意 $\alpha \in A$、$S(I)$ 的任意单形 s、和任意 $q > 0$，均有 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{V}^\alpha_s, \mathscr{F}) = 0$。
则对任意 $n \geqslant 0$，$\sigma(\mathfrak{U}) : \mathrm{H}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(X, \mathscr{F})$ 都是一一的。

因为这些 $\mathfrak{V}^\alpha$ 可以足够精细，故我们可以假设它们都比 $\mathfrak{U}$ 精细。此时对任意 $n \geqslant 0$，同态

$$\sigma(\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{U}) \ : \ \mathrm{H}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathfrak{V}^\alpha, \mathscr{F})$$

都是一一的，这是根据命题 5。由于 $\mathfrak{V}^\alpha$ 可以足够精细，故知 $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{F})$ 是这些 $\mathrm{H}^n(\mathfrak{V}^\alpha, \mathscr{F})$ 的归纳极限，定理由此立得。

注解 — (1) 如果把条件 (b) 换成下面这个更弱的条件，定理 1 可能还是对的：
(b′) 对于 $S(I)$ 中的任意单形 s 和任意 $q > 0$，均有 $\lim_\alpha \mathrm{H}^q(\mathfrak{V}^\alpha_s, \mathscr{F}) = 0$。

(2) 定理 1 类似于 Leray 关于零调开覆盖的定理。参照 [10]，以及 [4], 报告 XVII-7。

第二章　代数多样体 — 仿射多样体上的代数性凝聚层

在下文中，K 总是指一个代数闭域，特征是任意的。

§1　代数多样体

¥30　Noether 空间

设 X 是一个拓扑空间。条件 (N) 是指下面的：

(N)　*X 中的闭子集的任何递减序列都是最终稳定的。*

换句话说，若我们有 $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$，并且这些 F_i 都是 X 的闭子集，则可以找到一个整数 n，使得当 $m \geqslant n$ 时，均有 $F_m = F_n$。或等价的：

(N′)　*X 的闭子集的集合，在包含关系所规定的顺序下，满足极小条件。*

（译注：满足条件 (N) 的拓扑空间也被称为 **Noether 空间**）。

例子 — 若我们给一个集合 X 赋予这样的拓扑，其中的闭子集就是 X 的有限子集和 X 本身，则条件 (N) 是成立的。更一般地，任何代数多样体在 Zariski 拓扑下都是 Noether 空间 (参照 ¥34)。

命题 1. – (a) *若 X 是 Noether 空间，则 X 是拟紧的。*
(b) *若 X 是 Noether 空间，则 X 的每一个子空间都是如此。*
(c) *若 X 是一族有限个 Noether 子空间 Y_i 的并集，则 X 也是 Noether 空间。*

若 F_i 是 X 的闭子集的一个递减滤相集，并且 X 满足条件 (N′)，则可以找到一个 F_i，它包含在所有其它这些闭子集之中；从而若 $\bigcap F_i = \varnothing$，则可以找到一个 i，使得 $F_i = \varnothing$，这就证明了 (a)。

设 $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \cdots$ 是 X 的某个子空间 Y 中的一个闭子集的递减序列；若 X 满足 (A)，则可以找到一个 n，使得当 $m \geqslant n$ 时，$\overline{G}_m = \overline{G}_n$，故得 $G_m = Y \cap \overline{G}_m = Y \cap \overline{G}_n = G_n$，这就证明了 (b)。

设 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ 是拓扑空间 X 中的一个闭子集的递减序列，且满足 (c)，则因为这些 Y_i 都满足 (N)，故可对每个 i 找到一个 n_i，使得当 $m \geqslant n_i$ 时，$F_m \cap Y_i = F_{n_i} \cap Y_i$；于是若 $n = \sup(n_i)$，则当 $m \geqslant n$ 时，我们有 $F_m = F_n$，这就证明了 (c)。

所谓一个拓扑空间 X 是不可约的，是指它不能写成两个不同于 X 自身的闭子集的并集；这也相当于说，X 的任意两个非空开集的交集都不是空的。从而 X 的任意一族有限个非空开集的交集也不是空的，并且 X 的每个开子集同样是不可约的。

命题 2. – *任何 Noether 空间 X 都可以写成有限个不可约闭子空间 Y_i 的并集。若我们假设对每一组 $i \neq j$，Y_i 都不包含在 Y_j 之中，则这些 Y_i 可被 X 所唯一确定；我们把这些 Y_i 称为 X 的不可约分支。*

分解 $X = \bigcup Y_i$ 的存在性显然缘自条件 (N)。若 Z_k 是 X 的另一个分解，则有 $Y_i = \bigcup Y_i \cap Z_k$，且由于 Y_i 是不可约的，这就蕴涵着对某个指标 k，我们有 $Z_k \supseteq Y_i$；把 Y_i 和 Z_k 的位置交换过来，我们同样可以找到一个指标 i'，使得 $Y_{i'} \supseteq Z_k$；故得 $Y_i \subseteq Z_k \subseteq Y_{i'}$，再基于 Y_i 上的前提条件，这就蕴涵着 $i = i'$ 且 $Y_i = Z_k$，由此立得分解的唯一性。

命题 3. – *设 X 是一个拓扑空间，并且是一族有限个非空开子集 V_i 的并集。则为了使 X 是不可约的，必须且只需这些 V_i 都是不可约的，并且对任意一对 (i,j)，均有 $V_i \cap V_j \neq \varnothing$。*

这些条件的必要性已经在上面指出；下面证明它们是充分的。若 $X = Y \cup Z$，其中 Y 和 Z 都是闭的，则有 $V_i = (V_i \cap Y) \cup (V_i \cap Z)$，这就证明了每个 V_i 都要么包含在 Y 中，要么包含在 Z 中。假设 Y 和 Z 都不同于 X，则可以找到两个指标 i, j，使得 V_i 不包含在 Y 中，V_j 不包含在 Z 中；从而根据上面所述，我们有 $V_i \subseteq Z$ 和 $V_j \subseteq Y$。设 $T = V_j \smallsetminus (V_i \cap V_j)$；$T$ 在 V_j 中是闭的，并且我们有 $V_j = T \cup (Z \cap V_j)$；由于 V_j 是不可约的，这就意味着要么 $T = V_j$，也就是说 $V_i \cap V_j = \varnothing$，要么 $Z \cap V_j = V_j$，也就是说 $V_j \subseteq Z$，这两个情形都会导致矛盾，证明完毕。

¶31 仿射空间的局部闭子集

设 r 是一个非负整数，并设 $X = K^r$ 是域 K 上的 r 维仿射空间。我们给 X 赋予 *Zariski* 拓扑；还记得所谓 X 的一个子集在这个拓扑下是闭的，是指它是一族多项式 $P^\alpha \in K[X_1, \ldots, X_r]$ 的公共零点集。因为多项式环是 Noether 的，所以由上节所述知，X 满足条件 (N)；进而很容易证明，X 是一个不可约空间。

若 $x = (x_1, \ldots, x_r)$ 是 X 的一个点，则我们用 $\mathscr{O}_{X,x}$ 来记 x 处的*局部环*；还记得它就是由域 $K(X_1, \ldots, X_r)$ 中的这样一些有理分式 R 所组成的子环，该分式有下面的形状：

$R = P/Q$，其中 P 和 Q 都是多项式，并且 $Q(x) \neq 0$。

我们把这样的有理分式称为在 x 处是正常的；于是在那些使 $Q(x) \neq 0$ 的点 $x \in X$ 所组成的集合上，函数 $x \mapsto P(x)/Q(x)$ 是一个 K 值连续函数（K 带有 Zariski 拓扑），我们可以把它等同于 R，因为域 K 是无限的。从而这些 $\mathscr{O}_{X,x}$ 构成 X 上的 K 值函数芽层 $\mathscr{C}_X$ (参照 n°3) 的一个子层 $\mathscr{O}_X$；层 $\mathscr{O}_X$ 是一个环层。

我们要把上述讨论扩展到 X 的局部闭子空间上（所谓拓扑空间 X 的一个子集在 X 中是局部闭的，是指它是 X 的一个开子集和一个闭子集的交集）。设 Y 是这样一个子空间，并设 $\mathscr{C}_Y$ 是 Y 上的 K 值函数芽层；若 x 是 Y 中的一个点，则函数的限制运算定义了一个典范同态

$$\varepsilon_x \ : \ \mathscr{C}_{X,x} \longrightarrow \mathscr{C}_{Y,x} \ 。$$

$\mathscr{O}_{X,x}$ 在 ε_x 下的像是 $\mathscr{C}_{Y,x}$ 的一个子环，我们把它记为 $\mathscr{O}_{Y,x}$；这些 $\mathscr{O}_{Y,x}$ 构成 $\mathscr{C}_Y$ 的一个子层 $\mathscr{O}_Y$，我们把它称为 Y 的结构层。从而根据定义，$\mathscr{O}_Y$ 在 Y 的开集 V 上的一个截面就是这样一个映射 $f : V \to K$，它在每一点 $x \in V$ 的某个邻域上都等于某个在 x 处正常的有理函数在 V 上的限制；这样一个函数 f 将被称为在 V 上是正常的；这是一个连续函数，只要我们给 V 赋予由 X 所诱导的拓扑，并给 K 赋予 Zariski 拓扑。在 V 的所有点处都正常的函数构成一个环 $\Gamma(V, \mathscr{O}_Y)$。我们还可以观察到，若 $f \in \Gamma(V, \mathscr{O}_Y)$，并且对任意 $x \in V$，均有 $f(x) \neq 0$，则 $1/f$ 也属于 $\Gamma(V, \mathscr{O}_Y)$。

我们还有层 $\mathscr{O}_Y$ 的另一个描述方法：

命题 4. – 设 U（切转：F）是 X 的一个开子空间（切转：闭子空间），并设 $Y = U \cap F$。设 $I(F)$ 是 $K[X_1, \ldots, X_r]$ 的这样一个理想，它是由所有在 F 上恒等于 0 的多项式所组成的。于是若 x 是 Y 的一个点，则满同态 $\varepsilon_x : \mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{Y,x}$ 的核就等于 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的理想 $I(F).\mathscr{O}_{X,x}$。

易见 $I(F).\mathscr{O}_{X,x}$ 的所有元素都落在 ε_x 的核之中。反过来，设 $R = P/Q$ 是这个核中的一个元素，其中 P 和 Q 是两个多项式，并且 $Q(x) \neq 0$。根据前提条件，可以找到 x 的一个开邻域 W，使得对任意 $y \in W \cap F$，均有 $P(y) = 0$；设 F' 是 W 的补集，它在 X 中是闭的；因为 $x \notin F'$，所以根据定义 Zariski 拓扑，可以找到一个多项式 P_1，它在 F' 上恒等于 0，且在 x 处不等于 0；于是多项式 $P.P_1$ 落在 $I(F)$ 中，且我们有 $R = P.P_1/Q.P_1$，这就证明了 $R \in I(F).\mathscr{O}_{X,x}$。

推论. — 环 $\mathscr{O}_{Y,x}$ 同构于 $K[X_1, \ldots, X_r]/I(F)$ 在点 x 所定义的极大理想处的分式环。

这可由商环的分式环的构造方法立得 (参照 比如说 [8], 第 XV 章 § 5, 定理 XI)。

n°32 正常映射

设 U（切转：V）是 K^r（切转：K^s）一个局部闭子空间。所谓一个映射 $\varphi : U \to V$ 在 U 上是正常的（或简称正常的），是指：

(a) φ 是连续的，
(b) 若 $x \in U$，并且 $f \in \mathscr{O}_{V,\varphi(x)}$，则 $f \circ \varphi \in \mathscr{O}_{U,x}$。

若我们把点 $\varphi(x)$ 的坐标记为 $\varphi_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant s$，则有：

命题 5. – 为了使 $\varphi : U \to V$ 在 U 上是正常的，必须且只需对任意 $1 \leqslant i \leqslant s$，诸 $\varphi_i : U \to K$ 在 U 上都是正常的。

由于坐标函数在 V 上都是正常的，故知这个条件是必要的。反过来，假设对任意 i，均有 $\varphi_i \in \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$；于是若 $P(X_1, \ldots, X_s)$ 是一个多项式，则函数 $P(\varphi_1, .., \varphi_s)$ 落在 $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$ 中，因为 $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$ 是一个环；因而这是 U 上的一个连续函数，从而它的零点集是闭的，这就证明了 φ 的连续性。若我们有 $x \in U$ 和 $f \in \mathscr{O}_{V,\varphi(x)}$，则 f 在局部上可以写成 $f = P/Q$ 的形状，其中 P 和 Q 都是多项式，并且 $Q(\varphi(x)) \neq 0$。此时函数 $f \circ \varphi$ 在 x 的邻域上等于 $P \circ \varphi / Q \circ \varphi$；根据我们刚刚所见，$P \circ \varphi$ 和 $Q \circ \varphi$ 在 x 的邻域上都是正常的；由于 $Q \circ \varphi(x) \neq 0$，故知 $f \circ \varphi$ 在 x 的邻域上是正常的，证明完毕。

两个正常映射的合成也是正常的。所谓一个一一映射 $\varphi : U \to V$ 是双向正常同构（或简称同构），是指 φ 和 φ^{-1} 都是正常映射；这也相当于说，φ 是 U 到 V 的一个同胚，且把层 $\mathscr{O}_U$ 转化为层 $\mathscr{O}_V$。

§33 乘积

若 r 和 r' 是两个非负整数，则我们把仿射空间 $K^{r+r'}$ 等同于乘积 $K^r \times K^{r'}$。$K^{r+r'}$ 上的 Zariski 拓扑比 K^r 和 $K^{r'}$ 的乘积拓扑精细；并且若 r 和 r' 都是正的，则前者严格地比后者精细。由此可知，若 U 和 U' 分别是 K^r 和 $K^{r'}$ 的局部闭子空间，则 $U \times U'$ 是 $K^{r+r'}$ 的一个局部闭子空间，从而层 $\mathscr{O}_{U\times U'}$ 是有定义的。

另一方面，设 W 是 K^t 的一个局部闭子空间，$t \geqslant 0$，并设 $\varphi : W \to U$ 和 $\varphi' : W \to U'$ 是两个映射。则由命题 5 立知，我们有：

命题 6. – 为了使映射 $x \mapsto (\varphi(x), \varphi'(x))$ 是 W 到 $U \times U'$ 的一个正常映射，必须且只需 φ 和 φ' 都是正常的。

由于常值映射都是正常的，故上述命题表明，对任何 $x'_0 \in U'$，截面 $x \mapsto (x, x'_0)$ 都是 U 到 $U \times U'$ 的一个正常映射；另一方面，投影 $U \times U' \to U$ 和 $U \times U' \to U'$ 显然都是正常的。

设 V 和 V' 分别是 K^s 和 $K^{s'}$ 的局部闭子空间，并且设 $\psi : U \to V$ 和 $\psi' : U' \to V'$ 是两个映射。则上述注解连同命题 6 表明，我们有 (参照 [1], 第 IV 章)：

命题 7. – 为了使 $\psi \times \psi' : U \times U' \to V \times V'$ 是正常的，必须且只需 ψ 和 ψ' 都是正常的。

故得：

推论 — 为了使 $\psi \times \psi'$ 是一个双向正常同构，必须且只需 ψ 和 ψ' 都是双向正常同构。

¥34 代数多样体结构的定义

定义 — 所谓 K 上的代数多样体(或简称代数多样体),是指一个集合 X,连同下面一些结构:

1° 一个拓扑,
2° 一个层 $\mathscr{O}_X$,它是 X 上的 K 值函数芽层 $\mathscr{C}_X$ 的子层,

我们还要求这些结构满足下面所说的公理 $(\mathrm{VA_I})$ 和 $(\mathrm{VA_{II}})$。 [6]

首先注意到若 X 和 Y 都被赋予了上述类型的结构,则我们可以定义什么叫 X 到 Y 上的同构:它就是 X 到 Y 上的这样一个同胚,它把 $\mathscr{O}_X$ 转化为 $\mathscr{O}_Y$。另一方面,若 X' 是 X 的一个开集,则我们可以给 X' 赋予诱导拓扑和稼入层:从而在开集上我们有诱导结构的概念。明确了这些事情,我们现在可以给出公理 $(\mathrm{VA_I})$:

$(\mathrm{VA_I})$ – 可以找到空间 X 的一个有限开覆盖 $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i\in I}$,使得每个 V_i 连同 X 在它上面的诱导结构都可以同构于某个仿射空间的局部闭子空间 U_i 连同 ¥31 中所定义的层 $\mathscr{O}_{U_i}$。

为使叙述简单起见,我们将把满足公理 $(\mathrm{VA_I})$ 的一个拓扑空间 X 与层 $\mathscr{O}_X$ 称为一个预代数多样体 [7]。一个指定的同构 $\varphi_i : V_i \to U_i$ 也被称为开集 V_i 上的一个坐标卡;从而条件 $(\mathrm{VA_I})$ 意味着我们可以用有限个具有坐标卡的开集把 X 覆盖起来。于是 ¥30 中的命题 1 表明,X 满足条件 (N),从而是拟紧的,且它的所有子空间都是如此。

X 上的拓扑将被称为“Zariski 拓扑”,层 $\mathscr{O}_X$ 将被称为 X 的结构层。

命题 8. – 设 X 是一个集合,并且是一族有限个子集 $X_j,\ j \in J$ 的并集。假设每个 X_j 上都有一个预代数多样体的结构,并且以下诸条件是成立的:

(a) 对所有 $i, j \in J$,$X_i \cap X_j$ 在 X_i 中都是开的,
(b) 对所有 $i, j \in J$,在 $X_i \cap X_j$ 上由 X_i 和 X_j 所诱导的两个结构都是重合的。

则在 X 上有唯一一个预代数多样体的结构,使得每个 X_j 在 X 中都是开的,并且此结构在每个 X_j 上所诱导的结构就是原来给出的那一个。

X 的拓扑和层 $\mathscr{O}_X$ 的存在性与唯一性是明显的;只消再检验这个拓扑和层满足 $(\mathrm{VA_I})$,而这是缘自下面的事实:这些 X_j 只有有限个,并且每一个都满足 $(\mathrm{VA_I})$。

推论 — 设 X 和 X' 是两个预代数多样体。则在 $X \times X'$ 上有唯一一个预代数多样体的结构,使得下面的条件成立:若 $\varphi : V \to U$ 和 $\varphi' : V' \to U'$ 是两个坐标卡(其中 V 是 X 的开集,V' 是 X' 的开集),则 $V \times V'$ 在 $X \times X'$ 中是开的,并且 $\varphi \times \varphi' : V \times V' \to U \times U'$ 是一个坐标卡。

[6]译注:按照概形的语言,这对应着“代数闭域上的既约有限型分离概形”,$(\mathrm{VA_{II}})$ 就是分离条件。这里并未包含“不可约”条件。

[7]译注:在概形的语言中,这就是“代数闭域上的既约有限型概形”。

把 X 用有限个具有坐标卡 $\varphi_i : V_i \to U_i$ 的开集 V_i 覆盖起来，并设 (V'_j, U'_j, φ'_j) 是 X' 的一个类似的覆盖。则集合 $X \times X'$ 是这些 $V_i \times V'_j$ 的并集；我们给每个 $V_i \times V'_j$ 都赋予 $U_i \times U'_j$ 上的结构在 $\varphi_i^{-1} \times \varphi_j'^{-1}$ 下的像所定义的预代数多样体结构，则命题 8 中的条件 (a) 和 (b) 可以应用到 $X \times X'$ 的这个开覆盖上，这是根据命题 7 的推论。这样我们就得到了 $X \times X'$ 上的一个预代数多样体的结构，且满足上面所说的条件。

我们可以把上述推论应用到 $X' = X$ 的特殊情形；于是 $X \times X$ 可以具有一个预代数多样体的结构，特别地，具有一个拓扑。现在我们可以来陈述公理 $(\mathrm{VA_{II}})$：

$(\mathrm{VA_{II}})$ – *$X \times X$ 的对角线 Δ 在 $X \times X$ 中是闭的。*

假设 X 是一个预代数多样体，并且是使用命题 8 中的“黏合”方法而得到的，则为了使条件 $(\mathrm{VA_{II}})$ 得到满足，必须且只需每个 $X_{ij} = \Delta \cap X_i \times X_j$ 在 $X_i \times X_j$ 中都是闭的。现在 X_{ij} 就是由满足 $x \in X_i \cap X_j$ 的那些 (x, x) 所组成的集合。于是若我们假设存在坐标卡 $\varphi_i : X_i \to U_i$，并设 $T_{ij} = \varphi_i \times \varphi_j(X_{ij})$，则 T_{ij} 是由 x 跑遍 $X_i \cap X_j$ 时这些 $(\varphi_i(x), \varphi_j(x))$ 所组成的集合。从而公理 $(\mathrm{VA_{II}})$ 可以写成下面的形状：

$(\mathrm{VA'_{II}})$ – *对任意一对 (i, j)，T_{ij} 在 $U_i \times U_j$ 中都是闭的。*

这个形式就是 Weil 的公理 (A) (参照 [16], p. 167)，只不过 Weil 仅考虑了不可约多样体。

代数多样体的例子：仿射空间的任何局部闭子空间 U 在诱导拓扑和 ¶31 中所定义的层 $\mathscr{O}_U$ 之下都是一个代数多样体。射影多样体都是代数多样体 (参照 ¶51)。底盘和纤维都是代数多样体的那种代数性纤维丛 (参照 [17]) 是代数多样体。

注解 — (1) *注意到条件* $(\mathrm{VA_{II}})$ *类似于拓扑流形、可微分流形、和解析流形上的分离性条件。*

(2) 从一些简单例子可以看出，条件 $(\mathrm{VA_{II}})$ *不是条件* $(\mathrm{VA_I})$ 的推论。

¶35　正常映射，诱导结构，乘积

设 X 和 Y 是两个代数多样体，φ 是 X 到 Y 的一个映射。所谓 φ 是正常的，是指：

(a) *φ 是连续的，*
(b) *若 $x \in X$，并且 $f \in \mathscr{O}_{Y,\varphi(x)}$，则有 $f \circ \varphi \in \mathscr{O}_{X,x}$。*

与 ¶32 一样，两个正常映射的合成也是正常的，并且为了使一个一一映射 $\varphi : X \to Y$ 是同构，必须且只需 φ 和 φ^{-1} 都是正常映射。从而正常映射构成代数多样体之间的一种态射，这是在 [1], 第 IV 章的意义下 [8]。

设 X 是一个代数多样体，X' 是 X 的一个局部闭子集。我们给 X' 赋予由 X 所

[8] 译注：使用范畴的语言，则代数多样体范畴中的态射就被定义为正常映射。

诱导的拓扑，并且定义 X' 上的层 $\mathscr{O}_{X'}$ 也是由 $\mathscr{O}_X$ 所诱导的（具体来说，对任意 $x \in X'$，我们定义 $\mathscr{O}_{X',x}$ 就是 $\mathscr{O}_{X,x}$ 在典范同态 $\mathscr{C}_{X,x} \to \mathscr{C}_{X',x}$ 下的像）。则公理 $(\mathrm{VA_I})$ 得到满足：若 $\varphi_i : V_i \to U_i$ 是一组坐标卡，并且 $X = \bigcup V_i$，则我们令 $V'_i = X' \cap V_i$，$U'_i = \varphi_i(V'_i)$，于是 $\varphi_i : V'_i \to U'_i$ 就是 $X' = \bigcup V'_i$ 上的一组坐标卡。公理 $(\mathrm{VA_{II}})$ 也是成立的，这是因为 $X' \times X'$ 上的拓扑就是由 $X \times X$ 上的拓扑所诱导的（也可以使用 $(\mathrm{VA'_{II}})$）。这样我们就在 X' 上定义了一个代数多样体的结构，称为由 X 所诱导的结构；我们也把 X' 称为 X 的一个子多样体，简称子体，只要不会导致误解（Weil [16] 中所说的"子体"只是我们这里的不可约闭子体）。若 ι 是指 X' 到 X 的含入，ι 是一个正常映射；进而，若 φ 是另一个代数多样体 Y 到 X' 的一个映射，则为了使 $\varphi : Y \to X'$ 是正常的，必须且只需 $\iota \circ \varphi : Y \to X$ 是正常的（这也解释了"诱导结构"这个名称的合理性，参照 [1], 前引）。

若 X 和 X' 是两个代数多样体，则 $X \times X'$ 是一个代数多样体，称为 X 和 X' 的乘积多样体。事实上，只需证明公理 $(\mathrm{VA'_{II}})$ 是成立的，换句话说，若 $\varphi_i : V_i \to U_i$ 和 $\varphi'_{i'} : V'_{i'} \to U'_{i'}$ 是两组坐标卡，满足 $X = \bigcup V_i$ 和 $X' = \bigcup V'_{i'}$，则集合 $T_{ij} \times T'_{i'j'}$ 在 $U_i \times U_j \times U'_{i'} \times U'_{j'}$ 中是闭的（记号与 ¶34 相同）；然而这可由下面的事实立得：T_{ij} 和 $T'_{i'j'}$ 分别在 $U_i \times U_j$ 和 $U'_{i'} \times U'_{j'}$ 中是闭的。

命题 6 和 7 可以不加改变地适用于任意的代数多样体。

若 $\varphi : X \to Y$ 是一个正常映射，则 φ 的图像 Φ 在 $X \times Y$ 中是闭的，因为它就是 $Y \times Y$ 的对角线在映射 $\varphi \times 1 : X \times Y \to Y \times Y$ 下的逆像；进而，由 $\psi(x) = (x, \varphi(x))$ 所定义的映射 $\psi : X \to \Phi$ 是一个同构。事实上，ψ 是一个正常映射，ψ^{-1} 也是如此（因为它是投影 $X \times Y \to X$ 的限制）。

¶36 不可约多样体上的有理函数域

我们首先证明两个纯拓扑的引理：

引理 1. – *设 X 是一个连通空间，G 是一个 Abel 群，$\mathscr{G}$ 是 X 上的常值层，同构于 G。则典范映射 $G \to \Gamma(X, \mathscr{G})$ 是一一的。*

$\Gamma(X, \mathscr{G})$ 中的一个元素刚好就是 X 到 G 的一个连续映射，后者带有离散拓扑。而因为 X 是连通的，所以这样的映射是常值的，这就证明了引理。

所谓拓扑空间 X 上的一个层 $\mathscr{F}$ 是局部常值的，是指 X 的每一点都具有一个邻域 U，使得 $\mathscr{F}|_U$ 在 U 上是常值的。

引理 2. – *不可约空间上的局部常值层都是常值的。*

设 $\mathscr{F}$ 是这样的层，X 是这样的空间，并且令 $F = \Gamma(X, \mathscr{F})$；我们只需要证明，对任意 $x \in X$，典范同态 $\rho_x : F \to \mathscr{F}_x$ 都是一一的，因为由此就可以得到一个从同构于 F 的常值层到给定的层 $\mathscr{F}$ 的同构。

若 $f \in F$，则由满足 $f(x) = 0$ 的点 $x \in X$ 所组成的集合是开的（这是基于层的

一般性质)，并且是闭的(因为 $\mathscr{F}$ 是局部常值的)；从而由于不可约空间都是连通的，故知这个集合要么是 $\varnothing$，要么是 X，这就证明了 ρ_x 是单的。

