Hensel 局部环

Michel Raynaud

原载：

Lecture Notes in Mathematics 169 (Springer)

Anneaux Locaux Henséliens

前　言

此书是作者 1969 年在 Orsay 使用的讲义。目的是展示 Hensel 局部环的一些初等性质。这类环在代数几何中占有重要的位置，主要是因为它们出现在概形的“平展拓扑”中。因此本书的大部分篇幅都是在考察平展代数。

我们假设读者熟知交换代数中的一些常用手段：局部化、平坦性、整型[1] 等性质。简言之，读过 N. Bourbaki《交换代数学》的第一、二、五章的话就足够了。本书采用的主要是环和理想的语言，但某些命题的陈述与证明也使用了更加几何化的概形语言。后一理论可参考 EGA 第一章。

在最后一章中，我们将把 Nagata 和 Lafon [4] 的 Hensel 二元组概念纳入平展代数的框架里，这一章不太初等。

毋庸赘言，本书中的许多概念和证明方法都源自 A. Grothendieck 和 J. Dieudonné 的 EGA 。作者也感谢 N. Bourbaki 允许我参考“他”的关于平展代数的未出版著作[2]，最后感谢 Daniel Perrin 先生和 Boulanger 小姐在编辑和打字方面的出色工作。

[0] 译注：术语系统与 EGA, SGA 中译本保持一致。日期：2015.8.27。
[1] 译注：本文把“entier”称为“整型”，以区别于“intègre (整)”。
[2] 译注：Bourbaki《交换代数学》第十章，已出版。

记 号

所有的环都是交换的。若 $\mathfrak{p}$ 是环 A 的一个素理想，则符号 $\kappa(\mathfrak{p})$ 表示整环 $A/\mathfrak{p}$ 的分式域，也等于 A 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 的剩余类域。若 A 是一个局部环，则符号 κ_A 表示 A 的剩余类域。

设 A 是环，B 是 A 代数，$\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想。则也把 $\kappa(\mathfrak{p})$ 代数 $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ 称为 B 在 $\mathfrak{p}$ 处的纤维。

目　录

第一章　Hensel 局部环的概念

§1　把有限代数分解为局部环的乘积

定义 1. — 所谓一个局部环 A 是 **Hensel** 的，是指任何有限 A 代数 B 都是完全分解的，也就是说，可以分解成一些局部环的乘积。

在本节中，A 是一个局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想，k 是剩余类域；B 是一个有限 A 代数。并设 $\overline{B} = B/\mathfrak{m}B$ 。

命题 1. — 有限 A 代数 B 是一个半局部环，它的极大理想就是 B 的那些位于 $\mathfrak{m}$ 之上的素理想。

这可由 Bourbaki《交换代数学》, V, §2, 命题 1 和命题 3 推出。

设 $\{\mathfrak{n}_i\}_{i\in I}$ 是 B 的全体极大理想 (有限个) 。

命题 2. — 典范同态 $\overline{B} \to \prod_{i\in I} \overline{B}_{\mathfrak{n}_i}$ 是一个同构 (特别的，$\overline{B}$ 是完全分解的) 。

事实上，$\overline{B}$ 是一个长度有限的 k 代数，从而是 Artin 环，故与它在诸素理想处的局部化的乘积是同构的 (Bourbaki《交换代数学》, IV, §2, 命题 9 的推论 1)。

命题 3. — 以下诸条件是等价的:

1) B 是完全分解的。

2) 典范同态 $B \to \prod_{i\in I} B_{\mathfrak{n}_i}$ 是一个同构。

3) $\overline{B}$ 的任何分解都可以提升为 B 的分解。

证明：1) ⇒ 2)。事实上，设 $B = \prod_{j\in J} B_j$ 是 B 的一个分解，诸 B_j 都是局部环。对任意 $j \in J$，令 $\mathfrak{m}_j$ 是 B_j 的极大理想。则理想 $\mathfrak{m}_j \times \prod_{i\in J,\, j\neq i} B_i$ 是 B 的一个极大理想。由此可以推出 J 是有限的，并且易见 B 的任何极大理想都是这种形状，故有 1) ⇒ 2)。另外，2) ⇒ 3) 和 3) ⇒ 1) 都很容易。

所谓环 R 的一个元素 e 是幂等的，是指 $e^2 = e$ 。以 $\mathrm{Idemp}(R)$ 来记 R 的全体幂等元的集合。

命题 4. — 由典范同态 $B \to \overline{B}$ 所导出的映射 $\mathrm{Idemp}(R) \to \mathrm{Idemp}(\overline{R})$ 是单的。进

而，它是一一映射[3]的充分必要条件是，B是完全分解的。

设e和e'是B的两个幂等元，并且模$\mathfrak{m}B$同余。现在证明$x = e - e'$等于零。由于$x^3 = (e-e')^3 = e^2 - e'^3 - 3e^2e' + 3ee'^2 = e - e' = x$，故知$x(1-x^2) = 0$。然而$x \in \mathfrak{m}B$包含在$B$的根中，从而$1-x^2$是可逆的，故得$x = 0$。

对每个$i \in I$，取$\overline{e}_i$是$\overline{B}$中的这样一个幂等元— 它在局部分支$\overline{B}_{\mathfrak{n}_i}$上等于1且在其它分支上都等于0。则$\overline{B}$的任何幂等元都是某些$\overline{e}_i$的乘积。从而命题4的最后一句是缘自下面的事实：$B_{\mathfrak{n}_i}$是$B$的直和因子的充分必要条件是，$\overline{e}_i$可以提升为$B$的一个幂等元。

命题 5. — 以下诸条件是等价的:

1) 局部环A是*Hensel*的。

2) 任何有限且自由[4]的A代数都是完全分解的。

3) 对于$A[X]$中的任何首一多项式P，商环$A[X]/P$都是完全分解的。

4) 对于$A[X]$中的任何首一多项式P，若它在$k[X]$中的像$\overline{P}$可以分解为$\overline{P} = \overline{QR}$，其中$\overline{Q}$和$\overline{R}$是$k[X]$中的两个互素的首一多项式，则$P$也可以分解为$P = QR$的形状，其中$Q$和$R$分别是$\overline{Q}$和$\overline{R}$在$A[X]$中的首一提升。

1) ⇒ 2) ⇒ 3) 是显然的。以下证明 3) ⇒ 4)。

引理 1. — 设C是一个有限A代数，假设$\overline{C} = C/\mathfrak{m}C$同构于$k[X]/\overline{Q}$，其中$\overline{Q}$是一个$n$次首一多项式。设$\overline{x}$是$X$在$\overline{C}$中的像，$x$是$\overline{x}$在$C$中的一个提升。则$x$可以生成$A$代数$C$，并且是$\overline{Q}$在$A[X]$中的某个（$n$次）首一提升$Q$的根。

根据Nakayama引理，诸元素$1, x, \ldots, x^{n-1}$可以生成A模C。从而x可以生成A代数C，并且是$A[X]$中某个n次首一多项式的根。Q在$k[X]$中的约化是$\overline{Q}$的一个倍元，从而等于$\overline{Q}$。

