代数几何与解析几何

Jean Pierre Serre

原载：

Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique (GAGA)

Annales de l'institut Fourier,
Tome 6 (1956), p. 1-42.

§0 引 论

设 X 是一个定义在复数域上的射影代数流形。我们可以从两种视角来考察 X：一个是代数的视角，主要关心每一点处的局部环的性质，以及 X 到其它代数流形的有理映射或正常映射的性质等，另一个是解析的视角（也称为“超越”的视角），此时 X 上的全纯函数扮演了主要角色。我们知道，在 X 没有奇异点时，第二种视角是很有成效的，因为我们可以使用 Kähler 流形的全套理论（调和形式、流布[1]、协边、等等）。

在很多问题上，尽管两种视角下的方法截然不同，但它们却可以给出本质上等价的结果。比如说，我们知道在 X 上每一点处都全纯的微分形式恰好就是在 X 上处处“第一类”的有理微分形式（仍假设 X 没有奇异点）；另一个例子是 Chow 定理，它是说 X 的每个闭的解析子流形都是代数流形。

本文的主要目的是把上述等价扩展到*凝聚层*上；确切地说，我们将证明，代数性凝聚层和解析性凝聚层是可以一一对应的，并且这个对应还使上同调群保持一致（具体陈述见 ¥12）；我们将给出这个结果在各种问题上的应用，特别是在代数性纤维丛和解析性纤维丛的比较方面。

最初的两节是准备性的。在 §1 中，我们先复习一下“解析多样体”的定义和主要性质。我们所采用的定义是来自 H. Cartan [3]，只不过 H. Cartan 仅考虑了*正规*多样体的情形，这个限制对于我们来说是不需要的；W-L. Chow 在他的一些工作中使用了一个非常相似的定义方法。在 §2 中，我们要解释一下如何在一个代数多样体 X 上定义一个解析多样体的结构，同时给出它的若干基本性质。其中最重要的一条无疑是下面这个：若以 $\mathscr{O}_x$（切转：$\mathscr{H}_x$）来记 X 在点 x 处的局部环（切转：全纯函数芽的环），则环 $\mathscr{O}_x$ 和 $\mathscr{H}_x$ 具有相同的完备化，由此可知，它们构成一个“良配二元组”，参看附录的定义 4。

在 §3 中，我们将证明一些关于凝聚层的定理（上面已经提及）。方法主要来自两个方面，一个是 [18] 中所叙述的代数性凝聚层理论，另一个就是 [3], 报告 XVIII-XIX 中的定理 A 和定理 B；为了完整起见，我们也会复习一下它们的证明。

§4 中将给出一些应用[2]：Betti 数在复数域的自同构下的不变性、Chow 定理、以代数群为结构群的代数性纤维丛和解析性纤维丛的比较，等等。在后一个问题中，我们的结果还很不完整，在所有的半单群中，我们只知道如何处理特殊线性群和辛群。

最后，附录里包含了一些关于局部环的结果，这些结果是正文所需要的，但我们没有找到合适的文献。

---

[0]译注：本译文的术语系统将与 EGA, SGA 中译本保持一致，若干数学记号按照 EGA, SGA 的用法作了调整，与原文不同，请留意。日期：2018.11.8。

[1]译注：流布 =“courant”，此概念与“分布”(distribution) 关系紧密。

[2]我们没有谈及本文的结果在自守函数理论上的应用，这方面请读者参阅 [3], 报告 XX。

§1 解析多样体

⁑1 仿射空间的解析子集

设$n \geqslant 0$是一个整数，$\mathbb{C}^n$是n维复仿射空间，带有通常的拓扑。设U是$\mathbb{C}^n$的一个子集，所谓U是解析的，是指对任意$x \in U$，均可以找到x的一个邻域W，以及W上的一组全纯函数$f_1, \ldots, f_k$，使得$U \cap W$恰好是由满足方程$f_i(z) = 0,\ i = 1, \ldots, k$的点$z \in W$所组成的集合。此时$U$在$\mathbb{C}^n$中是局部闭的(即它是一个开集与一个闭集的交集)，从而是局部紧的(在诱导拓扑下)。

下面我们要在拓扑空间U上定义一个层。对于任意拓扑空间X，我们以$\mathscr{C}_X$来记X上的$\mathbb{C}$值函数芽层(参考[18], ⁑3)。若令$\mathscr{H}$是$\mathbb{C}^n$上的全纯函数芽层，则$\mathscr{H}$是$\mathscr{C}_{\mathbb{C}^n}$的子层。现在设$x$是$U$的一点，则有一个限制同态

$$\varepsilon_x \ :\ \mathscr{C}_{\mathbb{C}^n,x} \longrightarrow \mathscr{C}_{U,x} \ 。$$

$\mathscr{H}_x$在ε_x下的像是$\mathscr{C}_{U,x}$的一个子环$\mathscr{H}_{U,x}$；这些$\mathscr{H}_{U,x}$构成$\mathscr{C}_U$的一个子层$\mathscr{H}_U$，我们称之为U上的*全纯函数芽层*；它是一个环层。我们用$\mathscr{A}(U)_x$来记$\varepsilon_x : \mathscr{H}_x \to \mathscr{H}_{U,x}$的核；根据$\mathscr{H}_{U,x}$的这个定义，$\mathscr{A}(U)_x$就是由这样一些$f \in \mathscr{H}_x$所组成的集合，它们限制到$U$上以后在$x$的某个邻域上等于0；我们经常把$\mathscr{H}_{U,x}$等同于商环$\mathscr{H}_x/\mathscr{A}(U)_x$。

现在U上已经有了一个拓扑和一个函数层，于是我们就可以定义全纯映射的概念(参考[3], 报告VI或者[18], ⁑32)：

设U和V分别是$\mathbb{C}^r$和$\mathbb{C}^s$中的解析子集。所谓一个映射$\varphi : U \to V$是全纯的，是指它是连续的，并且$f \in \mathscr{H}_{V,\varphi(x)}$蕴涵$f \circ \varphi \in \mathscr{H}_{U,x}$。这也相当于说，对于$x \in U$，$\varphi(x)$的$s$个坐标都是$x$的$r$个坐标的全纯函数，换句话说，都是$\mathscr{H}_U$的截面。

两个全纯映射的合成还是全纯的。若$\varphi : U \to V$是一个一一映射，并且φ和φ^{-1}都是全纯的，则我们说φ是一个解析同构(或简称同构)；这等价于说，φ是U到V上的一个同胚，并且把层$\mathscr{H}_U$转化为层$\mathscr{H}_V$。

若U和U'分别是$\mathbb{C}^r$和$\mathbb{C}^{r'}$中的解析子集，则乘积$U \times U'$是$\mathbb{C}^{r+r'}$中的解析子集。[18], ⁑33中所列出的那些性质仍然是有效的，只要把局部闭子集都换成解析子集，并把正常映射都换成全纯映射就可以了；特别地，若$\varphi : U \to V$和$\varphi' : U' \to V'$都是解析同构，则

$$\varphi \times \varphi' \ :\ U \times U' \longrightarrow V \times V'$$

也是如此。

不过与代数的情形不同的是，$U \times U'$上的拓扑刚好等于U和U'上的拓扑的乘积。

§2 解析多样体的概念

定义 1. — 所谓解析多样体[3]，是指一个拓扑空间 X 连同 $\mathscr{C}_X$ 的一个子层 $\mathscr{H}_X$，且满足下面一些条件:

$(\mathrm{H_I})$ 在 X 上可以找到一个开覆盖 $\{V_i\}$，使得每个 V_i，连同其上的诱导拓扑和稼入层，均可同构于某仿射空间中的一个解析子集 U_i，连同 §1 中所定义的拓扑和层。

$(\mathrm{H_{II}})$ X 上的拓扑是分离的。

§1 中的那些定义都是局部性的，从而可以搬到解析多样体上。于是对于一个解析多样体 X，我们把 $\mathscr{H}_X$ 称为 X 上的全纯函数芽层；若 X 和 Y 是两个解析多样体，则一个全纯映射 $\varphi : X \to Y$ 是指这样一个连续映射，它使得 $f \in \mathscr{H}_{Y,\varphi(x)}$ 时必有 $f \circ \varphi \in \mathscr{H}_{X,x}$；这类映射就构成了解析多样体范畴中的态射（在 N. Bourbaki 的意义下）。

设 V 是解析多样体 X 中的一个开集，我们把 V 到某仿射空间中的解析子集 U 的一个解析同构称为 V 的一个坐标卡。公理 $(\mathrm{H_{II}})$ 意味着 X 可以被那些具有坐标卡的开集所覆盖。设 Y 是 X 的一个子集，所谓 Y 是解析的，是指对任意坐标卡 $\varphi : V \to U$，像集合 $\varphi(Y \cap V)$ 都是 U 的一个解析子集。此时 Y 在 X 中是局部闭的，并且可以自然地赋予它一个解析多样体的结构，称为由 X 所诱导的结构（代数的情形可参考 [18], §35）。同样地，设 X 和 X' 是两个解析多样体，则在 $X \times X'$ 上有唯一一个满足下述条件的解析多样体结构：若 $\varphi : V \to U$ 和 $\varphi : V' \to U'$ 分别是 X 和 X' 中的坐标卡，则 $\varphi \times \varphi' : V \times V' \to U \times U'$ 也是 $V \times V'$ 在 $X \times X'$ 中的一个坐标卡；赋予这个结构之后，$X \times X'$ 将被称为 X 和 X' 的乘积；注意到 $X \times X'$ 上的拓扑与 X 和 X' 的乘积拓扑是重合的。

[18], 34-35 中的其它一些概念也可以搬到解析多样体上，细节留给读者。

§3 解析性层

[2], 报告 XV 中所定义的解析性层可以扩展到任意的解析多样体 X 上，解析性层就是环层 $\mathscr{H}_X$ 上的模层，简称 $\mathscr{H}_X$ 模层（参考 [18], §6）。

设 Y 是 X 的一个闭解析子集；对任意 $x \in X$，设 $\mathscr{A}(Y)_x$ 是由 $\mathscr{H}_{X,x}$ 中的那些限制到 Y 上以后在 x 的某个邻域上恒为 0 的函数芽 $f \in \mathscr{H}_{X,x}$ 所组成的集合。则这些 $\mathscr{A}(Y)_x$ 构成 $\mathscr{H}_X$ 的一个理想层 $\mathscr{A}(Y)$；从而 $\mathscr{A}(Y)$ 就是一个解析性层。现在商层 $\mathscr{H}_X/\mathscr{A}(Y)$ 在 Y 之外恒等于 0，并且它在 Y 上的限制恰好就是 $\mathscr{H}_Y$（这可由诱导结构的定义推出来）；从而可以把它等同于 $\mathscr{H}_Y$，参考 [18], §5。

命题 1. — a) 层 $\mathscr{H}_X$ 是一个凝聚环层（[18], §15）。

b) 若 Y 是 X 的一个闭解析子集，则 $\mathscr{A}(Y)$ 就是一个解析性凝聚层（也称为凝

[3]译注：原文是“espace analytique”，即“解析空间”。但 Serre 在此文中只考虑了分离且既约的情形，现在的“解析空间”概念已经允许底空间不分离，也允许结构层中有幂零元，所以为了照顾到数学内涵的变化，我们在这里翻译为“解析多样体”，以示区别。

聚 $\mathscr{H}_X$ 模层，这是在 [18], §12 的意义下）。

在 X 是 $\mathbb{C}^n$ 中的开集时，这些结果是由 K. Oka 和 H. Cartan 所证明的，参考 [1], 定理 1 和 2 或者 [2], 报告 XV-XVI。一般情形可以很容易地归结到这个情形，事实上，问题是局部性的，故可假设 X 是 $\mathbb{C}^n$ 的某个开集 U 中的一个闭解析子集；此时 $\mathscr{H}_X = \mathscr{H}_U/\mathscr{A}(X)$，根据上面所述，$\mathscr{H}_U$ 是一个凝聚环层，并且 $\mathscr{A}(X)$ 是 $\mathscr{H}_U$ 的一个凝聚理想层；由此立知 $\mathscr{H}_X$ 是凝聚的，参考 [18], §16。b) 的部分可以用同样的方法来证明。

解析性凝聚层的其它例子还有：向量丛的全纯截面芽层 (参考 §20)，以及自守函数芽层 ([3], 报告 XX)。

§4 解析多样体中的点的邻域

设 X 是一个解析多样体，x 是 X 的一点，$\mathscr{H}_x$ 是 X 在 x 处的全纯函数芽的环，则它是一个 $\mathbb{C}$ 上的代数，具有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$，是由所有在 x 处取值为 0 的函数 f 所组成的，并且域 $\mathscr{H}_x/\mathfrak{m}$ 刚好就是 $\mathbb{C}$。换句话说，$\mathscr{H}_x$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个局部代数。如果 $X = \mathbb{C}^n$，则 $\mathscr{H}_x$ 就是 n 个变量的收敛幂级数代数 $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$；在一般情形下，$\mathscr{H}_x$ 同构于 $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ 的一个商代数，因为 X 在局部上同构于 $\mathbb{C}^n$ 的一个解析子体；由此可知，$\mathscr{H}_x$ 是一个 *Noether* 环；同时它也是 H. Cartan ([3], 报告 VII) 所说的解析环。