现在设 $m \in \mathscr{F}_x$，并设 s 是 $\mathscr{F}$ 在 x 的某个邻域 U 上的一个截面，满足 $s(x) = m$；把 X 用这样一些非空开集 U_i 覆盖起来，使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 在 U_i 上都是常值的，则因为 X 是不可约的，所以有 $U \cap U_i \neq \varnothing$；我们选取一个点 $x_i \in U \cap U_i$，则显然可以找到 $\mathscr{F}$ 在 U_i 上的一个截面 s_i，使得 $s_i(x_i) = s(x_i)$，且由于截面 s 和 s_i 在点 x_i 处是重合的，故知它们在整个 $U\cap U_i$ 上都是重合的，因为 $U\cap U_i$ 是不可约的，从而连通。同样地，s_i 和 s_j 在 $U_i\cap U_j$ 上是重合的，因为它们在 $U\cap U_i\cap U_j \neq \varnothing$ 上重合，从而这些截面 s_i 定义了 $\mathscr{F}$ 在 X 上的唯一一个截面 s，并且我们有 $\rho_x(s) = m$，这就完成了证明。

现在设 X 是一个不可约代数多样体。若 U 是 X 的一个非空开集，则 $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ 是一个整环。事实上，假设我们有 $f.g = 0$，并且 f 和 g 都是 U 到 K 的正常映射；于是若 F (切转：G)是由那些满足 $f(x) = 0$ (切转：$g(x) = 0$)的点 $x \in U$ 所组成的集合，则有 $U = F \cup G$，并且 F 和 G 在 U 中都是闭的，因为 f 和 g 都是连续的；由于 U 是不可约的，这就表示说 $F = U$ 或者 $G = U$，因而也意味着 f 或 g 在 U 上恒等于 0。从而我们可以谈论 $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ 的分式域，记为 $\mathscr{R}[U]$；若 $U \subseteq V$，则同态 $\rho_U^V : \Gamma(V, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ 是单的，因为 U 在 V 中是稠密的，并且我们有一个唯一确定的从 $\mathscr{R}[V]$ 到 $\mathscr{R}[U]$ 的同构 φ_U^V；这组 $\{\mathscr{R}[U], \varphi_U^V\}$ 就定义了一个域层 $\mathscr{R}$；并且 $\mathscr{R}_x$ 还典范同构于 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的分式域。

命题 9. – *对于不可约的代数多样体 X 来说，上面所定义的层 $\mathscr{R}$ 是一个常值层。*

有见于引理2，我们只需对于 X 是某个仿射空间 K^r 的局部闭子体的情形来证明这个命题；设 F 是 X 在 K^r 中的闭包，并设 $I(F)$ 是 $K[X_1, \dots, X_r]$ 的这样一个理想，它是由那些在 F 上(或者在 X 上，这是一回事)恒等于 0 的多项式所组成的。若我们令 $A = K[X_1, \dots, X_r]/I(F)$，则环 A 是一个整环，因为 X 是不可约的；设 $\mathrm{R}(A)$ 是 A 的分式域。根据命题4的推论，我们可以把 $\mathscr{O}_{X,x}$ 等同于 A 在 x 所定义的极大理想处的分式环；由此我们得到一个从域 $\mathrm{R}(A)$ 到 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的分式域的同构，且容易验证，这就定义了一个从等于 $\mathrm{R}(A)$ 的常值层到层 $\mathscr{R}$ 的同构，因而也证明了命题。

根据引理1，层 $\mathscr{R}$ 的整体截面构成一个域，且同构于每个 $\mathscr{R}_x$ $(x \in X)$，我们记之为 $\mathrm{R}(X)$，并且称之为 X 的*有理函数域*。这是域 K 的一个有限型扩张，它在 K 上的超越次数就是 X 的维数(可以把这个定义延伸到可约的代数多样体，只要把 X 写成了它的一些不可约闭子体 Y_i 的并集，然后令 $\dim X = \sup \dim Y_i$)。我们将把域 $\mathrm{R}(X)$ 等同于这些域 $\mathscr{R}_x$；由于 $\mathscr{O}_{X,x} \subseteq \mathscr{R}_x$，从而这也就把 $\mathscr{O}_{X,x}$ 也等同于 $\mathrm{R}(X)$ 的一个*子环*(它就是 $\mathrm{R}(X)$ 在点 x 处的特殊化环，这是在 Weil, [16], p. 77 的意义下)。从而若 U 在 X 中是开的，则 $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ 就是这些环 $\mathscr{O}_{X,x}$ $(x \in U)$ 在 $\mathrm{R}(X)$ 中的交集。

若 Y 是 X 的一个子体，则有 $\dim Y \leqslant \dim X$；进而若 Y 是闭的，并且不包含 X 的任何一个不可约分支，则有 $\dim Y < \dim X$，这可以通过归结到 K^r 的子体的情形而得到(比如参照 [8], 第 X 章 §5, 定理 II)。

§ 2　代数性凝聚层

ⵣ 37　代数多样体的结构层

我们回到ⵣ 31 中的记号：设 $X = K^r$，并设 $\mathscr{O}_X$ 是 X 的结构层。我们有：

引理 1. – *层 $\mathscr{O}_X$ 是一个凝聚环层，这是在ⵣ 15 的意义下。*

设 $x \in X$，U 是 x 的一个邻域，$f_1, \ldots, f_p$ 是 $\mathscr{O}_X$ 在 U 上的一组截面，也就是说，是一组在 U 的所有点处都正常的有理函数；我们需要证明，这些 $f_1, \ldots, f_p$ 之间的关系层是 $\mathscr{O}_X$ 上的一个有限型层。不妨把 U 换成一个更小的邻域，从而可以假设这些 f_i 都可以写成 $f_i = P_i/Q$，其中 P_i 和 Q 都是多项式，并且 Q 在 U 上处处不等于 0。现在设 $y \in U$，并且设一组 $g_i \in \mathscr{O}_{X,y}$ 可以使得 $\sum_{i=1}^{p} g_i f_i$ 在 y 的邻域上恒等于 0；我们也可以把 g_i 写成 $g_i = R_i/S$ 的形状，其中 R_i 和 S 都是多项式，并且 S 在 y 处不等于 0。于是关系式"在 y 的邻域上 $\sum_{i=1}^{p} g_i f_i = 0$"等价于关系式"在 y 的邻域上 $\sum_{i=1}^{p} R_i P_i = 0$"，后者又等价于 $\sum_{i=1}^{p} R_i P_i = 0$。由于这些多项式 P_i 之间的关系模是一个有限型模（因为多项式环是 Noether 的），故由此得知，这些 f_i 之间的关系层也是有限型的。

现在设 V 是 $X = K^r$ 的一个闭子体；对任意 $x \in X$，设 $\mathscr{I}(V)_x$ 是 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的这样一个理想，它是由那些在 x 的某个 V 中的邻域上恒等于 0 的元素 $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ 所组成的（从而若 $x \notin V$，则有 $\mathscr{I}(V)_x = \mathscr{O}_{X,x}$）。这些 $\mathscr{I}(V)_x$ 构成层 $\mathscr{O}_X$ 的一个子层 $\mathscr{I}(V)$。

引理 2. – *层 $\mathscr{I}(V)$ 是一个凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模层。*

设 $I(V)$ 是 $K[X_1, \ldots, X_r]$ 的这样一个理想，它是由那些在 V 上等于 0 的多项式 P 所组成的。根据ⵣ 31, 命题 4，对任意 $x \in V$，$\mathscr{I}(V)_x$ 都等于 $I(V).\mathscr{O}_{X,x}$，并且易见这个公式在 $x \notin V$ 处也成立。现在理想 $I(V)$ 是由有限个元素所生成的，故可由此得知，层 $\mathscr{I}(V)$ 是有限型的，从而是凝聚的，这是根据引理 1 以及ⵣ 15, 命题 8。

现在我们要把引理 1 扩展到任意的代数多样体上：

命题 1. – *若 V 是一个代数多样体，则层 $\mathscr{O}_V$ 是 V 上的一个凝聚环层。*

问题是局部性的，我们可以假设 V 是仿射空间 $X = K^r$ 的一个闭子体。根据引理 2，层 $\mathscr{I}(V)$ 是一个凝聚理想层，从而层 $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}(V)$ 是 X 上的一个凝聚环层，这是根据ⵣ 16, 定理 3。这个环层在 V 之外等于 0，并且它在 V 上的限制刚好就是 $\mathscr{O}_V$（ⵣ 31）；从而层 $\mathscr{O}_V$ 是 V 上的一个凝聚环层（ⵣ 17, 命题 11 的推论）。

注解 — 易见命题 1 对于预代数多样体也是成立的。

§38　代数性凝聚层

若 V 是一个代数多样体，结构层是 $\mathscr{O}_V$，则我们把 $\mathscr{O}_V$ 模层(在§6的意义下)也称为 V 上的代数性层；若 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是两个代数性层，所谓 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是一个代数性同态(或简称同态)，是指它是一个 $\mathscr{O}_V$ 同态；还记得这等价于说每个 $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ 都是 $\mathscr{O}_{V,x}$ 线性的，并且 φ 把 $\mathscr{F}$ 的任何局部截面都转化为 $\mathscr{G}$ 的局部截面。

若 $\mathscr{F}$ 是 V 上的一个代数性层，则这些上同调群 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{F})$ 都是 $\Gamma(V, \mathscr{O}_V)$ 上的模，参照§23；特别地，它们都是 K 上的向量空间。

所谓 V 上的一个代数性层 $\mathscr{F}$ 是凝聚的，是指它是§12中所说的凝聚 $\mathscr{O}_V$ 模层；基于§15, 命题7和上面的命题1，这样的一个层可以有下面的特征描述，即它可以在局部上同构于某个代数性同态 $\varphi : \mathscr{O}_V^q \to \mathscr{O}_V^p$ 的余核。

下面我们要给出一些代数性凝聚层的例子(后面还会给出更多，特别是在§48, 57中)。

§39　闭子体所定义的理想层

设 W 是代数多样体 V 的一个闭子体。对任意 $x \in V$，设 $\mathscr{I}(W)_x$ 是 $\mathscr{O}_{V,x}$ 的这样一个理想，它是由那些在 x 的某个 W 中的邻域上恒等于0的元素 f 所组成的；设 $\mathscr{I}(W)$ 是由这些 $\mathscr{I}(W)_x$ 所组成的 $\mathscr{O}_V$ 的子层。则我们有下面的命题，它是引理2的推广：

命题 2. – *层 $\mathscr{I}(W)$ 是一个代数性凝聚层。*

问题是局部性的，我们可以假设 V 是(从而 W 也是)仿射空间 K^r 的一个闭子体。于是把引理2应用到 W 上可知，W 在 K^r 上所定义的理想层是有限型的；因而 $\mathscr{I}(W)$ 作为典范同态 $\mathscr{O} \to \mathscr{O}_V$ 的像同样是有限型的，从而是凝聚的，这是根据§15, 命题8和§37, 命题1。

设 $\mathscr{O}_W$ 是 W 的结构层，并设 $\mathscr{O}_W^V$ 是由 $\mathscr{O}_W$ 通过在 W 之外进行零延拓而得到的 V 上的层 (参照§5)，则这个层典范同构于 $\mathscr{O}_V/\mathscr{I}(W)$，换句话说，我们有一个正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}(W) \longrightarrow \mathscr{O}_V \longrightarrow \mathscr{O}_W^V \longrightarrow 0 \quad 。$$

现在设 $\mathscr{F}$ 是 W 上的一个代数性层，并设 $\mathscr{F}^V$ 是由 $\mathscr{F}$ 通过在 W 之外进行零延拓而得到的层，则可以把 $\mathscr{F}^V$ 看作是一个 $\mathscr{O}_W^V$ 模层，从而也是一个 $\mathscr{O}_V$ 模层，且它的零化子包含 $\mathscr{I}(W)$。我们有：

命题 3. – *若 $\mathscr{F}$ 是 W 上的一个代数性凝聚层，$\mathscr{F}^V$ 是 V 上的一个代数性凝聚层。反过来，若 $\mathscr{G}$ 是 V 上的一个代数性凝聚层，并且其零化子包含 $\mathscr{I}(W)$，则 $\mathscr{G}$ 在 W 上的限制是 W 上的一个代数性凝聚层。*

若 $\mathscr{F}$ 是 W 上的一个代数性凝聚层，$\mathscr{F}^V$ 是一个凝聚 $\mathscr{O}_W^V$ 模层 (§17, 命题11)，从而是一个凝聚 $\mathscr{O}_V$ 模层 (§16, 定理3)。反过来，若 $\mathscr{G}$ 是 V 上的一个代数性凝聚

层，并且其零化子包含 $\mathscr{I}(W)$，则可以把 $\mathscr{G}$ 看作是一个 $\mathscr{O}_V/\mathscr{I}(W)$ 模层，且它是一个凝聚层 (ᚼ16, 定理 3)；于是 $\mathscr{G}$ 在 W 上的限制是一个凝聚 $\mathscr{O}_W$ 模层 (ᚼ17, 命题 11)。

这样一来，W 上的任何代数性凝聚层都可以等同于 V 上的一个代数性凝聚层 (并且这个等同不改变上同调群，这是根据 ᚼ26, 命题 8)。特别地，仿射多样体 (切转：射影多样体) 上的任何代数性凝聚层都可以看作是仿射空间 (切转：射影空间) 上的代数性凝聚层；我们在下文中会经常使用这个技术。

注解 — 设 $\mathscr{G}$ 是 V 上的一个代数性凝聚层，且在 W 之外等于 0，则 $\mathscr{G}$ 的零化子未必包含 $\mathscr{I}(W)$ (换句话说，$\mathscr{G}$ 并不能总成为 W 上的一个代数性凝聚层)；但有一点是确定的，即它总能包含 $\mathscr{I}(W)$ 的某个方幂。

ᚼ40 分式理想层

设 V 是一个不可约代数多样体，$\mathrm{R}(V)$ 是 V 上的有理函数的常值层 (参照 ᚼ36)，则 $\mathrm{R}(V)$ 是一个代数性层，并且当 $\dim V > 0$ 时，它不是凝聚的。我们可以把 $\mathrm{R}(V)$ 的一个代数性子层 $\mathscr{F}$ 称为一个"分式理想层"，因为每个 $\mathscr{F}_x$ 都是 $\mathscr{O}_{V,x}$ 的一个分式理想。

命题 4. – *为了使 $\mathrm{R}(V)$ 的一个代数性子层 $\mathscr{F}$ 是凝聚的，必须且只需它是有限型的。*

必要性是显然的。为了证明充分性，只需证明 $\mathrm{R}(V)$ 满足 ᚼ12, 定义 2 中的条件 (b)，换句话说，若 $f_1, \ldots, f_p$ 是一组有理分式，则层 $\mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p)$ 是有限型的。若 x 是 V 的一个点，则可以找到函数 g_i 和 h，使得 $f_i = g_i/h$，其中 g_i 和 h 在 x 的某个邻域 U 上是正常的，并且 h 在 U 上处处不等于 0；于是层 $\mathscr{R}(f_1, \ldots, f_p)$ 就等于层 $\mathscr{R}(g_1, \ldots, g_p)$，且它是有限型的，因为 $\mathscr{O}_V$ 是一个凝聚环层。

ᚼ41 向量丛的伴生层

设 E 是一个代数性纤维丛，纤维是 r 维向量空间，底盘是一个代数多样体 V；根据定义，E 的纤维型就是向量空间 K^r，结构群就是一般线性群 $\mathbf{GL}(r, K)$，且它在 K^r 上的作用就是按照通常的方式 (关于代数性纤维丛的定义，参照 [17]；也参考 [15], ᚼ4 中对于解析向量丛的讨论)。

若 U 是 V 的一个开集，设 $\mathscr{S}(E)[U]$ 是 E 在 U 上的正常截面的集合；若 $U' \supseteq U$，则有一个限制同态 $\varphi_U^{U'} : \mathscr{S}(E)[U'] \to \mathscr{S}(E)[U]$；故我们得到一个层 $\mathscr{S}(E)$，称为 E 的*截面芽层*。基于 E 是向量丛的事实，每个 $\mathscr{S}(E)[U]$ 都是 $\Gamma(U, \mathscr{O}_V)$ 模，因而 $\mathscr{S}(E)$ 是 V 上的一个代数性层。若我们把 E 局部等同于 $V \times K^r$，则可以看到：

命题 5. – *层 $\mathscr{S}(E)$ 在局部上同构于 $\mathscr{O}_V^r$；特别地，它是一个代数性凝聚层。*

反过来，容易看出V上的任何代数性层$\mathscr{F}$，只要在局部上同构于$\mathscr{O}_V^r$，就可以同构于这样一个层$\mathscr{S}(E)$，其中E可以确定到只差一个同构 (参照 [15] 中对于解析情形的讨论)。

若V是一个平滑多样体，则我们可以取E是V上的p阶余切向量丛（ p是一个非负整数）；设Ω^p是对应的层$\mathscr{S}(E)$，则对于$x \in V$，Ω_x^p中的一个元素就是V上的一个在x处正常的p阶微分形式。若令$h^{p,q} = \dim_K \mathrm{H}^q(V, \Omega^p)$，则我们知道，在古典情形中（即复数域上，并假设$V$是射影的），$h^{p,q}$就等于$(p,q)$型调和形式空间的维数（Dolbeault 定理 [9]），并且若B_n是指V的第n个Betti数，则有$B_n = \sum_{p+q=n} h^{p,q}$。在一般情形下（即任意代数闭域上），我们可以用上面的公式来作为平滑射影多样体的Betti数的定义（实际上，我们将在 ¶66 中看到，这些$h^{p,q}$都是有限的）。有必要考察它们的性质，以了解它们是否满足有限域上的多样体的Weil猜想中的要求 [10]。我们仅指出，它们具有“ Poincaré对偶”性质$B_n = B_{2m-n}$，只要V是不可约的，且维数是m。

这些上同调群$\mathrm{H}^q(V, \mathscr{S}(E))$也出现在其它一些问题中，比如说Riemann-Roch定理，或者底盘为V结构群为仿射变换群$x \mapsto ax + b$的代数性纤维丛的分类问题（参照 [17], § 4，该处讨论了$\dim V = 1$的情形）等。

§ 3 仿射多样体上的代数性凝聚层

¶ 42 仿射多样体

所谓一个代数多样体V是仿射的，是指它同构于仿射空间的一个闭子体。两个仿射多样体的乘积仍然是一个仿射多样体；仿射多样体的闭子体也都是仿射多样体。

所谓代数多样体X的一个开子集U是仿射的，是指它在由X上的代数多样体结构所诱导的结构下是一个仿射多样体。

命题 1. – 设U和V是代数多样体X的两个开子集。若U和V都是仿射的，则$U \cap V$也是仿射的。

设Δ是$X \times X$的对角线；根据 ¶35，映射$x \mapsto (x, x)$是X到Δ上的一个双向正则的同构；从而这个映射在$U \cap V$上的限制是$U \cap V$到$\Delta \cap U \times V$上的一个双向正常同构。由于U和V都是仿射多样体，故知$U \times V$也是一个仿射多样体；另一方面，Δ在$X \times X$中是闭的，这是根据公理$(\mathrm{VA_{II}})$，从而$\Delta \cap U \times V$在$U \times V$中是闭的，因而它也是一个仿射多样体，证明完毕。

（容易看出这个命题对于预代数多样体是不对的：公理$(\mathrm{VA_{II}})$在这里起了实质的作用）。

[9] P. Dolbeault. Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes. C. R. Paris, 236, 1953, p. 175-177。

[10] Bulletin Amer. Math. Soc., 55, 1949, p. 507.

现在我们要引入一个常用的记号：若 V 是一个代数多样体，并且 f 是 V 上的一个正常函数，则我们用 V_f 来记 V 的这样一个开子集，它是由那些满足 $f(x) \neq 0$ 的点 $x \in V$ 所组成的集合。

命题 2. – 若 V 是一个仿射代数多样体，f 是 V 上的一个正常函数，则开集 V_f 是一个仿射开集。

设 W 是 $V \times K$ 的这样一个子集，由满足 $\lambda.f(x) = 1$ 的二元组 (x, λ) 所组成，则易见 W 在 $V \times K$ 中是闭的，从而是一个仿射多样体。对任意 $(x, \lambda) \in W$，令 $\pi(x, \lambda) = x$；映射 π 是 W 到 V_f 的一个正常映射。反过来，对任意 $x \in V_f$，令 $\omega(x) = (x, 1/f(x))$，则映射 $\omega : V_f \to W$ 是正常的，并且我们有 $\pi \circ \omega = 1$，$\omega \circ \pi = 1$，从而 V_f 和 W 是同构的，证明完毕。

命题 3. – 设 V 是 K^r 的一个闭子体，F 是 V 的一个闭子集，$U = V \smallsetminus F$。则当 P 跑遍那些在 F 上恒等于 0 的多项式的集合时，这些开集 V_P 构成 U 的一个拓扑基。

设 $U' = V \smallsetminus F'$ 是 U 的一个开集，并设 $x \in U'$，则我们需要证明，可以找到一个 P，使得 $V_P \subseteq U'$ 且 $x \in V_P$。换句话说，P 必须是在 F' 上恒等于 0 但在 x 处不等于 0 的；这样一个多项式的存在性可由 K^r 上的拓扑的定义立得。

定理 1. – 代数多样体 X 上的全体仿射开集构成 X 的一个拓扑基。

问题是局部性的，故可假设 X 是仿射空间 K^r 的一个局部闭子体；在这个情形下，定理可由命题 2 和 3 立得。

推论 — X 的由仿射开覆盖可以足够精细。

注意到若 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 是一个这样的开覆盖，则 $U_{i_0 \dots i_p}$ 都是仿射开集，这是根据命题 1。

⁋43 不可约多样体的几个基本性质

设 V 是 K^r 的一个闭子体，并设 $I(V)$ 是 $K[X_1, \dots, X_r]$ 的这样一个理想，它是由那些在 V 上等于 0 的多项式所组成的；设 A 是商环 $K[X_1, \dots, X_r]/I(V)$；我们有一个典范同态

$$\iota \ : \ A \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{O}_V)$$

它是单的，这是根据 $I(V)$ 的定义。

命题 4. – 若 V 是不可约的，则 $\iota : A \to \Gamma(V, \mathscr{O}_V)$ 是一一的。

（实际上，这对于 K^r 的所有闭子体都是对的，我们将在下一小节证明这一点）。

设 $\mathrm{R}(V)$ 是 A 的分式域；根据 ⁋36，可以把 $\mathscr{O}_{V,x}$ 等同于 A 在极大理想 $\mathfrak{m}_x$ 处的分式环，这个 $\mathfrak{m}_x$ 就是由所有在 x 处等于 0 的多项式所组成的，并且我们有 $\Gamma(V, \mathscr{O}_V) = A = \bigcap_{x \in V} \mathscr{O}_{V,x}$（这里把所有 $\mathscr{O}_{V,x}$ 都看作是 $\mathrm{R}(V)$ 的子环）。然而 A 的每个极大理

想都等于某个$\mathfrak{m}_x$，因为K是代数闭的 (Hilbert零点定理)；由此立知 (参照 [8], 第XV章§5, 定理X)，$A = \bigcap_{x \in V} \mathscr{O}_{V,x} = \Gamma(V, \mathscr{O}_V)$，证明完毕。

命题 5. – 设X是一个不可约代数多样体，Q是X上的一个正常函数，P是X_Q上的一个正常函数。则对任意充分大的n，有理函数Q^nP在整个X上都是正常的。

有见于X的拟紧性，问题是局部性的；从而根据定理1，可以假设X是K^r的一个闭子体。此时上一个命题表明，Q是$A = K[X_1, \ldots, X_r]/I(X)$中的一个元素。$P$上的条件意味着对任意点$x \in X_Q$，均可找到一个写法$P = P_x/Q_x$，其中$P_x$和$Q_x$都属于$A$，并且$Q_x(x) \neq 0$；若$\mathfrak{a}$是指这些$Q_x$在$A$中所生成的理想，则$\mathfrak{a}$的零点多样体包含在$Q$的零点多样体之中；依照Hilbert零点定理，这就表明对于足够大的n，我们有$Q^n \in \mathfrak{a}$，故得$Q^n = \sum R_x.Q_x$，因而$Q^nP = \sum R_x.P_x$，其中$R_x \in A$，这也就证明了Q^nP在X上是正常的。

(也可以使用下面这个事实：即若X是仿射的，则X_Q也是仿射的，再把命题4应用到X_Q上)。

命题 6. – 设X是一个不可约代数多样体，Q是X上的一个正常函数，$\mathscr{F}$是X上的一个代数性凝聚层，s是$\mathscr{F}$在X上的一个截面，且它在X_Q上的限制等于0。则对任意充分大的n，截面Q^ns在整个X上都是0。

问题仍然是局部性的，故我们可以假设：

(a) X是K^r的一个闭子体，
(b) $\mathscr{F}$同构于某个同态$\varphi : \mathscr{O}_X^p \to \mathscr{O}_X^q$的余核，
(c) s是$\mathscr{O}_X^q$的某个截面σ的像。

(事实上，所有这些条件在局部上都是成立的)。

令$A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X) = K[X_1, \ldots, X_r]/I(X)$。则截面$\sigma$可以等同于$A$中的$q$个元素。另一方面，设

$$t_1 = \varphi(1, 0, \ldots, 0) , \quad \ldots \quad , t_p = \varphi(0, \ldots, 0, 1) \ ;$$

则这些t_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$都是$\mathscr{O}_X^q$在$X$上的截面，从而也可以等同于$A$中的$q$个元素。$s$上的条件意味着对任意$x \in X_Q$，均有$\sigma(x) \in \varphi(\mathscr{O}_{X,x}^p)$，也就是说，$\sigma$可以写成$\sigma = \sum_{i=1}^{p} f_i.t_i$的形状，其中$f_i \in \mathscr{O}_{X,x}$；或者消去分母，即可以找到$Q_x \in A$，满足$Q_x(x) \neq 0$，且使得$Q_x.\sigma = \sum_{i=1}^{p} R_i.t_i$，其中$R_i \in A$。于是上面的证明方法表明，对任意充分大的$n$，$Q^n$都落在由这些$Q_x$所生成的理想之中，故对任意$x \in X$，均有$Q^n\sigma(x) \in \varphi(\mathscr{O}_{X,x}^p)$，这也就意味着$Q^ns$在整个$X$上都等于0。

§44 上同调群的消逝性

命题 7. – 设X是一个不可约仿射多样体，Q_i是X上的一族有限个正常函数，

且在每一点处都不会同时等于 0，$\mathfrak{U}$ 是 X 的这样一个开覆盖，它是由这些 $U_i = X_{Q_i}$ 所组成的。于是若 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{O}_X^p$ 的一个代数性凝聚子层，则对任意 $q > 0$，均有 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$。

不妨把 $\mathfrak{U}$ 换成一个等价的开覆盖，从而可以假设没有一个函数 Q_i 是恒等于 0 的，换句话说，对任意 i，均有 $U_i \neq \varnothing$。

设 $f = (f_{i_0\dots i_q})$ 是 $\mathfrak{U}$ 的一个取值在 $\mathscr{F}$ 中的 q 阶上圈。其中 $f_{i_0\dots i_q}$ 是 $\mathscr{F}$ 在 $U_{i_0\dots i_q}$ 上的一个截面，从而可以等同于 $U_{i_0\dots i_q}$ 上的 p 个正常函数；把命题 5 应用到 $Q = Q_{i_0}\dots Q_{i_q}$ 上，我们看到，对任意充分大的 n，$g_{i_0\dots i_q} = (Q_{i_0}\dots Q_{i_q})^n f_{i_0\dots i_q}$ 都是整个 X 上的 p 个正常函数，换句话说，是 $\mathscr{O}^p$ 在 X 上的一个截面。选取一个整数 n 使得这件事对所有 $(i_0, \dots, i_q)$ 都成立，这是可以做到的，因为指标只有有限个。考虑 $g_{i_0\dots i_q}$ 在凝聚层 $\mathscr{O}_X^p/\mathscr{F}$ 中的像；这个截面在 $U_{i_0\dots i_q}$ 上等于 0；现在应用命题 6，则我们看到，对任意充分大的 m，这个截面与 $(Q_{i_0}\dots Q_{i_q})^m$ 的乘积都在整个 X 上等于 0，这就意味着 $(Q_{i_0}\dots Q_{i_q})^m g_{i_0\dots i_q}$ 是 $\mathscr{F}$ 在整个 X 上的一个截面。从而若取 $N = m + n$，则我们得到 $\mathscr{F}$ 在 X 上的截面 $h_{i_0\dots i_q}$，它在 $U_{i_0\dots i_q}$ 上重合于 $(Q_{i_0}\dots Q_{i_q})^N f_{i_0\dots i_q}$。