现在来证明 3) ⇒ 4)。由于$(\overline{Q}, \overline{R}) = 1$，故知典范同态$\overline{B} = k[X]/(\overline{P}) \to k[X]/(\overline{Q}) \times k[X]/(\overline{R})$是一个同构。又因为$B$是完全分解的，故知$\overline{B}$的上述分解可以提升为$B$的一个分解$B_1 \times B_2$，根据引理1，$x$在$B_1$中的像是$\overline{Q}$在$A[X]$中的某个首一提升$Q$（与$\overline{Q}$ 次数相同）的根；同样的，x在B_2中的像也是$\overline{R}$在$A[X]$中的某个首一提升R（与$\overline{R}$次数相同）的根。于是x是多项式QR的根，这表明QR是P的一个倍元，从而等于P。

4) ⇒ 3)。取$\overline{P}$的一个分解$\overline{P} = \prod_{i \in I} \overline{P}_i$，其中每个因子都是首一不可约多项式的方幂，并且两两互素。由性质4) 可以归纳地推出，这个分解可以提升为P的一个分解$P = \prod_{i \in I} P_i$，且每个因子都是首一的。考虑典范同态：

$$u \ : \ A[X]/(P) \longrightarrow \prod_{i \in I} A[X]/(P_i)$$

[3]译注：本文把“bijective”称为“一一的”，“injective”称为“单的”。之所以不把“bijective”叫做“双的”，是因为在汉语中“单”与“双”是对偶词，但“injective”的对偶概念是“surjective (满的)”。

[4]译注：这里的“自由”是指“作为A模是自由的”。

由于$\overline{u}$是满的，故知u也是满的 (Nakayama 引理)，现在u是相同秩的自由A模间的一个同态，从而是一一的 (考虑u在某个基底下的行列式，后者在模$\mathfrak{m}$后是可逆的，从而本身也是可逆的)；于是$A[X]/(P)$是完全分解的。

3) $\Rightarrow$ 1)。设B是一个有限A代数。现在证明B是完全分解的。为此只需证明$\overline{B}$的每个基本幂等元$\overline{e}_i$（对应于B的极大理想$\mathfrak{n}_i$）都可以提升为B的一个幂等元即可 (命题4)。设b是$\overline{e}_i$在B中的任何一个提升，P是$A[X]$中的一个以b为零点的首一多项式。这给出一个A同态$u : A[X]/(P) \to B$，它把X的像x映到b。设$\mathfrak{p}$是B的素理想$\mathfrak{n}_i$在$A[X]/(P)$中的逆像。基于$\overline{e}_i$的选择，$\mathfrak{n}_i$是B的位于$\mathfrak{p}$之上的唯一素理想。另一方面，根据3)，$A[X]/(P)$是完全分解的。令e是$A[X]/(P)$的这样一个基本幂等元，它在$\mathfrak{p}$上取值为1。则易见$u(e)$是B的一个幂等元，并且是$\overline{e}_i$的提升。

§ 2 例子

1) 域k总是 Hensel 局部环。

事实上，任何有限k代数都是完全分解的 (命题2)。

2) 只有一个素理想的环A总是 Hensel 的。

事实上，此时$A_{\mathrm{red}} = A/\mathfrak{m} = k$。设$B$是一个有限$A$代数。则$B_{\mathrm{red}}$是一个有限$k$代数，从而是完全分解的。利用下述引理就可以推出$B$是完全分解的。

引理 2. — *若$\mathfrak{I}$是环R的一个诣零理想*[5]*，则映射*

$$\mathrm{Idemp}(R) \longrightarrow \mathrm{Idemp}(R/\mathfrak{I})$$

是一一的。

这可由 Bourbaki《交换代数学》, II, § 4, 引理2的推论1推出。

注解 — 更一般的，容易证明，一个局部环A是 Hensel 的当且仅当A_{red}是 Hensel 的。

3) 若A在$\mathfrak{m}$进拓扑下是分离且完备的，则A是 Hensel 的。

事实上，只需验证任何有限且自由的A代数B都是完全分解的 (命题5之2))。由于A模B在$\mathfrak{m}$进拓扑下也是分离且完备的，从而有$B = \varprojlim B/\mathfrak{m}^n B$。另一方面，由上面的例子2)可知，对任意$n$，$B/\mathfrak{m}^n B$都是完全分解的，从而同构于乘积$\prod_{i\in I}(B/\mathfrak{m}^n B)_{\mathfrak{n}_i} = \prod_{i\in I} B_{\mathfrak{n}_i}/\mathfrak{m}^n B_{\mathfrak{n}_i}$。取投影极限可得$B = \prod_{i\in I} B_i$，其中$B_i$是指局部环$\varprojlim (B/\mathfrak{m}^n B)_{\mathfrak{n}_i}$，故知$B$是完全分解的。

习题：设$\mathfrak{I}$是A的一个理想，假设$A/\mathfrak{I}$是 Hensel 的，并且A在$\mathfrak{I}$进拓扑下是分离且完备的。则A是 Hensel 的。

[5]译注：原词是“nil-idéal”，意为“由一些幂零元所组成的理想”，但理想本身可能不是“幂零”的，为示区别，本文称之为“诣零理想”，另一种选择是“幂零元理想”。

在后面的第七、八章中，我们将给出一些非平凡的Hensel局部环的例子。现在先看一些非Hensel的局部环。比如设A是$\mathbb{Z}$在素理想(p)处的局部化，则多项式$X(X-1)+p\in A[X]$在模p后可以分解为两个互素的多项式的乘积，但这个分解不能提升到$A[X]$中。

§ 3 可以过渡到归纳极限上的性质

设(A_i,φ_{ij})是局部环的一个滤相归纳系[6]，其中的传递态射都是局部同态。令$A=\varinjlim A_i$。

命题 1. — (1) *A是局部环，并且诸态射$A_i\to A$都是局部同态。*

(2) 若诸A_i都是Hensel的，则A也是Hensel的。

证明：1°) 设$\mathfrak{m}_i$是A_i的极大理想，$\mathfrak{m}$是诸$\varphi_{ij}(\mathfrak{m}_i)$在$A$中的并集。由于这个归纳系是滤相的，故易见$\mathfrak{m}$是$A$的一个理想。设$x\in A$且$x\notin\mathfrak{m}$。对充分大的$i$，$x$是$A_i$的某个元素$x_i$的像。易见$x_i$不属于$\mathfrak{m}_i$。从而是可逆的，于是$x$也是可逆的；这表明$\mathfrak{m}$是$A$的唯一极大理想，从而$A$是局部环。