易见 $\mathscr{H}_x$ 决定了 X 在 x 近旁的性质 ([3], 前引)。特别地，X 在 x 近旁同构于 $\mathbb{C}^n$ 的充分必要条件是 $\mathscr{H}_x$ 同构于 $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$；易见这个条件也等价于说 $\mathscr{H}_x$ 是一个 n 维正则局部环 (局部环的理论可参看 [16])。此时我们把 x 称为 X 上的一个 n 维平滑点；如果 X 上的任意点都是平滑的，则我们说 X 是一个解析流形。

回到一般情形，环 $\mathscr{H}_x$ 里没有异于 0 的幂零元，故知 (参考 [15], 第 IV 章 §2)：

$$0 = \bigcap \mathfrak{p}_i ,$$

其中 $\mathfrak{p}_i$ 跑遍 $\mathscr{H}_x$ 的极小素理想的集合。若令 X_i 是 X 在 x 处的那些不可约分支，则有 $\mathfrak{p}_i = \mathscr{A}(X_i)_x$，并且 $\mathscr{H}_x/\mathfrak{p}_i = \mathscr{H}_{X_i,x}$。这就把 X 在一点处的性质都归结到了这些 X_i 上；比如说，X 在 x 处的 (解析) 维数 (即拓扑维数的一半) 就是这些 X_i 的维数的上确界。注意到这个维数恰好与局部环 $\mathscr{H}_x$ 的 (Krull) 维数相等。事实上，只需考虑 X 在 x 处不可约的情形，也就是说 $\mathscr{H}_x$ 是整环的情形；此时若 r 是这个解析维数，则我们知道 (参考 [14], §4 或者 [3], 报告 VIII) $\mathscr{H}_x$ 是 $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_r\}$ 上的一个有限代数。由于 $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_r\}$ 的完备化是形式幂级数代数 $\mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_r]]$，其维数等于 r，故知 $\mathscr{H}_x$ 也是如此 (根据 [16], p. 18)，这就证明了上面所说的事情。

§2 代数多样体的伴生解析多样体

下面我们考察域 $\mathbb{C}$ 上的代数多样体。这种多样体上具有两个拓扑：“通常”拓扑和“Zariski”拓扑。

§5 代数多样体的伴生解析多样体的定义

根据下面这个引理，任何代数多样体上都有一个解析多样体的结构：

引理 1. — a) $\mathbb{C}^n$ 上的 Zariski 拓扑比通常拓扑弱。

b) $\mathbb{C}^n$ 的任何 Zariski 局部闭子集都是解析的。

c) 若 U 和 U' 分别是 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^{n'}$ 中的 Zariski 局部闭子集，并且 $f : U \to U'$ 是一个正常映射，则 f 是全纯的。

d) 在 c) 的前提条件下，若进而假设 f 是一个双向正常同构，则它也是一个解析同构。

根据定义，$\mathbb{C}^n$ 中的一个 Zariski 闭子集是一些多项式的公共零点，而多项式在通常拓扑下是连续的（切转：是全纯的），故得 a)（切转：b)）。为了证明 c)，可以假设 $U' = \mathbb{C}$，则需要证明 U 上的任何正常函数都是全纯的，这仍然是缘自多项式的全纯性。最后，把 c) 应用到 f^{-1} 上立得 d)。

现在设 X 是域 $\mathbb{C}$ 上的一个代数多样体（定义见 [18], §34，不需要是不可约的）。设 V 是 X 的一个 Zariski 开子集，且具有一个（代数性）坐标卡

$$\varphi : V \longrightarrow U ,$$

其中 U 是某个仿射空间中的 Zariski 局部闭子集。根据引理 1, b)，U 上带有一个解析多样体的结构。

命题 2. — 在 X 上有唯一一个解析多样体的结构，能使得下面的条件成立：对任意（代数性）坐标卡 $\varphi : V \to U$，Zariski 开集 V 都是（在通常拓扑下）开的，并且 φ 是 V，连同由 X 所诱导的解析多样体结构，到 U，连同 §2 所定义的解析多样体结构，上的一个解析同构。

（简言之，它把任何代数性坐标卡都变成了解析性坐标卡）。

唯一性是显然的，因为总可以把 X 用一些具有坐标卡的 Zariski 开集 V 覆盖起来。为了证明存在性，设 $\varphi : V \to U$ 是一个坐标卡，则我们把 U 上的解析多样体结构借助 φ^{-1} 搬到 V 上。若 $\varphi' : V' \to U'$ 是另一个坐标卡，则依照引理 1, d)，V 和 V' 在 $V \cap V'$ 上可以诱导出相同的解析多样体结构；进而依照引理 1, a)，$V \cap V'$ 在 V 和 V' 中都是开的。于是可以把这些结构黏合成 X 上的一个拓扑和一个层 $\mathscr{H}_X$，它显然满足公理 ($\mathrm{H_I}$)。为了验证 ($\mathrm{H_{II}}$)，我们可以使用 [18], §34 中的公理 ($\mathrm{VA}'_{\mathrm{II}}$)；在那里的记号下，$U_i$ 和 U_j 之间的等同关系的图像 T_{ij} 在 $U_i \times U_j$ 中是 Zariski 闭的，从而在通常拓扑下也是闭的，这就意味着 X 是分离的。

注解 — 也可以直接来定义 X 上的解析多样体结构，而不必通过坐标卡 $\varphi : V \to U$。即首先定义它的拓扑就是使得 X 的任何 Zariski 开集上的正常函数都连续的最弱拓扑，其次定义 $\mathscr{H}_{X,x}$ 九是由 $\mathscr{O}_{X,x}$ 在 $\mathscr{C}(X)_x$ 中所生成的解析子环（在 [3], 报告 VIII 的意义下）。可以验证，这两个定义是等价的，细节留给读者。

以下我们用 X^{an} 来表示 X 连同上面所定义的解析多样体结构。则 X^{an} 的拓扑比 X 的拓扑更为精细；且由于 X^{an} 可以被有限个带有坐标卡的开集所覆盖，故

知 X^{an} 是一个在无穷远处可数的局部紧空间 [4]。

X^{an} 的下述性质可由定义立得：

若 X 和 Y 是两个代数多样体，则有 $(X \times Y)^{\mathrm{an}} = X^{\mathrm{an}} \times Y^{\mathrm{an}}$。若 Y 是 X 的一个 Zariski 局部闭子集，则 Y^{an} 是 X^{an} 的一个解析子集；进而，Y^{an} 上的解析结构与 X^{an} 在 Y 上所诱导的解析结构是重合的。最后，若 $f : X \to Y$ 是代数多样体 X 到代数多样体 Y 的一个正常映射，则 f 也是 X^{an} 到 Y^{an} 的一个全纯映射。

§6 局部环与全纯函数芽环之间的关系

设 X 是一个代数多样体，x 是 X 的一点。现在我们来比较一下 X 在 x 处的正常函数局部环 $\mathscr{O}_x$ 和 X^{an} 在 x 处的全纯函数局部环 $\mathscr{H}_x$。

由于任何正常函数都是全纯的，故知任何函数 $f \in \mathscr{O}_x$ 都定义了 x 处的一个全纯函数芽，我们记之为 $\theta(f)$。映射 $\theta : \mathscr{O}_x \to \mathscr{H}_x$ 是一个同态，并且把 $\mathscr{O}_x$ 的极大理想映到 $\mathscr{H}_x$ 的极大理想之中；从而可以连续地延拓为完备化上的一个同态 $\widehat{\theta} : \widehat{\mathscr{O}_x} \to \widehat{\mathscr{H}_x}$（参考附录 §24）。

命题 3. — 同态 $\widehat{\theta} : \widehat{\mathscr{O}_x} \to \widehat{\mathscr{H}_x}$ 是一一的。

我们将把它与下一个命题放在一起来证明：

设 Y 是 X 的一个 Zariski 局部闭子集，并设 $\mathscr{I}(Y)_x$（在需要指明 X 时，我们记之为 $\mathscr{I}(Y,X)_x$）是由 $\mathscr{O}_x$ 中限制到 Y 上以后在 x 的某个 Zariski 邻域上恒等于 0 的那些函数 f 所组成的理想（参考 [18], §39）。则 $\mathscr{I}(Y)_x$ 在 θ 下的像显然包含在 $\mathscr{H}_x$ 的理想 $\mathscr{A}(Y)_x$ 之中（定义见 §3）。

命题 4. — 理想 $\mathscr{A}(Y)_x$ 可由 $\theta(\mathscr{I}(Y)_x)$ 所生成。

首先对于 X 是仿射空间 $\mathbb{C}^n$ 的情形来证明命题 3 和 4。此时命题 3 是显然的，因为 $\widehat{\mathscr{O}_x}$ 和 $\widehat{\mathscr{H}_x}$ 刚好都是 n 元形式幂级数代数 $\mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$。再看命题 4；设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathscr{I}(Y)_x$ 在 $\mathscr{H}_x$ 中所生成的理想（这里把环 $\mathscr{O}_x$ 经由 θ 等同于 $\mathscr{H}_x$ 的一个子环）。$\mathscr{H}_x$ 的任何理想都可以定义出 X 在 x 处的一个解析子集芽，参考 [1], §3 或 [3], 报告 VI, p. 6；易见 $\mathfrak{a}$ 所定义的芽刚好就是 Y。设 f 是 $\mathscr{A}(Y)_x$ 中的一个元素，则依照"零点定理"（这是关于 $\mathscr{H}_x$ 的理想的一个定理，参考 [14], p. 278，或者 [2], 报告 XIV, p. 3 和 [3], 报告 VIII, p. 9），可以找到一个整数 $r \geqslant 0$，使得 $f^r \in \mathfrak{a}$。当然我们就有

$$f^r \in \mathfrak{a}.\widehat{\mathscr{H}_x} = \mathscr{I}(Y)_x.\widehat{\mathscr{H}_x} = \mathscr{I}(Y)_x.\widehat{\mathscr{O}_x} 。$$

然而理想 $\mathscr{I}(Y)_x$ 可以写成这样一些素理想的交集，它们对应于 Y 的经过 x 的不可约分支。从而根据 Chevalley 的一个定理（参考 [16], p. 40 或 [17], p. 67），理想 $\mathscr{I}_x.\widehat{\mathscr{O}_x}$ 也是如此，于是 $f^r \in \mathscr{I}(Y)_x.\widehat{\mathscr{O}_x}$ 蕴涵着 $f \in \mathscr{I}(Y)_x.\widehat{\mathscr{O}_x}$。而因为 $\mathscr{H}_x$ 是一

[4]译注："在无穷远处可数"是指该空间可以写成可数个紧集的并集，定义见 Bourbaki《一般拓扑学》, I, §9, n° 9。

个 Noether 局部环，故我们有 $\mathfrak{a}.\widehat{\mathscr{H}_x} \cap \mathscr{H}_x = \mathfrak{a}$（参考 [15], 第 IV 章，或者附录中的命题 27）；从而 $f \in \mathscr{I}(Y)_x$，这就证明了此情形的命题 4。

回到一般情形。问题是局部性的，故可假设 X 是某个仿射空间 U 的子体。根据定义：

$$\mathscr{O}_x = \mathscr{O}_{U,x}/\mathscr{I}(X,U)_x \qquad 且 \qquad \mathscr{H}_x = \mathscr{H}_{U,x}/\mathscr{A}(X,U)_x 。$$

映射 $\theta : \mathscr{O}_x \to \mathscr{H}_x$ 是由映射 $\theta : \mathscr{O}_{U,x} \to \mathscr{H}_{U,x}$ 通过取商而得到的，根据上面所述，我们知道 $\widehat{\theta} : \widehat{\mathscr{O}}_{U,x} \to \widehat{\mathscr{H}_{U,x}}$ 是一一的，并且还有 $\mathscr{A}(X,U)_x = \theta(\mathscr{I}(X,U)_x).\mathscr{H}_{U,x}$。命题 3 可由此立得（利用附录中的命题 29）。命题 4 则是缘自下面的事实：$\mathscr{A}(Y)_x$ 就是理想 $\mathscr{A}(Y,U)_x$ 的典范像，且根据前面所述，$\mathscr{A}(Y,U)_x$ 可由 $\theta(\mathscr{I}(Y,U)_x)$ 所生成。

特别地，命题 3 表明 $\theta : \mathscr{O}_x \to \mathscr{H}_x$ 是单的，从而可以把 $\mathscr{O}_x$ 等同于 $\mathscr{H}_x$ 的一个子环。在这个等同下，我们有：

推论 1. — 环的二元组 $(\mathscr{O}_x, \mathscr{H}_x)$ 是一个良配二元组（在附录定义 4 的意义下）。

这可由命题 3 和附录中的命题 28 立得。

推论 2. — 环 $\mathscr{O}_x$ 和 $\mathscr{H}_x$ 具有相同的维数。

事实上，Noether 局部环的维数与它的完备化环的维数相等（参考 [16], p. 26）。

有见于 §4 中的诸结果，我们可以得到下面的推论（为简单起见，这里假设 X 是不可约的）：

推论 3. — 若 X 是一个 r 维不可约代数多样体，则解析多样体 X^{an} 在其每一点处的解析维数都等于 r。

§7 代数多样体上的通常拓扑与 Zariski 拓扑之间的关系

命题 5. — 设 X 是一个代数多样体，U 是 X 的一个子集。若 U 在 X 中是 Zariski 稠密开的，则 U 在 X 中是稠密的。

设 Y 是 U 在 X 中的补集；它是 X 的一个 Zariski 闭集。设 x 是 X 的一点；若 x 没有落在 U 的闭包之中，则在 x 的近旁就有 $Y = X$，故得 $\mathscr{A}(Y)_x = 0$（在 §6 的记号下）。由于 $\mathscr{A}(Y)_x$ 包含 $\theta(\mathscr{I}(Y)_x)$，并且 θ 是单的（命题 3），故有 $\mathscr{I}(Y)_x = 0$，这就意味着在 x 的某个 Zariski 邻域上我们有 $Y = X$，与 U 在 X 中是 Zariski 稠密的相矛盾，证明完毕。