由于这些 Q_i^N 不会在任一点处同时为 0，故可找到一组函数

$$R_i \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$$

使得 $\sum R_i.Q_i^N = 1$。现在对任意一组 $i_0, \dots, i_{q-1}$，令：

$$k_{i_0\dots i_{q-1}} = \sum_i R_i.h_{ii_0\dots i_{q-1}}/(Q_{i_0}\dots Q_{i_{q-1}})^N \quad ,$$

这是有意义的，因为 $Q_{i_0}\dots Q_{i_{q-1}}$ 在 $U_{i_0\dots i_{q-1}}$ 上处处不等于 0。

这样就定义了一个上链 $k \in \mathrm{C}^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$。我们指出，$f = dk$，这就可以证明上述命题。

需要验证 $(dk)_{i_0\dots i_q} = f_{i_0\dots i_q}$；为此只需证明这两个截面在 $U = \bigcap U_i$ 上是重合的，因为由此就知道它们处处重合，因为它们都是 X 上的 p 个有理函数，并且 $U \neq \varnothing$。然而在 U 上我们可以写出

$$k_{i_0\dots i_{q-1}} = \sum_i R_i.Q_i^N.f_{ii_0\dots i_{q-1}} \quad ,$$

故得

$$(dk)_{i_0\dots i_q} = \sum_{j=0}^{q}(-1)^j \sum_i R_i.Q_i^N.f_{ii_0\dots \hat{i}_j\dots i_q} \quad ,$$

有见于 f 是上圈的事实，就有

$$(dk)_{i_0\dots i_q} = \sum_i R_i.Q_i^N.f_{i_0\dots i_q} = f_{i_0\dots i_q} \quad ,$$

证明完毕。

推论 1. – 当 $q>0$ 时，我们有 $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})=0$。

事实上，命题 3 表明，命题 7 中所使用的这种开覆盖可以足够精细。

推论 2. – 同态 $\Gamma(X,\mathscr{O}_X^p)\to\Gamma(X,\mathscr{O}_X^p/\mathscr{F})$ 是满的。

这是缘自上面的推论 1 以及 ¶24 中的命题 6 的推论 2。

推论 3. – 设 V 是 K^r 的一个闭子体，并设

$$A \ = \ K[X_1,\ldots,X_r]/I(V) \quad 。$$

则同态 $\iota:A\to\Gamma(V,\mathscr{O}_V)$ 是一一的。

可以把上面的推论 2 应用到 $X=K^r$, $p=1$, $\mathscr{F}=\mathscr{I}(V)$（$V$ 所定义的理想层）上；由此得知，$\Gamma(V,\mathscr{O}_V)$ 中的任何元素都是 $\mathscr{O}$ 在 X 上的某个截面（也就是说，某个多项式，这是根据命题 4，应用到 X 上）的限制。

¶ 45 仿射多样体上的代数性凝聚层的截面

定理 2. – 设 $\mathscr{F}$ 是仿射多样体 X 上的一个代数性凝聚层。则对任意 $x\in X$，$\mathscr{O}_{X,x}$ 模 $\mathscr{F}_x$ 都可由 $\Gamma(X,\mathscr{F})$ 中的元素所生成。

因为 X 是仿射的，所以我们能把它看作是某个仿射空间 K^r 的闭子体；把层 $\mathscr{F}$ 在 X 之外进行零延拓，我们得到 K^r 上的一个代数性凝聚层 (参照 ¶39)，从而问题归结为对这个新的层来证明这个定理。换句话说，我们可以假设 $X=K^r$。

根据凝聚层的定义，可以找到 X 的一个开覆盖，使得 $\mathscr{F}$ 在其中的每个开集上都同构于某个层 $\mathscr{O}_X^p$ 的商层。通过命题 3 我们看到，可以找到有限个多项式 Q_i，在任何点处不会同时为 0，并且在每个 $U_i=X_{Q_i}$ 上都有一个满同态 $\varphi_i:\mathscr{O}_X^{p_i}\to\mathscr{F}$；进而可以假设没有一个多项式恒等于 0。

点 x 落在某个 U_i 中，比如说 U_0；易见 $\mathscr{F}_x$ 可由 $\mathscr{F}$ 在 U_0 上的截面所生成；由于 Q_0 在 $\mathscr{O}_{X,x}$ 中是可逆的，从而我们只需证明下面的引理：

引理 1. – 若 s_0 是 $\mathscr{F}$ 在 U_0 上的一个截面，则可以找到一个整数 N 和 $\mathscr{F}$ 在 X 上的一个截面 s，使得在 U_0 上有 $s=Q_0^N.s_0$。

根据命题 2，$U_i\cap U_0$ 是一个仿射多样体，且显然是不可约的；把命题 7 的推论 2 应用到这个多样体和 $\varphi_i:\mathscr{O}_X^{p_i}\to\mathscr{F}$ 上，我们看到在 $U_i\cap U_0$ 上可以找到 $\mathscr{O}_X^{p_i}$ 的一个截面 σ_{0i}，使得在 $U_i\cap U_0$ 上有 $\varphi_i(\sigma_{0i})=s_0$；由于 $U_i\cap U_0$ 就是由 U_i 中的那些使得 Q_0 不等于 0 的点所组成的，故我们可以把命题 5 应用到 $X=U_i$ 和 $Q=Q_0$ 上，由此得知，对于足够大的 n，可以找到 $\mathscr{O}_X^{p_i}$ 在 U_i 上的一个截面 σ_i，它在 $U_i\cap U_0$ 上与 $Q_0^n.\sigma_{0i}$ 是重合的；现在令 $s'_i=\varphi_i(\sigma_i)$，则我们得到 $\mathscr{F}$ 在 U_i 上的一个截面，它在 $U_i\cap U_0$ 上与 $Q_0^n.s_0$ 重合。截面 s'_i 和 s'_j 在 $U_i\cap U_j\cap U_0$ 上是重合的；把命题 6 应用到 $s'_i-s'_j$ 上，则我们看到，对于充分大的 m，在整个 $U_i\cap U_j$ 上都有 $Q_0^m.(s'_i-s'_j)=$

0。于是这些 $Q_0^m.s'_i$ 可以定义出 $\mathscr{F}$ 在 X 上的唯一一个截面 s，并且在 U_0 上我们有 $s = Q_0^{n+m}s_0$，这就证明了引理，也完成了定理 2 的证明。

推论 1. – *层 $\mathscr{F}$ 同构于某个层 $\mathscr{O}_X^p$ 的商层。*

因为 $\mathscr{F}_x$ 是一个有限型 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模，所以由上面的定理知，可以找到 $\mathscr{F}$ 的有限个截面，它们生成了 $\mathscr{F}_x$；根据 $\natural$12, 命题 1，对于充分接近 x 的 y，这些截面也生成了 $\mathscr{F}_y$。由于拓扑空间 X 是拟紧的，故我们可以找到 $\mathscr{F}$ 的有限个截面 $s_1, \ldots, s_p$，它们能够生成每个 $\mathscr{F}_x$ $(x \in X)$，这也就意味着 $\mathscr{F}$ 同构于层 $\mathscr{O}_X^p$ 的一个商层。

推论 2. – *设 $\mathscr{A} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{B} \xrightarrow{\beta} \mathscr{C}$ 是仿射多样体 X 上的一个代数性凝聚层的正合序列。则序列 $\Gamma(X, \mathscr{A}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, \mathscr{B}) \xrightarrow{\beta} \Gamma(X, \mathscr{C})$ 是正合的。*

与定理 2 的证明一样，可以假设 X 就是仿射空间 K^r，从而是不可约的。令 $\mathscr{I} = \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$；问题归结为证明 $\alpha : \Gamma(X, \mathscr{A}) \to \Gamma(X, \mathscr{I})$ 是满的。现在根据推论 1，可以找到一个满同态 $\varphi : \mathscr{O}_X^p \to \mathscr{A}$，再根据命题 7 的推论 2，$\alpha \circ \varphi : \Gamma(X, \mathscr{O}_X^p) \to \Gamma(X, \mathscr{I})$ 是满的；当然 $\alpha : \Gamma(X, \mathscr{A}) \to \Gamma(X, \mathscr{I})$ 也是如此，证明完毕。

$\natural$46 仿射多样体的取值在一个代数性凝聚层中的上同调群

现在我们要推广命题 7：

定理 3. – *设 X 是一个仿射多样体，Q_i 是 X 上的一族有限个正常函数，且在每一点处都不会同时等于 0，$\mathfrak{U}$ 是 X 的这样一个开覆盖，它是由这些 $U_i = X_{Q_i}$ 所组成的。于是若 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性凝聚层，则对任意 $q > 0$，均有 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$。*

首先假设 X 是不可约的。根据定理 2 的推论 1，可以找到一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{O}_X^p \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0 。$$

复形的序列 $0 \to \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{K}) \to \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_X^p) \to \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to 0$ 是正合的。事实上，这相当于说 $\mathscr{F}$ 在 $U_{i_0 \ldots i_q}$ 上的任何截面都是 $\mathscr{O}_X^p$ 在 $U_{i_0 \ldots i_q}$ 上的某个截面的像，这是缘自命题 7 的推论 2（应用到不可约多样体 $U_{i_0 \ldots i_q}$ 上）。这个复形的正合序列可以引出一个上同调长正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_X^p) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{K}) \longrightarrow \cdots ,$$

且由于当 $q > 0$ 时 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_X^p) = \mathrm{H}^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{K}) = 0$，这是根据命题 7，故可由此推知 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$。

现在转到一般情形上。我们可以把 X 看作是某个仿射空间 K^r 的闭子体；根据命题 7 的推论 3，这些函数 Q_i 是由一些多项式 P_i 所给出的；另一方面，设 R_j 是理想 $I(X)$ 的一个有限生成元组。这些函数 P_i, R_j 不会在 K^r 的任一点处同时为 0，从而它们定义了 K^r 的一个开覆盖 $\mathfrak{U}'$；设 $\mathscr{F}'$ 是由 $\mathscr{F}$ 通过在 X 之外进行零延拓

而得到的层；把上面所证明的结果应用到空间 K^r 、函数 P_i, R_j 、和层 $\mathscr{F}'$ 上，我们看到当 $q > 0$ 时 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}') = 0$ 。可以立即验证复形 $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$ 同构于复形 $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ ，由此得知 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ ，证明完毕。

推论 1. – *若 X 是一个仿射多样体，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性凝聚层，则对任意 $q > 0$ ，均有 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}) = 0$ 。*

事实上，上述定理中所使用的那种类型的开覆盖可以足够精细。

推论 2. – *设 $0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \mathscr{C} \to 0$ 是仿射多样体 X 上的一个层正合序列。若层 $\mathscr{A}$ 是代数性凝聚的，则同态 $\Gamma(X, \mathscr{B}) \to \Gamma(X, \mathscr{C})$ 是满的。*

这是缘自推论 1，只要取 $q = 1$ 。

⁋47 代数多样体的仿射开覆盖

命题 8. – *设 X 是一个仿射多样体，并设 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的一个有限仿射开覆盖。于是若 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性凝聚层，则对任意 $q > 0$ ，均有 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ 。*

根据命题 3，可以找到 X 上的一组正常函数 P_j ，使得开覆盖 $\mathfrak{V} = \{X_{P_j}\}$ 比 $\mathfrak{U}$ 精细。对任意 $(i_0, \ldots, i_p)$ ，$\mathfrak{V}$ 在 $U_{i_0 \ldots i_p}$ 上所诱导的开覆盖 $\mathfrak{V}_{i_0 \ldots i_p}$ 就是由这些 P_j 在 $U_{i_0 \ldots i_p}$ 上的限制所定义的；由于 $U_{i_0 \ldots i_p}$ 是一个仿射多样体，这是根据命题 1，故可以把定理 3 应用到它上面，由此推知对任意 $q > 0$ ，均有 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{V}_{i_0 \ldots i_p}, \mathscr{F}) = 0$ 。现在应用 ⁋29, 命题 5，我们看到

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) ,$$

且由于当 $q > 0$ 时 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) = 0$ ，这是根据定理 3，命题因此得证。

定理 4. – *设 X 是一个代数多样体，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性凝聚层，$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的一个有限仿射开覆盖。则对任意 $n \geqslant 0$ ，同态 $\sigma(\mathfrak{U}) : \mathrm{H}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(X, \mathscr{F})$ 都是一一的。*

考虑 X 的有限仿射开覆盖的族 $\mathfrak{V}^\alpha$ 。根据定理 1 的推论，这种开覆盖可以足够精细。另一方面，对任意一组 $(i_0, \ldots, i_p)$ ，$\mathfrak{V}^\alpha$ 在 $U_{i_0 \ldots i_p}$ 上所诱导的开覆盖 $\mathfrak{V}^\alpha_{i_0 \ldots i_p}$ 都是仿射开覆盖，这是根据命题 1；从而根据命题 8，对于 $q > 0$ ，我们有 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{V}^\alpha_{i_0 \ldots i_p}, \mathscr{F}) = 0$ 。则由于 ⁋29, 定理 1 中的条件 (a) 和 (b) 得到满足，定理因而得证。

定理 5. – *设 X 是一个代数多样体，$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的一个有限仿射开覆盖。设 $0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \mathscr{C} \to 0$ 是 X 上的一个层正合序列，其中的层 $\mathscr{A}$ 是代数性凝聚的。则对任意 $q \geqslant 0$ ，典范同态 $\mathrm{H}^q_0(\mathfrak{U}, \mathscr{C}) \to \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{C})$ (参照 ⁋24) 都是一一的。*

显然只需证明 $\mathrm{C}^\bullet_0(\mathfrak{U}, \mathscr{C}) = \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{C})$ ，也就是说，$\mathscr{C}$ 在 $U_{i_0 \ldots i_q}$ 上的任何截面都是 $\mathscr{B}$ 在 $U_{i_0 \ldots i_q}$ 上的某个截面的像，这是缘自定理 3 的推论 2。

推论 1. – 设 X 是一个代数多样体，并设 $0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \mathscr{C} \to 0$ 是 X 上的一个层正合序列，其中的层 $\mathscr{A}$ 是代数性凝聚的。则对任意 $q \geqslant 0$，典范同态 $\mathrm{H}_0^q(X,\mathscr{C}) \to \mathrm{H}^q(X,\mathscr{C})$ 都是一一的。

这是定理 1 和 5 的一个直接推论。

推论 2. – 我们有一个正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^q(X,\mathscr{B}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X,\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{B}) \longrightarrow \cdots \text{。}$$

§4 有限型模和代数性凝聚层之间的对应关系

¶48 模的伴生层

设 V 是一个仿射多样体，$\mathscr{O}_V$ 是 V 的结构层；我们把环 $A = \Gamma(V,\mathscr{O}_V)$ 称为 V 的坐标环，这是一个 K 上的代数，且没有异于 0 的幂零元。若把 V 看作是某个仿射空间 K^r 的闭子体，则我们知道 (参照 ¶44)，A 可以等同于 $K[X_1,\ldots,X_r]$ 除以在 V 上等于 0 的多项式所组成的理想之后的商代数；因而代数 A 是由有限个元素所生成的。

反过来，容易验证，若 A 是一个交换 K 代数，没有 (异于 0 的) 幂零元，并且是由有限个元素所生成的，则可以找到一个仿射多样体 V，使得 A 同构于 $\Gamma(V,\mathscr{O}_V)$。进而 V 可以被这个性质确定到只差一个同构 (可以把 V 等同于 A 的特征标的集合，带有通常拓扑)。

设 M 是一个 A 模，则 M 在 V 上定义了一个常值层，我们仍记之为 M。同样地，A 定义了一个常值层，并且层 M 可以被看作是一个 A 模层。令 $\widetilde{M} = \mathscr{O}_V \otimes_A M$，这里把层 $\mathscr{O}_V$ 也看作是一个 A 模层；易见 $\widetilde{M}$ 是 V 上的一个代数性层。进而，若 $\varphi : M \to M'$ 是一个 A 同态，则有一个同态 $\widetilde{\varphi} = 1 \otimes \varphi : \widetilde{M} \to \widetilde{M'}$。换个说法就是，$\widetilde{M}$ 是模 M 的一个协变函子。

命题 1. – 函子 $\widetilde{M}$ 是正合的。

设 $M \to M' \to M''$ 是 A 模的一个正合序列。我们需要说明序列 $\widetilde{M} \to \widetilde{M'} \to \widetilde{M''}$ 是正合的，换句话说，对任意 $x \in V$，序列

$$\mathscr{O}_{V,x} \otimes_A M \longrightarrow \mathscr{O}_{V,x} \otimes_A M' \longrightarrow \mathscr{O}_{V,x} \otimes_A M''$$

都是正合的。

现在 $\mathscr{O}_{V,x}$ 刚好就是 A 的这样一个分式环 A_S，其中 S 是指满足 $f(x) \neq 0$ 的那些 $f \in A$ 的集合 (分式环的定义可以参考 [8], [12] 或 [13])。从而命题 1 是下述结果的一个特殊情形：

引理 1. – 设 A 是一个环，S 是 A 的一个不包含 0 的乘性子集，A_S 是 A 相对于 S 的分式环。于是若 $M \to M' \to M''$ 是 A 模的一个正合序列，则序列 $A_S \otimes_A M \to A_S \otimes_A M' \to A_S \otimes_A M''$ 是正合的。

我们用 M_S 来记分式 m/s 的集合，其中 $m \in M,\ s \in S$，对于两个分式 m/s 和 m'/s'，如果可以找到 $s'' \in S$，使得 $s''(s'.m - s.m') = 0$，则我们把它们等同。容易看出 M_S 是一个 A_S 模，并且映射

$$a/s \otimes m \longmapsto a.(m/s)$$

是 $A_S \otimes_A M$ 到 M_S 的一个同构，从而问题归结为证明序列

$$M_S \longrightarrow M'_S \longrightarrow M''_S$$

是正合的，而这是很容易的。

命题 2. – $\widetilde{M} = 0$ 蕴涵 $M = 0$。

设 m 是 M 中的一个元素；若 $\widetilde{M} = 0$，则对任意 $x \in V$，在 $\mathscr{O}_{V,x} \otimes_A M$ 中均有 $1 \otimes m = 0$。根据上面所述，$1 \otimes m = 0$ 等价于可以找到一个元素 $s \in A$，满足 $s(x) \neq 0$ 和 $s.m = 0$，从而 m 在 M 中的零化子不包含在 A 的任何一个极大理想之中，这就表示说它等于 A，故得 $m = 0$。

命题 3. – 若 M 是一个有限型 A 模，则 $\widetilde{M}$ 是 V 上的一个代数性凝聚层。

因为 M 是有限型的，并且 A 是 Noether 的，所以 M 同构于某个同态 $\varphi : A^q \to A^p$ 的余核，因而 $\widetilde{M}$ 同构于 $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A^q} \to \widetilde{A^p}$ 的余核。由于 $\widetilde{A^p} = \mathscr{O}_V^p$ 且 $\widetilde{A^q} = \mathscr{O}_V^q$，故可由此得知 $\widetilde{M}$ 是凝聚的。

⁑49 代数性层的伴生模

设 $\mathscr{F}$ 是 V 上的一个代数性层，并设 $\Gamma(\mathscr{F}) = \Gamma(V, \mathscr{F})$，则因为 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_V$ 模层，所以 $\Gamma(\mathscr{F})$ 带有自然的 A 模结构。任何代数性同态 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 都定义了一个 A 同态 $\Gamma(\varphi) : \Gamma(\mathscr{F}) \to \Gamma(\mathscr{G})$。若我们有代数性凝聚层的一个正合序列 $\mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H}$，则序列

$$\Gamma(\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(\mathscr{H})$$

是正合的 (⁑45)；把它应用到一个正合序列 $\mathscr{O}_V^p \to \mathscr{F} \to 0$ 上，则我们看到 $\Gamma(\mathscr{F})$ 是一个有限型 A 模，只要 $\mathscr{F}$ 是凝聚的。

函子 $\widetilde{M}$ 和 $\Gamma(\mathscr{F})$ 是互“逆”的 [11]：

定理 1. – (a) 若 M 是一个有限型 A 模，则 $\Gamma(\widetilde{M})$ 典范同构于 M。
(b) 若 $\mathscr{F}$ 是 V 上的一个代数性凝聚层，则 $\widetilde{\Gamma(\mathscr{F})}$ 典范同构于 $\mathscr{F}$。

首先证明 (a)。任何元素 $m \in M$ 定义了 $\widetilde{M}$ 的一个截面 $\alpha(m)$，即通过公式：$\alpha(m)(x) = 1 \otimes m \in \mathscr{O}_{V,x} \otimes_A M$；故我们有一个同态 $\alpha : M \to \Gamma(\widetilde{M})$。如果 M 是

[11] 译注：按照范畴的语言，这两个函子互为“拟逆”。

一个有限型自由模，则α是一一的(只需对$M = A$证明这一点，此时这是显然的)；若M是一个任意的有限型模，则可以找到一个正合序列$L^1 \to L^0 \to M \to 0$，其中L^0和L^1都是有限型且自由的；于是序列$\widetilde{L^1} \to \widetilde{L^0} \to \widetilde{M} \to 0$是正合的，从而序列$\Gamma(\widetilde{L^1}) \to \Gamma(\widetilde{L^0}) \to \Gamma(\widetilde{M}) \to 0$也是如此。故交换图表

$$\begin{array}{ccccccc}
L^1 & \longrightarrow & L^0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow \\
\Gamma(\widetilde{L^1}) & \longrightarrow & \Gamma(\widetilde{L^0}) & \longrightarrow & \Gamma(\widetilde{M}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

表明，$\alpha : M \to \Gamma(\widetilde{M})$是一一的，这就证明了(a)。

现在设$\mathscr{F}$是V上的一个代数性凝聚层。若我们把每个$s \in \Gamma(\mathscr{F})$对应到元素$s(x) \in \mathscr{F}_x$，则可以得到一个$A$同态：$\Gamma(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}_x$，它又可以延拓为一个$\mathscr{O}_{V,x}$同态$\beta_x : \mathscr{O}_{V,x} \otimes_A \Gamma(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}_x$；容易验证，这些$\beta_x$构成一个层同态$\beta : \widetilde{\Gamma(\mathscr{F})} \to \mathscr{F}$。如果$\mathscr{F} = \mathscr{O}_V^p$，则同态$\beta$是一一的；由此可知(使用和上面相同的方法)，对任意代数性凝聚层$\mathscr{F}$，β都是一一的，这就证明了(b)。

注解 — (1) 我们也可以从(a)导出(b)；参照 ☓65, 命题6的证明。

(2) 我们将在第III看到，对于射影空间上的凝聚层，我们需要做哪些修改来完成类似的对应。

☓50 投射模和向量丛

还记得([6], 第I章定理2.2)所谓一个A模M是投射的，是指它是某个自由A模的直和因子。

命题4. – 设M是一个有限型A模。则为了使M是投射的，必须且只需对任意$x \in V$，$\mathscr{O}_{V,x}$模$\mathscr{O}_{V,x} \otimes_A M$都是自由的。

若M是投射的，则$\mathscr{O}_{V,x} \otimes_A M$是$\mathscr{O}_{V,x}$投射的，从而是$\mathscr{O}_{V,x}$自由的，因为$\mathscr{O}_{V,x}$是一个局部环(参照[6], 第VIII章, 定理6.1′).