2°) 现在证明(2)。设P是$A[X]$的一个首一多项式。对充分大的i_0，P的系数都来自A_{i_0}中的元素。从而P来自$A_{i_0}[X]$中的某个首一多项式P_{i_0}。对于$i\geqslant i_0$，令P_i是P_{i_0}在$A_i[X]$中的像，并设$B_i=A_i[X]/(P_i)=B_{i_0}\otimes_{A_{i_0}}A_i$。令$B=\varinjlim B_i=A[X]/(P)$。设$\overline{P}_i$是$P_i$在$A_i/\mathfrak{m}_i[X]=k_i[X]$中的像，其中$k_i$是$A_i$的剩余类域。则有$A/\mathfrak{m}=k=\varinjlim k_i$。从而$\overline{P}$在$k[X]$中的不可约分解来自$\overline{P}_i$（$i$充分大）的分解。由于这些$A_i$都是 Hensel的，故知每个$B_i$都是完全分解的，从而$B$也是完全分解的。

命题 2. — *设A是Hensel局部环，B是整型A代数。*

(1) 映射$\mathrm{Idemp}(B)\to\mathrm{Idemp}(\overline{B})$是一一的。

(2) 对于B的任意极大理想$\mathfrak{n}$，$B_{\mathfrak{n}}$在A上都是整型的，并且是Hensel的。

证明：1°) 把B写成它的有限型A子代数(B_i)的滤相归纳极限(Bourbaki《交换代数学》, V, § 1, n° 1, 注解3)

$$\begin{aligned}\overline{B} &= \varinjlim \overline{B}_i\\ \mathrm{Idemp}(B) &= \varinjlim \mathrm{Idemp}(B_i)\\ \mathrm{Idemp}(\overline{B}) &= \varinjlim \mathrm{Idemp}(\overline{B}_i)\end{aligned}$$

（A是Hensel的）$\Rightarrow$ $\mathrm{Idemp}(B_i)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Idemp}(\overline{B}_i)$（§ 1命题4），取归纳极限即得$\mathrm{Idemp}(B)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Idemp}(\overline{B})$。

2°) 设$\mathfrak{n}_i$是$\mathfrak{n}$在B_i中的逆像(关于典范态射$B_i\to B$)。则有

$$B_{\mathfrak{n}} = \varinjlim (B_i)_{\mathfrak{n}_i}$$

[6]译注：指标集I上带有序关系，并且是滤相的，即对任意$i,j\in I$，均有$k\in I$满足$i\leqslant k,\ j\leqslant k$。

由于 $(B_i)_{\mathfrak{n}_i}$（作为 B_i 的直和因子）在 A 上是有限的，从而取极限可知 $B_{\mathfrak{n}}$ 在 A 上是整型的。

根据命题 1，为了证明 $B_{\mathfrak{n}}$ 是 Hensel 的，只需证明 $(B_i)_{\mathfrak{n}_i}$ 对任意 i 都是 Hensel 的即可。设 C 是一个有限 $(B_i)_{\mathfrak{n}_i}$ 代数。由于 $(B_i)_{\mathfrak{n}_i}$ 在 A 上是有限的，故知 C 在 A 上也是有限的，从而是完全分解的。证毕。

推论 — A 的非零商环都是 Hensel 的。

习题 — $\big(A$ 是 Hensel 的$\big) \iff \left(\begin{array}{c}\text{对任意有限 } A \text{ 代数 } B \text{ 和 } B \text{ 的任意极大理想 } \mathfrak{n}, \\ B_{\mathfrak{n}} \text{ 在 } A \text{ 上都是整型的}\end{array}\right)$

§4 有限代数的幂等元

设 A 是局部环，B 是有限 A 代数。若 A 不是 Hensel 的，则 B 未必是完全分解的，换句话说（命题 4），$\overline{B}$ 的某个幂等元可能无法提升为 B 的一个幂等元。现在就来考察一下提升的“障碍”是什么。

暂时放弃 A 是局部环的条件，设 B 是有限且自由的 A 代数，基底为 $(e_i)_{i=1,\dots,r}$。

取 B 的一个幂等元素 $b = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i e_i$，利用基底 e_i 的乘法表，可以把 $b^2 = b$ 改写成一些关系式

$$P_j(X_1, \dots, X_r) \;=\; 0\,, \qquad j = 1, \dots, r$$

诸 P_j 都是 $A[X_1, \dots, X_r]$ 中的次数 $\leqslant 2$ 的多项式。

设 E 是 $A[X_1, \dots, X_r]$ 除以理想 $\mathfrak{I} = (P_1, \dots, P_r)$ 后得到的有限呈示 A 代数，并以 x_i 来记 X_i 在 E 中的像。

一般的，设 C 是一个 A 代数，则 $\{e_i \otimes 1\}_{i=1,\dots,r}$ 是 $B \otimes_A C$ 的一个基底，前面的计算表明，元素 $\sum e_i \otimes c_i$ 是 $B \otimes_A C$ 的幂等元的充分必要条件是，对于 $j = 1, \dots, r$，均有 $P_j(c_1, \dots, c_r) = 0$。换句话说，映射

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{A\text{代数}}(E, C) & \longrightarrow & B \otimes_A C \\ u & \longmapsto & \sum e_i \otimes u(x_i) \end{array} \tag{1}$$

建立了左边的同态集合到 $B \otimes_A C$ 的幂等元集合上的一一对应。特别的，若取 $C = E$ 并取 u 是 E 的恒同，则 $\sum e_i \otimes x_i = e$ 是 $B \otimes_A E$ 的一个幂等元，并且映射 (1) 把态射 $u \in \mathrm{Hom}_{A\text{代数}}(E, C)$ 对应到幂等元 $(1_B \otimes_A u)(e) \in B \otimes_A C$。

这个结果也可以用可表识函子的语言来陈述。设 $\mathcal{A}$ 是 A 代数的范畴。以 F 来记 $\mathcal{A}$ 到 $(\boldsymbol{Ens})$（集合范畴）的下述协变函子：

> 把 $\mathcal{A}$ 的一个对象 C 对应到集合 $F(C) = \{B \otimes_A C \text{ 的幂等元}\}$。把 A 代数间的一个 A 同态 $f : C \to C'$ 对应到映射 $F(f) = 1_B \otimes f$。

于是上面的计算表明，函子F可以表识为二元组(E,e)。

重新假设A是局部环，则代数E就体现了提升$\overline{B}$的幂等元时所遇到的障碍。事实上，设$\overline{e}'$是$\overline{B}$的一个幂等元。由于(E,e)表识了函子F，故知元素$\overline{e}'\in F(k)$对应于一个A同态$\overline{u}:E\to k$。为了把$\overline{e}'$提升为$F(A)$的一个元素e'，必须且只需找到一个A同态$u:B\to A$来提升$\overline{u}$，也就是说，让图表：

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\overline{u}"'] & A \arrow[d] \\ & k \end{tikzcd}$$

交换。

设$\mathfrak{q}=\mathrm{Ker}\ \overline{u}$。由于$\overline{u}$是$A$代数的态射，并且$k$是$A$的剩余类域，故知$\mathfrak{q}$是$E$的一个位于$\mathfrak{m}$之上的极大理想，并且$k\xrightarrow{\sim}E/\mathfrak{q}$。由局部化的普适性质可知，$\overline{u}$可以唯一地分解为：