注解 — 易见命题 5 等价于 $\theta : \mathscr{O}_x \to \mathscr{H}_x$ 是单的这个事实，这件事比命题 3 简单得多，并且可以通过化归到曲线上来证明。

现在我们给出命题 5 的两个简单应用。

命题 6. — 为了使一个代数多样体 X 是紧合的，必须且只需 X^{an} 是紧的。

首先复习 Chow 的一个结果（参考 [7] 或 [19], §4）：对任意代数多样体 X，均

可找到一个射影多样体Y，和Y的一个Zariski稠密开子集U，以及一个正常满映射$f:U\to X$，且使得f的图像T在$X\times Y$中是Zariski闭的。$U=Y$的充分必要条件是X是紧合的。

据此，首先假设X是紧合的，则有$X=f(Y)$，且由于任何射影多样体在通常拓扑下都是紧的，从而X也是紧的。反之，假设X是紧的，则由于T在$X\times Y$中是闭的，故也是紧的，从而U是紧的，因为它是T在Y中的投影；这样一来，U在Y中就是闭的，且命题5表明$U=Y$，这就完成了证明。

下面的引理本质上来自Chevalley：

引理2. — 设$f:X\to Y$是代数多样体X到代数多样体Y的一个正常映射，假设$f(X)$在Y中是Zariski稠密的。则可以找到一个子集$U\subseteq f(X)$，它在Y中是Zariski稠密开的。

当X和Y都不可约时，这个结果是熟知的，例如参考[4], 报告3或者[17], p. 15。下面我们把一般情形归结到这个情形：设X_i $(i\in I)$是X的诸不可约分支，并设Y_i是$f(X_i)$在Y中的Zariski闭包，则由于Y_i都是不可约的，并且$Y=\bigcup Y_i$；故可找到一个子集$J\subseteq I$，使得诸Y_j $(j\in J)$就是Y的所有不可约分支。根据上面所说的结果，对每一个$j\in J$，均可找到Y_j的一个Zariski稠密开子集$U_j\subseteq f(X_j)$；适当缩小U_j，可以进而假设U_j与每个Y_k $(k\in J, k\neq j)$都没有交点。现在取$U=\bigcup\limits_{j\in J}U_j$，它就具有我们所要的性质。

命题7. — 设$f:X\to Y$是代数多样体X到代数多样体Y的一个正常映射，则$f(X)$在Y中的闭包和Zariski闭包是重合的。

设T是$f(X)$在Y中的Zariski闭包。把引理2应用到$f:X\to T$上，则可以找到一个子集$U\subseteq f(X)$，它在T中是Zariski稠密开的。从而根据命题5，U在T中是稠密的，因而$f(X)$在T中也是稠密的；这就表明T包含在$f(X)$的闭包之中；反方向的包含是显然的，从而完成了证明。

§8 正常性的解析判别法

任何正常映射都是全纯的。下面的命题表明，在某些情况下反过来也是对的（证明将在§19中完成）。

命题8. — 设X和Y是两个代数多样体，$f:X\to Y$是X到Y的一个全纯映射。若f的图像T在$X\times Y$中是Zariski局部闭的（即它是一个代数子体），则映射f是正常的。

设$p=\mathrm{pr}_X$是T到第一个因子的典范投影，则映射p是正常且一一的，并且它的逆映射就是$x\mapsto (x,f(x))$，且根据前提条件，这个逆映射是全纯的；从而p是一个解析同构，问题归结为证明p是一个双向正常同构（因为我们有$f=\mathrm{pt}_Y\circ p^{-1}$）。这一点是缘自下面的命题：

命题9. — 设T和X是两个代数多样体，$p:T\to X$是一个正常映射，并且是一

一的。于是若 p 是 T 到 X 的一个解析同构，则它也是一个双向正常同构。

首先证明 p 是 Zariski 拓扑下的同胚。设 F 是 T 的一个 Zariski 闭集，则因为 p 是一个解析同构，当然就是一个同胚，故知 $p(F)$ 在 X 中是闭的。把命题 7 应用到 $p: F \to X$ 上可知，$p(F)$ 在 X 中是 Zariski 闭的，这就证明了上述事项。

现在只消再来证明，p 能够把 X 上的结构层 $\mathscr{O}_X$ 转化为 T 上的结构层 $\mathscr{O}_T$。更确切地说，若 t 是 T 的一点，$x = p(t)$，则映射 p 定义了一个同态

$$p^* : \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow \mathscr{O}_{T,t} ,$$

且我们需要证明 p^* 是一一的 [5]。

由于 p 是一个 Zariski 同胚，故知 p^* 是单的，从而可以把 $\mathscr{O}_{X,x}$ 等同于 $\mathscr{O}_{T,t}$ 的一个子环。为了简化记号，我们令 $A = \mathscr{O}_{X,x}$, $A' = \mathscr{O}_{T,t}$，则有 $A \subseteq A'$。同样地，令 B（切转：B'）是环 $\mathscr{H}_{X,x}$（切转：$\mathscr{H}_{T,t}$）。并把 A 和 A' 分别嵌入 B 和 B' 中（依照命题 3，这是合理的）。p 是解析同构的条件表明 $B = B'$。

设 X_i 是 X 的经过 x 的诸不可约分支；每个 X_i 都确定了环 A 的一个素理想 $\mathfrak{p}_i = \mathscr{I}(X_i)_x$，并且商局部环 $A_i = A/\mathfrak{p}_i$ 刚好就是 X_i 在 x 处的局部环；从而若 K_i 是 A_i 的分式域，则它就是不可约多样体 X_i 的有理函数域。这些理想 $\mathfrak{p}_i$ 显然是环 A 的所有极小素理想，故有 $0 = \bigcap \mathfrak{p}_i$。由 A 中不属于任何 $\mathfrak{p}_i$ 的元素所组成的集合 S 在乘法下是封闭的（易见这就是 A 中的全体正则元的集合）。并且全分式环 A_S 就等于这些 K_i 的直合（参考下面的引理 3）。

设 $T_i = p^{-1}(X_i)$，则因为 p 是一个 Zariski 同胚，所以这些 T_i 就是 T 的经过 t 的所有不可约分支，并且分别定义了 A' 的素理想 $\mathfrak{p}'_i$；我们再令 $A'_i = A'/\mathfrak{p}'_i$，且设 K'_i 是 A'_i 的分式域，则 A' 的全分式环 $A'_{S'}$ 就等于这些 K'_i 的直合。注意到 $\mathfrak{p}'_i \cap A = \mathfrak{p}_i$，故有 $A_i \subseteq A'_i$, $K_i \subseteq K'_i$ 和 $A_S \subseteq A'_{S'}$。

我们首先证明 $K_i = K'_i$，换句话说，p 定义了 T_i 和 X_i 之间的一个"双有理"映射；因为 $p: T_i \to X_i$ 是一个 Zariski 同胚，所以 T_i 和 X_i 具有相同的维数，因而域 K_i 和 K'_i 在 $\mathbb{C}$ 上的超越次数也相同。于是若我们令 $n_i = [K'_i : K_i]$，则 [6]可以找到 X_i 的一个非空 Zariski 开子集 U_i，使得 U_i 中的每个点在 T_i 中的逆像都恰好有 n_i 个点。而由于 p 是一一的，故必有 $n_i = 1$，从而得到 $K_i = K'_i$。

因为 A_S（切转：$A'_{S'}$）就是这些 K_i（切转：K'_i）的直合，所以我们有 $A_S = A'_{S'}$。现在设 $f' \in A'$；根据上面所述，$f' \in A_S$，换句话说，可以找到 $g \in A$ 和 $s \in S$，使得 $g = sf'$。从而有 $g \in sA'$，故得 $g \in sB'$，也就是说 $g \in sB$。然而根据命题 3 的推论 1，二元组 (A, B) 是良配的，从而我们有 $sB \cap A = sA$，参考附录ꁷ22。这就给出 $g \in sA$，换句话说，可以找到 $f \in A$，使得 $g = sf$，即有 $s(f - f') = 0$，且由于 s 在 A' 中不是零因子，故得 $f = f'$，也就是说 $A = A'$，证明完毕。

我们在证明过程中使用了下面的引理：

引理 3. — 设 A 是一个交换环，且它的零理想可以写成有限个极小素理想 $\mathfrak{p}_i$ 的交

[5]这里的证明方法是 P. Samuel 告诉作者的。

[6]这是一个古典的结果，且不难证明。读者可在 [17], p. 16 处找到一个较弱的结果，它对于我们这里的问题来说已经足够了。

集；设 K_i 是 $A/\mathfrak{p}_i$ 的分式域，并设 S 是由 A 中所有不属于任何 $\mathfrak{p}_i$ 的元素所组成的集合。则分式环 A_S 同构于这些 K_i 的直合。

我们知道 A_S 的素理想与 A 的那些与 S 没有交点的素理想是一一对应的（参考 [15], 第IV章§3，本文关于分式环的内容皆来自该处）。于是若令 $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{p}_i A_S$，则这些 $\mathfrak{m}_i$ 就是 A_S 的所有素理想；特别地，它们都是极大理想，且显然两两不同，因为 $\mathfrak{m}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$（[15], 前引）。进而，域 $A_S/\mathfrak{m}_i$ 是由 $A/\mathfrak{p}_i$ 所生成的，从而与 K_i 重合。只消再来证明典范同态

$$\varphi : A_S \longrightarrow \prod A_S/\mathfrak{m}_i = \prod K_i$$

是一一的。

首先由 $\bigcap \mathfrak{p}_i = 0$ 可以推出 $\bigcap \mathfrak{m}_i = 0$，这就表明 φ 是单的。现在令 $\mathfrak{b}_i$ 是诸理想 $\mathfrak{m}_j$ $(j \neq i)$ 的乘积（在环 A_S 中），并且令 $\mathfrak{b} = \sum \mathfrak{b}_i$。则理想 $\mathfrak{b}$ 不包含在任何一个 $\mathfrak{m}_i$ 之中，从而就等于 A_S，故可找到 $x_i \in \mathfrak{b}_i$，使得 $\sum x_i = 1$。现在我们有

$$x_i \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\, \mathfrak{m}_i) \qquad 且 \qquad x_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, \mathfrak{m}_j), \quad j \neq i \ ,$$

这就表明 $\varphi(A_S)$ 包含着 $\prod K_i$ 中的元素 $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$。由于这些元素可以生成 A_S 模 $\prod K_i$，这就证明了 φ 是一一的，也就完成了证明。

§3 代数性凝聚层和解析性凝聚层之间的对应关系

¶9 代数性层的伴生解析性层

设 X 是一个代数多样体，X^{an} 是它的伴生解析多样体（定义方法见 ¶5）。设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的任意一个层，我们现在要给集合 $\mathscr{F}$ 赋予一个新的拓扑，使之成为 X^{an} 上的一个层；该拓扑是这样定义的：若以 $\pi : \mathscr{F} \to X$ 来记 $\mathscr{F}$ 到 X 上的投影，则可以把 $\mathscr{F}$ 通过映射 $f \mapsto (\pi(f), f)$ 嵌入 $X^{\mathrm{an}} \times \mathscr{F}$ 之中，于是 $X^{\mathrm{an}} \times \mathscr{F}$ 上的拓扑就在 $\mathscr{F}$ 上诱导出一个拓扑，这就是我们所要的拓扑。可以直接验证，它使 $\mathscr{F}$ 成为 X^{an} 上的一个层，我们记之为 $\mathscr{F}'$。从而对任意 $x \in X$，均有 $\mathscr{F}'_x = \mathscr{F}_x$；层 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 的区别只在于它们的拓扑（$\mathscr{F}'$ 就是 $\mathscr{F}$ 在连续映射 $X^{\mathrm{an}} \to X$ 下的逆像）。

把这个方法应用到 X 的结构层 $\mathscr{O}$ 上，再利用 ¶6, 命题 3，我们就可以把层 $\mathscr{O}'$ 等同于 X^{an} 上的全纯函数芽层 $\mathscr{H}$ 的一个子层。

定义 2. — 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个代数性层。则 $\mathscr{F}$ 的伴生解析性层是指 X^{an} 上的这样一个层 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$，它是由下面的公式定义的

$$\mathscr{F}^{\mathrm{an}} = \mathscr{F}' \otimes_{\mathscr{O}'} \mathscr{H} \quad 。$$

（换句话说，$\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 是 $\mathscr{F}'$ 通过把系数环扩张到 $\mathscr{H}$ 上而得到的）。

$\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 是一个 $\mathscr{H}$ 模层，也就是说，是一个解析性层；并且含入 $\mathscr{O}' \to \mathscr{H}$ 定义了一个典范同态 $\alpha : \mathscr{F}' \to \mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 。