反之，若诸$\mathscr{O}_{V,x} \otimes_A M$都是自由的，则有

$$\operatorname{proj.dim}(M) = \sup_{x \in V} \operatorname{proj.dim}(\mathscr{O}_{V,x} \otimes_A M) = 0$$

(参照[6], 第VII章, 习题11)，这就意味着M是投射的([6], 第VI章§2)。

注意到若$\mathscr{F}$是V上的一个代数性凝聚层，并且$\mathscr{F}_x$同构于$\mathscr{O}_{V,x}^p$，则$\mathscr{F}$在x的某个邻域上同构于$\mathscr{O}_V^p$；从而若这个性质对所有点$x \in V$都成立，则层$\mathscr{F}$在局部上同构于层$\mathscr{O}_V^p$，且整数p在V的任何连通分支上都是常值的。把它应用到层$\widetilde{M}$上，我们得到：

推论 — 设 $\mathscr{F}$ 是连通仿射多样体 V 上的一个代数性凝聚层。则以下三个性质是等价的:

(i) $\Gamma(\mathscr{F})$ 是一个投射 A 模。

(ii) $\mathscr{F}$ 在局部上同构于某个层 $\mathscr{O}_V^p$。

(iii) $\mathscr{F}$ 同构于某个底盘为 V 的代数性向量丛的截面芽层。

进而，映射 $E \to \Gamma(\mathscr{S}(E))$（$E$ 是指一个向量丛）建立了向量丛的同构类与有限型投射 A 模的同构类之间的一个一一对应；且在这个对应下，平凡向量丛对应到自由模，反之亦然。

我们指出，对于 $V = K^r$（此时 $A = K[X_1, \ldots, X_r]$），作者尚不知道是否可以找到这样的有限型投射 A 模，它不是自由的，这也相当于说，是否可以找到底盘为 K^r 的非平凡代数性向量丛 [12]。

[12]译注：Quillen 和 Suslin 证明这是不存在的。

第三章　射影多样体上的代数性凝聚层

§1　射影多样体

¶51　若干记号

（下面引入的记号在这一章中都是有效的）。

设 r 是一个非负整数，并设 $Y = K^{r+1} \setminus \{0\}$； K 中的非零元的乘法群 K^* 可以作用在 Y 上，即通过公式：

$$\lambda(\mu_0, \ldots, \mu_r) \;=\; (\lambda\mu_0, \ldots, \lambda\mu_r) \;\;。$$

所谓两个点 y 和 y' 是等价的，是指可以找到 $\lambda \in K^*$，使得 $y' = \lambda y$；我们把 Y 在这个等价关系下的商空间记作 $\mathbf{P}^r(K)$，或简记为 X；这就是 K 上的 r 维射影空间；我们把 Y 到 X 上的典范投影记作 π。

设 $I = \{0, 1, \ldots, r\}$；对任意 $i \in I$，我们用 t_i 来记 K^{r+1} 上的第 i 个坐标函数，即：

$$t_i(\mu_0, \ldots, \mu_r) \;=\; \mu_i \;。$$

我们使用 V_i 来记 K^{r+1} 的这样一个开子集，它是由满足 $t_i \neq 0$ 的那些点所组成的，再用 U_i 来记 V_i 在 π 下的像；这些 $\{U_i\}_{i\in I}$ 构成 X 的一个开覆盖 $\mathfrak{U}$。若 $i, j \in I$，则函数 t_j/t_i 在 V_i 上是正常的，并且在 K^* 的作用下不变，从而定义了 U_i 上的一个函数，我们仍记之为 t_j/t_i；对于固定的 i，这些函数 $t_j/t_i,\, j \neq i$ 可以定义出一个一一映射 $\psi_i : U_i \to K^r$。

我们给 K^{r+1} 赋予自然的代数多样体结构，并且给 Y 赋予诱导结构。同时我们给 X 赋予 Y 的商拓扑：从而 X 的闭子集就是 K^{r+1} 中的闭锥在 π 下的像。若 U 在 X 中是开的，则我们令 $A[U] = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathscr{O}_Y)$；这就是 $\pi^{-1}(U)$ 上的正常函数环。设 $A^0[U]$ 是由 $A[U]$ 中的那些在 K^* 作用下不变的元素所组成的子环（也就是说，0 次齐次函数）。如果 $V \supseteq U$，则我们有一个限制同态 $\varphi_U^V : A^0[V] \to A^0[U]$，从而这组 $(A^0[U], \varphi_U^V)$ 定义了一个层 $\mathscr{O}_X$，并且可以把它看作是 X 上的函数芽层 $\mathscr{C}_X$ 的一个子层。为了使一个定义在 x 的邻域上的函数 f 落在 $\mathscr{O}_{X,x}$ 中，必

须且只需它在局部上重合于一个形如 P/Q 的函数，其中 P 和 Q 是 $t_0,\ldots,t_r$ 的两个同次数的齐次多项式，并且对于 $y\in\pi^{-1}(x)$，均有 $Q(y)\neq 0$（这件事我们将简记为 $Q(x)\neq 0$）。

命题 1. – 射影空间 $X=\mathbf{P}^r(K)$，连同上面所定义的拓扑和层，是一个代数多样体。

这些 U_i $(i\in I)$ 都是 X 的开集，并且很容易验证，上面所定义的一一映射 $\psi_i: U_i\to K^r$ 都是双向正常同构，这就证明了公理 $(\mathrm{VA_I})$ 是成立的。为了证明 $(\mathrm{VA_{II}})$ 也成立，我们需要证明 $K^r\times K^r$ 的由二元组 $(\psi_i(x),\psi_j(x))$，其中 $x\in U_i\cap U_j$，所组成的子集是闭的，这件事并不困难。

在下文中，我们总是给 X 赋予刚刚所定义的代数多样体结构。所谓一个代数多样体 V 是射影的，是指它同构于射影空间的一个闭子体。考察射影多样体上的代数性凝聚层的问题可以归结为考察 $\mathbf{P}^r(K)$ 上的代数性凝聚层，参照 ¶39。

¶52　射影空间的子体的上同调

我们要把 ¶47, 定理 4 应用到上一小节所定义的开覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 上：这是允许的，因为每个 U_i 都同构于 K^r。这样我们就得到：

命题 2. – 若 $\mathscr{F}$ 是 $X=\mathbf{P}^r(K)$ 上的一个代数性凝聚层，则对任意 $n\geqslant 0$，同态 $\sigma(\mathfrak{U}):\mathrm{H}^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to\mathrm{H}^n(X,\mathscr{F})$ 都是一一的。

因为 $\mathfrak{U}$ 是由 $r+1$ 个开集所组成的，所以我们有 (参照 ¶20, 命题 2 的推论)：

推论 — 对于 $n>r$，我们有 $\mathrm{H}^n(X,\mathscr{F})=0$。

这个结果可以推广如下：

命题 3. – 设 V 是一个代数多样体，且同构于射影空间 X 中的一个局部闭子体。设 $\mathscr{F}$ 是 V 上的一个代数性凝聚层，并设 W 是 V 的一个子体，且使得 $\mathscr{F}$ 在 W 之外等于 0。则对于 $n>\dim W$，我们都有 $\mathrm{H}^n(V,\mathscr{F})=0$。

特别地，取 $W=V$，我们看到：

推论 — 当 $n>\dim V$ 时，我们有 $\mathrm{H}^n(V,\mathscr{F})=0$。

我们把 V 等同于 $X=\mathbf{P}^r(K)$ 的一个局部闭子体，则可以找到 X 的一个开集 U，使得 V 在 U 中是闭的。我们可以假设 W 在 V 中是闭的，这显然是合理的；于是 W 在 U 中是闭的。令 $F=X\smallsetminus U$。在证明命题 3 之前，我们先建立两个引理：

引理 1. – 设 $k=\dim W$，则可以找到 $k+1$ 个正次数的齐次多项式 $P_i(t_0,\ldots,t_r)$，它们在 F 上都等于 0，并且在 W 的每一点处都不会同时为 0。

（将词义略加引申，所谓一个齐次多项式 P 在 $\mathbf{P}^r(K)$ 的点 x 处是 0，是指它在 $\pi^{-1}(x)$ 上等于 0）。

对k进行归纳，$k=-1$的情形是平凡的。在W的每个不可约分支上都取定一个点，并设P_1是这样一个正次数的齐次多项式，它在F上等于0，并且在上面选定的那些点处都不等于0（P_1的存在性缘自F是闭的这个事实，有见于$\mathbf{P}^r(K)$上的拓扑的定义）。设W'是W的这样一个子体，它是由满足$P_1(x)=0$的点$x\in W$所组成的，则根据P_1的构造方法，W的任何不可约分支都不包含在W'之中，由此可知(参照¶36)，$\dim W'<k$。把归纳假设应用到W'上，我们看到存在k个齐次多项式$P_2,\dots,P_{k+1}$，它们在F上都等于0，并且在W'的每一点处都不会同时为0；易见这些多项式$P_1,\dots,P_{k+1}$就满足所要求的条件。

引理2. – 设$P(t_0,\dots,t_r)$是一个齐次多项式，且次数$n>0$。则由满足$P(x)\neq 0$的那些点$x\in X$所组成的集合X_P是X的一个仿射开集。

若我们把每一点$y=(\mu_0,\dots,\mu_r)\in Y$对应到空间$K^N$中的这样一个点，它的坐标就是所有单项式$\mu_0^{m_0}\cdots\mu_r^{m_r}, m_0+\cdots+m_r=n$（$N$就是这些单项式的个数），则通过取商可以得到一个映射$\varphi_n: X\to\mathbf{P}^{N-1}(K)$。我们有一个古典的结果，且很容易验证，即$\varphi_n$是$X$到$\mathbf{P}^{N-1}(K)$的某个闭子体（“Veronese体”）上的一个双向正常同构；这个φ_n把开集X_P转化为$\varphi_n(X)$中不落在$\mathbf{P}^{N-1}(K)$的某个超平面中的那些点的集合；由于超平面的补集同构于仿射空间，故可由此推知，X_P可以同构于仿射空间中的某个闭子体。

现在我们来证明命题3。把层$\mathscr{F}$在$U\smallsetminus V$上进行0延拓，则可以得到U上的一个代数性凝聚层，我们仍记之为$\mathscr{F}$，且我们知道(参照¶26) $\mathrm{H}^n(U,\mathscr{F})=\mathrm{H}^n(V,\mathscr{F})$。另一方面，设$P_1,\dots,P_{k+1}$是满足引理1中条件的一组齐次多项式；设$P_{k+2},\dots,P_h$是这样一组正次数的齐次多项式，在$W\cup F$上都等于$0$，并且在$U\smallsetminus W$的每一点处都不会同时为$0$（为了得到这些多项式，只需取$W\cup F$在$K[t_0,\dots,t_r]$中所定义的理想的一组齐次生成元）。对任意$i, 1\leqslant i\leqslant h$，设$V_i$是由那些满足$P_i(x)\neq 0$的点$x\in X$所组成的集合，则我们有$V_i\subseteq U$，并且上述条件表明，$\mathfrak{V}=\{V_i\}$是$U$的一个开覆盖；进而，引理2表明，这些$V_i$都是仿射开集，故对任意$n\geqslant 0$，均有$\mathrm{H}^n(\mathfrak{V},\mathscr{F})=\mathrm{H}^n(U,\mathscr{F})=\mathrm{H}^n(V,\mathscr{F})$。另一方面，若$n>k$，并且指标$i_0,\dots,i_n$是两两不同的，则其中必有一个指标$>k+1$，因而$V_{i_0\dots i_n}$与$W$没有交点；由此推知，当$n>k$时交错上链群$\mathrm{C}'^n(\mathfrak{V},\mathscr{F})$都是$0$，这就意味着$\mathrm{H}^n(\mathfrak{V},\mathscr{F})=0$，这是根据¶20, 命题2。

¶53 不可约代数曲线的上同调

若V是一个1维不可约代数多样体，则V的真闭子集就是有限子集。设F是V的一个有限子集，且x是F中的一个点，我们令$V_x^F=(V\smallsetminus F)\cup\{x\}$；这些$V_x^F$ $(x\in F)$构成V的一个有限开覆盖$\mathfrak{V}^F$。

引理3. – 上面这种类型的开覆盖$\mathfrak{V}^F$可以足够精细。

设$\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$是$V$的一个开覆盖，可以假设它是有限的，因为$V$是拟紧的。同样可以假设对任意$i\in I$，均有$U_i\neq\varnothing$。从而若我们令$F_i=V\smallsetminus U_i$，则$F_i$是有限的，因而$F=\bigcup_{i\in I}F_i$也是如此。下面证明$\mathfrak{V}^F\preceq\mathfrak{U}$，这就可以证明引理。设$x\in F$，则可以找到$i\in I$，使得$x\notin F_i$，因为这些$U_i$可以覆盖$V$；于是我们

有 $F \smallsetminus \{x\} \supseteq F_i$，因为 $F \supseteq F_i$，这就意味着 $V_x^F \subseteq U_i$，从而也证明了 $\mathfrak{V}^F \preceq \mathfrak{U}$。

引理 4. – 设 $\mathscr{F}$ 是 V 上的一个层，F 是 V 的一个有限子集。则对于 $n \geqslant 2$，我们有

$$\mathrm{H}^n(\mathfrak{V}^F, \mathscr{F}) = 0 \text{ 。}$$

令 $W = V \smallsetminus F$；易见 $V_{x_0}^F \cap \cdots \cap V_{x_n}^F = W$，只要这些 $x_0, \ldots, x_n$ 是两两不同的，并且 $n \geqslant 1$。若我们令 $G = \Gamma(W, \mathscr{F})$，则由此可知，交错复形 $\mathrm{C}'^{\bullet}(\mathfrak{V}^F, \mathscr{F})$ 在维数 $\geqslant 1$ 处同构于 $\mathrm{C}'^{\bullet}(S(F), G)$，其中 $S(F)$ 是指以 F 为顶点集的单形。因此对于 $n \geqslant 2$，我们有

$$\mathrm{H}^n(\mathfrak{V}^F, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^n(S(F), G) = 0 \text{，}$$

因为单形的上同调是平凡的。

引理 3 和 4 显然可以给出：

命题 4. – 若 V 是一条不可约代数曲线，$\mathscr{F}$ 是 V 上的任意一个层，则对于 $n \geqslant 2$，均有 $\mathrm{H}^n(V, \mathscr{F}) = 0$。

注解 — 作者不知道类似的结果是不是对任意维数的多样体都成立[13]。

§2 分次模与射影空间上的代数性凝聚层

¥54 偏移运算 $\mathscr{F}(n)$

设 $\mathscr{F}$ 是 $X = \mathbf{P}^r(K)$ 上的一个代数性层。设 $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}|_{U_i}$ 是 $\mathscr{F}$ 在 U_i 上的限制 (参照 ¥51)；任给一个整数 n，设 $\theta_{ij}(n)$ 是 $\mathscr{F}_j|_{U_i \cap U_j}$ 到 $\mathscr{F}_i|_{U_i \cap U_j}$ 上的这样一个同构，它是由乘以函数 t_j^n/t_i^n 的运算所定义的；这是有意义的，因为 t_j/t_i 是 $U_i \cap U_j$ 上的一个正常函数，且取值在 K^* 中。在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 中的所有点处，我们都有 $\theta_{ij}(n) \circ \theta_{jk}(n) = \theta_{ik}(n)$；从而我们可以使用 ¥4, 命题 4，由此得到一个代数性层，记作 $\mathscr{F}(n)$，由这些层 $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}|_{U_i}$ 经由这些同构 $\theta_{ij}(n)$ 黏合而成。

我们有典范同构 $\mathscr{F}(0) \cong \mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}(n)(m) \cong \mathscr{F}(n+m)$。进而，$\mathscr{F}(n)$ 在局部上同构于 $\mathscr{F}$，从而是凝聚的，只要 $\mathscr{F}$ 是如此；由此还可以得出，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，我们从代数性层的任何正合序列 $\mathscr{F} \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F}''$ 都可以引出一个正合序列 $\mathscr{F}(n) \to \mathscr{F}'(n) \to \mathscr{F}''(n)$。

我们可以把上面所述应用到层 $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$ 上，由此得到一些层 $\mathscr{O}_X(n), n \in \mathbb{Z}$。下面我们给出这些层的另一种描述方法：若 U 在 X 中是开的，设 $A^n[U]$ 是由 $A[U] = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathscr{O}_Y)$ 中的 n 次齐次函数 (也就是说，对于 $\lambda \in K^*$ 和 $y \in \pi^{-1}(U)$ 均满足等式 $f(\lambda y) = \lambda^n f(y)$) 所组成的子群；这些 $A^n[U]$ 都是 $A^0[U]$ 模，从而它们可以做出一个代数性层，我们暂时记之为 $\mathscr{O}'_X(n)$。从而对于 $x \in X$，

[13]译注：确实成立。参考 Grothendieck 关于同调代数的文章。

$\mathscr{O}'_X(n)_x$ 中的一个元素可以等同于一个有理分式 P/Q，其中 P 和 Q 都是齐次多项式，$Q(x) \neq 0$，并且 $\deg P - \deg Q = n$。

命题 1. – *层 $\mathscr{O}_X(n)$ 和 $\mathscr{O}'_X(n)$ 是典范同构的。*

根据定义，$\mathscr{O}_X(n)$ 在开集 $U \subseteq X$ 上的一个截面就是 $\mathscr{O}_X$ 在这些 $U \cap U_i$ 上的一组截面 (f_i)，且在 $U \cap U_i \cap U_j$ 上满足 $f_i = (t_j^n/t_i^n).f_j$；我们可以把这些 f_j 等同于 $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U_i)$ 上的 0 次齐次正常函数；令 $g_i = t_i^n.f_i$，则在 $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)$ 中的所有点处，我们都有 $g_i = g_j$，从而这些 g_i 都是 $\pi^{-1}(U)$ 上的唯一一个 n 次齐次的正常函数 g 的限制。反过来，一个这样的函数 g 也定义了一组 (f_i)，只要令 $f_i = g/t_i^n$。从而映射 $(f_i) \mapsto g$ 是 $\mathscr{O}_X(n)$ 到 $\mathscr{O}'_X(n)$ 的一个同构。

在下文中，我们总是把 $\mathscr{O}_X(n)$ 和 $\mathscr{O}'_X(n)$ 看作是等同的 (经由上述同构)。可以观察到，$\mathscr{O}'_X(n)$ 在 X 上的一个截面恰好就是 Y 上的一个 n 次齐次的正常函数。若 $r \geqslant 1$，则一个这样的函数在 $n < 0$ 时恒等于 0，并且在 $n \geqslant 0$ 时就是一个 n 次齐次多项式。

命题 2. – *对任意代数性层 $\mathscr{F}$，层 $\mathscr{F}(n)$ 和 $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(n)$ 都是典范同构的。*

因为 $\mathscr{O}_X(n)$ 可由这些 $\mathscr{O}_i$ 经由 $\theta_{ij}(n)$ 黏合而成，所以 $\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(n)$ 也可由这些 $\mathscr{F}_i \otimes \mathscr{O}_i$ 经由同构 $1 \otimes \theta_{ij}(n)$ 黏合而成；把 $\mathscr{F}_i \otimes \mathscr{O}_i$ 等同于 $\mathscr{F}_i$，我们就找回了 $\mathscr{F}(n)$ 的定义。

在下文中，我们也把 $\mathscr{F}(n)$ 和 $\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(n)$ 等同看待。

¶ 55 $\mathscr{F}(n)$ 的截面

我们首先证明一个关于仿射多样体的引理，它完全类似于 ¶ 45, 引理 1：

引理 1. – *设 V 是一个仿射多样体，Q 是 V 上的一个正常函数，V_Q 是由那些满足 $Q(x) \neq 0$ 的点 $x \in V$ 所组成的集合。设 $\mathscr{F}$ 是 V 上的一个代数性凝聚层，并设 s 是 $\mathscr{F}$ 在 V_Q 上的一个截面。则对任意充分大的 n，均可找到 $\mathscr{F}$ 在整个 V 上的一个截面 s'，使得在 V_Q 上有 $s' = Q^n s$。*

把 V 嵌入某个仿射空间，并且把 $\mathscr{F}$ 在 V 之外进行零延拓，则可以归结到 V 是仿射空间的情形，从而是不可约的。根据 ¶ 45, 定理 2 的推论 1，可以找到一个满同态 $\varphi : \mathscr{O}_V^p \to \mathscr{F}$；根据 ¶ 42, 命题 2，$V_Q$ 是一个仿射开集，从而可以找到 (¶ 44, 命题 7 的推论 2) $\mathscr{O}_V^p$ 在 V_Q 上的一个截面 σ，使得 $\varphi(\sigma) = s$。我们可以把 σ 等同于 V_Q 上的一组 p 个正常函数；把 ¶ 43, 命题 5 应用到其中的每一个函数上，我们看到在 V 上可以找到 $\mathscr{O}_V^p$ 的一个截面 σ'，使得在 V_Q 上有 $\sigma' = Q^n\sigma$，只要 n 充分大。现在令 $s' = \varphi(\sigma')$，我们就得到 $\mathscr{F}$ 在 V 上的一个截面，它在 V_Q 上满足 $s' = Q^n s$。

定理 1. – *设 $\mathscr{F}$ 是 $X = \mathbf{P}^r(K)$ 上的一个代数性凝聚层。则可以找到一个整数 $n(\mathscr{F})$，使得对任意 $n \geqslant n(\mathscr{F})$ 和任意 $x \in X$，$\mathscr{O}_{X,x}$ 模 $\mathscr{F}(n)_x$ 都可由 $\Gamma(X, \mathscr{F}(n))$ 中的元素所生成。*

根据$\mathscr{F}(n)$的定义，$\mathscr{F}(n)$在X上的一个截面s就是$\mathscr{F}$在这些U_i上的一组截面(s_i)，且满足相容性条件：即在$U_i \cap U_j$上有

$$s_i \;=\; (t_j^n/t_i^n).s_j \;\; ;$$

我们把s_i称为s的第i个分支。

另一方面，因为U_i同构于K^r，故对任意$x \in U_i$，均可找到$\mathscr{F}$在U_i上的有限个截面s_i^α，它们可以生成$\mathscr{F}_x$（§45, 定理2的推论1）；若对于某个整数n，可以找到$\mathscr{F}(n)$的截面s^α，使得它们的第i个分支就是s_i^α，则对任意$x \in U_i$，$\Gamma(X, \mathscr{F}(n))$显然都可以生成$\mathscr{F}(n)_x$。从而定理1的证明归结为下面的引理：

引理2. – 设s_i是$\mathscr{F}$在U_i上的一个截面。则对任意足够大的n，都可以找到$\mathscr{F}(n)$的一个截面s，它的第i个分支就等于s_i。

我们要把引理1应用到仿射多样体$V = U_j$、函数$Q = t_i/t_j$、和截面s_i在$U_i \cap U_j$上的限制上；这是允许的，因为t_i/t_j是U_j上的这样一个正常函数，它的零点集就等于$U_j \smallsetminus (U_i \cap U_j)$。由此推知，可以找到一个整数$p$，和$\mathscr{F}$在$U_j$上的一个截面$s'_j$，使得在$U_i \cap U_j$上有$s'_j = (t_i^p/t_j^p).s_i$；对于$j = i$，这就意味着$s'_i = s_i$，从而可以把上面的公式写成$s'_j = (t_i^p/t_j^p).s'_i$。

由于这些s'_j对任意指标j都有定义（对于同一个指数p），故我们可以考虑$s'_j - (t_k^p/t_j^p).s'_k$；它是$\mathscr{F}$在$U_j \cap U_k$上的一个截面，并且在$U_i \cap U_j \cap U_k$上的限制等于0；对它使用§43, 命题6，我们看到对任意充分大的整数q，在$U_j \cap U_k$上均有$(t_i^q/t_j^q)(s'_j - (t_k^p/t_j^p).s'_k) = 0$；现在若我们令$s_j = (t_i^q/t_j^q).s'_j$和$n = p + q$，则上述公式可以写成$s_j = (t_k^n/t_j^n).s_k$，并且这组$s = (s_j)$就是$\mathscr{F}(n)$的一个截面，它的第$i$个分支恰好等于$s_i$，证明完毕。

推论 — $X = \mathbf{P}^r(K)$上的任何一个代数性凝聚层$\mathscr{F}$都同构于某个层$\mathscr{O}_X(n)^p$的商层，其中n和p是适当的整数。

根据上述定理，可以找到一个整数n，使得对任意$x \in X$，$\mathscr{F}(-n)_x$都可由$\Gamma(X, \mathscr{F}(-n))$所生成；基于$X$的拟紧性，这等价于说$\mathscr{F}(-n)$同构于某个层$\mathscr{O}_X^p$的商层，其中$p$是适当的非负整数。于是由此可知，$\mathscr{F} \cong \mathscr{F}(-n)(n)$同构于$\mathscr{O}_X^p(n) \cong \mathscr{O}_X(n)^p$的商层。

§56 分次模

设$S = K[t_0, \ldots, t_r]$是$t_0, \ldots, t_r$的多项式代数；对任意整数$n \geqslant 0$，设S_n是由S中的n次齐次多项式所组成的向量子空间；对于$n < 0$，我们令$S_n = 0$。则代数S是这些S_n $(n \in \mathbb{Z})$的直和，并且我们有$S_p.S_q \subseteq S_{p+q}$。换句话说，$S$是一个分次代数。

还记得所谓一个S模M是分次的，是指我们给出了M的一个直和分解：$M = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M_n$，这些$M_n$都是$M$的子群，并且对任意一对整数$(p, q)$，均有$S_p.M_q \subseteq M_{p+q}$。$M_n$中的元素将被称为$n$次齐次的；所谓$M$的一个子模$N$是齐次的，是

指它是这些 $N \cap M_n$ 的直和，此时它也是一个分次 S 模。若 M 和 M' 是两个分次 S 模，则所谓一个 S 同态

$$\varphi\ :\ M\ \longrightarrow\ M'$$

是 s 次齐次的，是指对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有 $\varphi(M_n) \subseteq M'_{n+s}$。0 次齐次 S 同态也简称同态。

若 M 是一个分次 S 模，n 是一个整数，则我们用 $M(n)$ 来记分次 S 模：

$$M(n)\ =\ \sum_{p\in\mathbb{Z}} M(n)_p, \quad \text{其中} \quad M(n)_p\ =\ M_{n+p}\ 。$$

从而作为 S 模，我们有 $M(n) = M$，但 $M(n)$ 中的一个 p 次齐次元就是 M 中的 $n+p$ 次齐次元。换句话说，$M(n)$ 是由 M 经过向下移动 n 次而得到的。

我们用 $\mathfrak{C}$ 来表示这样一些分次 S 模 M 所组成的类，即对于足够大的 n，我们都有 $M_n = 0$。于是若 $A \to B \to C$ 是一个分次 S 模的同态正合序列，则关系式 $A \in \mathfrak{C}$ 和 $C \in \mathfrak{C}$ 显然蕴涵着 $B \in \mathfrak{C}$。换句话说，$\mathfrak{C}$ 就是 [14], 第 I 章所说的那种“类”。我们将使用该文章所引入的那些一般的术语；特别地，所谓一个同态 $\varphi : A \to B$ 是 $\mathfrak{C}$ 单的（切转：$\mathfrak{C}$ 满的），是指 $\mathrm{Ker}(\varphi) \in \mathfrak{C}$（切转：若 $\mathrm{Coker}(\varphi) \in \mathfrak{C}$），所谓它是 $\mathfrak{C}$ 一一的，是指它既是 $\mathfrak{C}$ 单的，又是 $\mathfrak{C}$ 满的。

所谓一个分次 S 模 M 是有限型的，是指它可由有限个元素所生成；所谓 M 满足条件 (TF)，是指可以找到一个整数 p，使得 M 的子模 $\sum_{n\geqslant p} M_n$ 是有限型的；这也相当于说，M 可以 $\mathfrak{C}$ 同构于一个有限型模。这些满足 (TF) 的模构成一个包含着 $\mathfrak{C}$ 的类。

所谓一个分次 S 模 L 是自由的（切转：有限型自由的），是指它有一个由齐次元所组成的基底（切转：有限基底），换句话说，它可以同构于一些（切转：有限个）模 $S(n_i)$ 的直和。

¶ 57 分次 S 模的伴生代数性层

若 U 是 X 的一个非空子集，则我们用 S_U 来记 $S = K[t_0, \ldots, t_r]$ 的这样一个子集，它是由对任意 $x \in U$ 均满足 $Q(x) \neq 0$ 的那些齐次多项式 Q 所组成的；S_U 是 S 的一个乘性子集，且不包含 0。

设 M 是一个分次 S 模。我们用 $M[U]$ 来表示这样一些分式 m/Q 所组成的集合，其中 $m \in M, Q \in S_U$，m 和 Q 都是齐次的，并且次数相同；对于两个分式 m/Q 和 m'/Q'，若可以找到 $Q'' \in S_U$，使得

$$Q''(Q'.m - Q.m')\ =\ 0\ ,$$

则我们把两者等同；易见这在二元组 (m, Q) 上定义了一个等价关系。对于 $U = \{x\}$，我们也把 $M[\{x\}]$ 写成 M_x。

把这个过程应用到 $M = S$ 上，则我们看到 $S[U]$ 是由这样一些有理分式 P/Q 所组成的环，其中 P 和 Q 都是齐次多项式，次数相同，并且 $Q \in S_U$；若 M 是一个

任意的分次 S 模，则我们可以给 $M[U]$ 赋予一个 $S[U]$ 模的结构，即令：

$$m/Q + m'/Q' \;=\; (Q'm + Qm')/QQ'$$

$$(P/Q).(m/Q') \;=\; Pm/QQ' \quad 。$$

若 $U \subseteq V$，则有 $S_V \subseteq S_U$，故得典范同态

$$\varphi_U^V \;:\; M[V] \;\longrightarrow\; M[U] \;\;；$$

从而这组 $(M[U], \varphi_U^V)$，其中 U 和 V 跑遍 X 的非空开集，可以定义出一个层，我们记之为 $\widetilde{M}$；很容易验证

$$\lim_{x \in U} M[U] \;=\; M_x \;,$$

也就是说，$\widetilde{M}_x = M_x$。特别地，我们有 $\widetilde{S} = \mathscr{O}_X$，且由于每个 $M[U]$ 都是 $S[U]$ 模，故知 $\widetilde{M}$ 是一个 $\widetilde{S}$ 模层，也就是说，它是 X 上的一个*代数性层*。任何同态 $\varphi : M \to M'$ 都自然地定义了一组 S_U 线性同态 $\varphi_U : M[U] \to M'[U]$，故得一个层同态 $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M} \to \widetilde{M'}$，我们经常也把它记为 φ。显然有

$$\widetilde{\varphi + \psi} \;=\; \widetilde{\varphi} + \widetilde{\psi}\,, \quad \widetilde{1} \;=\; 1\,, \quad \widetilde{\varphi \circ \psi} \;=\; \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi} \quad 。$$