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] \arrow[dr, "\overline{u}"] & \\ E_{\mathfrak{q}} \arrow[r, "\overline{v}"'] & k \end{tikzcd}$$

基于同样的理由，找到一个态射$u:E\to A$等价于一个态射$v:E_{\mathfrak{q}}\to A$使得下面的图表交换

$$\begin{tikzcd} E_{\mathfrak{q}} \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "\overline{v}"'] & A \arrow[d] \\ & k \end{tikzcd}$$

由于态射v不一定存在，我们尝试把问题修改为寻找一个局部同态$A\to A'$，具有平凡的剩余扩张，并使得（令$B'=B\otimes_A A',\ \overline{B'}=B'/\mathfrak{m}'B'$）$\overline{e}'$在$\overline{B'}$中的像可以提升为$B'$中的一个幂等元。这相当于寻找一个$A$同态$v':E_{\mathfrak{q}}\to A'$使得下面的图表交换

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "v'"] \arrow[dr, "\overline{u}"'] & A' \arrow[d] \\ & k \end{tikzcd}$$

有一个“普适”的方法来解决这个问题，即把$A\to A'$取成是局部同态$A\to E_{\mathfrak{q}}$，即结构同态$A\to E$和局部化同态$E\to E_{\mathfrak{q}}$的合成。直观上来说，“A和$E_{\mathfrak{q}}$之间的差距”可以用来衡量幂等元$\overline{e}'$提升为B的幂等元时的障碍。

现在仔细看一下代数E。已经知道它是一个有限呈示的A代数。另外，由于(E,e)表识了函子F，故可由§2的引理2推出，A代数E具有下面这个重要的性质：即对任何A代数C和C的任何平方为零的理想$\mathfrak{J}$，E到$C/\mathfrak{J}$的任何A同态都可以唯一地提升为E到C的同态。

在后面的章节里，我们将系统地研究具有上面两个性质的代数，并把它们称为平展代数。抛开 Hensel 环不谈，这些代数在代数几何中也非常重要。出于技术原因，我们也同时考察一个比较弱的概念 — 孤直代数。

定义 2. — 所谓一个 A 代数 B 是**平展**的，是指

(1) B 是有限呈示 A 代数。

(2) 对任何 A 代数 C 和 C 的任何平方为零的理想 $\mathfrak{J}$，典范映射

$$\mathrm{Hom}_{A\text{代数}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{代数}}(B, C/\mathfrak{J})$$

都是**一一**的。

定义 3. — 所谓一个 A 代数 B 在 A 上是**形式孤直**的，是指对任何 A 代数 C 和 C 的任何平方为零的理想 $\mathfrak{J}$，典范映射

$$\mathrm{Hom}_{A\text{代数}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{代数}}(B, C/\mathfrak{J})$$

都是**单**的。

定义 3. — 所谓一个 A 代数 B 是**孤直**的[7]，是指 B 在 A 上是有限型且形式孤直的。

（注意：这里给出的孤直代数的定义与 EGA, IV, 17 中的不同，并不要求 B 在 A 上是有限呈示的）。

[7]译注：原词是“net”，根据上述定义，具有这种性质的代数在同态的幂零提升方面缺少灵活性，故拟以“孤直”称之。另外，在 EGA 第四章中，“net”和“nonramifié (非分歧)”是同义词，显示此概念与数论中的“非分歧扩张”有联系，可提供另一种理解途径。

第二章　孤直性和平展性，举例

命题 1. — 设 A 是环，$f : A \to B$ 是 A 代数，$g : B \to C$ 是 B 代数。于是若 B 在 A 上是形式孤直 (相应的，孤直，平展) 的，并且 C 在 B 上是形式孤直 (相应的，孤直，平展) 的，则 C 在 A 上也是形式孤直 (相应的，孤直，平展) 的。

证明：有限性条件是显然的，只需证明“形式”性质。

1) **孤直性**。设 D 是一个 A 代数，$\mathfrak{J}$ 是 D 的一个平方为零的理想，$\overline{D} = D/\mathfrak{J}$，并设 $\overline{u} : C \to \overline{D}$ 是 A 代数的一个同态。

若 u 和 v 是 $\overline{u}$ 的两个提升，并且令 $\overline{u}' = \overline{u}g$，则 ug 和 vg 都是 $\overline{u}'$ 的提升，从而由于 B 在 A 上是孤直的，故有 $ug = vg$。分别用 g, ug (或vg), $\overline{u}g$ 来定义 C, D, $\overline{D}$ 上的 B 代数结构。则 $u, v, \overline{u}$ 都是 B 代数的同态，且由于 C 在 B 上是孤直的，故知 $u = v$，这就证明了 C 在 A 上是孤直的。

2) **平展性**。此时需要找到 $\overline{u}$ 的一个提升 u。由于 B 在 A 上是平展的，故知 $\overline{u}'$ 可以提升为一个 $u' : B \to D$。分别用 u', $\overline{u}'$, g 来定义 $D, \overline{D}, C$ 的 B 代数结构。则 $\overline{u}$ 是一个 B 代数的同态；由于 C 在 B 上是平展的，故可把 $\overline{u}$ 提升为一个 $u : C \to D$，从而 C 在 A 上是平展的。

命题 2. — 设 A 是环，A' 和 B 是两个 A 代数。于是若 B 在 A 上是形式孤直 (相应的，孤直，平展) 的，则 $B' = B \otimes_A A'$ 在 A' 上也是形式孤直 (相应的，孤直，平展) 的。

证明：有限性条件是平凡的，“形式”性质则是缘自下面的同构

$$\mathrm{Hom}_{A'\text{代数}}(B \otimes_A A', C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{代数}}(B, C_*)$$

其中 C 是 A' 代数，而 C_* 则是 C 通过系数限制 (由 A' 到 A) 而得到的 A 代数。

命题 3. — 设 A 是环，B 和 C 是两个 A 代数。于是若 B 和 C 在 A 上都是形式孤直 (相应的，孤直，平展) 的，则 $B \otimes_A C$ 在 A 上也是形式孤直 (相应的，孤直，平展) 的。

证明留给读者。

命题 4. — 设 A 是环，B 是 A 代数，A' 是**忠实平坦** A 代数，$B' = B \otimes_A A'$。于是若 B' 在 A' 上是形式孤直 (相应的，孤直，平展) 的，则 B 在 A 上也是形式孤直 (相应的，孤直，平展) 的。