任何代数性同态（也就是说，$\mathscr{O}$ 线性同态）

$$\varphi \ : \ \mathscr{F} \ \longrightarrow \mathscr{G}$$

都可以通过系数环扩张而定义出一个解析性同态

$$\varphi^{\mathrm{an}} \ : \ \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \ \longrightarrow \ \mathscr{G}^{\mathrm{an}} \quad 。$$

这样一来，$\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 就是 $\mathscr{F}$ 的协变函子。

命题 10. — a) 函子 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 是正合的。
b) 对任何代数性层 $\mathscr{F}$ ，同态 $\alpha : \mathscr{F}' \to \mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 都是单的。
c) 若 $\mathscr{F}$ 是一个代数性凝聚层，则 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 是一个解析性凝聚层。

若 $\mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3$ 是一个代数性的正合序列，则易见序列 $\mathscr{F}_1' \to \mathscr{F}_2' \to \mathscr{F}_3'$ 也是正合的，从而根据命题 3 的推论 1，序列

$$\mathscr{F}_1' \otimes_{\mathscr{O}'} \mathscr{H} \ \longrightarrow \ \mathscr{F}_2' \otimes_{\mathscr{O}'} \mathscr{H} \ \longrightarrow \ \mathscr{F}_3' \otimes_{\mathscr{O}'} \mathscr{H}$$

是正合的，这就证明了 a)。条目 b) 同样是缘自这个推论。

为了证明 c)，首先注意到 $\mathscr{O}^{\mathrm{an}} = \mathscr{H}$ ；于是若 $\mathscr{F}$ 是一个代数性层，并且 x 是 X 的一点，则在 x 的某个 Zariski 邻域 U 上，我们有一个正合序列

$$\mathscr{O}^q \ \longrightarrow \ \mathscr{O}^p \ \longrightarrow \ \mathscr{F} \ \longrightarrow \ 0 \quad 。$$

根据 a)，可以由此导出一个 U 上的正合序列

$$\mathscr{H}^q \ \longrightarrow \ \mathscr{H}^p \ \longrightarrow \ \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \ \longrightarrow \ 0 \quad 。$$

由于 U 是 x 的邻域，并且环层 $\mathscr{H}$ 是凝聚的（§3, 命题 1），这就表明 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 也是凝聚的（[18], §15）。

特别地，上述命题表明，如果 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{O}$ 的一个理想层，则 $\mathscr{I}^{\mathrm{an}}$ 恰好就是 $\mathscr{I}$ 中的元素在 $\mathscr{H}$ 中所生成的理想层。

§10　层的延拓

设 Y 是代数多样体 X 的一个 Zariski 闭子体，$\mathscr{F}$ 是 Y 上的一个代数性凝聚层。若我们用 $\mathscr{F}^X$ 来记 $\mathscr{F}$ 在 $X \smallsetminus Y$ 上进行零延拓而得到的层（参考 [18], §5），则 $\mathscr{F}^X$ 是 X 上的一个代数性凝聚层，从而可以定义出 $(\mathscr{F}^X)^{\mathrm{an}}$ ；它是 X^{an} 上的解析性凝聚层。另一方面，$\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 是 Y^{an} 上的解析性凝聚层，从而可以通过在 $X^{\mathrm{an}} \smallsetminus Y^{\mathrm{an}}$ 上进行零延拓而得到一个新的层 $(\mathscr{F}^{\mathrm{an}})^X$ 。我们有：

命题 11. — 层 $(\mathscr{F}^{\mathrm{an}})^X$ 和 $(\mathscr{F}^{\mathrm{an}})^X$ 是典范同构的。

这两个层在Y^{an}之外都是0，从而只需证明它们在Y^{an}上的限制是同构的。设x是Y的一点。为了简化记号，令：

$$A = \mathscr{O}_{X,x}, \quad A' = \mathscr{O}_{Y,x}, \quad B = \mathscr{H}_{X,x}, \quad B' = \mathscr{H}_{Y,x}, \quad E = \mathscr{F}_x \quad 。$$

则我们有：

$$(\mathscr{F}^{\mathrm{an}})^X_x = E \otimes_A B' \quad 和 \quad (\mathscr{F}^X)^{\mathrm{an}}_x = E \otimes_A B \quad 。$$

环A'就是A除以理想$\mathfrak{a}$后的商环，并且根据§6, 命题4，我们有$B' = B/\mathfrak{a}B = B \otimes_A A'$。依照张量积的结合性，我们得到一个同构：

$$\theta_x : E \otimes_{A'} B' = E \otimes_{A'} A' \otimes_A B \longrightarrow E \otimes_A B \quad ,$$

易见它随着x连续地变化；这就推出了命题。

命题11表述了这样一件事：函子$\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$与把$\mathscr{F}$等同$\mathscr{F}^X$的过程是相容的。

§11 上同调群之间的同态

记号与§9相同，设X是一个代数多样体，$\mathscr{F}$是X上的一个代数性层，$\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$是$\mathscr{F}$的伴生解析性层。若$U$是$X$的一个Zariski开子集，$s$是$\mathscr{F}$在$U$上的一个截面，则我们也可以把$s$看作是$\mathscr{F}'$在$X^{\mathrm{an}}$的开集$U^{\mathrm{an}}$上的一个截面$s'$，从而$\alpha(s') = s' \otimes 1$是$\mathscr{F}^{\mathrm{an}} = \mathscr{F}' \otimes_{\mathscr{O}'} \mathscr{H}$在$U^{\mathrm{an}}$上的一个截面。映射$s \mapsto \alpha(s')$给出一个同态

$$\varepsilon : \Gamma(U, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(U^{\mathrm{an}}, \mathscr{F}^{\mathrm{an}}) \quad 。$$

现在设$\mathfrak{U} = \{U_i\}$是X的一个有限Zariski开覆盖，则这些U_i^{an}构成X^{an}的一个有限开覆盖，我们记之为$\mathfrak{U}^{\mathrm{an}}$。根据上面所述，对任意一组指标$i_0, \ldots, i_q$，我们都有一个典范同态

$$\varepsilon : \Gamma(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(U_{i_0}^{\mathrm{an}} \cap \cdots \cap U_{i_q}^{\mathrm{an}}, \mathscr{F}^{\mathrm{an}}) \quad ,$$

故得同态

$$\varepsilon : \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}^{\mathrm{an}}, \mathscr{F}^{\mathrm{an}}) \quad ,$$

记号取自[18], §18。

这个同态与上边缘算子d是可交换的，从而定义了上同调群之间的一组同态

$$\varepsilon : \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}^{\mathrm{an}}, \mathscr{F}^{\mathrm{an}}) \quad 。$$

最后，通过对$\mathfrak{U}$取归纳极限，我们就得到了上同调群之间的同态

$$\varepsilon : \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{F}^{\mathrm{an}}) \quad 。$$

这些同态具有通常的函子性质；它们与任何同态 $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 都可交换；若有一个代数性层的正合序列

$$0\longrightarrow\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{C}\longrightarrow 0\ ,$$

其中 $\mathscr{A}$ 是凝聚的，则图表：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^q(X,\mathscr{C}) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{A}) \\
{\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow \\
\mathrm{H}^q(X,\mathscr{C}^{\mathrm{an}}) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}^{q+1}(X^{\mathrm{an}},\mathscr{A}^{\mathrm{an}})
\end{array}$$

是交换的：这是因为，我们总可以取 $\mathfrak{U}$ 是那些仿射开覆盖（参考 [18]）。

§12 射影多样体。定理的陈述

假设 X 是射影多样体，也就是说，它是射影空间 $\mathbf{P}^r(\mathbb{C})$ 中的一个 Zariski 闭子体。则我们有下面的定理（证明见后面各节）：

定理 1. — 对于 X 上的任意代数性凝聚层 $\mathscr{F}$ 和任意整数 $q\geqslant 0$，§11 中所定义的同态

$$\varepsilon\ :\ \mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})\ \longrightarrow\ \mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{F}^{\mathrm{an}})$$

都是一一的。

特别地，对于 $q=0$，我们得到 $\Gamma(X,\mathscr{F})$ 和 $\Gamma(X^{\mathrm{an}},\mathscr{F}^{\mathrm{an}})$ 之间的一个同构。

定理 2. — 若 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是 X 上的两个代数性凝聚层，则 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 到 $\mathscr{G}^{\mathrm{an}}$ 的任何解析性同态都可由唯一一个从 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的代数性同态所导出。

定理 3. — 对于 X^{an} 上的任何解析性凝聚层 $\mathscr{M}$，均可找到 X 上的一个代数性凝聚层 $\mathscr{F}$，使得 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 同构于 $\mathscr{M}$。进而，满足这个条件的 $\mathscr{F}$ 在同构意义下是唯一的。

注解 — 1. 这三个定理表明，X^{an} 上的解析性凝聚层的理论本质上与 X 上的代数性凝聚层的理论是重合的。当然，这只对 X 是射影多样体的情形才是成立的，对于仿射多样体就不再成立。

2. 可以把 ε 分解为：

$$\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})\ \longrightarrow\ \mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{F}')\ \longrightarrow\ \mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{F}^{\mathrm{an}})\ 。$$

定理 1 引出这样一个问题，即 $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})\to\mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{F}')$ 是不是一一的。回答是否定的。事实上，若这个同态对任意的代数性凝聚层 $\mathscr{F}$ 都是一一的，则它对于 X（假设不可约）上的有理函数常值层 $K=\mathbb{C}(X)$ 就也是一一的，因为后者是一些凝聚层的并集（对照 [19], §2）；现在对于 $q>0$，我们有 $\mathrm{H}^q(X,K)=0$，而另一方面，$\mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},K)$ 是一个 K 向量空间，其维数等于 X^{an} 的第 q 个 Betti 数。

§13 定理1的证明

假设 X 已嵌入射影空间 $\mathbf{P}^r(\mathbb{C})$ 之中。若把 $\mathscr{F}$ 等同于在 X 之外进行零延拓而得到的层，则我们知道（[18], §26）：

$$\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F}) = \mathrm{H}^q(\mathbf{P}^r(\mathbb{C}),\mathscr{F}) \quad \text{且} \quad \mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{F}^{\mathrm{an}}) = \mathrm{H}^q(\mathbf{P}^r(\mathbb{C})^{\mathrm{an}},\mathscr{F}^{\mathrm{an}}) \ ,$$

记号 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 的意义由命题11所保证。从而只需证明

$$\varepsilon\ :\ \mathrm{H}^q(\mathbf{P}^r(\mathbb{C}),\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathbf{P}^r(\mathbb{C})^{\mathrm{an}},\mathscr{F}^{\mathrm{an}})$$

是一一的，换句话说，问题可以归结到 $X=\mathbf{P}^r(\mathbb{C})$ 的情形。

首先证明两个引理：

引理 4. — *定理1对于层 $\mathscr{O}$ 是成立的。*

对于 $q=0$，$\mathrm{H}^0(X,\mathscr{O})$ 和 $\mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}},\mathscr{O}^{\mathrm{an}})$ 都是常值函数的集合。对于 $q>0$，我们有 $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{O})=0$（参考[18], §65, 命题8）；另一方面，根据Dolbeault定理（参考[8]），$\mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{O}^{\mathrm{an}})$ 同构于射影空间 X 的 $(0,q)$ 型上同调群，从而也是0，证毕[7]。

引理 5. — *定理1对于层 $\mathscr{O}(n)$ 是成立的。*

（$\mathscr{O}(n)$ 的定义见[18], §54，或者下面的§16）。

我们对 $r=\dim X$ 进行归纳，$r=0$ 的情形是平凡的。设 t 是一个关于齐次坐标 $t_0,\ldots,t_r$ 的非零线性形式，并设 E 是由方程 $t=0$ 所定义的超平面。则有正合序列

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-1) \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{O}_E \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $\mathscr{O}\to\mathscr{O}_E$ 是限制同态，而 $\mathscr{O}(-1)\to\mathscr{O}$ 是乘以 t 的同态（参考[18], §81）。从它又可以导出一系列正合序列（对每一个 $n\in\mathbb{Z}$）

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(n-1) \longrightarrow \mathscr{O}(n) \longrightarrow \mathscr{O}_E(n) \longrightarrow 0\ 。$$

根据§11，我们有交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\longrightarrow & \mathrm{H}^q(X,\mathscr{O}(n-1)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^q(X,\mathscr{O}(n)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^q(E,\mathscr{O}_E(n)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{O}(n-1)) & \longrightarrow\cdots \\
 & \varepsilon\big\downarrow & & \varepsilon\big\downarrow & & \varepsilon\big\downarrow & & \varepsilon\big\downarrow & \\
\cdots\to & \mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{O}(n-1)^{\mathrm{an}}) & \to & \mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{O}(n)^{\mathrm{an}}) & \to & \mathrm{H}^q(E^{\mathrm{an}},\mathscr{O}_E(n)^{\mathrm{an}}) & \to & \mathrm{H}^{q+1}(X^{\mathrm{an}},\mathscr{O}(n-1)^{\mathrm{an}}) & \to\cdots
\end{array}$$

根据归纳假设，对任意 $q\geqslant 0$ 和任意 $n\in\mathbb{Z}$，同态

$$\varepsilon\ :\ \mathrm{H}^q(E,\mathscr{O}_E(n)) \longrightarrow \mathrm{H}^q(E^{\mathrm{an}},\mathscr{O}_E(n)^{\mathrm{an}})$$