从而运算 $\widetilde{M}$ 是一个*协变加性函子*，定义在分次 S 模的范畴上，取值在 X 上的代数性层的范畴中。

（上面这些定义类似于第 II 章 §4 中的那些定义；然而可以观察到。$S[U]$ 并不是 S 关于 S_U 的分式环，仅仅是它的 0 次齐次分量）。

¥58 函子 $\widetilde{M}$ 的一些基本性质

命题 3. – *函子 $\widetilde{M}$ 是一个正合函子。*

设 $M \xrightarrow{\alpha} M' \xrightarrow{\beta} M''$ 是分次 S 模的一个正合序列，下面我们证明序列 $M_x \xrightarrow{\alpha} M'_x \xrightarrow{\beta} M''_x$ 也是正合的。设 $m'/Q \in M'_x$ 是 β 的核中的一个元素；根据 M''_x 的定义，可以找到 $R \in S_{\{x\}}$，使得 $R\beta(m') = 0$；于是可以找到 $m \in M$，使得 $\alpha(m) = Rm'$，并且我们有 $\alpha(m/RQ) = m'/Q$，证毕（对照 ¥48, 引理 1）。

命题 4. – *若 M 是一个分次 S 模，n 是一个整数，则 $\widetilde{M(n)}$ 典范同构于 $\widetilde{M}(n)$。*

设 $i \in I,\, x \in U_i$，并且 $m/Q \in M(n)_x$，其中 $m \in M(n)_p$，$Q \in S_{\{x\}}$，$\deg Q = p$。令：

$$\eta_{i,x}(m/Q) \;=\; m/t_i^n Q \;\in\; M_x \;\;,$$

这是允许的，因为 $m \in M_{n+p}$ 且 $t_i^n Q \in S_{\{x\}}$。我们立刻看到，对任意 $x \in U_i$，$\eta_{i,x} : M(n)_x \to M_x$ 都是一一的，因而它们在 U_i 上定义了一个从 $\widetilde{M(n)}$ 到 $\widetilde{M}$ 的同构 η_i。进而，在 $U_i \cap U_j$ 上我们有 $\eta_i \circ \eta_j^{-1} = \theta_{ij}(n)$。根据函子 $\mathscr{F}(n)$ 的定义，以及 ¥4, 命题 4，这正表明 $\widetilde{M(n)}$ 同构于 $\widetilde{M}(n)$。

推论 — $\widetilde{S(n)}$ 典范同构于 $\mathscr{O}(n)$。

事实上，我们已经看到 $\widetilde{S}$ 同构于 $\mathscr{O}$。

（此外，可以直接看出 $\widetilde{S(n)}$ 同构于 $\mathscr{O}'_X(n)$，因为 $\mathscr{O}'_X(n)_x$ 恰好是由这样的有理分式 P/Q 所组成的，其中 $\deg P - \deg Q = n$，并且 $Q \in S_{\{x\}}$）。

命题 5. – 设 M 是一个满足条件 (TF) 的分次 S 模。则代数性层 $\widetilde{M}$ 是一个凝聚层，并且为了使 $\widetilde{M}=0$，必须且只需 $M \in \mathfrak{C}$。

若 $M \in \mathfrak{C}$，则对任意 $m \in M$ 和任意 $x \in X$，均可找到 $Q \in S_{\{x\}}$，使得 $Qm = 0$：只需取 Q 的次数足够大；从而我们有 $M_x = 0$，故得 $\widetilde{M} = 0$。现在设 M 是一个满足条件 (TF) 的分次 S 模，则可以找到 M 的一个有限型分次子模 N，使得 $M/N \in \mathfrak{C}$；应用上面所述，以及命题 3，我们看到 $\widetilde{N} \to \widetilde{M}$ 是一一的，从而只需证明 $\widetilde{N}$ 是凝聚的。而因为 N 是有限型的，所以我们有一个正合序列 $L^1 \to L^0 \to N \to 0$，其中 L^0 和 L^1 都是有限型自由模。根据命题 3，序列 $\widetilde{L^1} \to \widetilde{L^0} \to \widetilde{N} \to 0$ 是正合的。然而，根据命题 4 的推论，$\widetilde{L^0}$ 和 $\widetilde{L^1}$ 都同构于有限个层 $\mathscr{O}_X(n_i)$ 的直和，从而都是凝聚的。由此立知，$\widetilde{N}$ 是凝聚的。

最后，设 M 是一个分次 S 模，满足 (TF)，且使得 $\widetilde{M} = 0$；根据上面所述，可以假设 M 是有限型的。若 m 是 M 中的一个齐次元，则我们令 $\mathfrak{a}_m$ 是 m 的零化子，也就是说，它是由满足 $Q.m = 0$ 的那些多项式 $Q \in S$ 所组成的集合；易见 $\mathfrak{a}_m$ 是一个分次理想。进而，对任意 $x \in X$ 均有 $M_x = 0$ 的条件意味着 $\mathfrak{a}_m$ 在 K^{r+1} 中的零点多样体退化为 $\{0\}$；于是 Hilbert 零点定理表明，任何次数充分大的齐次多项式都落在 $\mathfrak{a}_m$ 中。把这应用到 M 的一个有限生成元组上，则可以立即推知，对于充分大的 p，我们有 $M_p = 0$，这就完成了证明。

结合命题 3 和 5，我们得到：

命题 6. – 设 M 和 M' 是两个分次 S 模，都满足条件 (TF)，并设 $\varphi : M \to M'$ 是 M 到 M' 的一个同态。则为了使

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M'}$$

是单的（切转：满的，一一的），必须且只需 φ 是 $\mathfrak{C}$ 单的（切转：$\mathfrak{C}$ 满的，$\mathfrak{C}$ 一一的）。

¶ 59 代数性层的伴生分次 S 模

设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性层，并且令：

$$\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})_n \quad 其中 \quad \mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})_n = \Gamma(X, \mathscr{F}(n)) \ 。$$

群 $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})$ 是一个分次群；我们再给它赋予一个 S 模的结构。设 $s \in \Gamma(X, \mathscr{F}(q))$，并设 $P \in S_p$，则可以把 P 等同于 $\mathscr{O}_X(p)$ 的一个截面 (参照 ¶ 54)，从而 $P \otimes s$ 是 $\mathscr{O}_X(p) \otimes$

$\mathscr{F}(q) = \mathscr{F}(q)(p) = \mathscr{F}(p+q)$ 的一个截面，这里使用了 ¶54 中的同构；这样我们就定义了 $\mathscr{F}(p+q)$ 的一个截面，我们把这个 $P \otimes s$ 也记作 $P.s$。映射 $(P,s) \mapsto P.s$ 给 $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})$ 赋予了一个 S 模的结构，且与它的分次结构相容。

也可以用 U_i 上的分支来定义 $P.s$：若 s 的诸分支是 $s_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{F})$，且在 $U_i \cap U_j$ 上 $s_i = (t_j^q/t_i^q).s_j$，则我们有 $(P.s)_i = (P/t_i^p).s_i$，这是有意义的，因为 P/t_i^p 是 U_i 上的一个正常函数。

为了能够比较函子 $\widetilde{M}$ 和 $\Gamma(\mathscr{F})$，我们要定义两个典范同态：

$$\alpha : M \longrightarrow \mathbf{\Gamma}(\widetilde{M}) \quad \text{和} \quad \beta : \widetilde{\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})} \longrightarrow \mathscr{F} \ 。$$

α 的定义. 设 M 是一个分次 S 模，并设 $m \in M_0$ 是 M 中的一个 0 次齐次元。则元素 $m/1$ 是 M_x 中的一个含义明确的元素，并且随着 $x \in X$ 连续变化；从而 m 定义了 $\widetilde{M}$ 的一个截面 $\alpha(m)$。现在若 m 是 n 次齐次的，则 m 在 $M(n)$ 中是 0 次齐次的，从而定义了 $\widetilde{M(n)} = \widetilde{M}(n)$ 的一个截面 $\alpha(m)$（参照 命题4）。这就给出了 $\alpha : M \to \mathbf{\Gamma}(\widetilde{M})$ 的定义，且易见这是一个同态。

β 的定义. 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性层，并设 s/Q 是 $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})_x$ 中的一个元素，其中 $s \in \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$, $Q \in S_n$，并且 $Q(x) \neq 0$。函数 $1/Q$ 是 $-n$ 次齐次的，并且在 x 处是正常的，从而它是 $\mathscr{O}_X(-n)$ 在 x 的邻域上的一个截面；因而 $1/Q \otimes s$ 是 $\mathscr{O}_X(-n) \otimes \mathscr{F}(n) = \mathscr{F}$ 在 x 的邻域上的一个截面，从而定义了 $\mathscr{F}_x$ 中的一个元素，我们记之为 $\beta_x(s/Q)$，因为它只依赖于 s/Q。也可以使用 s 的这些分支 s_i 来定义 β_x：即若 $x \in U_i$，则 $\beta_x(s/Q) = (t_i^n/Q).s_i(x)$。这些同态 β_x 就定义了同态 $\beta : \widetilde{\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})} \to \mathscr{F}$。

同态 α 和 β 的关系可以用下面一些命题来表达，它们的证明可以通过直接计算来完成：

命题 7. – 设 M 是一个分次 S 模。则同态的合成 $\widetilde{M} \to \widetilde{\mathbf{\Gamma}(\widetilde{M})} \to \widetilde{M}$ 是恒同。

（第一个同态是由 $\alpha : M \to \mathbf{\Gamma}(\widetilde{M})$ 所定义的，第二个则是 β，应用到 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ 上）。

命题 8. – 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性层。则同态的合成 $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F}) \to \mathbf{\Gamma}(\widetilde{\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})}) \to \mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})$ 是恒同。

（第一个同态是 α，应用到 $M = \mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})$ 上，第二个则是由 $\beta : \widetilde{\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})} \to \mathscr{F}$ 所定义的）。

我们将在 ¶65 中证明，若 $\mathscr{F}$ 是凝聚的，则 $\beta : \widetilde{\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})} \to \mathscr{F}$ 是一一的，另外，若 M 满足条件 (TF)，则 $\alpha : M \to \mathbf{\Gamma}(\widetilde{M})$ 是 $\mathfrak{C}$ 一一的。

※60 代数性凝聚层的情形

我们首先证明一个预备性的结果：

命题 9. – 设 $\mathscr{L}$ 是 X 上的一个代数性层，并且是有限个层 $\mathscr{O}_X(n_i)$ 的直和。则 $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{L})$ 满足 (TF)，并且 $\beta:\widetilde{\mathbf{\Gamma}(\mathscr{L})}\to\mathscr{L}$ 是一一的。

可以立即归结到 $\mathscr{L}=\mathscr{O}_X(n)$，进而归结到 $\mathscr{L}=\mathscr{O}_X$。在此情形中，我们知道对于 $p\geqslant 0$ 有 $\Gamma(X,\mathscr{O}_X(p))=S_p$，从而 $S\subseteq\mathbf{\Gamma}(\mathscr{O}_X)$，并且商模落在 $\mathfrak{C}$ 中。由此首先知道 $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{O}_X)$ 满足 (TF)，进而得出 $\widetilde{\mathbf{\Gamma}(\mathscr{O}_X)}=\widetilde{S}=\mathscr{O}_X$，证明完毕。

（我们可以观察到，当 $r\geqslant 1$ 时 $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{O}_X)=S$，相反地，当 $r=0$ 时 $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{O}_X)$ 甚至不是一个有限型 S 模）。

定理 2. – 对于 X 上的任意代数性凝聚层 $\mathscr{F}$，均可找到一个满足 (TF) 的分次 S 模 M，使得 $\widetilde{M}$ 同构于 $\mathscr{F}$。

根据定理 1 的推论，我们有一个代数性层的正合序列：

$$\mathscr{L}^1\xrightarrow{\varphi}\mathscr{L}^0\longrightarrow\mathscr{F}\longrightarrow 0\ ,$$

其中 $\mathscr{L}^1$ 和 $\mathscr{L}^0$ 满足上一命题的条件。设 M 是同态 $\mathbf{\Gamma}(\varphi):\mathbf{\Gamma}(\mathscr{L}^1)\to\mathbf{\Gamma}(\mathscr{L}^0)$ 的余核，则根据命题 9，M 满足条件 (TF)。把函子 $\mathscr{A}$ 应用到正合序列

$$\mathbf{\Gamma}(\mathscr{L}^1)\longrightarrow\mathbf{\Gamma}(\mathscr{L}^0)\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

上，我们得到正合序列：

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}(\mathscr{L}^1)}\longrightarrow\widetilde{\mathbf{\Gamma}(\mathscr{L}^0)}\longrightarrow\widetilde{M}\longrightarrow 0\ 。$$

现在考虑下面的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbf{\Gamma}(L^1)} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \widetilde{\mathbf{\Gamma}(L^0)} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \widetilde{M} \arrow[r] & 0 \\
\mathscr{L}^1 \arrow[r] & \mathscr{L}^0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据命题 9，两个竖直同态都是一一的。由此可知，$\widetilde{M}$ 同构于 $\mathscr{F}$，证明完毕。

§3 射影空间的取值在代数性凝聚层上的上同调

※61 复形 $\mathrm{C}_k^\bullet(M)$ 和 $\mathrm{C}^\bullet(M)$

我们将沿用 ※51 和 56 中的记号。特别地，I 是指区间 $\{0,1,\dots,r\}$，S 是指分次代数 $K[t_0,\dots,t_r]$。

设 M 是一个分次 S 模，k 和 q 是两个非负整数；我们现在来定义一个群 $\mathrm{C}_k^q(M)$：$\mathrm{C}_k^q(M)$ 中的一个元素是这样一个映射

$$(i_0,\ldots,i_q) \longmapsto m\langle i_0\ldots i_q\rangle$$

它把 I 中的一个 $q+1$ 个元素的序列 $(i_0,\ldots,i_q)$ 对应到 M 中的一个 $k(q+1)$ 次齐次元，并且对于 $i_0,\ldots,i_q$ 来说是交错的。特别地，只要 $i_0,\ldots,i_q$ 中有两个指标是相等的，我们就有 $m\langle i_0\ldots i_q\rangle = 0$。我们可以用明显的方式来定义 $\mathrm{C}_k^q(M)$ 中的加法，以及一个元素 $\lambda\in K$ 在它上面的乘法，从而 $\mathrm{C}_k^q(M)$ 是 K 上的一个向量空间。

若 m 是 $\mathrm{C}_k^q(M)$ 中的一个元素，则我们用下面的公式来定义 $dm\in \mathrm{C}_k^{q+1}(M)$：

$$(dm)\langle i_0\ldots i_{q+1}\rangle = \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j t_{i_j}^k . m\langle i_0\ldots \hat{i}_j\ldots i_{q+1}\rangle \text{ 。}$$

可以通过直接计算来验证 $d\circ d=0$；从而直和 $\mathrm{C}_k^\bullet(M)=\sum\limits_{q=0}^{r}\mathrm{C}_k^q(M)$ 在这个缀算子 d 下成为一个复形，我们把它的第 q 个上同调群记作 $\mathrm{H}_k^q(M)$。

（根据 [11]，我们可以给出 $\mathrm{C}_k^q(M)$ 中元素的另一种解释方法：首先引入 $r+1$ 个微分符号 $dx_0,\ldots,dx_r$，然后把一个元素 $m\in \mathrm{C}_k^q(M)$ 对应到下面这个 $q+1$ 次“微分形式”：

$$\omega_m = \sum_{i_0<\cdots<i_q} m\langle i_0\ldots i_i\rangle dx_{i_0}\wedge\cdots\wedge dx_{i_q} \text{ 。}$$

于是若令 $\alpha_k=\sum\limits_{i=0}^{r} t_i^k dx_i$，则我们看到

$$\omega_{dm} = \alpha_k\wedge\omega_m \text{ ，}$$

换句话说，缀运算可以转化为与微分形式 α_k 取外积的运算）。

若 h 是一个 $\geqslant k$ 的整数，设 $\rho_k^h:\mathrm{C}_k^q(M)\to \mathrm{C}_h^q(M)$ 是下式所定义的同态：

$$\rho_k^h(m)\langle i_0\ldots i_q\rangle = (t_{i_0}\ldots t_{i_q})^{h-k} m\langle i_0\ldots i_q\rangle \text{ 。}$$

对于 $k\leqslant h\leqslant l$，我们有 $\rho_k^h\circ d=d\circ\rho_k^h$ 和 $\rho_h^l\circ\rho_k^h=\rho_k^l$。从而可以定义这样一个复形 $\mathrm{C}^\bullet(M)$，它是这组 $(\mathrm{C}_k^\bullet(M),\rho_k^h)$ 在 $k\to+\infty$ 时的归纳极限。我们把这个复形的上同调群记作 $\mathrm{H}^q(M)$。则因为上同调与归纳极限可交换 (参照 [6], 第 V 章, 命题 9.3*)，所以我们有：

$$\mathrm{H}^q(M) = \varinjlim_{k\to\infty} \mathrm{H}_k^q(M) \text{ 。}$$

任何同态 $\varphi:M\to M'$ 都定义了一个同态

$$\varphi : \mathrm{C}_k^\bullet(M) \longrightarrow \mathrm{C}_k^\bullet(M')$$

即通过公式 $\varphi(m)\langle i_0 \dots i_q\rangle = \varphi(m\langle i_0 \dots i_q\rangle)$，故通过取极限，我们得到 $\varphi : \mathrm{C}^\bullet(M) \to \mathrm{C}^\bullet(M')$；进而这些同态还与缀算子可交换，从而定义了同态

$$\varphi:\ \mathrm{H}^q_k(M) \longrightarrow \mathrm{H}^q_k(M') \quad 和 \quad \varphi:\ \mathrm{H}^q(M) \longrightarrow \mathrm{H}^q(M') \ 。$$

若我们有一个正合序列 $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$，则有一个复形的正合序列 $0 \to \mathrm{C}^\bullet_k(M) \to \mathrm{C}^\bullet_k(M') \to \mathrm{C}^\bullet_k(M'') \to 0$，故可得到一个上同调长正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^q_k(M') \longrightarrow \mathrm{H}^q_k(M'') \longrightarrow \mathrm{H}^{q+1}_k(M) \longrightarrow \mathrm{H}^{q+1}_k(M') \longrightarrow \cdots \ 。$$

对于 $\mathrm{C}^\bullet(M)$ 和 $\mathrm{H}^q(M)$ 我们有同样的结果。

注解 — 我们将在后面 (参照 ¥69) 看到，这些 $\mathrm{H}^q_k(M)$ 也可以表达为某种 Ext^q_S。

¥62 对某些 M 具体地计算 $\mathrm{H}^q_k(M)$

设 M 是一个分次 S 模，且 $m \in M$ 是一个 0 次齐次元。则这组 $(t_i^k.m)$ 是 $\mathrm{C}^\bullet_k(M)$ 中的一个 0 阶上圈，我们记之为 $\alpha^k(m)$，并且把它等同于它的上同调类。这样我们就得到一个 K 线性同态 $\alpha^k : M_0 \to \mathrm{H}^0_k(M)$；由于当 $h \geqslant k$ 时 $\alpha^h = \rho^h_k \circ \alpha^k$，故这些 α^k 通过取极限定义了一个同态 $\alpha : M_0 \to \mathrm{H}^0(M)$。

我们再引入两个记号：

若 $(P_0, \dots, P_h)$ 是 S 中的一组元素，则我们用 $(P_0, \dots, P_h)M$ 来记 M 的这样一个子模，它是由所有形如 $\sum_{i=0}^{h} P_i.m_i$ 的元素所组成的，其中 $m_i \in M$；若这些 P_i 都是齐次的，则这个子模是齐次的。

若 P 是 S 中的一个元素，并且 N 是 M 的一个子模，则我们用 $N : P$ 来记 M 的这样一个子模，它是由所有满足 $P.m \in N$ 的元素 $m \in M$ 所组成的；显然有 $N : P \supseteq N$；若 N 和 P 都是齐次的，则 $N : P$ 也是齐次的。

明确了这些记号，我们有：

命题 1. – 设 M 是一个分次 S 模，k 是一个非负整数。假设，对任意 $i \in I$，均有：

$$(t_0^k, \dots, t_{i-1}^k)M : t_i^k \ = \ (t_0^k, \dots, t_{i-1}^k)M \ 。$$

则：

(a) $\alpha^k : M_0 \to \mathrm{H}^0_k(M)$ 是一一的（假设 $r \geqslant 1$）。
(b) 对于 $0 < q < r$，我们有 $\mathrm{H}^q_k(M) = 0$。

（对于 $i = 0$，前提条件即意味着当 $t_0^k.m = 0$ 时 $m = 0$）。

这个命题是 de Rham [11] 的某个结果的特殊情形（de Rham 的结果不需要假设 $m\langle i_0 \dots i_q\rangle$ 是齐次的）。也参看 [6], 第 VIII 章 § 4，那里只讨论了一个特殊情形，但对于我们的应用来说是足够的。

现在我们把命题1应用到分次 S 模 $S(n)$ 上：

命题 2. – 设 k 是一个非负整数，n 是一个任意的整数。则:
(a) $\alpha^k : S_n \to \mathrm{H}_k^0(S(n))$ 是一一的（假设 $r \geqslant 1$）。
(b) 对于 $0 < q < r$，我们有 $\mathrm{H}_k^q(S(n)) = 0$。
(c) $\mathrm{H}_k^r(S(n))$（在 K 上）具有这样一个基底，它是由单项式 $t_0^{\alpha_0} \cdots t_r^{\alpha_r}$ 的上同调类所组成的，其中 $0 \leqslant \alpha_i < k$，并且 $\sum_{i=0}^{r} \alpha_i = k(r+1) + n$。

易见 S 模 $S(n)$ 满足命题1的前提条件，这就证明了 (a) 和 (b)。另一方面，对任意分次 S 模 M，我们都有 $\mathrm{H}_k^r(M) = M_{k(r+1)}/(t_0^k, \ldots, t_r^k)M_{kr}$；现在单项式

$$t_0^{\alpha_0} \cdots t_r^{\alpha_r}\ ,\ \ \alpha_i \geqslant 0\ ,\ \ \sum_{i=0}^{r} \alpha_i = k(r+1) + n$$

构成 $S(n)_{k(r+1)}$ 的一个基底，而其中至少有一个 $\alpha_i \geqslant k$ 的那些单项式则构成 $(t_0^k, \ldots, t_r^k)S(n)_{kr}$ 的一个基底；故得 (c)。

可以把指数 α_i 改写成 $\alpha_i = k - \beta_i$ 的形状。此时 (c) 中的那些条件变为：

$$0 < \beta_i \leqslant k \quad 且 \quad \sum_{i=0}^{r} \beta_i = -n \quad 。$$

第二个条件加上 $\beta_i > 0$ 就意味着 $\beta_i \leqslant -n - r$；从而若 $k \geqslant -n - r$，则条件 $\beta_i \leqslant k$ 就是前两个条件的推论。故得：

推论 1. – 对于 $k \geqslant -n - r$，$\mathrm{H}_k^r(S(n))$ 具有这样一个基底，它是由单项式 $(t_0 \cdots t_r)^k / t_0^{\beta_0} \cdots t_r^{\beta_r}$ 的上同调类所组成的，其中 $\beta_i > 0$ 且 $\sum_{i=0}^{r} \beta_i = -n$。

我们同样有：

推论 2. – 若 $h \geqslant k \geqslant -n - r$，则对任意 $q \geqslant 0$，同态

$$\rho_k^h \ :\ \mathrm{H}_k^q(S(n)) \longrightarrow \mathrm{H}_h^q(S(n))$$

都是一一的。

对于 $q \neq r$，这是缘自命题2中的条目 (a) 和 (b)。对于 $q = r$，这是缘自推论1，有见于 ρ_k^h 把

$$(t_0 \ldots t_r)^k / t_0^{\beta_0} \ldots t_r^{\beta_r}$$

变化为

$$(t_0 \ldots t_r)^h / t_0^{\beta_0} \ldots t_r^{\beta_r}$$

的事实。

推论 3. – 同态 $\alpha : S_n \to \mathrm{H}^0(S(n))$ 在 $r \geqslant 1$ 或者 $n \geqslant 0$ 时是一一的。对于 $0 < q < r$，我们有 $\mathrm{H}^q(S(n)) = 0$，并且 $\mathrm{H}^r(S(n))$ 是 K 上的一个 $\binom{-n-1}{r}$ 维向量空间。

与α有关的事项在$r \geqslant 1$时是缘自命题2, (a)；在$r=0$且$n \geqslant 0$时是显然的。推论的其余部分显然缘自推论1和2（我们约定在$a<r$时二项展开式系数$\binom{a}{r}$等于0）。

¥63 $\mathrm{H}^q(M)$的基本性质

命题 3. – 设M是一个分次S模，且满足条件(TF)。则:

(a) 可以找到一个整数$k(M)$，使得对于$h \geqslant k \geqslant k(M)$和任意$q$，$\rho_k^h : \mathrm{H}_k^q(M) \to \mathrm{H}_h^q(M)$都是一一的。

(b) 对任意$q \geqslant 0$，$\mathrm{H}^q(M)$都是K上的一个有限维向量空间。

(c) 可以找到一个整数$n(M)$，使得当$n \geqslant n(M)$时，$\alpha : M_n \to \mathrm{H}^0(M(n))$都是一一的，并且对任意$q>0$，$\mathrm{H}^q(M(n))$都是0。

可以立即归结到M是有限型的这个情形。此时所谓M的维数$\leqslant s$（s是一个非负整数），是指可以找到一个正合序列：

$$0 \longrightarrow L^s \longrightarrow L^{s-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 ,$$

其中L^i都是有限型且自由的分次S模。根据Hilbert合冲定理(参照[6], 第VIII章, 定理6.5)，这个维数总是$\leqslant r+1$的。

我们将通过对M的维数进行归纳来证明这个命题。若它是0，则M是自由且有限型的，亦即它是有限个模$S(n_i)$的直和，因而命题缘自命题2的推论2和3。假设M的维数$\leqslant s$，并设N是$L^0 \to M$的核。则分次S模N的维数$\leqslant s-1$，并且我们有一个正合序列：

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 。$$

根据归纳假设，命题对于N和L^0是成立的。把五项引理([7], 第I章, 引理4.3)应用到交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{H}_k^q(N) & \longrightarrow & \mathrm{H}_k^q(L^0) & \longrightarrow & \mathrm{H}_k^q(M) & \longrightarrow & \mathrm{H}_k^{q+1}(N) & \longrightarrow & \mathrm{H}_k^{q+1}(L^0) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}_h^q(N) & \longrightarrow & \mathrm{H}_h^q(L^0) & \longrightarrow & \mathrm{H}_h^q(M) & \longrightarrow & \mathrm{H}_h^{q+1}(N) & \longrightarrow & \mathrm{H}_h^{q+1}(L^0)
\end{array}$$

上，其中$h \geqslant k \geqslant \sup(k(N), k(L^0))$，这就证明了(a)，进而显然有(b)，因为这些$\mathrm{H}_k^q(M)$在$K$上都是有限维的。另一方面，正合序列

$$\mathrm{H}^q(L^0(n)) \longrightarrow \mathrm{H}^q(M(n)) \longrightarrow \mathrm{H}^{q+1}(N(n))$$

表明，对于$n \geqslant \sup(n(L^0), n(N))$，我们有$\mathrm{H}^q(M(n)) = 0$。最后，考虑交换图表：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N_n & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(N(n)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(L^0(n)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(M(n)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(N(n))
\end{array}$$

对于 $n \geqslant n(N)$，我们有 $\mathrm{H}^1(N(n)) = 0$；由此可以推出，当 $n \geqslant \sup(n(L^0), n(N))$ 时 $\alpha : M_n \to \mathrm{H}^0(M(n))$ 是一一的，这就完成了命题的证明。