证明：a) **形式孤直性**。

设 C 是一个 A 代数，$\mathfrak{J}$ 是 C 的一个平方为零的理想，$\overline{C} = C/\mathfrak{J}, C' = C \otimes_A A', \overline{C}' = \overline{C} \otimes_A A' = C'/\mathfrak{J}'$。设 $\overline{u}$ 是 B 到 $\overline{C}$ 的一个 A 代数的同态，u 和 v 是 $\overline{u}$ 的两个提升。通过基变换可以得到 $\overline{u}' \in \mathrm{Hom}_{A'\text{代数}}(B', \overline{C}')$ 以及 $\overline{u}'$ 的两个提升 u' 和 v'。然而 B' 在 A' 上是形式孤直的，故知 $u' = v'$。由此可以推出 $u = v$，因为 A' 在 A 上是忠实平坦的。

b) **孤直性**。

这涉及到“有限型”的下降。假设 B' 在 A' 上是有限型的，则需要证明 B 在 A 上也是有限型的。首先证明下面的引理：

引理 1. — *设 A 是环，A' 是忠实平坦 A 代数，B 是任何 A 代数，$B' = B \otimes_A A'$。于是若 B' 在 A' 上是有限型（相应的，有限呈示）的，则 B 在 A 上也是有限型（相应的，有限呈示）的。*

事实上，B 是它的有限型 A 子代数 $B_i, i \in I$ 的滤相归纳极限，从而 $B' = \varinjlim B'_i$，其中 $B'_i = B_i \otimes_A A'$。由于 $B_i \to B$ 是单的，并且 A' 在 A 上是平坦的，故知 $B'_i \to B'$ 是单的。于是若 B' 在 A' 上是有限型的，则对任意 $i \geqslant i_0$，均有 $B'_i = B'$。利用忠实平坦的条件可以推出当 $i \geqslant i_0$ 时必有 $B = B_i$，从而 B 在 A 上是有限型的。

现在假设 B' 在 A' 上是有限呈示的。则由以上结果知，B 在 A 上是有限型的，从而是某个多项式代数 $A[X_1, \ldots, X_n]$ 除以某个理想 $\mathfrak{J}$ 后的商。利用平坦性条件可以推出，B' 是 $A'[X_1, \ldots, X_n]$ 除以 $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}A' = \mathfrak{J} \otimes_A A'$ 后的商。由于 B' 是有限呈示的，故知 $\mathfrak{J}'$ 是一个有限型理想。把 $\mathfrak{J}$ 写成它的有限型子理想的滤相归纳极限；则可以同样推出 $\mathfrak{J}$ 是一个有限型理想，从而 B 是一个有限呈示的 A 代数。

c) **平展性**。

由前面的引理以及情形 b) 的结果知，B 是有限呈示的 A 代数，并且在 A 上是孤直的。现在设 C 是一个 A 代数，$\mathfrak{J}$ 是 C 的一个平方为零的理想。需要证明任何 A 同态 $\overline{u} : B \to \overline{C} = C/\mathfrak{J}$ 都可以提升为一个 A 同态 $u : B \to C$。通过由 A 到 A' 的基变换，可得一个同态 $\overline{u}' : B' \to \overline{C}'$，且它可以提升为一个同态 $u' : B' \to C'$，因为 B' 在 A' 上是平展的。只消证明 u' 是“可以下降”的即可，根据忠实平坦下降的定理，只需验证 u' 在两个基变换 $A' \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} A'' = A' \otimes_A A'$ 下的像 u''_1 和 u''_2 是重合的。然而 u''_1 和 u''_2 作为 $B'' = B \otimes_A A''$ 到 $C'' = C \otimes_A A''$ 的两个同态，都是 B'' 到 $\overline{C}'' = \overline{C} \otimes_A A''$ 的同态 $\overline{u}''$ 的提升。从而由 B'' 在 A'' 上的孤直性（命题 2）就可以推出结论。

命题 5. — *设 A 是环，B 是 A 代数，S 是 B 的乘性子集。*

1) 若 B 在 A 上是形式孤直的，则 B_S 在 A 上也是形式孤直的。

2) 进而若 $S = (f)$ 是由一个元素生成的，并且 B 在 A 上是孤直（相应的，平展）的，则 B_S 在 A 上也是孤直（相应的，平展）的。

证明：1) 设 C 是一个 A 代数，$\overline{C} = C/\mathfrak{J}$，同时 $\overline{u} : B_S \to \overline{C}$ 是一个 A 代数的同

态。以 i 来记典范同态 $i: B \to B_S$。于是若 $\overline{u}' = \overline{u}i$，则 ui 和 vi 都是 $\overline{u}'$ 的提升，从而若 B 是形式孤直的，则必有 $ui = vi$。然而 i 是一个满同态，故知 $u = v$，这表明 B_S 是形式孤直的。

2) 若 B 在 A 上是有限型 (相应的，有限呈示) 的，则 B_f 也是如此，从而孤直性已经得到证明。至于平展性，则还需要 (在上述记号下) 证明若 $\overline{u}: B_f \to \overline{C}$ 是一个 A 同态，则 $\overline{u}$ 可以提升为一个 A 同态 $u: B_f \to C$。现在由于 B 在 A 上是平展的，故知 $\overline{u}i$ 可以提升为一个 A 同态 $v: B \to C$。为了证明 v 可以穿过 B_f，只需证明 $v(f)$ 在 C 中可逆即可，这可由下述引理推出。

引理 2. — 设 C 是环，$\mathfrak{I}$ 是 C 的一个诣零理想，$\overline{C} = C/\mathfrak{I}$。对于 $a \in C$，令 $\overline{a}$ 是它在 $\overline{C}$ 中的像。则 a 是可逆的当且仅当 $\overline{a}$ 是可逆的。

证明：若 a 是可逆的，则易见 $\overline{a}$ 也是。反之，若 $\overline{a}$ 是可逆的，则可以找到 $b \in C$ 使得 $ab = 1 + j$，其中 $j \in \mathfrak{I}$，从而是幂零的。这样一来 $1 + j$ 就是可逆的 (逆元素为 $1 - j + \cdots + (-1)^{p-1}j^{p-1}$，这里假设 $j^p = 0$)，从而 u 也是可逆的。

命题 6. — 设 A 是环，B 是 A 代数，假设对任意 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$，均可找到 $f \notin \mathfrak{q}$，使得 B_f 在 A 上是孤直 (相应的，平展) 的。则 B 在 A 上是孤直 (相应的，平展) 的。

注解 — 这表明“$A \to B$ 是孤直 (相应的，平展) 的”是 $\operatorname{Spec}(B)$ 上的一个局部性质。

证明：首先由 (EGA, I, 6.3.3 和 EGA, IV, 1.4.6) 知，“A 代数 B 是有限型 (相应的，有限呈示) 的”是 $\operatorname{Spec}(B)$ 上的一个局部性质。下面考察态射提升性质。使用概形的语言。令 $\S = \operatorname{Spec}(A)$, $X = \operatorname{Spec}(B)$, $T = \operatorname{Spec}(C)$, $\overline{T} = \operatorname{Spec}(\overline{C})$。假设给了 X 的一个仿射开覆盖 $(X_i = \operatorname{Spec}(B_{f_i}))_{i \in I}$，并假设每个 B_{f_i} 在 A 上都是孤直 (相应的，平展) 的。设 $u, v: T \to X$ 是两个 S 态射，并且都是 S 态射 $\overline{u}: \overline{T} \to X$ 的提升。令 $\overline{T}_i = (\overline{u})^{-1}(X_i)$，这些都是 $\overline{T}$ 的仿射开集。由于 T 和 $\overline{T}$ 具有相同的底空间，故有 T 的一个开子概形 T_i，它和 $\overline{T}_i$ 具有相同的底空间 (T_i 是唯一的)；诸概形 T_i 构成 T 的一个仿射开覆盖。由于 X_i 在 S 上是孤直的，故有 $u|_{T_i} = v|_{T_i}$，从而 $u = v$。