---

[7]也可以使用§16中所定义的开覆盖来直接计算 $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{O})$，这里需要使用Laurent展开式（J. Frenkel未发表的文章）。如此则可以完全避免使用Kähler流形的理论。

都是一一的。应用五项引理可知，若定理 1 对于 $\mathscr{O}(n)$ 是成立的，则它对于 $\mathscr{O}(n-1)$ 也是成立的，反之亦然。由于引理 4 已表明它对 $n=0$ 是成立的，从而它对所有的 n 都是成立的。

现在我们可以来证明定理 1，对 q 使用递降归纳法，定理在 $q>2r$ 时是平凡的，因为此时 $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{F})$ 和 $\mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{F}^{\mathrm{an}})$ 都是 0 。根据 [18], §55, 定理 1 的推论，我们有一个代数性凝聚层的正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0 \ ,$$

其中 $\mathscr{L}$ 是一些同构于 $\mathscr{O}(n)$ 的层的直和；由引理 5 知，定理 1 对于 $\mathscr{L}$ 是成立的。

我们有交换图表：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^q(X,\mathscr{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_1"'] & \mathrm{H}^q(X,\mathscr{L}) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_2"'] & \mathrm{H}^q(X,\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_3"'] & \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_4"'] & \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{L}) \arrow[d, "\varepsilon_5"'] \\
\mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{R}^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{L}^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}},\mathscr{F}^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^{q+1}(X^{\mathrm{an}},\mathscr{R}^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^{q+1}(X^{\mathrm{an}},\mathscr{L}^{\mathrm{an}})
\end{tikzcd}$$

在这个图表中，根据归纳假设，同态 ε_4 和 ε_5 都是一一的；且根据前面所述， ε_2 也是一一的。从而五项引理表明， ε_3 是满的。由于这个结果对任意代数性凝聚层都成立，从而对于 $\mathscr{R}$ 也成立，这就表明 ε_1 是满的。再次使用五项引理便可推出 ε_3 是一一的，这就完成了证明。

§14　定理 2 的证明

设 $\mathscr{A}=\mathscr{H}om_{\mathscr{O}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ 是 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的同态芽层（参考 [18], §11 和 §14 ）。则一个元素 $f\in\mathscr{A}_x$ 就是在 x 点的某个邻域上 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的一个同态芽，从而可以定义出解析性层 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 到 $\mathscr{G}^{\mathrm{an}}$ 的一个同态芽 f^{an} ；映射 $f\longmapsto f^{\mathrm{an}}$ 是由 $\mathscr{A}$ 所定义的层 $\mathscr{A}'$ （见 §9）到层 $\mathscr{B}=\mathscr{H}om_{\mathscr{O}^{\mathrm{an}}}(\mathscr{F}^{\mathrm{an}},\mathscr{G}^{\mathrm{an}})$ 的一个 $\mathscr{O}'$ 线性同态；这个同态可以线性延拓为一个同态

$$\iota\ :\ \mathscr{A}^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathscr{B} \ 。$$

引理 6. — 同态 $\iota:\mathscr{A}^{\mathrm{an}}\to\mathscr{B}$ 是一一的。

设 $x\in X$ 。由于 $\mathscr{F}$ 是凝聚的，故根据 [18], §14，我们有：

$$\mathscr{A}_x = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_x}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x) \qquad \text{从而} \qquad \mathscr{A}_x^{\mathrm{an}} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_x}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x)\otimes_{\mathscr{O}_x}\mathscr{H}_x \ 。$$

由于 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 是凝聚的，从而同样有：

$$\mathscr{B}_x = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_x}(\mathscr{F}_x\otimes_{\mathscr{O}_x}\mathscr{H}_x\ ,\ \mathscr{G}_x\otimes_{\mathscr{O}_x}\mathscr{H}_x) \ 。$$

从而问题归结为证明同态

$$\iota_x\ :\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_x}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x)\otimes_{\mathscr{O}_x}\mathscr{H}_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_x}(\mathscr{F}_x\otimes_{\mathscr{O}_x}\mathscr{H}_x\ ,\ \mathscr{G}_x\otimes_{\mathscr{O}_x}\mathscr{H}_x)$$

是一一的，这是缘自 $(\mathscr{O}_x, \mathscr{H}_x)$ 是良配二元组的事实，连同附录中的命题 21。

现在我们来证明定理 2。考虑同态

$$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{A}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{A}^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\iota} \mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{B}) \ 。$$

$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{A})$（切转：$\mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{B})$）中的一个元素也就是 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$（切转：$\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 到 $\mathscr{G}^{\mathrm{an}}$）的一个同态。进而，若 $f \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{A})$，则根据 ι 的定义，我们有 $\iota \circ \varepsilon(f) = f^{\mathrm{an}}$。从而定理 2 相当于说，$\iota \circ \varepsilon$ 是一一的。现在根据定理 1，ε 是一一的（这是因为 $\mathscr{A}$ 是凝聚的，参考 [18], §14），再根据引理 6，ι 也是一一的，证明完毕。

§15 定理 3 的证明。一些准备

$\mathscr{F}$ 的唯一性缘自定理 2。事实上，若 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是 X 上的两个代数性凝聚层，并且都是问题的解，则根据前提条件，存在同构 $g : \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \to \mathscr{G}^{\mathrm{an}}$。从而根据定理 2，我们有一个同态 $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，使得 $g = f^{\mathrm{an}}$。令 f 的核及余核分别是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，则有正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{B} \longrightarrow 0 \ ，$$

故根据命题 10 a)，我们有一个正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathscr{A}^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{g} \mathscr{G}^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathscr{B}^{\mathrm{an}} \longrightarrow 0 \ 。$$

现在 g 是一一的，这就表明 $\mathscr{A}^{\mathrm{an}} = \mathscr{B}^{\mathrm{an}} = 0$，再根据命题 10 b)，我们于是得到 $\mathscr{A} = \mathscr{B} = 0$，这就证明了 f 是一一的。

只消再来证明 $\mathscr{F}$ 的存在性。可以限于考虑 X 是射影空间 $\mathbf{P}^r(\mathbb{C})$ 的情形。事实上，设 Y 是 $X = \mathbf{P}^r(\mathbb{C})$ 的一个代数的闭子体，$\mathscr{M}$ 是 Y^{an} 上的一个解析性凝聚层。则通过在 Y^{an} 之外进行零延拓而得到的层 $\mathscr{M}^X$ 是 X^{an} 上的一个解析性凝聚层。假设定理 3 对于 X 是成立的，则可以找到 X 上的一个代数性凝聚层 $\mathscr{G}$，使得 $\mathscr{G}^{\mathrm{an}}$ 同构于 $\mathscr{M}^X$。设 $\mathscr{I} = \mathscr{I}(Y)$ 是定义出闭子体 Y 的那个凝聚理想层。若 $f \in \mathscr{I}_x$，则乘以 f 的运算是 $\mathscr{G}_x$ 的一个自同态 φ；因为 $\mathscr{M}$ 是 Y^{an} 上的一个解析性凝聚层，所以 $\mathscr{G}_x^{\mathrm{an}} = \mathscr{M}_x^X$ 的自同态 φ^{an} 是 0；从而根据命题 10 b)，φ 等于 0。这样一来，我们有 $\mathscr{I}.\mathscr{G} = 0$，这就意味着在 Y 上有一个代数性凝聚层 $\mathscr{F}$，使得 $\mathscr{G} = \mathscr{F}^X$（[18], §39, 命题 3）。根据命题 11，$(\mathscr{F}^{\mathrm{an}})^X$ 同构于 $(\mathscr{F}^X)^{\mathrm{an}} = \mathscr{G}^{\mathrm{an}}$，进而同构于 $\mathscr{M}^X$。限制到 Y 上，故知 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 同构于 $\mathscr{M}$，这就证明了上面所说的事情。

§16 定理 3 的证明。层 $\mathscr{M}(n)$

由前节的结果知，我们可以假设 $X = \mathbf{P}^r(\mathbb{C})$，下面对 r 进行归纳，$r = 0$ 的情形是平凡的。

我们首先对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 定义解析性层 $\mathscr{M}(n)$ 如下：

设$t_0,\ldots,t_r$是X上的齐次坐标系，并设U_i是由$t_i\neq 0$所定义的开集。我们以$\mathscr{M}_i$来记$\mathscr{M}$在U_i上的限制，则乘以t_j^n/t_i^n的映射是$\mathscr{M}_j$到$\mathscr{M}_i$的一个同构，定义在$U_i\cap U_j$上。用这些同构把$\mathscr{M}_i$黏合起来就可以得到一个层$\mathscr{M}(n)$（参考[18], §54，在那里使用同样的方法定义了代数性层）。层$\mathscr{M}(n)$局部同构于$\mathscr{M}$，从而是凝聚的，因为$\mathscr{M}$如此；而且我们有一个典范同构$\mathscr{M}(n)=\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{H}}\mathscr{H}(n)$。若$\mathscr{F}$是一个代数性层，则有$\mathscr{F}^{\mathrm{an}}(n)=\mathscr{F}(n)^{\mathrm{an}}$。

引理7. — 设E是$\mathbf{P}^r(\mathbb{C})$中的一个超平面，$\mathscr{A}$是E上的一个解析性凝聚层。则对于$q>0$和充分大的n，总有$\mathrm{H}^q(E^{\mathrm{an}},\mathscr{A}(n))=0$。

（这是[3], 报告XVIII中的“定理B”）。

依照归纳假设，可以找到E上的一个代数性凝聚层$\mathscr{F}$，使得$\mathscr{A}=\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$，从而$\mathscr{A}(n)=\mathscr{F}(n)^{\mathrm{an}}$；根据定理1，$\mathrm{H}^q(E^{\mathrm{an}},\mathscr{A}(n))$同构于$\mathrm{H}^q(E,\mathscr{F}(n))$，从而引理7缘自[18], §65, 命题7。

引理8. — 设$\mathscr{M}$是$X=\mathbf{P}^r(\mathbb{C})$上的一个解析性凝聚层。则可以找到一个整数$n(\mathscr{M})$，使得当$n\geqslant n(\mathscr{M})$时，对任意$x\in X$，$\mathscr{H}_x$模$\mathscr{M}(n)_x$都可由$\mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}},\mathscr{M}(n))$中的元素所生成。

（这是[3], 报告XVIII中的“定理A”）。

首先注意到，若$\mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}},\mathscr{M}(n))$可以生成$\mathscr{M}(n)_x$，则同样的性质对于$m\geqslant n$也是成立的。事实上，取指标$k$使得$x\in U_k$；对每一个$i$，设$\theta_i$是$\mathscr{M}_i$上由$(t_k/t_i)^{m-n}$所定义的同筋，则这些$\theta_i$与定义$\mathscr{M}(n)$和$\mathscr{M}(m)$的那些黏合映射可以交换，从而给出一个同态$\theta:\mathscr{M}(n)\to\mathscr{M}(m)$；然而$\theta$在$U_k$上是同构，由此立得结论。

其次注意到，若$\mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}},\mathscr{M}(n))$可以生成$\mathscr{M}(n)_x$，则根据[18], §12，对于充分接近$x$的$y$，它也可以生成$\mathscr{M}(n)_y$。

把这两件事情与X^{an}是紧的结合起来，则问题归结为证明下面的事实：

对任意$x\in X$，均可找到一个整数n，依赖于x和$\mathscr{M}$，使得$\mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}},\mathscr{M}(n))$可以生成$\mathscr{M}(n)_x$。

选定一个经过x的超平面H，由齐次方程$t=0$所定义。若$\mathscr{A}(E)$是E所定义的理想层（参考§3），则有一个正合序列

$$0\longrightarrow\mathscr{A}(E)\longrightarrow\mathscr{H}\longrightarrow\mathscr{H}_E\longrightarrow 0\ 。$$

进而，层$\mathscr{A}(E)$同构于$\mathscr{H}(-1)$，这个同构$\mathscr{H}(-1)\to\mathscr{A}(E)$就是由乘以$t$的映射所定义的（参考引理5的证明）。

与$\mathscr{M}$取张量积，我们又得到正合序列

$$\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{H}}\mathscr{A}(E)\longrightarrow\mathscr{M}\longrightarrow\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{H}}\mathscr{H}_E\longrightarrow 0\ 。$$

我们用$\mathscr{B}$来记层$\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{H}}\mathscr{H}_E$，并且用$\mathscr{C}$来记同态$\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{H}}\mathscr{A}(E)\to\mathscr{M}$的核（则有$\mathscr{C}=\mathscr{T}or_1^{\mathscr{H}}(\mathscr{M},\mathscr{H}_E)$）；由于$\mathscr{A}(E)$同构于$\mathscr{H}(-1)$，故知层$\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{H}}\mathscr{A}(E)$同构

于 $\mathscr{M}(-1)$，从而得到正合序列

(1) $$0 \longrightarrow \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{M}(-1) \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{B} \longrightarrow 0 \text{ 。}$$

把函子 $\mathscr{M}(n)$ 应用到序列 (1) 上，又得到正合序列

(2) $$0 \longrightarrow \mathscr{C}(n) \longrightarrow \mathscr{M}(n-1) \longrightarrow \mathscr{M}(n) \longrightarrow \mathscr{B}(n) \longrightarrow 0 \text{ 。}$$