§64 群 $\mathrm{H}^q(M)$ 和群 $\mathrm{H}^q(X, \widetilde{M})$ 的比较

设 M 是一个分次 S 模，并设 $\widetilde{M}$ 是从 M 出发通过 §57 的方法定义出来的 $X = \mathbf{P}^r(K)$ 上的代数性层。我们下面来比较 $\mathrm{C}^\bullet(M)$ 和 $\mathrm{C}'^\bullet(\mathfrak{U}, \widetilde{M})$，后者就是开覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 的取值在层 $\widetilde{M}$ 中的交错上链复形。

设 $m \in \mathrm{C}_k^q(M)$，并设 $(i_0, \ldots, i_q)$ 是由 I 中的 $q+1$ 个元素所组成的序列。则多项式 $(t_{i_0} \ldots t_{i_q})^k$ 显然落在 $S_{U_{i_0\ldots i_q}}$ 中（在 §57 的记号下）。因而 $m\langle i_0 \ldots i_q\rangle/(t_{i_0} \ldots t_{i_q})^k$ 落在 $M[U]$ 中，其中 $U = U_{i_0\ldots i_q}$，从而它定义了 $\widetilde{M}$ 在 $U_{i_0\ldots i_q}$ 上的一个截面。如果让 $(i_0, \ldots, i_q)$ 变化，则这组截面构成 $\mathfrak{U}$ 的一个取值在 $\widetilde{M}$ 中的交错 q 阶上链，我们记之为 $\iota_k(m)$。可以立即看到，ι_k 与 d 可交换，并且对于 $h \geqslant k$，我们有 $\iota_k = \iota_k \circ \rho_k^h$。从而通过取归纳极限，这些 ι_k 定义了一个同态 $\iota : \mathrm{C}^\bullet(M) \to \mathrm{C}'^\bullet(\mathfrak{U}, \widetilde{M})$，并且与 d 可交换。

命题 4. – *若 M 满足条件 (TF)，则 $\iota : \mathrm{C}^\bullet(M) \to \mathrm{C}'^\bullet(\mathfrak{U}, \widetilde{M})$ 是一一的。*

若 $M \in \mathfrak{C}$，则当 $n \geqslant n_0$ 时，$M_n = 0$，故当 $k \geqslant n_0$ 时，$\mathrm{C}_k^\bullet(M) = 0$，因而 $\mathrm{C}^\bullet(M) = 0$。由于任何一个满足 (TF) 的 S 模都可以 $\mathfrak{C}$ 同构于一个有限型模，这就表明我们可以限于考虑 M 是有限型的。此时我们可以找到一个正合序列 $L^1 \to L^0 \to M \to 0$，其中 L^1 和 L^0 都是有限型且自由的。根据 §58, 命题 3 和 5，序列

$$\widetilde{L^1} \longrightarrow \widetilde{L^0} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0$$

是一个代数性凝聚层的正合序列；由于诸 $U_{i_0\ldots i_q}$ 都是仿射开集，故知序列

$$\mathrm{C}'^\bullet(\mathfrak{U}, \widetilde{L^1}) \longrightarrow \mathrm{C}'^\bullet(\mathfrak{U}, \widetilde{L^0}) \longrightarrow \mathrm{C}'^\bullet(\mathfrak{U}, \widetilde{M}) \longrightarrow 0$$

是一个正合序列 (参照 §45, 定理 2 的推论 2)。此时交换图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{C}^\bullet(L^1) & \longrightarrow & \mathrm{C}^\bullet(L^0) & \longrightarrow & \mathrm{C}^\bullet(M) & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle\iota}\downarrow & & {\scriptstyle\iota}\downarrow & & {\scriptstyle\iota}\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{C}'^\bullet(\mathfrak{U}, \widetilde{L^1}) & \longrightarrow & \mathrm{C}'^\bullet(\mathfrak{U}, \widetilde{L^0}) & \longrightarrow & \mathrm{C}'^\bullet(\mathfrak{U}, \widetilde{M}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

表明，若这个命题对于模 L^1 和 L^0 是成立的，则它对于 M 也成立。从而问题归结到有限型自由模的特殊情形，然后再通过直和分解，又归结到 $M = S(n)$ 的情形。

在此情形，我们有 $\widetilde{S(n)} = \mathscr{O}_X(n)$；根据这个层的定义，$\mathscr{O}_X(n)$ 在 $U_{i_0\ldots i_q}$ 上的一个截面 $f_{i_0\ldots i_q}$ 就是 $V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_q}$ 上的一个 n 次齐次的正常函数。由于 $V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_q}$ 就是 K^{r+1} 中使得函数 $t_{i_0} \ldots t_{i_q} \neq 0$ 的点所组成的集合，故可找到一个整数 k，使得

$$f_{i_0\ldots i_q} = P\langle i_0 \ldots i_q\rangle/(t_{i_0} \ldots t_{i_q})^k \ ,$$

其中 $P\langle i_0 \dots i_q\rangle$ 是一个 $n+k(q+1)$ 次齐次多项式，也就是说，它在 $S(n)$ 中是 $k(q+1)$ 次的。这样一来，任何交错上链 $f \in \mathrm{C}'^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_X(n))$ 都定义了一组 $P\langle i_0 \dots i_q\rangle$，它是 $\mathrm{C}_k^{\bullet}(S(n))$ 中的一个元素；故我们得到一个同态

$$\nu \ : \ \mathrm{C}'^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_X(n)) \longrightarrow \mathrm{C}^{\bullet}(S(n)) \ 。$$

容易验证 $\iota \circ \nu = 1$ 和 $\nu \circ \iota = 1$，故知 ι 是一一的，这就完成了证明。

推论 — 对任意 $q \geqslant 0$，ι 都定义了一个从 $\mathrm{H}^q(M)$ 到 $\mathrm{H}^q(X, \widetilde{M})$ 的同构。

事实上，我们知道 $\mathrm{H}'^q(\mathfrak{U}, \widetilde{M}) = \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \widetilde{M})$ (¶20, 命题2)，并且 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \widetilde{M}) = \mathrm{H}^q(X, \widetilde{M})$ (¶52, 命题2，它可以用在这里，因为 $\widetilde{M}$ 是凝聚的)。

注解 — 容易看出 $\iota : \mathrm{C}^{\bullet}(M) \to \mathrm{C}'^{\bullet}(\mathfrak{U}, \widetilde{M})$ 总是单的，即使 M 不满足条件 (TF)。

¶65 一些应用

命题 5. – 若 M 是一个分次 S 模，且满足条件 (TF)，则 ¶59 中所定义的同态 $\alpha : M \to \mathbf{\Gamma}(\widetilde{M})$ 是 $\mathfrak{C}$ 一一的。

我们需要证明，对于足够大的 n，$\alpha : M_n \to \Gamma(X, \widetilde{M(n)})$ 都是一一的。然而根据命题4，$\Gamma(X, \widetilde{M(n)})$ 可以等同于 $\mathrm{H}^0(M(n))$；从而这个命题缘自命题3, (c)，有见于下面的事实：同态 α 在上述等同下就对应着 ¶62 的开头所定义的那个同态 (也被记作 α)。

命题 6. – 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性凝聚层。则分次 S 模 $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})$ 满足条件 (TF)，并且 ¶59 中所定义的同态 $\beta : \widetilde{\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})} \to \mathscr{F}$ 是一一的。

根据 ¶60, 定理2，可以假设 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$，其中 M 是一个满足 (TF) 的模。根据上述命题，$\alpha : M \to \mathbf{\Gamma}(\widetilde{M})$ 是 $\mathfrak{C}$ 一一的；由于 M 满足 (TF)，故知 $\mathbf{\Gamma}(\widetilde{M})$ 也满足该条件。应用 ¶58, 命题6，我们看到 $\alpha : \widetilde{M} \to \widetilde{\mathbf{\Gamma}(\widetilde{M})}$ 是一一的。而因为合成 $\widetilde{M} \xrightarrow{\alpha} \widetilde{\mathbf{\Gamma}(\widetilde{M})} \xrightarrow{\beta} \widetilde{M}$ 是恒同 (¶59, 命题7)，所以 β 是一一的，证明完毕。

命题 7. – 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性凝聚层。则对任意 $q \geqslant 0$，这些 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ 都是 K 上的有限维向量空间，并且对于 $q > 0$ 和充分大的 n，我们有 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}(n)) = 0$。

和上面一样，可以假设 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$，其中 M 是一个满足 (TF) 的模。此时这个命题缘自命题3 以及命题4 的推论。

命题 8. – 对于 $0 < q < r$，我们有 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{O}_X(n)) = 0$，并且 $\mathrm{H}^r(X, \mathscr{O}_X(n))$ 是 K 上的一个 $\binom{-n-1}{r}$ 维向量空间，它有一个基底是由下面这些 $\mathfrak{U}$ 交错上链的上同调

类所组成的

$$f_{01\ldots r} = 1/t_0^{\beta_0}\ldots t_r^{\beta_r}\ , \quad \text{其中} \quad \beta_i > 0 \quad \text{且} \quad \sum_{i=0}^{r}\beta_i = -n \ 。$$

我们有 $\mathscr{O}_X(n) = \widetilde{S(n)}$，故得 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{O}_X(n)) = \mathrm{H}^q(S(n))$，这是根据命题 4 的推论；命题由此及命题 2 的推论立得。

特别地，注意到 $\mathrm{H}^r(X, \mathscr{O}_X(-r-1))$ 是 K 上的 1 维向量空间，上圈 $f_{01\ldots r} = 1/t_0\ldots t_r$ 的上同调类就是它的基底。

¶66 射影多样体上的代数性凝聚层

设 V 是射影空间 $X = \mathbf{P}^r(K)$ 的一个闭子体，$\mathscr{F}$ 是 V 上的一个代数性凝聚层。把 $\mathscr{F}$ 在 V 之外进行零延拓，则我们得到一个 X 上的代数性凝聚层 (参照 ¶39)，记作 $\mathscr{F}^X$；我们知道 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}^X) = \mathrm{H}^q(V, \mathscr{F})$。从而上一小节的结果可以应用到 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{F})$ 上。由此首先得到 (有见于 ¶52)：

定理 1. – 群 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{F})$ 都是 K 上的有限维向量空间，并且当 $q > \dim V$ 时等于 0。

特别地，对于 $q = 0$，我们有：

推论 — $\Gamma(V, \mathscr{F})$ 是 K 上的一个有限维向量空间。

(我们自然猜测上述定理对于任意的紧合多样体 (在 Weil [16] 中称之为完备的) 也都是成立的 [14])。

设 $U'_i = U_i \cap V$，则这些 U'_i 构成 V 的一个开覆盖 $\mathfrak{U}'$。若 $\mathscr{F}$ 是 V 上的一个代数性层，则我们设 $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}|_{U'_i}$，并设 $\theta_{ij}(n)$ 是 $\mathscr{F}_j|_{U'_i\cap U'_j}$ 到 $\mathscr{F}_i|_{U'_i\cap U'_j}$ 上的这样一个同构，它是由乘以 $(t_j/t_i)^n$ 的运算所定义的。注意到 $\mathscr{F}(n)$ 就是由这些 $\mathscr{F}_i$ 经由 $\theta_{ij}(n)$ 黏合而成的。函子 $\mathscr{F}(n)$ 具有和 ¶54 中的那些函子相同的性质，并且是它们的推广；特别地，$\mathscr{F}(n)$ 典范同构于 $\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_V(n)$。

我们有 $\mathscr{F}^X(n) = \mathscr{F}(n)^X$。于是应用 ¶55, 定理 1 以及 ¶65, 命题 7，可以得到：

定理 2. – 设 $\mathscr{F}$ 是 V 上的一个代数性凝聚层。则可以找到一个整数 $m(\mathscr{F})$，使得对任意 $n \geqslant m(\mathscr{F})$，均有：
(a) 对任意 $x \in V$，$\mathscr{O}_{V,x}$ 模 $\mathscr{F}(n)_x$ 都可由 $\Gamma(V, \mathscr{F}(n))$ 中的元素所生成，
(b) 对任意 $q > 0$，均有 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{F}(n)) = 0$。

注解 — 重要的一点是，我们看到层 $\mathscr{F}(n)$ 不仅依赖于 $\mathscr{F}$ 和 n，而且依赖于 V 到射影空间 X 中的嵌入。更确切地说，设 P 是以 K^* 为结构群的主纤维丛 $\pi^{-1}(V)$；对于给定的整数 n，我们定义 K^* 在 K 上的作用是由下式所给出的：

[14] 译注：参考 EGA 第三章。

对于$\lambda \in K^*$和$\mu \in K$，

$$(\lambda, \mu) \longmapsto \lambda^{-n}\mu \ 。$$

设$E^n = P \times_{K^*} K$是P的这样一个配属丛，它的纤维型是K，并且K^*的作用如上；设$\mathscr{S}(E^n)$是E^n的截面芽层(参照¶41)。有见于这些t_i/t_j构成P的坐标卡之间的一组转移函数的事实，可以立即验证$\mathscr{S}(E^n)$典范同构于$\mathscr{O}_V(n)$。于是公式$\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_V(n) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{S}(E^n)$表明，函子$\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}(n)$只依赖于嵌入$V \to X$所定义的纤维丛$P$的同构类。特别地，若$V$是正规的，则$\mathscr{F}(n)$只依赖于$V$在上述嵌入下的超平面截面的线性等价类(参照[17])。

¶67　一个补充

若M是一个满足(TF)的分次S模，则我们用$M^\natural$来记分次S模$\mathbf{\Gamma}(\widetilde{M})$。我们在¶65中已经看到，$\alpha : M \to M^\natural$是$\mathfrak{C}$一一的。现在我们要给出一些条件来确保$\alpha$是一一的。

命题9. – *为了使$\alpha : M \to M^\natural$是一一的，必须且只需以下诸条件是成立的：*

(i) *若$m \in M$使得对任意$i \in I$均有$t_i.m = 0$，则$m = 0$。*

(ii) *若一组同次数的齐次元$m_i \in M$对任意一对(i,j)均满足关系式$t_j.m_i - t_i.m_j = 0$，则可以找到$m \in M$，使得$m_i = t_i.m$。*

首先证明$M^\natural$满足条件(i)和(ii)，这就可以说明它们的必要性。对于(i)，可以假设m是齐次的，也就是说，是$\widetilde{M(n)}$的一个截面；在这个情形下，条件$t_i.m = 0$表示说m在U_i上等于0，并且这对任意$i \in I$都成立，故我们自然有$m = 0$。至于(ii)，设n是这些m_i的次数；从而我们有$m_i \in \Gamma(\widetilde{M(n)})$；由于$1/t_i$是$\mathscr{O}(-1)$在$U_i$上的一个截面，故知$m_i/t_i$是$\widetilde{M(n-1)}$在$U_i$上的一个截面，并且条件$t_j.m_i - t_i.m_j = 0$表明，这些截面都是$\widetilde{M(n-1)}$在$X$上的唯一一个截面$m$的限制；只消再比较一下截面$t_i.m$和$m_i$；为了证明它们在$U_j$上是重合的，只需在$U_j$上检验$t_j(t_i.m - m_i) = 0$，而这是缘自公式$t_j.m_i = t_i.m_j$以及$m$的定义。

现在我们证明，(i)蕴涵着α是单的。事实上，对于充分大的n，我们知道$\alpha : M_n \to M_n^\natural$是一一的，从而可以对$n$使用递降归纳法；若$\alpha(m) = 0$，其中$m \in M_n$，则有$t_i\alpha(m) = \alpha(t_i.m) = 0$，可以使用归纳假设，因为$t_i.m \in M_{n+1}$，这表明$m = 0$。最后证明(i)和(ii)蕴涵着$\alpha$是满的。和上面一样，我们可以对$n$使用递降归纳法。若$m' \in M_n^\natural$，则归纳假设表明，可以找到$m_i \in M_{n+1}$，使得$\alpha(m_i) = t_i.m'$；我们有$\alpha(t_j.m_i - t_i.m_j) = 0$，故得$t_j.m_i - t_i.m_j = 0$，因为$\alpha$是单的。于是条件(ii)表明，可以找到$m \in M_n$使得$t_i.m = m_i$；我们有$t_i(m' - \alpha(m)) = 0$，这就证明了$m' = \alpha(m)$，也完成了证明。

注解 — (1) 证明过程表明，条件(i)成立的充分必要条件是，α是单的。

(2) 我们可以把(i)和(ii)表达成下面的形式：对任意$n \in \mathbb{Z}$，同态$\alpha^1 : M_n \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{I}}(M(n))$都是一一的。此外，命题4表明，我们可以把$M^\natural$等同于$S$模$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}^0(M(n))$，由此将可以给出命题9的一个纯代数的证明(不使用层$\widetilde{M}$)。

§ 4 与函子 Ext_S^q 的关系

¶ 68 函子 Ext_S^q

我们沿用 ¶ 56 中的记号。若 M 和 N 是两个分次 S 模，则我们用 $\mathrm{Hom}_S(M,N)_n$ 来记 M 到 N 的 n 次齐次 S 同态的群，并且用 $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ 来记分次群 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_S(M,N)_n$；这是一个分次 S 模；如果 M 是有限型的，则它与 M 到 N 的全体 S 同态所组成的 S 模是相同的。

函子 $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ 的导出函子 (参照 [6], 第 V 章) 就是下面一些函子 $\mathrm{Ext}_S^q(M,N)$, $q=0,1,\dots$ 。简单复习一下它们的定义 [15]：

我们选取 M 的一个“消解”，也就是说，一个正合序列：

$$\cdots\longrightarrow L^{q+1}\longrightarrow L^q\longrightarrow\cdots\longrightarrow L^0\longrightarrow M\longrightarrow 0\ ,$$

其中 L^q 都是分次自由 S 模，并且这些映射都是同态 (也就是说，0 次齐次 S 同态)。若我们令 $C^q=\mathrm{Hom}_S(L^q,N)$，则同态 $L^{q+1}\to L^q$ 通过取转置定义了一个同态 $d:C^q\to C^{q+1}$，且满足 $d\circ d=0$；因而使 $C^\bullet=\sum_{q\geqslant 0}C^q$ 获得了一个复形结构，并且 $C^\bullet$ 的第 q 个上同调群就被定义为 $\mathrm{Ext}_S^q(M,N)$；可以证明，这不依赖于消解的选择。且由于这些 C^q 都是分次 S 模，并且 $d:C^q\to C^{q+1}$ 是 0 次齐次的，故知这些 $\mathrm{Ext}_S^q(M,N)$ 都是分次 S 模，由一组子空间 $\mathrm{Ext}_S^q(M,N)_n$ 所定义；这些 $\mathrm{Ext}_S^q(M,N)_n$ 就是复形 $\mathrm{Hom}_S(L^q,N)_n$ 的上同调群，也就是说，它们就是函子 $\mathrm{Hom}_S(M,N)_n$ 的导出函子。

复习一下这些 Ext_S^q 的主要性质：

$\mathrm{Ext}_S^0(M,N)=\mathrm{Hom}_S(M,N)$；若 M 是有限型的，则对于 $q>r+1$，我们有 $\mathrm{Ext}_S^q(M,N)=0$ (基于 Hilbert 合冲定理，参照 [6], 第 VIII 章, 定理 6.5)；若 M 和 N 都是有限型的，则 $\mathrm{Ext}_S^q(M,N)$ 是一个有限型 S 模 (因为可以选择这样一个消解，使得 L^q 都是有限型的)；对任意 $n\in\mathbb{Z}$，均有典范同构：

$$\mathrm{Ext}_S^q(M(n),N)\ \cong\ \mathrm{Ext}_S^q(M,N(-n))\ \cong\ \mathrm{Ext}_S^q(M,N)(-n)\ 。$$

正合序列

$$0\longrightarrow N\longrightarrow N'\longrightarrow N''\longrightarrow 0\quad 和\quad 0\longrightarrow M\longrightarrow M'\longrightarrow M''\longrightarrow 0$$

可以给出正合序列：

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{Ext}_S^q(M,N)\longrightarrow \mathrm{Ext}_S^q(M,N')\longrightarrow \mathrm{Ext}_S^q(M,N'')\longrightarrow \mathrm{Ext}_S^{q+1}(M,N)\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{Ext}_S^q(M'',N)\longrightarrow \mathrm{Ext}_S^q(M',N)\longrightarrow \mathrm{Ext}_S^q(M,N)\longrightarrow \mathrm{Ext}_S^{q+1}(M'',N)\longrightarrow\cdots$$

[15] 如果 M 不是有限型的模，则这里所定义的 $\mathrm{Ext}_S^q(M,N)$ 与 [6] 中所定义的 $\mathrm{Ext}_S^q(M,N)$ 有所不同：这是由于两个地方的 $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ 的含义不同。尽管如此，[6] 中的所有证明都可以不加改变的应用到这里：这可以直接验证，也可以应用 [6] 的附录来说明。

⁑69 把 $\mathrm{H}_k^q(M)$ 解释为 Ext_S^q

设 M 是一个分次 S 模，并设 k 是一个非负整数。令：

$$\mathrm{B}_k^q(M) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}_k^q(M(n)) \;\;,$$

这是在 ⁑61 的记号下。

这样我们就得到一个分次群，同构于复形 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{C}_k^{\bullet}(M(n))$ 的第 q 个上同调群；我们可以给这个复形赋予一个与它的分次结构相容的 S 模结构，即令

$$(P.m)\langle i_0\dots i_q\rangle \;=\; P.m\langle i_0\dots i_q\rangle\,,\ \text{其中}\ P\in S_p\ \text{且}\ m\langle i_0\dots i_q\rangle \;\in\; \mathrm{C}_k^q(M(n)) \;\;;$$

由于缀算子是一个 0 次齐次 S 同态，故知这些 $\mathrm{B}_k^q(M)$ 本身也都是分次 S 模。

我们令

$$\mathrm{B}^q(M) \;=\; \varinjlim_{k\to\infty} \mathrm{B}_k^q(M) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}^q(M(n)) \;\;。$$

则这些 $\mathrm{B}^q(M)$ 都是分次 S 模。对于 $q=0$，我们有

$$\mathrm{B}^0(M) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}^0(M(n))\,,$$

这就再次得到 ⁑67 中标记为 $M^\natural$ 的那个模 (只要 M 满足条件 (TF))。对每个 $n\in\mathbb{Z}$，我们在 ⁑62 中都定义了一个线性映射 $\alpha: M_n \to \mathrm{H}^0(M(n))$；可以立即验证，这些映射的和定义了一个从 M 到 $\mathrm{B}^0(M)$ 的同态，我们仍记之为 α。

命题 1. — 设 k 是一个非负整数，并设 J_k 是 S 的理想 $(t_0^k,\dots,t_r^k)$。则对任意分次 S 模 M，分次 S 模 $\mathrm{B}_k^q(M)$ 和 $\mathrm{Ext}_S^q(J_k,M)$ 都是同构的。

对于 $q=0,\dots,r$，设 L_k^q 是这样一个分次自由 S 模，它有一个基底是 $k(q+1)$ 次元素 $e\langle i_0\dots i_q\rangle$, $0\leqslant i_0<i_1<\cdots<i_q\leqslant r$；可以定义一个算子 $d: L_k^{q+1}\to L_k^q$ 和一个算子 $\varepsilon: L_k^0\to J_k$ 如下：

$$d(e\langle i_0\dots i_{q+1}\rangle) \;=\; \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j t_{i_j}^k.e\langle i_0\dots\hat{i}_j\dots i_{q+1}\rangle \;\;。$$

$$\varepsilon(e\langle i\rangle) \;=\; t_i^k \;\;。$$

引理 1. – 同态序列:

$$0 \longrightarrow L_k^r \xrightarrow{\;d\;} L_k^{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_k^0 \xrightarrow{\;\varepsilon\;} J_k \longrightarrow 0$$

是一个正合序列。

对于 $k=1$，这个结果是熟知的 (参照 [6], 第 VIII 章 § 4)；一般情形可以用同样的方法来证明 (或者归结到前一情形)；还可以利用 [11] 中所证明的定理。

命题1可以从引理立即导出，只要我们留意到由 $\mathrm{Hom}_S(L_k^q, M)$ 和 d 的转置所构成的复形刚好就是复形 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{C}_k^\bullet(M(n))$。

推论 1. – $\mathrm{H}_k^q(M)$ 同构于 $\mathrm{Ext}_S^q(J_k, M)_0$。

事实上，这两个群分别是分次群 $\mathrm{B}_k^q(M)$ 和 $\mathrm{Ext}_S^q(J_k, M)$ 中的 0 次分量。

推论 2. – $\mathrm{H}_k^q(M)$ 同构于 $\mathrm{Ext}_S^q(J_k, M)_0$。

可以很容易地看出，§61 中的同态 $\rho_k^h : \mathrm{H}_k^q(M) \to \mathrm{H}_h^q(M)$ 在推论1的同构下可以转化为由含入 $J_h \to J_k$ 所定义的

$$\mathrm{Ext}_S^q(J_k, M)_0 \quad 到 \quad \mathrm{Ext}_S^q(J_h, M)_0$$

的同态；故得推论2。

注解 — 设 M 是一个有限型分次 S 模；M 定义了 (参照 §48) K^{r+1} 上的一个代数性凝聚层 $\mathscr{F}'$，从而也是 $Y = K^{r+1} \smallsetminus \{0\}$ 上的凝聚层，并且可以验证，$\mathrm{H}^q(Y, \mathscr{F}')$ 同构于 $\mathrm{B}^q(M)$。

§70 函子 $\mathrm{T}^q(M)$ 的定义

我们首先定义分次 S 模的对偶模的概念。设 M 是一个分次 S 模；对任意 $n \in \mathbb{Z}$，M_n 都是 K 上的一个向量空间，我们把它的对偶向量空间记作 $(M_n)'$。令：

$$M^* = \sum_{n\in\mathbb{Z}} M_n^*, \quad 其中 \quad M_n^* = (M_{-n})' 。$$

我们现在要给 M^* 赋予一个 S 模的结构，且与它的分次结构相容；对任意 $P \in S_p$，映射 $m \to P.m$ 都是 M_{-n-p} 到 M_{-n} 的一个 K 线性映射，从而通过取转置定义了一个从 $(M_{-n})' = M_n^*$ 到 $(M_{-n-p})' = M_{n+p}^*$ 的 K 线性映射；这就定义了 M^* 上的 S 模结构。我们也可以把 M^* 定义为 $\mathrm{Hom}_S(M, K)$，这里的 K 是指分次 S 模 $S/(t_0, \ldots, t_r)$。

分次 S 模 M^* 将被称为 M 的对偶；我们有 $M^{**} = M$，只要每个 M_n 在 K 上都是有限维的，比如说 $M = \mathbf{\Gamma}(\mathscr{F})$，其中 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性凝聚层，又或者 M 是有限型的。任何同态 $\varphi : M \to N$ 都通过取转置定义了一个从 N^* 到 M^* 的同态。若序列 $M \to N \to P$ 是正合的，则序列 $P^* \to N^* \to M^*$ 也是如此。换句话说，M^* 是模 M 的一个反变函子，并且是正合的。如果 I 是 S 的一个分次理想，则 S/I 的对偶就是 Macaulay 所说的 I 的“逆系” (参照 [9], §25)。

现在设 M 是一个分次 S 模，q 是一个非负整数。我们在上一小节中定义了分次 S 模 $\mathrm{B}^q(M)$；现在我们把 $\mathrm{B}^q(M)$ 的对偶模记作 $\mathrm{T}^q(M)$。从而根据定义，我们有：

$$\mathrm{T}^q(M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{T}^q(M)_n, \quad 其中 \quad \mathrm{T}^q(M)_n = (\mathrm{H}^q(M(-n)))' 。$$