现在假设诸 X_i 在 S 上都是平展的，则需证明 $\overline{u}$ 可以提升为一个 S 态射 $u: T \to X$。对每个 i，$\overline{u}_i = \overline{u}|_{\overline{T}_i}$ 都可以唯一地提升为一个 S 态射 $u_i: T_i \to X_i$。令 $T_{ij} = T_i \cap T_j$，它也是 T 的一个仿射开子概形。此时 $u_1|_{T_{ij}}$ 和 $u_j|_{T_{ij}}$ 都是 $\overline{u}|_{\overline{T}_i \cap \overline{T}_j}$ 的提升，从而必然是重合的 (因为 X 在 S 上是孤直的)。从而把诸 u_i 黏合起来就定义出一个 S 态射 $u: T \to X$，它是 $\overline{u}$ 的提升。

命题 7. — 设 $A \xrightarrow{\varphi} B$ 是环的满同态，则 B 在 A 上是形式孤直的。

证明：若有 $\overline{u}$ 的两个提升 u 和 v，它们都是 B 到 C 的 A 代数同态，从而 $u\varphi = v\varphi$，此时必有 $u = v$，因为 φ 是满同态。

例子 — 若 S 是一个乘性子集，则 $A \to A_S$ 是形式孤直的 (参考命题 5)。若 $\mathfrak{I}$ 是 A 的一个理想，则 $A \to A/\mathfrak{I}$ 是形式孤直的。

推论 — 对于 A 的任意理想 $\mathfrak{J}$，同态 $A \to A/\mathfrak{J}$ 都是孤直的。

命题 8. —设 A 是环，f 是一个 A 系数多项式，f' 是它的导多项式，$B = A[X]/(f)$，g 是一个 A 系数多项式。若 f 的导多项式 f' 在 B_g 中是可逆的，则 B_g 是一个平展 A 代数。

注解：1) 特别的，在命题 8 中可以取 g 是 f' 在 B 中的像。从而 $B_{f'}$ 在 A 上总是平展的。

2) 仍使用命题 8 的记号。假设 f 是首一的，并设 f' 在 B_g 中的像是可逆的。我们称这样的 B_g 是一个标准平展 A 代数。后面 (第五章) 将证明，平展 A 代数在局部上都同构于标准平展 A 代数。

3) B_g 的商环在 A 上都是孤直的 (命题 7)，后面还将证明，孤直代数在局部上都是这种形状。

证明：设 C 是一个 A 代数，$\overline{C} = C/\mathfrak{J}$，且 $\overline{u}$ 是一个同态 $B_g \to \overline{C}$。首先证明 $\overline{u}$ 可以唯一地提升为 $u : B_g \to C$。设 x 是 X 在 B 中的像，从而 $B = A[x]$。以 $p : C \to \overline{C}$ 来记典范同态。则有图表

$$\begin{array}{ccccc} A[x] = B & \xrightarrow{i} & B_g & & C \\ & & & \overset{\overline{u}}{\searrow} & \downarrow p \\ & & & & \overline{C} \end{array}$$

设 $\overline{c} = \overline{u}i(x)$。为了提升 $\overline{u}$，只需找到一个元素 $\gamma \in C$，使得 $p(\gamma) = \overline{c}$ 且 $f(\gamma) = 0$ 即可。设 c 是 $\overline{c}$ 的任何一个提升。则由于 $f(x) = 0$，故知 $f(\overline{c}) = 0$，从而 $f(c) \in \mathfrak{J}$。对于 $j \in \mathfrak{J}$，令

$$f(c+j) \;=\; f(c) + jf'(c) + P(j)\,,$$

其中 P 是一个各项次数都 $\geqslant 2$ 的多项式。从而 $P(j) = 0$，因为 $\mathfrak{J}^2 = 0$。另外，$f'(\overline{c}) = \overline{u}if'(x)$ 在 $\overline{C}$ 中是可逆的，因为 $i(f'(x))$ 在 B_g 中是可逆的。根据引理 2 (参考命题 5)，$f'(c)$ 在 C 中是可逆的，从而在 C 中可以找到唯一的 j，使得 $f(c+j) = 0$。事实上，$j = -\frac{f(c)}{f'(c)}$，并且 $j \in \mathfrak{J}$，因为 $f(c) \in \mathfrak{J}$。

令 $\gamma = c + j$。再定义 $v : B \to C$ 为 $v(x) = \gamma$，则有 $pv = \overline{u}i$。从而 $pv(g(x)) = \overline{u}ig(x)$ 在 $\overline{C}$ 中是可逆的，仍根据引理 2，$v(g(x))$ 在 C 中是可逆的，从而 v 可以穿过 B_g

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v} & C \\ & {\scriptstyle i}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle u} & \\ & B_g & \end{array}$$

并且有 $pv = pui = \overline{u}i$。由于 i 是满同态，故知 $\overline{u} = pu$，从而 u 正是 $\overline{u}$ 的一个提升。u 的唯一性是缘自 γ 的唯一性。

第三章　孤直代数

§1　导射

定义 1. — 设 A 是环，B 是 A 代数，M 是 B 模，所谓 B 到 M 的一个 A 导射，是指一个 A 线性映射:

$$D\ :\ B\ \longrightarrow\ M$$

并且满足:

$$(\forall\, b\in B)\ \ (\forall\, b'\in B)\,,\quad D(bb')\ =\ bD(b')+b'D(b)$$

在 B 到 M 的全体 A 导射的集合上有一个典范的 B 模结构。

命题 1. — 设 A 是环，B 是 A 代数，C 是另一个 A 代数，$\mathfrak{J}$ 是 C 的一个平方为零的理想，$\overline{C}=C/\mathfrak{J}$，并设 $\overline{u}:B\to\overline{C}$ 是一个 A 代数的同态。此时 C 模 $\mathfrak{J}$ 实际上是一个 $\overline{C}$ 模，因为 $\mathfrak{J}$ 是平方为零的；从而 $\mathfrak{J}$ 在 $\overline{u}$ 下也成为 B 模；以下把带有这个 B 模结构的 $\mathfrak{J}$ 记作 $\mathfrak{J}_{[\overline{u}]}$。