设 $\mathscr{P}_n$ 是同态 $\mathscr{M}(n) \to \mathscr{B}(n)$ 的核，则序列 (2) 可以分解为下面两个正合序列

(3) $$0 \longrightarrow \mathscr{C}(n) \longrightarrow \mathscr{M}(n-1) \longrightarrow \mathscr{P}_n \longrightarrow 0 \text{，}$$

(4) $$0 \longrightarrow \mathscr{P}_n \longrightarrow \mathscr{M}(n) \longrightarrow \mathscr{B}(n) \longrightarrow 0 \text{，}$$

它们分别给出上同调长正合序列 (中的一段)

(5) $$\mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n-1)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{P}_n) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{C}(n))$$

和

(6) $$\mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{P}_n) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{B}(n)) \text{ 。}$$

根据 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的定义，我们有 $\mathscr{A}(E).\mathscr{B} = 0$ 和 $\mathscr{A}(E).\mathscr{C} = 0$，这表明 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 都是超平面 E 上的解析性凝聚层。现在使用引理 7，则可以找到一个整数 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时均有 $\mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{B}(n)) = 0$ 和 $\mathrm{H}^2(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{C}(n)) = 0$。于是正合序列 (5) 和 (6) 给出了下面的不等式

(7) $$\dim \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n-1)) \geqslant \dim \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{P}_n) \geqslant \dim \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n)) \text{ 。}$$

根据 [5] （也参考 [3], 报告 XVII），这些维数都是有限的。由此可知，当 $n \geqslant n_0$ 时，$\dim \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n))$ 是 n 的一个递降函数；从而可以找到一个整数 $n_1 \geqslant n_0$，使得函数 $\dim \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n))$ 在 $n \geqslant n_1$ 时是常值的。于是对于 $n > n_1$，我们有

(8) $$\dim \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n)) = \dim \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{P}_n) = \dim \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n)) \text{ 。}$$

因为 $n_1 \geqslant n_0$，所以有 $\mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{B}(n)) = 0$，于是正合序列 (6) 表明，$\mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{P}_n) \to \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n))$ 是满的；然而根据 (8)，这两个向量空间具有相同的维数；从而该同态也是单的，再由正合序列 (4) 所给出的上同调长正合序列可知 [8]：对于 $n > n_1$，同态

(9) $$\mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{B}(n))$$

都是满的。

[8] 可以看出，这就是 Kodaira-Spencer 证明 Lefschetz 定理的方法（参考 [12]）。

现在我们选取一个整数$n > n_1$，使得$\mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{B}(n))$可以生成$\mathscr{B}(n)_x$；这是可以做到的，因为$\mathscr{B}$是$E$上的一个解析性凝聚层，因而具有$\mathscr{G}^{\mathrm{an}}$的形状，故根据定理1，$\mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{B}(n)) = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{G}(n))$，并且当$n$足够大时，$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{G}(n))$可以生成$\mathscr{G}(n)_x$，参考[18], ¶55, 定理1。

据此，我们说整数n就满足我们的要求。事实上，为了简化记号，令$A = \mathscr{H}_x, M = \mathscr{M}(n)_x, \mathfrak{p} = \mathscr{A}(E)_x$，并设$N$是由$\mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}(n))$在$M$中所生成的$A$子模。则有$\mathscr{B}(n)_x = \mathscr{M}(n)_x \otimes_{\mathscr{H}_x} \mathscr{H}_{E,x} = M \otimes_A A/\mathfrak{p} = M/\mathfrak{p}M$；另一方面，根据上面所述，$N$在$M/\mathfrak{p}M$中的典范像可以生成$M/\mathfrak{p}M$。这件事可以写成$M = N + \mathfrak{p}M$，当然也就有$M = N + \mathfrak{m}M$（$\mathfrak{m}$是局部环$A$的极大理想），这就表明$M = N$（附录, 命题24, 推论），于是完成了引理8的证明。

¶17 定理3证明的完结

仍假设$\mathscr{M}$是$X = \mathbf{P}^r(\mathbb{C})$上的一个解析性凝聚层。依照引理8，可以找到一个整数n，使得$\mathscr{M}(n)$同构于层$\mathscr{H}^p$的商层，从而$\mathscr{M}$同构于$\mathscr{H}(-n)^p$的商层。若我们用$\mathscr{L}_0$来记代数性凝聚层$\mathscr{O}(-n)^p$，则有正合序列

$$0 \longrightarrow \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{L}_0^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow 0 \ ,$$

其中$\mathscr{R}$是一个解析性凝聚层。

对$\mathscr{R}$使用同样的方法，又可以得到一个代数性凝聚层$\mathscr{L}_1$和一个解析性的满同态$\mathscr{L}_1^{\mathrm{an}} \to \mathscr{R}$。从而有正合序列

$$\mathscr{L}_1^{\mathrm{an}} \xrightarrow{g} \mathscr{L}_0^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow 0 \ 。$$

根据定理2，可以找到一个同态$f : \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_0$，使得$g = f^{\mathrm{an}}$。若我们用$\mathscr{F}$来记$f$的余核，则有正合序列：

$$\mathscr{L}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{L}_0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0 \ ,$$

再利用命题10，又得到一个正合序列：

$$\mathscr{L}_1^{\mathrm{an}} \xrightarrow{g} \mathscr{L}_0^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \longrightarrow 0 \ ,$$

这就表明$\mathscr{M}$同构于$\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$，因而也完成了定理3的证明。

§4 应用

¶18 Betti数的代数属性

设σ是域$\mathbb{C}$的一个自同构；对于$\mathbf{P}^r(\mathbb{C})$中的一个齐次坐标为$t_0, \ldots, t_r$的点x，我们以x^σ来记齐次坐标是$t_0^\sigma, \ldots, t_r^\sigma$的点；因而$\sigma$定义出$\mathbf{P}^r(\mathbb{C})$上的一个置换。

若 X 是 $\mathbf{P}^r(\mathbb{C})$ 中的一个 Zariski 闭子体，则它在 σ 下的变换体 X^σ 仍然是 $\mathbf{P}^r(\mathbb{C})$ 中的一个 Zariski 闭子体；若 X 没有奇异点，则 X^σ 也是如此 (比如可以使用 Jacobi 判别法)。

命题 12. – *若 X 没有奇异点，则 X 和 X^σ 的 Betti 数相等。*

设 $b_n(X)$ 是 X 的第 n 个 Betti 数，并设 $\Omega^p(X)^{\mathrm{an}}$ 是 X 上的 p 阶全纯微分形式芽的层。令：

$$h^{p,q}(X) \;=\; \dim \mathrm{H}^q(X^{\mathrm{an}}, \Omega^p(X)^{\mathrm{an}}) \;\; 。$$

根据 Dolbeault 定理 (参照 [8])，我们有：

$$b_n(X) \;=\; \sum_{p+q=n} h^{p,q}(X) \;\; ,$$

同样有：

$$b_n(X^\sigma) \;=\; \sum_{p+q=n} h^{p,q}(X^\sigma) \;\; 。$$

然而，根据定理 1，我们有 $h^{p,q}(X) = \dim \mathrm{H}^q(X, \Omega^p(X))$，这里的 $\Omega^p(X)$ 是指 X 上的 p 阶正常微分形式芽的代数性凝聚层，且同样有 $h^{p,q}(X^\sigma) = \dim \mathrm{H}^q(X^\sigma, \Omega^p(X^\sigma))$。进而，若 ω 是 X 的某个 Zariski 开子集 U 上的一个正常微分形式，则微分形式 ω^σ 在 X^σ 的 Zariski 开子集 U^σ 上是正常的；由此可知，对于 X 的任意 Zariski 开覆盖 $\mathfrak{U}$，σ 都定义了 $C(\mathfrak{U}, \Omega^p(X))$ 到 $C(\mathfrak{U}^\sigma, \Omega^p(X^\sigma))$ 上的一个错格线性同构，从而定义了 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \Omega^p(X^\sigma))$ 到 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}^\sigma, \Omega^p(X^\sigma))$ 上的一个错格线性同构，进而也定义了 $\mathrm{H}^q(X, \Omega^p(X))$ 到 $\mathrm{H}^q(X^\sigma, \Omega^p(X^\sigma))$ 上的错格线性同构，故我们有 $h^{p,q}(X) = h^{p,q}(X^\sigma)$，这就证明了命题。

由命题 12 可以得到下面的结果，这曾是 A. Weil 的一个猜想：

推论. – *设 V 是一个平滑射影多样体，定义在某个代数数域 K 上。则由 V 通过把 K 嵌入 $\mathbb{C}$ 而定义出来的复流形 X 的 Betti 数并不依赖于嵌入的选择。*

事实上，我们知道 K 到 $\mathbb{C}$ 的任何两个嵌入都相差 $\mathbb{C}$ 的一个自同构。

注解 — 作者不知道流形 X 和 X^σ 是否总是同胚的；不过，亏格为 1 的曲线的例子已经表明，它们并非总是解析同构的。

§19 Chow 定理

这是指下面的结果 (参照 [6])：

命题 13. – *射影空间的闭解析子集都是代数的。*

这可以从定理 3 推出来。事实上，设 X 是一个射影空间，并设 Y 是 X^{an} 的一个闭解析子集。根据上面所提到的 Cartan 定理 (§3，命题 1)，层 $\mathscr{H}_Y = \mathscr{H}_X/\mathscr{A}(Y)$ 是 X^{an} 上的一个解析性凝聚层；从而可以找到 X 上的一个代数性凝聚层 $\mathscr{F}$ (定

理3)，使得$\mathscr{H}_Y = \mathscr{F}^{\mathrm{an}}$。根据命题10, b)，$\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$的支集等于$\mathscr{F}$的支集(还记得，参照[18], §81，$\mathscr{F}$的支集就是使得$\mathscr{F}_x \neq 0$的那些点$x \in X$的集合)，从而是Zariski闭的，因为$\mathscr{F}$是凝聚的。由于$\mathscr{F}^{\mathrm{an}} = \mathscr{H}_Y$，这就意味着$Y$是Zariski闭的，证明完毕。

现在我们指出Chow定理的几个简单应用：

命题14. – *若X是一个代数多样体，则X的紧解析子集X'都是代数的。*

仍使用命题6证明中的记号：设Y是一个射影多样体，U是Y的一个子集，在Y中是Zariski稠密开的，$f : U \to X$是一个正常满映射，并且它的图像T在$X \times Y$中是Zariski闭的。设$T' = T \cap (X' \times Y)$；因为$X'$和$Y$都是紧的，并且$T$是闭的，所以$T'$是紧的；从而$T'$在因子$Y$上的投影$Y'$也是如此。另一方面，$Y' = f^{-1}(X')$，这就证明了$Y'$是$U$的一个解析子集，从而也是$Y$的解析子集；此时Chow定理表明$Y'$是$Y$的一个Zariski闭子集。把命题7应用到$f : Y' \to X$上，则可以推出$X' = f(Y')$在$X$中是Zariski闭的。证明完毕。

命题15. – *从一个紧代数多样体X到另一个代数多样体Y的任何全纯映射f都是正常的。*

设T是f在$X \times Y$中的图像。则因为f是全纯的，所以T是$X \times Y$的一个紧解析子集；于是命题14表明T是代数的，再根据命题8，f是正常的。

推论. – *在一个紧解析多样体上至多有一个代数多样体的结构。*

§20 代数性纤维丛和解析性纤维丛

设G是一个代数群，X是一个代数多样体。X到G的全体正常映射芽构成一个群层，一般不是Abel的，我们记之为$\mathscr{G}$。

我们知道，若$\mathscr{A}$是一个群层，则可以定义群$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{A})$和集合$\mathrm{H}^1(X, \mathscr{A})$：参照[9]，也参看比如说[10], 第V章。特别地，$\mathrm{H}^1(X, \mathscr{G})$是有定义的；这个集合中的元素也就是底盘为$X$结构群为$G$的代数主纤维丛的同构类(在A. Weil的意义下，参照[20])。举例来说，$\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X)$中的元素就是以加法群$\mathbb{C}$为结构群的纤维丛同构类。

同样地，若$\mathscr{G}^{\mathrm{an}}$是指$X$到$G$的全纯映射芽层，则$\mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{G}^{\mathrm{an}})$中的元素也就是底盘为$X$结构群为$G$的解析纤维丛的同构类。任何代数纤维丛$E$都定义了一个解析纤维丛$E^{\mathrm{an}}$，故有一个映射

$$\varepsilon \ : \ \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{G}^{\mathrm{an}}) \ ,$$

这与§11完全类似。

命题16. – *若X是紧的，则映射ε是单的。*

设E和E'是两个代数主纤维丛，底盘为X，结构群为G。命题16意味着，若E和E'是解析同构的，则它们也是代数同构的。实际上，我们下面要证明一

个更细致的结果，即任何解析的同构 $\varphi : E \to E'$ 都是代数的同构（也就是说，正常同构）。

空间 $E \times E'$ 是一个代数主纤维丛，底盘为 $X \times X$，结构群为 $G \times G$；我们用 (E, E') 来记它在对角线映射 $X \to X \times X$ 下的的逆像：这就是 E 和 E' 的“纤维积”。取 $G \times G$ 在 G 上的作用是：

$$(g, g').h = ghg'^{-1} \quad 。$$

设 T 是主纤维丛 (E, E') 的这样一个配属纤维丛，它的纤维型是群 G，且带有上面所定义的作用。我们立即看出，T 的截面一一对应着 E 到 E' 的同构；特别地，同构 φ 对应着 T 的一个解析截面 s。把命题 15 应用到 $s : X \to T$ 上，则我们看到 s 是正常的，这就意味着 φ 是正常的，也证明了命题。