任何同态 $\varphi : M \to N$ 都定义了一个从 $\mathrm{B}^q(M)$ 到 $\mathrm{B}^q(N)$ 的同态，故得一个从 $\mathrm{T}^q(N)$ 到 $\mathrm{T}^q(M)$ 的同态；因而这些 $\mathrm{T}^q(M)$ 都是 M 的反变函子（此外，我们将在⁋72 中看到，可以把它们很容易地用 Ext_S 表达出来）。任何正合序列：

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

都可以引出一个正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{B}^q(M) \longrightarrow \mathrm{B}^q(N) \longrightarrow \mathrm{B}^q(P) \longrightarrow \mathrm{B}^{q+1}(M) \longrightarrow \cdots ,$$

从而通过取转置可以得到一个正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{T}^{q+1}(M) \longrightarrow \mathrm{T}^q(P) \longrightarrow \mathrm{T}^q(N) \longrightarrow \mathrm{T}^q(M) \longrightarrow \cdots 。$$

同态 $\alpha : M \to \mathrm{B}^0(M)$ 通过取转置定义了一个同态 $\alpha^* : \mathrm{T}^0(M) \to M^*$。

因为当 $q > r$ 时 $\mathrm{B}^q(M) = 0$，所以对于 $q > r$ 我们有 $\mathrm{T}^q(M) = 0$。

⁋71 $\mathrm{T}^r(M)$ 的确定

（在这一小节和下一小节中，我们将假设 $r \geqslant 1$；在 $r = 0$ 的情形，结果略有差异，但也是平凡的）。

我们用 Ω 来表示分次 S 模 $S(-r-1)$；这是一个自由模，具有一个由 $r+1$ 次元素所组成的基底。我们在⁋62 中已看到，对于充分大的 k，$\mathrm{H}^r(\Omega) = \mathrm{H}^r_k(\Omega)$，并且 $\mathrm{H}^r_k(\Omega)$ 在 K 上具有这样一个基底，它是由唯一一个元素 $(t_0 \ldots t_r)^k / t_0 \ldots t_r$ 所组成的；我们把这个元素在 $\mathrm{H}^r(\Omega)$ 中的像记作 ξ；从而 ξ 构成 $\mathrm{H}^r(\Omega)$ 的一个基底。

现在我们要在元素 $h \in \mathrm{B}^r(M)_{-n}$ 和 $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(M, \Omega)_n$ 之间定义一个配对 $\langle h, \varphi \rangle$，其中 M 是一个任意的分次 S 模。元素 φ 可以等同于 $\mathrm{Hom}_S(M(-n), \Omega)_0$ 中的一个元素，也就是说，等同于 $M(-n)$ 到 Ω 的一个同态；从而通过取上同调群，它定义出一个从 $\mathrm{H}^r(M(-n)) = \mathrm{B}^r(M)_{-n}$ 到 $\mathrm{H}^r(\Omega)$ 的同态，我们仍记之为 φ。从而 h 在这个同态下的像是 ξ 的一个常数倍，现在我们用下面的公式来定义 $\langle h, \varphi \rangle$：

$$\varphi(h) = \langle h, \varphi \rangle \xi \quad 。$$

对任意 $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(M, \Omega)_n$，函数 $h \to \langle h, \varphi \rangle$ 都是 $\mathrm{B}^r(M)_{-n}$ 上的一个线性形式，从而可以等同于 $\mathrm{B}^r(M)_{-n}$ 的对偶（这刚好就是 $\mathrm{T}^r(M)_n$）中的一个元素 $\nu(\varphi)$。这样我们就定义了一个 0 次齐次映射

$$\nu : \mathrm{Hom}_S(M, \Omega) \longrightarrow \mathrm{T}^r(M) ,$$

并且公式 $\langle P.h, \varphi \rangle = \langle h, P.\varphi \rangle$ 表明，ν 是一个 S 同态。

命题 2. – 同态 $\nu : \mathrm{Hom}_S(M, \Omega) \to \mathrm{T}^r(M)$ 是一一的。

我们首先对于 M 是自由模的情形证明这个命题。若 M 它的齐次子模 M^α 的直和，则有：

$$\mathrm{Hom}_S(M,\Omega)_n \;=\; \prod_\alpha \mathrm{Hom}_S(M^\alpha,\Omega)_n \quad \text{和} \quad \mathrm{T}^r(M)_n \;=\; \prod_\alpha \mathrm{T}^r(M^\alpha)_n \;。$$

这样一来，若命题对于 M^α 是成立的，则它对于 M 也成立，从而问题可以归结到只有一个生成元的自由模的情形，也就是说，$M=S(m)$。此时我们可以把 $\mathrm{Hom}_S(M,\Omega)_n$ 等同于 $\mathrm{Hom}_S(S,S(n-m-r-1))_0$，也就是说，等同于 $n-m-r-1$ 次齐次多项式的向量空间。从而 $\mathrm{Hom}_S(M,\Omega)_n$ 具有一个由单项式 $t_0^{\gamma_0}\cdots t_r^{\gamma_r}$ 所组成的基底，其中 $\gamma_i\geqslant 0$ 并且 $\sum\limits_{i=0}^{r}\gamma_i=n-m-r-1$。另一方面，我们在 ¶62 中已经看到，$\mathrm{H}_k^r(S(m-n))$ 具有（对于充分大的 k）一个由单项式 $(t_0\cdots t_r)^k/t_0^{\beta_0}\cdots t_r^{\beta_r}$ 所组成的基底，其中 $\beta_i>0$ 且 $\sum\limits_{i=0}^{r}=n-m$。若令 $\beta_i=\gamma_i'+1$，则可以把这些单项式写成 $(t_0\cdots t_r)^{k-1}/t_0^{\gamma_0'}\cdots t_r^{\gamma_r'}$ 的形状，其中 $\gamma_i'\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{i=0}^{r}\gamma_i'=n-m-r-1$。检视一下 $\langle h,\varphi\rangle$ 的定义，我们发现配对

$$\langle (t_0\cdots t_r)^{k-1}/t_0^{\gamma_0'}\cdots t_r^{\gamma_r'},\ t_0^{\gamma_0}\cdots t_r^{\gamma_r}\rangle$$

总是等于 0，除非对任意 i 均有 $\gamma_i=\gamma_i'$，此时它等于 1。这就意味着 ν 把基底 $\{t_0^{\gamma_0}\ldots t_r^{\gamma_r}\}$ 转化为基底 $\{(t_0\ldots t_r)^{k-1}/t_0^{\gamma_0}\ldots t_r^{\gamma_r}\}$ 的对偶基底，从而是一一的，这就在 M 是自由的这个情形下证明了命题。

现在转到一般情形上。我们选取一个正合序列

$$L^1 \longrightarrow L^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中 L^0 和 L^1 都是自由的。考虑下面的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(M,\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(L^0,\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(L^1,\Omega) \\
{\scriptstyle\nu}\big\downarrow & & {\scriptstyle\nu}\big\downarrow & & {\scriptstyle\nu}\big\downarrow & & {\scriptstyle\nu}\big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{T}^r(M) & \longrightarrow & \mathrm{T}^r(L^0) & \longrightarrow & \mathrm{T}^r(L^1)
\end{array}$$

这个图表的第一行是一个正合序列，这是根据函子 Hom_S 的基本性质；第二行也是一个正合序列，因为它是下述序列的对偶序列

$$\mathrm{B}^r(L^1) \longrightarrow \mathrm{B}^r(L^0) \longrightarrow \mathrm{B}^r(M) \longrightarrow 0 \;,$$

该序列是正合的，因为它来自 B^q 的上同调长正合序列，而且我们知道对所有分次 S 模 M，均有 $\mathrm{B}^{r+1}(M)=0$。另一方面，两个竖直同态

$$\nu\ :\ \mathrm{Hom}_S(L^0,\Omega) \longrightarrow \mathrm{T}^r(L^0)) \quad \text{和} \quad \nu\ :\ \mathrm{Hom}_S(L^1,\Omega) \longrightarrow \mathrm{T}^r(L^1)$$

都是一一的，这是我们刚刚看到的。因此

$$\nu\ :\ \mathrm{Hom}_S(M,\Omega) \longrightarrow \mathrm{T}^r(M)$$

也是一一的，这就完成了证明。

¶ 72 $\mathrm{T}^q(M)$ 的确定

我们要证明下面的定理，它是命题 2 的推广：

定理 1. – 设 M 是一个分次 S 模。对于 $q \neq r$，分次 S 模 $\mathrm{T}^{r-q}(M)$ 和 $\mathrm{Ext}_S^q(M,\Omega)$ 是同构的。进而，我们有一个正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_S^r(M,\Omega) \longrightarrow \mathrm{T}^0(M) \xrightarrow{\alpha^*} M^* \longrightarrow \mathrm{Ext}_S^{r+1}(M,\Omega) \longrightarrow 0 \text{ 。}$$

我们将使用 [6], 第 III 章 § 5 中所给出的导出函子的公理化描述。为此首先定义一个新的函子 $\mathrm{E}^q(M)$，方法如下：

对于 $q \neq r, r+1$， $\mathrm{E}^q(M) = \mathrm{T}^{r-q}(M)$

对于 $q = r$， $\mathrm{E}^r(M) = \mathrm{Ker}(\alpha^*)$

对于 $q = r+1$， $\mathrm{E}^{r+1}(M) = \mathrm{Coker}(\alpha^*)$ 。

诸 $\mathrm{E}^q(M)$ 都是 M 的加性反变函子，且具有下面一些性质：

(i) $\mathrm{E}^0(M)$ 同构于 $\mathrm{Hom}_S(M,\Omega)$ 。

这是命题 2 所证明的。

(ii) 若 L 是自由的，则对任意 $q > 0$，均有 $\mathrm{E}^q(L) = 0$ 。

只需对于 $L = S(n)$ 进行验证，此时这是缘自 ¶ 62。

(iii) 对每个正合序列 $0 \to M \to N \to P \to 0$，我们都有一组连接算子 d^q : $\mathrm{E}^q(M) \to \mathrm{E}^{q+1}(P)$，并且序列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{E}^q(P) \longrightarrow \mathrm{E}^q(N) \longrightarrow \mathrm{E}^q(M) \xrightarrow{d^q} \mathrm{E}^{q+1}(P) \longrightarrow \cdots$$

是正合的。

对于 $q \neq r-1, r$， d^q 的定义是显然的：它就是 ¶ 70 中所定义的 $\mathrm{T}^{r-q}(M)$ 到 $\mathrm{T}^{r-q-1}(P)$ 的同态。对于 $q = r-1$ 或 r，我们要使用下面的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^1(M) \arrow[r] & \mathrm{T}^0(P) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^*"'] & \mathrm{T}^0(N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^*"'] & \mathrm{T}^0(M) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^*"'] & 0 \arrow[d, "\alpha^*"'] \\
0 \arrow[r] & P^* \arrow[r] & N^* \arrow[r] & M^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这个图表首先证明了 $\mathrm{T}^1(M)$ 的像包含在 $\alpha^* : \mathrm{T}^0(P) \to P^*$ 的核之中，这个核刚好就是 $\mathrm{E}^r(P)$ 。这就定义了 $d^{r-1} : \mathrm{E}^{r-1}(M) \to \mathrm{E}^r(P)$ 。

为了定义 d^r : $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}^0(M) \to M^*) \to \mathrm{Coker}(\mathrm{T}^0(P) \to P^*)$，我们使用 [6], 第 III 章, 引理 3.3 的方法：若 $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T}^0(M) \to M^*)$，则可以找到 $y \in P^*$ 和 $z \in$

$\mathrm{T}^0(N)$，使得 x 是 z 的像，并且 y 和 z 在 N^* 中有相同的像；此时我们令 $d^r(x) = y$。

序列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{E}^q(P) \longrightarrow \mathrm{E}^q(N) \longrightarrow \mathrm{E}^q(M) \xrightarrow{d^q} \mathrm{E}^{q+1}(P) \longrightarrow \cdots$$

的正合性缘自序列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{T}^{r-q}(P) \longrightarrow \mathrm{T}^{r-q}(N) \longrightarrow \mathrm{T}^{r-q}(M) \longrightarrow \mathrm{T}^{r-q-1}(P) \longrightarrow \cdots$$

的正合性以及 [6], 前引。

(iv) (i) 中的同构和 (iii) 中的算子 d^q 都是“自然”的。

这可由定义立得。

由于这些性质 (i) 到 (iv) 就唯一地确定了函子 $\mathrm{Hom}_S(M,\Omega)$ 的导出函子，故我们有 $\mathrm{E}^q(M) \cong \mathrm{Ext}^q_S(M,\Omega)$，这就证明了定理。

推论 1. – 若 M 满足 (TF)，则对任意 $q \geqslant 1$， $\mathrm{H}^q(M)$ 都同构于 $\mathrm{Ext}^{r-q}_S(M,\Omega)_0$ 的对偶向量空间。

事实上，我们知道 $\mathrm{H}^q(M)$ 是一个有限维向量空间，并且它的对偶同构于 $\mathrm{Ext}^{r-q}_S(M,\Omega)_0$。

推论 2. – 若 M 满足 (TF)，则对于 $q \geqslant 1$， $\mathrm{T}^q(M)$ 都是有限型分次 S 模，并且 $\mathrm{T}^0(M)$ 满足 (TF)。

可以把 M 换成一个有限型模而不会改变 $\mathrm{B}^q(M)$，从而也不会改变 $\mathrm{T}^q(M)$。此时这些 $\mathrm{Ext}^{r-q}_S(M,\Omega)$ 都是有限型 S 模，并且我们有 $M^* \in \mathfrak{C}$，故得结论。

§5　在代数性凝聚层上的应用

ᚼ73　函子 Ext^q_S 和 $\mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_x}$ 的关系

设 M 和 N 是两个分次 S 模。若 x 是 $X = \mathbf{P}^r(K)$ 中的一个点，则我们在 ᚼ57 中定义了 $\mathscr{O}_x$ 模 M_x 和 N_x；现在我们要在这些 $\mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_x}(M_x,N_x)$ 和分次 S 模 $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)$ 之间建立联系：

命题 1. – 假设 M 是有限型的。则有：
(a) 层 $\widetilde{\mathrm{Hom}_S(M,N)}$ 同构于层 $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M},\widetilde{N})$。
(b) 对任意 $x \in X$， $\mathscr{O}_x$ 模 $\mathrm{Ext}^q_S(M,N)_x$ 都同构于 $\mathscr{O}_x$ 模 $\mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_x}(M_x,N_x)$。

我们首先定义一个同态 $\iota_x : \mathrm{Hom}_S(M,N)_x \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_x}(M_x,N_x)$。第一个模中的元素是一个分式 φ/P，其中 $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(M,N)_n$， $P \in S_{\{x\}}$，且 P 是 n 次齐次

的；若 m/P' 是 M_x 中的一个元素，则 $\varphi(m)/PP'$ 是 N_x 中的一个元素，它只依赖于 φ/P 和 m/P'，并且映射 $m/P' \to \varphi(m)/PP'$ 是一个同态 $\iota_x(\varphi/P) : M_x \to N_x$；这就定义了 ι_x。根据 §14, 命题 5，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_x}(M_x, N_x)$ 可以等同于

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N})_x \quad ;$$

这个等同把 ι_x 转化为

$$\iota_x \ : \ \widetilde{\mathrm{Hom}_S(M, N)}_x \ \longrightarrow \ \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N})_x \quad ,$$

并且容易验证，这些 ι_x 给出一个同态

$$\iota \ : \ \widetilde{\mathrm{Hom}_S(M, N)} \ \longrightarrow \ \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \quad 。$$

如果 M 是一个有限型自由模，则 ι_x 是一一的。事实上，只需对于 $M = S(n)$ 进行证明，此时这是显然的。

现在设 M 是一个任意的有限型分次 S 模，我们选取 M 的一个消解：

$$\cdots \ \longrightarrow \ L^{q+1} \ \longrightarrow \ L^q \ \longrightarrow \ \cdots \ \longrightarrow \ L^0 \ \longrightarrow \ M \ \longrightarrow \ 0 \quad ,$$

其中 L^q 都是有限型且自由的，我们取 $C^\bullet$ 是由这些 $\mathrm{Hom}_S(L^q, N)$ 所组成的复形。$C^\bullet$ 的上同调群就是 $\mathrm{Ext}^q_S(M, N)$。换句话说，若我们用 B^q 和 Z^q 分别表示 C^q 中的上边缘和上圈的子模，则有正合序列：

$$0 \ \longrightarrow \ Z^q \ \longrightarrow \ C^q \ \longrightarrow \ B^{q+1} \ \longrightarrow \ 0 \quad ,$$

和

$$0 \ \longrightarrow \ B^q \ \longrightarrow \ Z^q \ \longrightarrow \ \mathrm{Ext}^q_S(M, N) \ \longrightarrow \ 0 \quad 。$$

由于函子 $\widetilde{M}$ 是正合的，故知序列

$$0 \ \longrightarrow \ Z^q_x \ \longrightarrow \ C^q_x \ \longrightarrow \ B^{q+1}_x \ \longrightarrow \ 0$$

和

$$0 \ \longrightarrow \ B^q_x \ \longrightarrow \ Z^q_x \ \longrightarrow \ \mathrm{Ext}^q_S(M, N)_x \ \longrightarrow \ 0$$

也都是正合的。

然而，根据上面所述，C^q_x 同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_x}(L^q_x, N_x)$；$\mathrm{Ext}^q_S(M, N)_x$ 同构于由这些 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(L^q_x, N_x)$ 所组成的复形的上同调群，且由于 L^q_x 显然都是 $\mathscr{O}_{X,x}$ 自由的，故这恰好给出了 $\mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_{X,x}}(M_x, N_x)$ 的定义，这就证明了 (b)；在 $q = 0$ 处，上面所述表明 ι_x 是一一的，从而 ι 是一个同构，故得 (a)。

¶74　当 $n \to +\infty$ 时上同调群 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}(-n))$ 的消逝性

定理 1. – 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性凝聚层，并设 q 是一个非负整数。则以下两个条件是等价的:

(a) 对于足够大的 n，我们有 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}(-n)) = 0$。

(b) 对任意 $x \in X$，均有 $\mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{F}_x, \mathscr{O}_{X,x}) = 0$。

根据 ¶60, 定理 2，可以假设 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$，其中 M 是一个有限型分次 S 模，并且根据 ¶64，$\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}(-n))$ 同构于 $\mathrm{H}^q(M(-n)) = \mathrm{B}^q(M)_{-n}$；从而条件 (a) 等价于当 n 足够大时

$$\mathrm{T}^q(M)_n = 0 ,$$

也就是说，等价于 $\mathrm{T}^q(M) \in \mathfrak{C}$。根据 ¶72, 定理 1，以及 $M^* \in \mathfrak{C}$ (因为 M 是有限型的) 的事实，上面这个条件等价于 $\mathrm{Ext}^{r-q}_S(M, \Omega) \in \mathfrak{C}$；而因为 $\mathrm{Ext}^{r-q}_S(M, \Omega)$ 是一个有限型 S 模，所以我们知道

$$\mathrm{Ext}^{r-q}_S(M, \Omega) \in \mathfrak{C}$$

等价于说，对任意 $x \in X$，均有 $\mathrm{Ext}^{r-q}_S(M, \Omega)_x = 0$，这是根据 ¶58, 命题 5；最后，命题 1 表明，$\mathrm{Ext}^{r-q}_S(M, \Omega)_x = \mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathscr{O}_{X,x}}(M_x, \Omega_x)$，且由于 M_x 同构于 $\mathscr{F}_x$，同时 Ω_x 同构于 $\mathscr{O}_X(-r-1)_x$，从而同构于 $\mathscr{O}_{X,x}$，这就完成了证明。

为了陈述定理 2，我们需要 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模的维数概念。还记得 ([6], 第 VI 章 § 2) 所谓一个有限型 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模 P 的维数 $\leqslant p$，是指可以找到一个 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模的正合序列：

$$0 \longrightarrow L^p \longrightarrow L^{p-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L^0 \longrightarrow P \longrightarrow 0 ,$$

其中每个 L^p 都是自由的 (这个定义等价于 [6], 前引中的定义，因为有限型投射 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模都是自由的，参照 [6], 第 VIII 章, 定理 6.1′)。任何有限型 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模的维数都 $\leqslant r$，这是根据合冲定理 (参照 [6], 第 VIII 章, 定理 6.2′)。

引理 1. – 设 P 是一个有限型 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模，并设 p 是一个非负整数。则以下两个条件是等价的:

(i) P 的维数 $\leqslant p$。

(ii) 对任意 $m > p$，均有 $\mathrm{Ext}^m_{\mathscr{O}_{X,x}}(P, \mathscr{O}_{X,x}) = 0$。

易见 (i) 蕴涵 (ii)。我们来证明 (ii) 蕴涵 (i)，对 p 使用递降归纳法；当 $p \geqslant r$ 时，引理是平凡的，因为 (i) 总成立；现在我们要从 $p+1$ 进到 p；设 N 是一个任意的有限型 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模。则可以找到一个正合序列 $0 \to R \to L \to N \to 0$，其中 L 是自由且有限型的 (因为 $\mathscr{O}_{X,x}$ 是 Noether 的)。正合序列

$$\mathrm{Ext}^{p+1}_{\mathscr{O}_{X,x}}(P, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+1}_{\mathscr{O}_{X,x}}(P, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+2}_{\mathscr{O}_{X,x}}(P, R)$$

表明 $\mathrm{Ext}^{p+1}_{\mathscr{O}_{X,x}}(P, N) = 0$。事实上，我们有 $\mathrm{Ext}^{p+1}_{\mathscr{O}_{X,x}}(P, L) = 0$，这是根据条件 (ii)，我们还有 $\mathrm{Ext}^{p+2}_{\mathscr{O}_{X,x}}(P, R) = 0$，因为 $\dim P \leqslant p+1$，这是根据归纳假设。由于这个性质就是对于维数 $\leqslant p$ 的模的特征描述，引理因此得证。

把这个引理和定理 1 结合起来，就可以得到:

定理 2. – 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性凝聚层，并设 p 是一个非负整数。则下面两个条件是等价的：

(a) 对于足够大的 n 以及 $0 \leqslant q < p$，我们有 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}(-n)) = 0$。

(b) 对任意 $x \in X$，$\mathscr{O}_{X,x}$ 模 $\mathscr{F}_x$ 的维数都 $\leqslant r - p$。

¶ 75 平滑多样体

下面这个结果在我们把 [15] 中的“对偶定理”推广到一般情形时起着重要的作用：

定理 3. – 设 V 是射影空间 $\mathbf{P}^r(K)$ 的一个平滑子体；假设 V 的所有不可约分支都有相同的维数 p。设 $\mathscr{F}$ 是 V 上的一个代数性凝聚层，并且假设对任意 $x \in V$，$\mathscr{F}_x$ 都是 $\mathscr{O}_{V,x}$ 上的自由模。则对于足够大的 n 以及 $0 \leqslant q < p$，我们有 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{F}(-n)) = 0$。

根据定理 2，问题归结为证明 $\mathscr{O}_{V,x}$ 作为 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模的维数 $\leqslant r - p$。我们用 $\mathscr{I}(V)_x$ 来记典范同态 $\varepsilon_x : \mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{V,x}$ 的核，则因为点 x 在 V 上是平滑的，故我们知道 (参照 [18], 定理 1) 这个理想是由 $r-p$ 个元素 $f_1, \ldots, f_{r-p}$ 所生成的，Cohen-Macaulay 定理 (参照 [13], p. 53, 命题 2) 又表明，对于 $1 \leqslant i \leqslant r-p$，我们有

$$(f_1, \ldots, f_{i-1}) : f_i \;=\; (f_1, \ldots, f_{i-1}) \quad。$$

现在我们用 L_q 来表示这样一个自由 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模，它有一个基底是由元素 $e(i_1 \ldots i_q)$ 所组成的，这里的序列 $(i_1, \ldots, i_q)$ 满足

$$1 \;\leqslant\; i_1 \;<\; i_2 \;<\; \cdots \;<\; i_q \;\leqslant\; r-p \quad;$$

对于 $q = 0$，我们取 $L_0 = \mathscr{O}_{X,x}$，现在令：

$$d(e\langle i_1 \ldots i_q\rangle) \;=\; \sum_{j=0}^{q} (-1)^j f_{i_j}.e\langle i_1 \ldots \hat{i}_j \ldots i_q\rangle$$

$$d(e\langle i\rangle) \;=\; f_i \quad。$$

根据 [6], 第 VIII 章, 命题 4.3，序列

$$0 \longrightarrow L_{r-p} \xrightarrow{d} L_{r-p-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} L_0 \xrightarrow{\varepsilon_x} \mathscr{O}_{V,x} \longrightarrow 0$$

是正合的，这就证明了 $\dim_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{O}_{V,x}) \leqslant r - p$，证明完毕。

推论 — 对于足够大的 n 以及 $0 \leqslant q < p$，我们都有 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{O}_V(-n)) = 0$。

注解 — 更一般地，上述证明的适用范围可以放宽，即只要理想 $\mathscr{I}(V)_x$ 具有一个由 $r-p$ 个元素所组成的生成元组即可，换句话说，只要多样体 V 在每一点处都是完全交截的。

¶76 正规多样体

我们需要下面的引理：

引理 2. – 设 M 是一个有限型 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模，并设 f 是 $\mathscr{O}_{X,x}$ 中的一个不可逆元，且对于 $m \in M$，当 $f.m = 0$ 时必有 $m = 0$。则 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模 M/fM 的维数等于 M 的维数加 1。

根据前提条件，我们有一个正合序列 $0 \to M \xrightarrow{\alpha} M \to M/fM \to 0$，其中 α 就是乘以 f 的运算。从而若 N 是一个有限型 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模，则有一个正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_{X,x}}(M,N) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_{X,x}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{q+1}_{\mathscr{O}_{X,x}}(M/fM,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{q+1}_{\mathscr{O}_{X,x}}(M,N) \longrightarrow \cdots$$

我们以 p 来记 M 的维数。在上述正合序列中取 $q = p+1$，则有 $\mathrm{Ext}^{p+2}_{\mathscr{O}_{X,x}}(M/fM, N) = 0$，这就表示说 ([6], 第 VI 章 § 2) $\dim(M/fM) \leqslant p+1$。另一方面，因为 $\dim M = p$，故可找到 N，使得 $\mathrm{Ext}^p_{\mathscr{O}_{X,x}}(M,N) \neq 0$；现在我们在上述正合序列中取 $q = p$，则我们看到 $\mathrm{Ext}^{p+1}_{\mathscr{O}_{X,x}}(M/fM,N)$ 可以等同于

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathscr{O}_{X,x}}(M,N) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^p_{\mathscr{O}_{X,x}}(M,N)$$

余核；而因为这个同态就是乘以 f 的运算，并且 f 在局部环 $\mathscr{O}_{X,x}$ 中不是可逆的，故由 [6], 第 VIII 章, 命题 5.1′ 知，这个余核 $\neq 0$，这就证明了 $\dim M/fM \geqslant p+1$，也完成了证明。

现在我们要证明一个结果，它被某些人称为“Enriques-Severi 引理”，是由 Zariski [19] 得到的：

定理 4. – 设 V 是射影空间 $\mathbf{P}^r(K)$ 中的一个不可约正规子体，维数 $\geqslant 2$。设 $\mathscr{F}$ 是 V 上的一个代数性凝聚层，并假设对任意 $x \in V$，$\mathscr{F}_x$ 都是 $\mathscr{O}_{V,x}$ 上的自由模。则对于足够大的 n，我们有 $\mathrm{H}^1(V, \mathscr{F}(-n)) = 0$。