于是若 $u:B\to\overline{C}$ 是 $\overline{u}$ 的一个提升，D 是 B 到 $\mathfrak{J}_{[\overline{u}]}$ 的一个 A 导射，则 $u+D$ 也是 B 到 C 的一个 A 代数的同态，并且映射

$$\rho\ :\ \mathrm{Dér}_A(B,\mathfrak{J}_{[\overline{u}]})\ \longrightarrow\ \mathrm{Hom}_{A\text{代数}}(B,C)\,,\qquad D\ \longmapsto\ u+D$$

是由 $\mathrm{Dér}_A(B,\mathfrak{J}_{[\overline{u}]})$ 到 $\overline{u}$ 的提升集合上的一一映射。

证明：首先写一下 $\mathfrak{J}$ 上的 B 模结构。对于 $b\in B$ 和 $j\in\mathfrak{J}$，

$$b.j\ =\ \overline{u}(b)j\ =\ u(b)j\quad。$$

现在设 $v:B\to C$ 是一个映射 (未必是同态)，并给出 $\overline{u}$ 的一个提升，令 $D=v-u$。则由于 u 和 v 都是 $\overline{u}$ 的提升，故易见 D 的值落在 $\mathfrak{J}$ 中。现在证明 v 是一个 A 代数同态的充分必要条件是，D 是一个 A 导射。事实上

$$v(bb')\ =\ u(bb')+D(bb')\ =\ u(b)u(b')+D(bb')$$

并且

$$v(b)v(b')\ =\ [u(b)+D(b)]\,[u(b')+D(b')]\ =\ u(b)u(b')+u(b)D(b')+u(b')D(b)+D(b)D(b')\quad。$$

然而 $D(b)D(b')=0$（因为 $\mathfrak{J}$ 是平方为零的），从而由上述结果知

$$v(b)v(b')\ =\ u(b)u(b')+b.D(b')+b'.D(b)\quad。$$

这就推出了结论。

§2　导射和微分

仍使用上面的记号：B和C是两个A代数，$\mathfrak{I}$是C的一个平方为零的理想，并且$\overline{u}: B \to \overline{C} = C/\mathfrak{I}$是一个$A$代数的同态。

在本节中，我们取定$\overline{u}$的一个提升u

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\overline{u}"'] & C \arrow[d, "p"] \\ & \overline{C} \end{tikzcd} \quad , \qquad pu = \overline{u} \quad 。$$

考虑代数$B \otimes_A B$连同下面一些典范A同态

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "i_1"] & & \\ & B \otimes_A B \arrow[r, "m"] & B \\ B \arrow[ur, "i_2"'] & & \end{tikzcd}$$

它们的定义是

$$i_1(b) = b \otimes 1 \,, \qquad i_2(b) = 1 \otimes b \,, \qquad m(b \otimes b') = bb'$$

则有$ui_1 = ui_2 = \mathrm{id}_B$。

若给了$\overline{u}$的另一个提升v

$$v \;:\; B \longrightarrow C \,,$$

则可以由此导出一个A代数的同态

$$w \;:\; B \otimes_A B \longrightarrow C$$

它的定义是$w(b \otimes b') = u(b)v(b')$，并且满足

$$wi_1 = u \,, \qquad wi_2 = v \quad 。$$

设$\mathfrak{I}$是m的核，它是$B \otimes_A B$的理想。于是图表

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "m"'] & C \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\overline{u}"'] & \overline{C} \end{tikzcd}$$

是交换的，因为u和v都是$\overline{u}$的提升。

从而有 $w(\mathfrak{I}) \subseteq \mathfrak{I}$，并且 $w(\mathfrak{I}^2) \subseteq \mathfrak{I}^2 = 0$，于是 w 可以穿过 $B \otimes_A B/\mathfrak{I}^2$

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "q"] & C \\ B \otimes_A B/\mathfrak{I}^2 \arrow[ur, "w_1"'] & \end{tikzcd}$$

设 α 是 w_1 在 $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ 上的限制。由于 $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ 是一个可被 $\mathfrak{I}$ 零化的 $B \otimes_A B$ 模，并且 $B \otimes_A B/\mathfrak{I} \cong B$，故知 $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ 上具有典范的 B 模结构。现在同态 w 和 q 都是代数间的同态，从而都是 $B \otimes_A B$ 线性的，易见 α 是 B 线性的（$\mathfrak{I}$ 上的 B 模结构是由 $\overline{u}$ 所导出的）。从而

$$\alpha \ \in \ \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2, \mathfrak{I}_{[\overline{u}]}) \ 。$$

命题 2. — 在上述记号下，给定 $\overline{u}$ 的一个提升 u，则把 $\overline{u}$ 的提升 v 映到 α 的映射（定义如上）是 $\overline{u}$ 的提升集合到 $\mathrm{Hom}_B(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2, \mathfrak{I}_{[\overline{u}]})$ 上的一一映射。

证明：只要构造出一个逆映射即可。

首先注意到 m 的截面 i_1 给出一个同构

$$\begin{aligned} B \otimes_A B \quad &\xrightarrow{\sim} \quad B \oplus \mathfrak{I} \\ x \otimes y \quad &\longmapsto \quad (xy, x \otimes y - xy \otimes 1)\,, \end{aligned}$$

因为这个分解与 i_1 所定义的 B 模结构是相容的。取商（除以 $\mathfrak{I}^2$）后得到同构

$$B \otimes_A B/\mathfrak{I}^2 \ \simeq \ B \oplus \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \ 。$$

$B \otimes_A B/\mathfrak{I}^2$ 上的环结构通过这个同构给出 $B \oplus \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ 上的一个环结构。它的乘法可由下面的公式给出

$$(b, i)\,(b', i') \ = \ (bb', ib' + i'b)\,,$$

从而 $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ 是一个平方为零的理想。

现在设 $\alpha : \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \mathfrak{I}$ 是一个 B 线性映射。

定义 $w_1 : B \otimes_A B/\mathfrak{I}^2 \to C$ 是映射 $w_1(b, i) = u(b) + \alpha(i)$。则 w_1 是 A 线性的；下面证明 w_1 是一个 A 代数的同态。事实上

$$\begin{aligned} w_1[(b,i)(b',i')] \ &= \ w_1(bb', bi' + b'i) \ = \ u(bb') + \alpha(bi' + b'i) \\ &= \ u(b)u(b') + b\alpha(i') + b'\alpha(i) \\ &= \ u(b)u(b') + u(b)\alpha(i') + u(b')\alpha(i)\,, \end{aligned}$$

（根据 $\mathfrak{I}$ 上的 B 模结构的定义）。另外

$$w_1(b,i)w_1(b',i') \ = \ [u(b)+\alpha(i)]\,[u(b')+\alpha(i')] \ = \ u(b)u(b')+u(b)\alpha(i')+u(b')\alpha(i)+\alpha(i)\alpha(i') \ 。$$