现在假设 X 是一个射影多样体。我们可以问：$\varepsilon : \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G}) \to \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{G}^{\mathrm{an}})$ 是不是一一的，换句话说（有见于命题 16），是否解析纤维丛都是代数的？这明显是不对的，除非我们在 G 上附加一些条件，比如 G 是 Abel 体（或有限群）的反例就表明了这一点；在下面这些命题中，我们将给出一些能够得到肯定答案的群 G。

命题 17. – *若 G 是加法群 $\mathbb{C}$，则映射 ε 是一一的。*

事实上，此时我们有 $\mathscr{G} = \mathscr{O}$ 和 $\mathscr{G}^{\mathrm{an}} = \mathscr{O}^{\mathrm{an}}$，因而这个命题是定理 1 的一个特殊情形。

命题 18. – *若 G 是一般线性群 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$，则映射 ε 是一一的。*

一个以 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ 为结构群的主纤维丛可以被它的具有纤维型 $\mathbb{C}^n$ 的配属向量丛所决定。从而有见于向量丛和局部自由层之间的一一对应（比如参照 [18], §41），问题归结为证明下面的事实：

若 $\mathscr{M}$ 是 X^{an} 上的一个解析性凝聚层，并且局部同构于 $\mathscr{H}^n$，则可以找到 X 上的一个代数性凝聚层 $\mathscr{F}$，局部同构于 $\mathscr{O}^n$，且使得 $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ 同构于 $\mathscr{M}$。

根据定理 3，可以找到 X 上的一个代数性凝聚层 $\mathscr{F}$，它满足第二个条件。从而对任意 $x \in X$，$\mathscr{H}_x$ 模 $\mathscr{F}_x^{\mathrm{an}} = \mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_x} \mathscr{H}_x$ 都同构于 $\mathscr{H}_x^n$；把附录中的命题 30 应用到环 $A = \mathscr{O}_x$, $A' = \mathscr{H}_x$ 和模 $E = \mathscr{F}_x$ 上，则可以推知 $\mathscr{F}_x$ 同构于 $\mathscr{O}_x^n$；又因为 $\mathscr{F}$ 是凝聚的，这就表示说 $\mathscr{F}$ 局部同构于 $\mathscr{O}^n$，也完成了证明。

注解 1. – 对于 $n = 1$，$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ 就是乘法群 $\mathbb{C}^*$；若我们假设 X 是一个正规多样体，则群 $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{G})$ 就是局部线性等价于 0 的除子类的群 (参照 [20], §3)，并且命题 18 意味着任何底盘为 X 结构群为 $\mathbb{C}^*$ 的解析纤维丛都来自于一个这样的除子。如果 X 没有奇异点，则这个结果是由 Kodaira-Spencer [12] 所得到的；在这个情形下，它也在本质上等价于 Lefschetz 关于给定同调类的除子的存在性定理。

2. 利用命题 18 我们还可以把 Kodaira 的其它一些结果扩展到任意的射影多样体上（允许有奇异点）；特别地，比如说 [11] 中的定理 7 和 8。我们不再一一强调。

现在设 G 是一个代数群，H 是 G 的一个代数子群；我们知道（比如参照 [13]），在齐性空间 G/H 上可以附加一个代数多样体的结构，它是 G 上的多样体结构的商。

群H以右平移的方式作用在G上；我们将假设这个作用在G上定义了一个代数主纤维丛的结构，底盘是G/H，结构群是H，这也相当于说，我们假设存在一个有理截面$G/H \to G$（这并非总是成立的，后面将会看到这一点）。在这个前提条件下，我们有下面的结果，这是A. Grothendieck告诉作者的，连同其证明，

命题 19. – 设X是一个紧代数多样体，P是一个解析主纤维丛，结构群是H，底盘是X。则为了使P是代数的，必须且只需由P通过结构群从H到G的扩张而导出的纤维丛$P \times_H G$是代数的。

必要性是明显的。为了证明充分性，假设$P \times_H G$是代数的。这就意味着我们有一个以G为结构群的代数主纤维丛P_0，和一个解析同构$h : P_0 \to P \times_H G$。考虑这样一个纤维丛E（切转：E_0），它是$P \times_H G$（切转：P_0）的配属丛，纤维型是G/H，并且G在其上的作用是平移。我们有：

$$E_0 \;=\; P_0 \times_G G/H \quad \text{且} \quad E \;=\; (P \times_H G) \times_G G/H \;=\; P \times_H G/H \quad 。$$

解析同构h定义了一个解析同构$f : E_0 \to E$。然而纤维丛$E = P \times_H G/H$具有一个典范截面s，因为群H使G/H中的那个对应于G的中性元的点保持不动。同构f把s转化为E_0的一个截面$s_0 = f^{-1} \circ s$；截面s_0是全纯的，从而是正常的，这是根据命题15。

另一方面，因为G可以作用在P_0上，所以H也是如此，并且P_0/H刚好就是E_0；具体来说，P_0是一个代数主纤维丛，结构群为H，底盘为E_0：这件事很容易验证，因为问题是局部性的，并可利用G是一个底盘为G/H结构群为H的代数主纤维丛这个条件。现在设$P_1 = s_0^{-1}(P_0)$是P_0在映射$s_0 : X \to E_0$下的逆像；纤维丛P_1是一个代数主纤维丛，底盘为X，结构群为H。下面我们证明P_1解析同构于P，这就可以证明我们的命题。

关系式$s_0 = f^{-1} \circ s$（连同f是一个解析同构的事实）表明，$P_1 = s_0^{-1}(P_0)$可以解析同构于$P \times_H G$（看作是以H为结构群的主纤维丛）在映射$s : X \to E$下的逆像。然而这个逆像刚好就是P，下面的交换图表就表明了这一点：

$$\begin{array}{ccc}
P & \longrightarrow & P \times_H G \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
X & \xrightarrow{\;s\;} & E \;=\; P \times_H G/H \quad 。
\end{array}$$

这就完成了证明。

结合命题18和19，我们得到：

命题 20. – 设G是群$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$的一个代数子群，且满足下面的条件：

(R) – 存在一个有理截面$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})/G \to \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$。

则对任意射影多样体X，映射：

$$\varepsilon \;:\; \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G}) \;\longrightarrow\; \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{G}^{\mathrm{an}})$$

都是一一的。

例子 — 条件 (R) 在下面这几个情况下是成立的：

a) G 是可解的，这是依据 Rosenlicht 的一个定理，[13]；

b) $G = \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$，此时有理截面是明显的；

c) $G = \mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})$，$n = 2m$；在这个情形下，齐性空间 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})/G$ 就是由非退化交错形式 $\sum\limits_{i<j} a_{ij}x_i \wedge x_j$ 所组成的空间，并且条件 (R) 缘自下面的事实：一般位的交错形式 $\sum\limits_{i<j} u_{ij}x_i \wedge x_j$ 可以通过一个系数在域 $\mathbb{C}(u_{ij})$ 中的线性变量替换约化为典范形式 $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{2i-1} \wedge x_{2i}$。

最后这两个例子引出了这样一个猜想，即是不是条件 (R) 对于所有单连通的半单群 G 都是成立的？

相反地，我们可以证明，特殊正交群 $G = \mathbf{O}_n^+(\mathbb{C})$ 不满足条件 (R)，只要 $n \geqslant 3$。作者不知道在这个情况下映射 $\varepsilon : \mathrm{H}^1(X,\mathscr{G}) \to \mathrm{H}^1(X^{\mathrm{an}},\mathscr{G}^{\mathrm{an}})$ 是不是一一的。

附　录

我们假设下面所出现的环都是交换的，并且含单位元；环上的模都是保单位元的。

§21　平坦模

定义 3. – 设 B 是一个 A 模。所谓 B 是 A 平坦的 (或简称平坦的)，是指对于 A 模的任意正合序列：

$$E \longrightarrow F \longrightarrow G$$

序列

$$E \otimes_A B \longrightarrow F \otimes_A B \longrightarrow G \otimes_A B$$

都是正合的。

根据函子 Tor 的定义，上述条件等价于说，对任意 A 模 Q，均有 $\mathrm{Tor}_1^A(B,Q) = 0$；由于 Tor 与归纳极限可交换，故可限于考虑 Q 是有限型模的情形，甚至可以 (借助 Tor 的正合序列) 限于考虑单苇模 Q 的情形；这样一来，为了使 B 是 A 平坦的，必须且只需对于 A 的任意理想 $\mathfrak{a}$，均有 $\mathrm{Tor}_1^A(B, A/\mathfrak{a}) = 0$，换句话说，典范同态 $\mathfrak{a} \otimes_A B \to B$ 是单的。

例子 — 1. 若 A 是一个主理想整环，则由上面所述可知，“B 是 A 平坦的”等价于“B 是无挠的”。

2. 若 S 是环 A 的一个乘性子集，则分式环 A_S 是 A 平坦的，这是根据 [18], §48, 引理 1。

设 A 和 B 是两个环，并设 $\theta : A \to B$ 是 A 到 B 的一个同态，这个同态赋予 B 一个 A 模结构。若 E 和 F 是两个 A 模，则 $E \otimes_A B$ 和 $F \otimes_A B$ 上都带有 B 模的结构。进而，若 $f : E \to F$ 是一个同态，则 $f \otimes 1$ 是 $E \otimes_A B$ 到 $F \otimes_A B$ 的一个 B 同态，这样我们就得到了一个典范 A 线性映射：

$$\mathrm{Hom}_A(E, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(E \otimes_A B, F \otimes_A B) \;,$$

它可以线性延拓为一个 B 线性映射：

$$\iota \;:\; \mathrm{Hom}_A(E, F) \otimes_A B \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(E \otimes_A B, F \otimes_A B) \;。$$

命题 21. – 若 A 是 Noether 环，E 是有限型 A 模，并且 B 是 A 平坦的，则上面所定义的同态 ι 是一一的。

对于一个固定的 A 模 F，我们令：

$$T(E) \;=\; \mathrm{Hom}_A(E, F) \otimes_A B \quad \text{和} \quad T'(E) \;=\; \mathrm{Hom}_B(E \otimes_A B, F \otimes_A B) \;,$$

如此一来 ι 是函子 $T(E)$ 到函子 $T'(E)$ 的一个同态。

对于 $E = A$，我们有 $T(E) = T'(E) = F \otimes_A B$，并且 ι 是一一的。当 E 是一个有限型自由模时也是如此。

然而环 A 是 Noether 的，并且 E 是有限型的，从而我们有一个正合序列：

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0 \;,$$

其中 L_0 和 L_1 都是有限型自由模。考虑交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & T(E) & \longrightarrow & T(L_0) & \longrightarrow & T(L_1) \\
 & & {\scriptstyle\iota}\big\downarrow & & {\scriptstyle\iota_0}\big\downarrow & & {\scriptstyle\iota_1}\big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & T'(E) & \longrightarrow & T'(L_0) & \longrightarrow & T'(L_1)
\end{array} \;。$$

这个图表的第一行是正合的，这是根据 B 是 A 平坦的这个事实；第二行也是正合的，这是根据函子 $\otimes$ 和 Hom 的基本性质。我们已经知道 ι_0 和 ι_1 都是一一的，这就说明 ι 是一一的，证明完毕。

§22 良配二元组

定义 4. – 设 A 是一个环，B 是一个包含 A 的环。所谓二元组 (A, B) 是良配的，是指 B/A 作为 A 模是平坦的。

我们有：

命题 22. – 为了使一个二元组 (A, B) 是良配的，必须且只需 B 是 A 平坦的，并且下列性质之一是成立的:

a)（切转：a′)）对任意 A 模（切转：对任意的有限型 A 模）E，同态 $E \to E \otimes_A B$ 都是单的。

a″) 对于 A 的任意理想 $\mathfrak{a}$，均有 $\mathfrak{a}B \cap A = \mathfrak{a}$。

若 E 是一个任意的 A 模，则由正合序列：

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0 \ ,$$

可以引出正合序列：

$$\mathrm{Tor}_1^A(A,E) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(B,E) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(B/A,E) \longrightarrow A\otimes_A E \longrightarrow B\otimes_A E \ 。$$

有见于 $A \otimes_A E = E$ 和 $\mathrm{Tor}_1^A(A,E) = 0$ 的事实，我们又得到正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(B,E) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(B/A,E) \longrightarrow E \longrightarrow E\otimes_A B \ 。$$

从而我们看到，为了使 $\mathrm{Tor}_1^A(B/A,E)$ 等于 0，必须且只需 $\mathrm{Tor}_1^A(B,E)$ 等于 0 并且同态 $E \to E \otimes_A B$ 是单的；命题可由此立得（注意到性质 a″) 相当于说同态 $A/\mathfrak{a} \to A/\mathfrak{a} \otimes_A B$ 是单的）。

命题 23. – 设 $A \subseteq B \subseteq C$ 是三个环。若二元组 (A,C) 和 (B,C) 都是良配的，则二元组 (A,B) 也是如此。