根据定理 2，问题归结为证明 $\mathscr{O}_{V,x}$ 作为 $\mathscr{O}_{X,x}$ 模的维数 $\leqslant r-2$。首先选取一个元素 $f \in \mathscr{O}_{X,x}$，满足 $f(x) = 0$，并且 f 在 $\mathscr{O}_{V,x}$ 中的像不是 0，这是可以做到的，因为 $\dim V > 0$。现在 V 是不可约的，所以 $\mathscr{O}_{V,x}$ 是一个整环，且我们可以把引理 2 应用到二元组 $(\mathscr{O}_{V,x}, f)$ 上；从而有：

$$\dim \mathscr{O}_{V,x} = \dim \mathscr{O}_{V,x}/(f) - 1\,, \quad \text{其中} \quad (f) = f.\mathscr{O}_{V,x} \ 。$$

因为 $\mathscr{O}_{V,x}$ 是一个整闭整环，所以主理想 (f) 的每个素因子 $\mathfrak{p}^\alpha$ 都是极小的 (参照 [12], p. 136, 或者 [9], ¶37)，从而都不等于 $\mathscr{O}_{V,x}$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$ (否则我们将有 $\dim V \leqslant 1$)。从而可以找到一个元素 $g \in \mathfrak{m}$，它不属于任何一个 $\mathfrak{p}^\alpha$；这个元素 g 在商环 $\mathscr{O}_{V,x}/(f)$ 中不是零因子；把 g 在 $\mathscr{O}_{X,x}/(f)$ 中的同余类记作 $\bar{g}$，则我们可以把引理 2 应用到二元组 $(\mathscr{O}_{V,x}/(f), \bar{g})$ 上；从而有：

$$\dim \mathscr{O}_{V,x}/(f) = \dim \mathscr{O}_{V,x}/(f,g) - 1 \ 。$$

然而，根据已经提到的合冲定理，我们有 $\dim \mathscr{O}_{V,x}/(f,g) \leqslant r$；故得 $\dim \mathscr{O}_{V,x}/(f) \leqslant r-1$，因而 $\dim \mathscr{O}_{V,x} \leqslant r-2$，证明完毕。

推论 — 对于足够大的 n，我们有 $\mathrm{H}^1(V, \mathscr{O}_V(-n)) = 0$。

注解 — (1) 上面的方法属于古典的合冲理论。比如参照 W. Gröbner, Moderne Algebraische Geometrie, 152.6 和 153.1。

(2) 即使 V 的维数 > 2，还是有可能 $\dim \mathscr{O}_{V,x} = r-2$。比如可以取 V 是这样一个锥，它的超平面截面 W 是一个射影式正规的不可约多样体 (即 $\mathrm{H}^1(W, \mathscr{O}_W) \neq 0$)。

¶77 k 简型多样体的同调式特征性质

设 M 是一个有限型分次 S 模。则我们可以使用和引理 1 相同的方法来证明：

引理 3. – 为了使 $\dim M \leqslant k$，必须且只需对于 $q > k$，均有 $\mathrm{Ext}^q_S(M, S) = 0$。

因为 M 是分次的，所以 $\mathrm{Ext}^q_S(M, \Omega) = \mathrm{Ext}^q_S(M, S)(-r-1)$，从而上述条件等价于当 $q > k$ 时皆有 $\mathrm{Ext}^q_S(M, \Omega) = 0$。有见于 ¶72, 定理 1，我们由此推知：

命题 2. – (a) 为了使 $\dim M \leqslant r$，必须且只需对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\alpha : M_n \to \mathrm{H}^0(M(n))$ 都是单的。

(b) 若 k 是一个正整数，则为了使 $\dim M \leqslant r-k$，必须且只需对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\alpha : M_n \to \mathrm{H}^0(M(n))$ 都是一一的，并且对于 $0 < q < k$ 和任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有 $\mathrm{H}^q(M(n)) = 0$。

设 V 是 $\mathbf{P}^r(K)$ 的一个闭子体，并设 $I(V)$ 是由在 V 上等于 0 的齐次多项式所组成的理想。令 $S(V) = S/I(V)$，这是一个分次 S 模，且它的伴生层刚好就是 $\mathscr{O}_V$。所谓[16] V 是 $\mathbf{P}^r(K)$ 中的一个“k 简型”的闭子体，是指 S 模 $S(V)$ 的维数 $\leqslant r-k$。易见对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\alpha : S(V)_n \to \mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V(n))$ 都是单的，从而任何多样体都是 0 简型的。把上一命题应用到 $M = S(V)$ 上，我们得到：

命题 3. – 设 k 是一个正整数。为了使上述闭子体 V 是 k 简型的，必须且只需以下诸条件对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都是成立的:

(i) $\alpha : S(V)_n \to \mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V(n))$ 是一一的。

(ii) 对于 $0 < q < k$，我们有 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{O}_V(n)) = 0$。

(条件 (i) 也可以表达成这样：n 次齐次式在 V 上截出的线性系是完全的，这是熟知的)。

把它与定理 2 进行比较 (或者也可以直接证明)，我们得到：

推论 — 若 V 是 k 简型的，则对于 $0 < q < k$，我们有 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{O}_V) = 0$，并且对任意 $x \in V$，$\mathscr{O}_{X,x}$ 模 $\mathscr{O}_{V,x}$ 的维数都 $\leqslant r-k$。

[16] 参考：P. Dubreil, Sur la dimension des idéaux de polynômes, J. Math. Pures App., 15, 1936, p. 271-283。也参看：W. Gröbner, Moderne Algebraische Geometrie, § 5。

对于一个正整数 m，我们令 φ_m 是 $\mathbf{P}^r(K)$ 到某个大射影空间中的这样一个嵌入，它是由所有 m 次单项式所给出的 (参照 [8], 第 XVI 章 §6，或者 Ж52, 引理 2 的证明)。于是上面这个推论可以有下面的逆命题：

命题 4. – 设 k 是一个正整数，并设 V 是 $\mathbf{P}^r(K)$ 中的一个连通闭子体。假设对于 $0 < q < k$，均有 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{O}_V) = 0$，并且对任意 $x \in V$，$\mathscr{O}_{X,x}$ 模 $\mathscr{O}_{V,x}$ 的维数都 $\leqslant r-k$。

则对任意充分大的 m，$\varphi_m(V)$ 都是一个 k 简型的闭子体。

基于 V 是连通的这个事实，我们有 $\mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V) = K$。事实上，若 V 是不可约的，则这是显然的 (否则 $\mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V)$ 将包含一个多项式代数，它在 K 上不可能是有限维的)；若 V 是可约的，则任何元素 $f \in \mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V)$ 在 V 的每个不可约分支上都给出一个常数，并且这些常数都相等，这是因为 V 的连通性。

基于 $\dim \mathscr{O}_{V,x} \leqslant r-1$ 这个事实，V 的每个不可约分支的代数维数都至少是 1。由此可知，当 $n > 0$ 时

$$\mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V(-n)) = 0$$

(因为若 $f \in \mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V(-n))$ 且 $f \neq 0$，则这些 $f^k.g$ $(g \in S(V)_{nk})$ 将构成 $\mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V)$ 的一个维数 > 1 的向量子空间)。

明确了这一点，我们再令 V_m 是子体 $\varphi_m(V)$，则显然有

$$\mathscr{O}_{V_m}(n) = \mathscr{O}_V(nm) \quad 。$$

对于充分大的 m，以下诸条件是成立的：

(a) 对任意 $n \geqslant 1$，$\alpha : S(V)_{nm} \to \mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V(nm))$ 都是一一的。

这是缘自 Ж65, 命题 5。

(b) 对于 $0 < q < k$ 和任意 $n \geqslant 1$，我们都有 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{O}_V(nm)) = 0$。

这是缘自 Ж65, 命题 7。

(c) 对于 $0 < q < k$ 和任意 $n \leqslant -1$，我们都有 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{O}_V(nm)) = 0$。

这是缘自 Ж74, 定理 2，以及 $\mathscr{O}_{V,x}$ 上的前提条件。

另一方面，我们有 $\mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V) = K$，对任意 $n \leqslant -1$，均有 $\mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V(nm)) = 0$，并且对于 $0 < q < k$，我们有 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{O}_V) = 0$，这是依据前提条件。因此 V_m 满足命题 3 中的所有前提条件，证明完毕。

推论 — 设 k 是一个正整数，并设 V 是一个维数 $\geqslant k$ 的平滑射影多样体。为了使 V 双向正常地同构于某个射影空间中的 k 简型的闭子体，必须且只需 V 是连通的，并且对于 $0 < q < k$，总有 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{O}_V) = 0$。

必要性是显然的，这是根据命题 3。为了证明充分性，只需注意到 $\mathscr{O}_{V,x}$ 的维数 $\leqslant r-k$ (参照 Ж75)，再应用上面的命题即可。

ᚼ 78 完全交截体

所谓射影空间 $\mathbf{P}^r(K)$ 中的一个 p 维闭子体 V 是完全交截体，简称全截体，是指由在 V 上等于 0 的多项式所组成的理想 $I(V)$ 可由 $r-p$ 个元素 $P_1,\ldots,P_{r-p}$ 所生成；在这个情形下，V 的每个不可约分支的维数都是 p，这是根据 Macaulay 定理 (参照 [9], ᚼ17)。我们知道这样一个多样体一定是 p 简型的，这就意味着对于 $0<q<p$ 我们有 $\mathrm{H}^q(V,\mathscr{O}_V(n))=0$，这一点我们刚才已经看到。现在我们来确定 $\mathrm{H}^p(V,\mathscr{O}_V(n))$ 对于齐次多项式 $P_1,\ldots,P_{r-p}$ 的次数 $m_1,\ldots,m_{r-p}$ 的依赖关系。

设 $S(V)=S/I(V)$ 是 V 的射影坐标环。根据 ᚼ72, 定理 1，问题归结为确定 S 模 $\mathrm{Ext}_S^{r-p}(S(V),\Omega)$。现在我们有一个类似于 ᚼ75 的消解：我们取 L^q 是这样一个分次自由 S 模，它有一个基底是由次数为 $\sum_{j=1}^{q} m_j$ 元素 $e(i_1\ldots i_q)$ 所组成的，其中序列 $(i_1,\ldots,i_q)$ 满足 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_q\leqslant r-p$；并且取 L^0 就是 S。我们令：

$$\begin{aligned} d(e\langle i_1\ldots i_q\rangle) &= \sum_{j=1}^{q}(-1)^j P_{i_j}.e\langle i_1\ldots.\hat{i}_j\ldots i_q\rangle \\ d(e\langle i\rangle) &= P_i \quad 。\end{aligned}$$

序列 $0\to L^{r-p}\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}L^0\to S(V)\to 0$ 是正合的 ([6], 第 VIII 章, 命题 4.3)。由此可知，这些 $\mathrm{Ext}_S^q(S(V),\Omega)$ 就是由 $\mathrm{Hom}_S(L^q,\Omega)$ 所组成的复形的上同调群；然而，可以把 $\mathrm{Hom}_S(L^q,\Omega)$ 中的一个元素等同于一组 $f\langle i_1\ldots i_q\rangle$，其中 $f\langle i_1\ldots i_q\rangle$ 是次数为 $m_{i_1}+\cdots+m_{i_q}+n-r-1$ 的齐次多项式；在这个等同下，缀算子转化为下面这个熟悉的公式：

$$(df)\langle i_1\ldots i_{q+1}\rangle = \sum_{j=1}^{q+1}(-1)^j P_{i_j}.f\langle i_1\ldots\hat{i}_j\ldots i_{q+1}\rangle \quad 。$$

上面提到的 Macaulay 定理表明，[11] 中的条件是成立的，由此就给出了 $q\neq r-p$ 时 $\mathrm{Ext}_S^q(S(V),\Omega)=0$ 的事实。另一方面，$\mathrm{Ext}_S^{r-p}(S(V),\Omega)_n$ 同构于 $S(V)$ 中的 $N+n$ 次齐次元的子空间，其中 $N=\sum_{i=1}^{r-p}m_i-r-1$。有见于 ᚼ72, 定理 1，我们得到：

命题 5. – 设 V 是一个全截体，由一组齐次多项式 $P_1,\ldots,P_{r-p}$ 所定义，次数分别是 $m_1,\ldots,m_{r-p}$。

(a) 对任意 $n\in\mathbb{Z}$，映射 $\alpha: S(V)_n\to\mathrm{H}^0(V,\mathscr{O}_V(n))$ 都是一一的。

(b) 对于 $0<q<p$ 和任意 $n\in\mathbb{Z}$，我们都有 $\mathrm{H}^p(V,\mathscr{O}_V(n))=0$。

(c) $\mathrm{H}^p(V,\mathscr{O}_V(n))$ 同构于 $\mathrm{H}^0(V,\mathscr{O}_V(N-n))$ 的对偶向量空间，其中 $N=\sum_{i=1}^{r-p}m_i-r-1$。

特别地，注意到 $\mathrm{H}^p(V,\mathscr{O}_V)$ 仅当 $N<0$ 时等于 0。

§6 示性函数和算术亏格

¥79 Euler-Poincaré示性数

设V是一个射影多样体，并设$\mathscr{F}$是V上的一个代数性凝聚层。令：

$$h^q(V,\mathscr{F}) = \dim_K \mathrm{H}^q(V,\mathscr{F}) \text{ 。}$$

我们已经看到(¥66, 定理1)，对任意整数q，$h^q(V,\mathscr{F})$都是有限的，并且当$q > \dim V$时等于0。从而可以定义一个整数$\chi(V,\mathscr{F})$如下：

$$\chi(V,\mathscr{F}) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q h^q(V,\mathscr{F}) \text{ 。}$$

这就是V的取值在$\mathscr{F}$上的*Euler-Poincaré*示性数。

引理1. – 设$0 \to L_1 \to \cdots \to L_p \to 0$是一个正合序列，其中$L_i$都是$K$上的有限维向量空间，并且同态$L_i \to L_{i+1}$都是$K$线性的。则我们有:

$$\sum_{q=1}^{p}(-1)^q \dim_K L_q = 0 \text{ 。}$$

对p进行归纳，当$p \leqslant 3$时引理是显然的；若以L'_{p-1}来记$L_{p-1} \to L_p$的核，则我们有两个正合序列：

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L'_{p-1} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow L'_{p-1} \longrightarrow L_{p-1} \longrightarrow L_p \longrightarrow 0$$

把归纳假设应用到上面每个序列上，我们看到$\sum_{q=1}^{p-2}(-1)^q \dim L_q + (-1)^{p-1}\dim L'_{p-1} = 0$，并且

$$\dim L'_{p-1} - \dim L_{p-1} + \dim L_p = 0 \text{ ，}$$

由此立得引理。

命题1. – 设$0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \mathscr{C} \to 0$是射影多样体$V$上的一个正合序列，由代数性凝聚层所组成，并且同态$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$和$\mathscr{B} \to \mathscr{C}$都是$K$线性的。则我们有:

$$\chi(V,\mathscr{B}) = \chi(V,\mathscr{A}) + \chi(V,\mathscr{C}) \text{ 。}$$

根据¥47, 定理5的推论2，我们有一个上同调长正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^q(V,\mathscr{B}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(V,\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^{q+1}(V,\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{H}^{q+1}(V,\mathscr{B}) \longrightarrow \cdots$$

把引理 1 应用到这个向量空间的正合序列上，我们就得到了命题。

命题 2. – 设 $0 \to \mathscr{F}_1 \to \cdots \to \mathscr{F}_p \to 0$ 是射影多样体 V 上的一个代数性凝聚层的正合序列，且这些同态 $\mathscr{F}_i \to \mathscr{F}_{i+1}$ 都是代数性的。则我们有：

$$\sum_{q=1}^{p}(-1)^q \chi(V, \mathscr{F}_q) = 0 \ 。$$

对 p 进行归纳，且当 $p \leqslant 3$ 时，这个命题是命题 1 的特殊情形。若我们用 $\mathscr{F}'_{p-1}$ 来表示 $\mathscr{F}_{p-1} \to \mathscr{F}_p$ 的核，则层 $\mathscr{F}'_{p-1}$ 是代数性凝聚的，因为 $\mathscr{F}_{p-1} \to \mathscr{F}_p$ 是一个代数性同态。从而可以把归纳假设应用到下面两个正合序列上

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{F}'_{p-1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}'_{p-1} \longrightarrow \mathscr{F}_{p-1} \longrightarrow \mathscr{F}_p \longrightarrow 0 \ ,$$

命题由此立得。

¶ 80 与分次 S 模的示性函数的关系

设 $\mathscr{F}$ 是空间 $X = \mathbf{P}^r(K)$ 上的一个代数性凝聚层；我们把 $\chi(\mathbf{P}^r(K), \mathscr{F})$ 简写成 $\chi(\mathscr{F})$ 。则有：

命题 3. – $\chi(\mathscr{F}(n))$ 是 n 的一个多项式，次数 $\leqslant r$ 。

根据 ¶ 60, 定理 2，可以找到一个有限型分次 S 模 M ，使得 $\widetilde{M}$ 同构于 $\mathscr{F}$ 。对 M 使用 Hilbert 合冲定理，我们得到一个分次 S 模的正合序列：

$$0 \longrightarrow L^{r+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \ ,$$

其中的 L^q 都是有限型且自由的。把函子 ~ 应用到这个序列，又得到一个层正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}^{r+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{L}^0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0 \ ,$$

其中每个 $\mathscr{L}^q$ 都同构于有限个形如 $\mathscr{O}_X(n_i)$ 的层的直和。命题 2 表明，$\chi(\mathscr{F}(n))$ 就等于这些 $\chi(\mathscr{L}^q(n))$ 的交错和，从而问题归结为层 $\mathscr{O}_X(n_i)$ 的情形。现在由 ¶ 62 知，我们有 $\chi(\mathscr{O}_X(n)) = \binom{n+r}{r}$ ，这显然是 n 的一个多项式，且次数 $\leqslant r$ ；故得命题。

命题 4. – 设 M 是一个分次 S 模，满足条件 (TF)，并设 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ 。则对任意足够大的 n ，均有 $\chi(\mathscr{F}(n)) = \dim_K M_n$ 。

事实上，我们知道 (¶ 65)，对于足够大的 n ，同态 $\alpha : M_n \to \mathrm{H}^0(X, \mathscr{F}(n))$ 是一一的，并且对任意 $q > 0$ ，均有 $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ ；故我们有

$$\chi(\mathscr{F}(n)) = h^0(X, \mathscr{F}(n)) = \dim_K M_n \ 。$$

这就再次给出了一个熟知的事实，即对于足够大的 n，$\dim_K M_n$ 是 n 的一个多项式；我们把这个多项式记为 P_M，并且称为 M 的示性函数；对任意 $n \in \mathbb{Z}$，均有 $P_M(n) = \chi(\mathscr{F}(n))$，特别地，对于 $n = 0$，我们看到 P_M 的常数项等于 $\chi(\mathscr{F})$。

把这个结果应用到 $M = S/I(V)$ 上，其中 $I(V)$ 是 S 的一个分次理想，由那些在 $\mathbf{P}^r(K)$ 的某个闭子体 V 上等于 0 的齐次多项式所组成。在这个情形下，我们把 P_M 的常数项称为 V 的算术亏格 (参照 [19])；另一方面，我们有 $\widetilde{M} = \mathscr{O}_V$，由此得到：

命题 5. – 射影多样体 V 的算术亏格等于

$$\chi(V, \mathscr{O}_V) \ = \ \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim_K \mathrm{H}^q(V, \mathscr{O}_V)\ 。$$

注解 — (1) 上述命题显然表明，V 的算术亏格并不依赖于它在射影空间中的嵌入，因为 $\mathrm{H}^q(V, \mathscr{O}_V)$ 是如此。

(2) 模拟算术亏格 (定义见 Zariski [19]) 同样可以归结为某种 Euler-Poincaré 示性数。我们以后再讨论这个问题，它与 Riemann-Roch 定理关系紧密。

(3) 出于方便，我们这里所采用的算术亏格的定义与古典的定义 (参照 [19]) 略有不同。若 V 的所有不可约分支都有相同的维数 p，则这两个定义的关系可以表达成下面的公式：$\chi(V, \mathscr{O}_V) = 1 + (-1)^p p_a(V)$。

¶ 81　示性函数的次数

若 $\mathscr{F}$ 是代数多样体 V 上的一个代数性凝聚层，则 $\mathscr{F}$ 的支集 $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ 是指使得 $\mathscr{F}_x \neq 0$ 的那些点 $x \in V$ 所组成的集合。基于 $\mathscr{F}$ 是一个有限型层的事实，该集合是闭的。事实上，若我们有 $\mathscr{F}_x = 0$，则零截面可以生成 $\mathscr{F}_x$，从而对于充分接近 x 的 y，它也可以生成 $\mathscr{F}_y$（¶ 12, 命题 1)，这就意味着 $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ 的补集是开的。

设 M 是一个有限型分次 S 模，并设 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ 是 M 在 $\mathbf{P}^r(K) = X$ 上所定义的层。则我们可以用 M 来确定 $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$，方法如下：

设 $0 = \cap_\alpha M^\alpha$ 是 0 在 M 中的一个分次准素分解，这些 M^α 对应着分次素理想 $\mathfrak{p}^\alpha$ (参照 [12], 第 IV 章)；我们假设这个分解是“长度最短”的，亦即没有一个 M^α 包含在其它那些的交集里面。对任意 $x \in X$，每个 $\mathfrak{p}^\alpha$ 都定义了局部环 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的一个素理想 $\mathfrak{p}^\alpha_x$，并且 $\mathfrak{p}^\alpha_x = \mathscr{O}_{X,x}$ 当且仅当 x 没有落在理想 $\mathfrak{p}^\alpha$ 所定义的多样体 V^α 之中。在 M_x 中我们同样有 $0 = \cap_\alpha M^\alpha_x$，并且很容易验证这样得到的就是 0 在 M_x 中的一个准素分解，这些 M^α_x 对应着素理想 $\mathfrak{p}^\alpha_x$；若 $x \notin V^\alpha$，则有 $M^\alpha_x = M_x$，若我们只考虑那些满足 $x \in V^\alpha$ 的 M^α_x，我们得到一个“最短”的分解 (参照 [12], 第 IV 章, 定理 4，那里给出了类似的结果)。由此立知，$M_x \neq 0$ 当且仅当 x 落在某个多样体 V^α 之中，换句话说，$\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) = \bigcup_\alpha V^\alpha$。

命题 6. – 若 $\mathscr{F}$ 是 $X = \mathbf{P}^r(K)$ 上的一个代数性凝聚层，则多项式 $\chi(\mathscr{F}(n))$ 的次数等于 $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ 的维数。

我们对 r 进行归纳，$r = 0$ 的情形是平凡的。可以假设 $\mathscr{F} = \widetilde{M}$，其中 M 是一个有限型分次 S 模；使用上面所引入的记号，我们只需证明 $\chi(\mathscr{F}(n))$ 是一个次数为 $q = \sup \dim V^\alpha$ 的多项式。

设 t 是一个线性形式，且没有落在任何一个素理想 $\mathfrak{p}^\alpha$ 之中，除了“闲置”素理想 $\mathfrak{p}^0 = (t_0, \ldots, t_r)$ 之外；这样的形式总是存在的，因为域 K 是无限的。设 E 是 X 的超平面 $t = 0$。考虑正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_E \longrightarrow 0 \ ,$$

其中 $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_E$ 是限制同态，而 $\mathscr{O}_X(-1) \to \mathscr{O}_X$ 则是同态 $f \mapsto t.f$。与 $\mathscr{F}$ 取张量积，我们得到正合序列：

$$\mathscr{F}(-1) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}_E \longrightarrow 0, \quad \text{其中} \quad \mathscr{F}_E = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_E \ 。$$

在 U_i 上，我们可以把 $\mathscr{F}(-1)$ 等同于 $\mathscr{F}$，并且这个等同把上面所定义同态 $\mathscr{F}(-1) \to \mathscr{F}$ 转化为乘以 t/t_i 的运算；由于 t 的选择是落在这些 $\mathfrak{p}^\alpha$ 之外的，故对每个 $x \in U_i$，t/t_i 都不属于 $M_x = \mathscr{F}_x$ 的任何一个支承素理想，因而上述同态是单的 (参照 [12], p. 122, 定理 7, b‴). 从而我们有正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(-1) \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}_E \longrightarrow 0 \ ,$$

故对任意 $n \in \mathbb{Z}$，我们都有正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(n-1) \longrightarrow \mathscr{F}(n) \otimes \mathscr{F}_E(n) \longrightarrow 0 \ 。$$

应用命题 1，我们看到：

$$\chi(\mathscr{F}(n)) - \chi(\mathscr{F}(n-1)) = \chi(\mathscr{F}_E(n)) \ 。$$

然而层 $\mathscr{F}_E$ 是一个凝聚 $\mathscr{O}_E$ 模层，换句话说，它是 E 上的一个代数性凝聚层，而 E 是一个 $r-1$ 维射影空间。进而，$\mathscr{F}_{E,x} = 0$ 即意味着乘以 t/t_i 的运算在 $\mathscr{F}_x$ 上所定义的自同态是满的，这就表明 $\mathscr{F}_x = 0$ (参照 [6], 第 VIII 章, 命题 5.1′)。因此 $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}_E) = E \cap \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$，且由于 E 没有包含在任何一个多样体 V^α 之中，故由一个熟知的结果可知，$\mathrm{Supp}(\mathscr{F}_E)$ 的维数等于 $q-1$。于是归纳假设表明，$\chi(\mathscr{F}_E(n))$ 是一个次数为 $q-1$ 的多项式；由于它是函数 $\chi(\mathscr{F}(n))$ 的 1 阶差分，故知后面这个函数就是 q 次的多项式。

注解 — (1) 对于 $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}$，其中 $\mathscr{I}$ 是一个凝聚理想层，命题 6 是已知的。比如参照 [9], ⁑24。

(2) 上面的证明过程并没有用到命题 3，从而也给出了命题 3 的另一个证明。

参考文献

[1] Bourbaki, N., *Théorie des Ensembles*, Paris (Hermann).

[2] Cartan, H., *Séminaire E.N.S.*, 1950-1951.

[3] Cartan, H., *Séminaire E.N.S.*, 1951-1952.

[4] Cartan, H., *Séminaire E.N.S.*, 1953-1954.

[5] Cartan, H., *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, Colloque de Bruxelles, (1953), p. 41-55.

[6] Cartan, H. and Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton Math. Ser., no. 19.

[7] Eilenberg, S. and Steenrod, N. E., *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Math. Ser., no. 15.

[8] Hodge, W. V. D. and Pedoe, D., *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge Univ. Press.

[9] Krull, W., *Idealthéorie*, Ergebnisse IV-3. Berlin (Springer).

[10] Leray, J., *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compacte et d'une application continue*, J. Math. Pures App., **29**, (1950), p. 1-139.

[11] de Rham, G., *Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire*, Comment. Math. Helv., **28**, (1954), p. 346-352.

[12] Samuel, P., *Commutative Algebra* (Notes by D. Hertzig), Cornell Univ., 1953.

[13] Samuel, P., *Algèbre locale*, Mém. Sci. Math., CXXIII, Paris, 1953.

[14] Serre, J.-P., *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*, Ann. of Math., **58**, (1953), p. 258-294.

[15] Serre, J.-P., *Un théorème de dualité*, Comment. Math. Helv., **29**, (1955), p. 9-26.

[16] Weil, A., *Foundations of Algebraic Geometry*, Colloq. XXIX.

[17] Weil, A., *Fibre-spaces in Algebraic Geometry* (Notes by A. Wallace), Chicago Univ., 1952.

[18] Zariski, O., *The concept of a simple point of an abstract algebraic variety*, Trans. Amer. Math. Soc., **62**, (1947), p. 1-52.

[19] Zariski, O., *Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi*, Ann. of Math., **55**, (1952), p. 552-592.