首先证明 B 是 A 平坦的，换句话说，若我们有 A 模的一个正合序列：

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \ ,$$

则序列：$0 \to E \otimes_A B \to F \otimes_A B$ 同样是正合的。

设 N 是同态 $E \otimes_A B \to F \otimes_A B$ 的核，则因为 C 是 B 平坦的，所以我们有正合序列：

$$0 \longrightarrow N\otimes_B C \longrightarrow (E\otimes_A B)\otimes_B C \longrightarrow (F\otimes_A B)\otimes_B C \ 。$$

然而，根据张量积的结合性，$(E\otimes_A B)\otimes_B C$ 可以等同于 $E\otimes_A C$，同样地，$(F\otimes_A B)\otimes_B C$ 可以等同于 $F \otimes_A C$。进而，由于 C 是 A 平坦的，故知同态 $E \otimes_A C \to F \otimes_A C$ 是单的。因而 $N \otimes_B C = 0$，并且若把命题 22 应用到二元组 (B,C) 上，则我们看到 $N = 0$，这就证明了 B 是 A 平坦的。

另一方面，若 E 是一个任意的 A 模，则合成同态：$E \to E \otimes_A B \to E \otimes_A C$ 是单的（因为二元组 (A,C) 是良配的），当然 $E \to E \otimes_A B$ 也是如此，这就证明了二元组 (A,B) 满足命题 22 中的所有条件，证明完毕。

注解 — 同理可证，若 (A,B) 和 (B,C) 都是良配的，则 (A,C) 也是如此。相反地，即使 (A,B) 和 (A,C) 都是良配的，(B,C) 也不一定如此。

§23 局部环上的模

在这一小节中，我们用 A 来记一个 *Noether* 局部环 [9]，极大理想是 $\mathfrak{m}$。

命题 24. – 若一个有限型 A 模 E 满足关系式 $E = \mathfrak{m}E$，则有 $E = 0$。

（比如参照 [15], p. 138 或 [4], 报告 I）。

假设 $E \neq 0$，并设 $e_1, \ldots, e_n$ 是 E 的一个生成元组，且具有最少个数的元素。则因为 $e_n \in \mathfrak{m}E$，所以我们有 $e_n = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$，其中 $x_i \in \mathfrak{m}$，故得

$$(1 - x_n)x_n \;=\; x_1e_1 + \cdots + x_{n-1}e_{n-1} \;;$$

由于 $1 - x_n$ 在 A 中是可逆的，这就表明 $e_1, \ldots, e_{n-1}$ 已经可以生成 E，与我们对 n 的假设矛盾。

推论. – 设 E 是一个有限型 A 模。若 E 的一个子模 F 满足关系式 $E = F + \mathfrak{m}E$，则有 $E = F$。

事实上，这个关系式意味着 $E/F = \mathfrak{m}(E/F)$。

我们给任何 A 模 E 都赋予 $\mathfrak{m}$ 进拓扑，诸子模 $\mathfrak{m}^nE$ 构成 0 的一个基本邻域组 (参照 [15], p. 153)。

命题 25. – 设 E 是一个有限型 A 模。则有:
a) 在 E 的一个子模 F 上，由 E 的 $\mathfrak{m}$ 进拓扑所诱导的拓扑与 F 的 $\mathfrak{m}$ 进拓扑是重合的。
b) E 的任何子模在 E 的 $\mathfrak{m}$ 进拓扑下都是闭的（特别地，E 是分离的）。

(参照 [15], 前引，也可以参考 [3], 报告 VIII bis)。

简要复习一下这个命题的证明。首先证明 a)，方法是这样的，或者使用准素分解的理论 (Krull, 参照 [15])，或者找到一个整数 r，使得

当 $n \geqslant r$ 时 $F \cap \mathfrak{m}^nE \;=\; \mathfrak{m}^{n-r}(F \cap \mathfrak{m}^rE)$ (Artin, Rees, 参照 [4], 报告 2)。

接下来证明 E 是分离的：把 a) 应用到 0 在 E 中的闭包 F 上，我们看到 $F = \mathfrak{m}F$，故得 $F = 0$，这是根据命题 24。再把这个结果应用到 E 的商模上，就可以推出 b)。

仍设 E 是一个有限型 A 模，$\widehat{E}$ 和 $\widehat{A}$ 分别是 E 和 A 在 $\mathfrak{m}$ 进拓扑下的完备化。则双线性映射 $A \times E \to E$ 可以连续延拓为一个映射 $\widehat{A} \times \widehat{E} \to \widehat{E}$，它使 $\widehat{E}$ 成为一个 $\widehat{A}$ 模。从而 E 到 $\widehat{E}$ 的典范含入可以线性延拓为一个同态：

$$\varepsilon \;:\; E \otimes_A \widehat{A} \;\longrightarrow\; \widehat{E} \quad。$$

命题 26. – 对于任意的有限型 A 模 E，上面所定义的同态 ε 都是一一的。

[9] 实际上，最后两个小节中的结果可以不加改变地适用于所有的 *Zariski* 环 (参照 [15], p. 157)。

设 $0 \to R \to L \to E \to 0$ 是 A 模的一个正合序列，其中 L 是一个有限型自由模。则由于 A 是 Noether 的，故知 R 是有限型的；另一方面，命题 25 表明，R 上的 $\mathfrak{m}$ 进拓扑就等于由 L 上的 $\mathfrak{m}$ 进拓扑所诱导的拓扑，并且易见 E 上的 $\mathfrak{m}$ 进拓扑就是 L 的商拓扑；由于这些拓扑都是可以度量化的，故可由此导出一个正合序列：

$$0 \longrightarrow \widehat{R} \longrightarrow \widehat{L} \longrightarrow \widehat{E} \longrightarrow 0 \ 。$$

现在考虑交换图表：

$$\begin{tikzcd}
R \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"'] & L \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & E \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & 0 \\
\widehat{R} \arrow[r] & \widehat{L} \arrow[r] & \widehat{E} \arrow[r] & 0 \ 。
\end{tikzcd}$$

这个图表的两行都是正合的，另一方面，易见 ε' 是一一的。由此可以推出 ε 是满的（换句话说，我们有 $\widehat{E} = \widehat{A}.E$，参照 [15], p. 153, 引理 1）。这个结果既然对任意有限型 A 模都是对的，就可以应用到 R 上，这就证明了 ε'' 是满的，再使用五项引理，就可以推出 ε 是一一的，证明完毕。

§24　局部环的良配条件

以下所考虑的局部环都是 *Noether* 的。

命题 27. – *设 A 是一个局部环，$\widehat{A}$ 是它的完备化。则二元组 $(A, \widehat{A})$ 是良配的。*

首先，$\widehat{A}$ 是 A 平坦的。事实上，只需证明若 $E \to F$ 是单的，则 $E \otimes_A \widehat{A} \to F \otimes_A \widehat{A}$ 也是如此，我们甚至可以假设 E 和 F 都是有限型的。在此情形下，命题 26 表明，$E \otimes_A \widehat{A}$ 可以等同于 $\widehat{E}$，同样地，$F \otimes_A \widehat{A}$ 可以等同于 $\widehat{F}$，从而上面这件事缘自下面这个显然的事实：即 $\widehat{E}$ 可以嵌入 $\widehat{F}$ 中。

同样地，由 $E \to \widehat{E}$ 是单的（因为 E 是有限型的）可知，二元组 $(A, \widehat{A})$ 满足命题 22 中的性质 a′)，从而它们是一个良配二元组。

现在设 A 和 B 是两个局部环，θ 是 A 到 B 的一个同态。假设 θ 把 A 的极大理想映到 B 的极大理想中。则 θ 是连续的，并且可以连续延拓为一个同态 $\widehat{\theta} : \widehat{A} \to \widehat{B}$。

命题 28. – *假设 $\widehat{\theta} : \widehat{A} \to \widehat{B}$ 是一一的，并且我们把 A 经由 θ 等同于 B 的子环。则二元组 (A, B) 是良配的。*

我们有 $A \subseteq B \subseteq \widehat{B} = \widehat{A}$，并且二元组 $(A, \widehat{A})$ 和 $(B, \widehat{B})$ 都是良配的，这是根据上述命题。于是命题 23 表明，(A, B) 是一个良配二元组。

命题 29. – *设 A 和 B 是两个局部环，设 $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，并设 θ 是 A 到 B 的一个同态。若 θ 满足命题 28 中的前提条件，则 θ 所定义的 $A/\mathfrak{a}$ 到 $B/\theta(\mathfrak{a})B$ 的同态也是如此（这就表明二元组 $(A/\mathfrak{a}, B/\theta(\mathfrak{a})B)$ 是良配的）。*

根据命题26，$A/\mathfrak{a}$的完备化就是$\widehat{A}/\mathfrak{a}\widehat{A}$，同样地，$B/\theta(\mathfrak{a})B$的完备化就是$\widehat{B}/\theta(\mathfrak{a})\widehat{B}$，故得结论。

命题30. – 设A和A'是两个局部环，θ是A到A'的一个同态，且满足命题28中的前提条件，并设E是一个有限型A模。于是若A'模$E' = E \otimes_A A'$同构于A'^n，则E同构于A^n。

我们把A经由θ等同于A'的一个子环。从而若以$\mathfrak{m}$和$\mathfrak{m}'$来记A和A'的极大理想，则有$\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}'$；另一方面，因为$\mathfrak{m}'$是0在$A'$中的一个邻域，并且$A$在$A'$中是稠密的，所以有$A' = \mathfrak{m}' + A$，这就证明了$A/\mathfrak{m} = A'/\mathfrak{m}'$，故得$E/\mathfrak{m}E = E'/\mathfrak{m}'E'$。而因为$A'$模$E'$是一个$n$秩自由模，所以$A'/\mathfrak{m}'$模$E'/\mathfrak{m}'E'$也是如此。由此可知，我们可以选取$E$中的$n$个元素$e_1, \ldots, e_n$，使得它们在$E/\mathfrak{m}E$中的像构成$E/\mathfrak{m}E$的一个基底，即作为$A/\mathfrak{m}$上的向量空间。诸元素$e_i$定义了一个同态$f : A^n \to E$，且它是满的，这是依据命题24的推论。下面我们证明f是单的，这也就证明了这个命题。

设N是f的核。基于二元组(A, A')是良配的这个事实(命题28)，由正合序列：

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A^n \xrightarrow{f} E \longrightarrow 0 \ ,$$

可以引出正合序列：

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow A'^n \xrightarrow{f'} E' \longrightarrow 0 \ 。$$

由于模E'是自由的，故知N'是A'^n的一个直和因子，并且我们有正合序列：

$$0 \longrightarrow N'/\mathfrak{m}'N' \longrightarrow A'^n/\mathfrak{m}'A'^n \longrightarrow E'/\mathfrak{m}'E' \longrightarrow 0 \ 。$$

然而，使用同样的构造方法，f'定义了$A'^n/\mathfrak{m}'A'^n$到$E'/\mathfrak{m}'E'$上的一个一一映射。由此可知$N'/\mathfrak{m}'N' = 0$，故得$N' = 0$ (命题24)，进而有$N = 0$，因为二元组(A, A')是良配的，证明完毕。

参考文献

[1] Cartan, H., *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes*, Bull. Soc. Math. France, **78**, 1950, p. 29-64.

[2] Cartan, H., *Séminaire E.N.S.*, 1951-1952.

[3] Cartan, H., *Séminaire E.N.S.*, 1953-1954.

[4] Cartan, H. et Chevalley, C., *Séminaire E.N.S.*, 1955-1956.

[5] Cartan, H. et Serre, J.-P., *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes*, C. R., **237**, 1953, p. 128-130.

[6] Chow, W-L., *On compact complex analytic varieties*, Amer. J. of Maths., **71**, 1949, p. 893-914.

[7] Chow, W-L., *On the projective embedding of homogeneous varieties*, Lefschetz's volume, Princeton, 1956.

[8] Dolbeault, P., *Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes*, C. R., **236**, 1953, p. 175-177.

[9] Frenkel, J., *Cohomologie à valeurs dans un faisceau non abélien*, C. R., **240**, 1955, pp. 2368-2370.

[10] Grothendieck, A., *A general theory of fibre spaces with structure sheaf*, Kansas Univ., 1955.

[11] Kodaira, K., *On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties)*, Ann. of Maths., **60**, 1954, p. 28-48.

[12] Kodaira, K. and Spencer, D. C., *Divisor class groups on algebraic varieties*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **39**, 1953, p. 972-877.

[13] Rosenlicht, M., *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. of Maths., **78**, 1956, p. 401-443.

[14] Rückert, W., *Zum Eliminationsproblem der potenzreihenidéale*, Math. Ann., **107**, 1933, pp. 259-281.

[15] Samuel, P., *Commutative Algebra* (Notes by D. Herzig, Cornell Univ., 1953.

[16] Samuel, P., *Algèbre locale*, Mém. Sci. Math., **123**, Paris, 1953.

[17] Samuel, P., *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*, Ergebn. der Math., Springer, 1955.

[18] Serre, J.-P., *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Maths., **61**, 1955, p. 197-278.

[19] Serre, J.-P., *Sur la cohomologie des variétés algébriques*, J. de Math. Pure et Appl., **35**, 1956.

[20] Weil, A., *Fibre-spaces in algebraic geometry* (Notes by A. Wallace), Chicago Univ., 1952.