然而 $\alpha(i)\alpha(i') \in \mathfrak{I}^2 = (0)$，从而 w_1 是一个代数同态。

现在定义
$$w \;=\; w_1 q \;:\;\; B\otimes_A B \;\longrightarrow\; C \;\;。$$
再定义
$$v \;=\; w i_2 \;:\;\; B\to C \;\;。$$
则v是一个代数同态；接下来证明v是$\overline{u}$的提升。设$b\in B$，则$i_2(b)=1\otimes b$在同构$B\otimes_A B\simeq B\oplus\mathfrak{I}$下对应于$(b,\,1\otimes b-b\otimes 1)$。若以$\overline{1\otimes b-b\otimes 1}$来记$1\otimes b-b\otimes 1$在$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$中的像，则有
$$v(b) \;=\; u(b)+\alpha(\overline{1\otimes b-b\otimes 1})\;,$$
且由于α的值落在$\mathfrak{I}$中，故知v是$\overline{u}$的提升，这就证明了命题2。

现在若令$D(b)=\alpha(\overline{1\otimes b-b\otimes 1})$，则有$v(b)=u(b)+D(b)$，再根据命题1，$D$是$B$到$\mathfrak{I}_{[\overline{u}]}$的一个$A$导射。故得下面的命题3：

命题 3. — *在上述记号下，存在一一映射*
$$\psi \;:\;\; \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2,\mathfrak{I}_{[\overline{u}]}) \;\longrightarrow\; \mathrm{Dér}_A(B,\mathfrak{I}_{[\overline{u}]})$$
其中$\psi(\alpha)=D$，而
$$D(b) \;=\; \alpha(\overline{1\otimes b-b\otimes 1}) \;\;。$$

更一般的，对于任意B模M，均有一个典范同构
$$\mathrm{Hom}_B(\mathfrak{I},\mathfrak{I}^2,M) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{Dér}_A(B,M) \;\;。$$

事实上，任何模M都具有$\mathfrak{I}_{[\overline{u}]}$的形状，这只要令$C=B\oplus M$，并且定义乘法为
$$(b,m)(b',m') \;=\; (bb',bm'+b'm)$$
即可，此时M是一个平方为零的理想。

进而若令$d(b)\;=\;\overline{1\otimes b-b\otimes 1}$，则$d$是$B$到$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$的一个映射，并且同构$\psi$可以这样来定义：$\psi(\alpha)=\alpha\circ d$。对于$M=\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$的特殊情形，若令$\alpha=\mathrm{id}_{\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2}$，则有$\psi(\alpha)=d\in\mathrm{Dér}_A(B,\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)$，这表明$d$是一个导射。故得下面的定理：

定理 1. — *设A是环，B是A代数。则在上述记号下，二元组$(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2,d)$表识了$B$模范畴上的函子*
$$M \;\longmapsto\; \mathrm{Dér}_A(B,M) \;\;。$$

我们把B模$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$称为$B$相对于$A$的微分模，并记作$\Omega_{B/A}$。导射$d\,:\,B\to\Omega_{B/A}$则被称为微分，定理1意味着，对任意$B$模$M$，映射
$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A},M) \;\longrightarrow\; \mathrm{Dér}_A(B,M)$$
$$\alpha \;\longmapsto\; \alpha d$$

都是一个同构。

$\Omega_{B/A}$ **的性质**

1) **局部化**

命题 4. — 若 S 是 B 的一个乘性子集，则典范同态

$$\Omega_{B/A} \otimes_B B_S \longrightarrow \Omega_{B_S/A}$$

是一个同构。

证明：设 $j : B \to B_S$ 是典范同态， M 是一个 B_S 模。则映射

$$\mathrm{Dér}_A(B_S, M) \longrightarrow \mathrm{Dér}_A(B, M_{[j]})$$

$$D \longmapsto D \circ j$$

是一个同构。事实上，易见若 $D : B \to M_{[j]}$ 是一个 A 导射，则存在唯一的 A 导射 $\overline{D} : B_S \to M$ 使得 $D = \overline{D} \circ j$，这个 $\overline{D}$ 可由下面的公式给出

$$\overline{D}(b/s) = D(b)/s - bD(s)/s^2 \quad 。$$

另一方面，存在对于 M 具有函子性的典范同构

$$\mathrm{Dér}_A(B, M_{[j]}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M_{[j]}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{B_S}(\Omega_{B/A} \otimes_B B_S, M) \ ,$$

故得典范同构 $\Omega_{B/A} \otimes_B B_S \xrightarrow{\sim} \Omega_{B_S,A}$ 。

2) **基变换**

命题 5. — 若 A' 是一个 A 代数， $B' = B \otimes_A A'$，则有典范同构

$$\Omega_{B/A} \otimes_B B' \xrightarrow{\sim} \Omega_{B'/A'} \quad 。$$

证明：比照命题 4 。

3) 设 A, B, C 是三个环， M 是一个 C 模，并且给了同态 $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ 。

C 到 M 的任何 B 导射都自动是一个 A 导射，从而

$$\mathrm{Dér}_B(C, M) \subseteq \mathrm{Dér}_A(C, M) \quad 。$$

进而，若有一个由 C 到 M 的 A 导射，则与 v 合成可以得到一个由 B 到 M 的 A 导射。

命题 6. — 在上述记号下，序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Dér}_B(C, M) \longrightarrow \mathrm{Dér}_A(C, M) \longrightarrow \mathrm{Dér}_A(B, M)$$

是正合的。

证明：只需证明 $\mathrm{Dér}_A(C,M)$ 处的正合性即可。若 $D\in\mathrm{Dér}_A(C,M)$ 满足 $D.v=0$，则对任意 $b\in B$ 和任意 $c\in C$，均有

$$D(v(b)c)\;=\;cDv(b)+v(b)Dc\;=\;v(b)Dc\;,$$

从而 D 是 B 线性的，即 $D\in\mathrm{Dér}_B(C,M)$。

根据定理 1，这意味着序列

$$0\;\longrightarrow\;\mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B},M)\;\longrightarrow\;\mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A},M)\;\longrightarrow\;\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A},M)$$

是正合的。然而我们还有

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A},M)\;\xrightarrow{\sim}\;\mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A}\otimes_B C,M)\;\;。$$

由于上述序列对任意 C 模 M 都是成立的，故有 C 模的典范正合序列

$$\Omega_{B/A}\otimes_B C\;\longrightarrow\;\Omega_{C/A}\;\longrightarrow\;\Omega_{C/B}\;\longrightarrow\;0\;\;。$$

4) **命题** 7. — 设 B 是一个 A 代数，$\mathfrak{J}$ 是 B 的一个理想，$C=B/\mathfrak{J}$。则有 C 模的典范正合序列

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2\;\longrightarrow\;\Omega_{B/A}\otimes_B C\;\longrightarrow\;\Omega_{C/A}\;\longrightarrow\;0\;\;。$$

证明：设 M 是一个 C 模，通过映射合成可以定义一个映射 $\mathrm{Dér}_A(C,M)\to\mathrm{Dér}_A(B,M)$。这个映射是单的，因为 $B\to C$ 是满的。

设 $D\in\mathrm{Dér}_A(B,M)$。则 D 在 $\mathfrak{J}$ 上的限制是 A 线性的，进而若 $j\in\mathfrak{J},\,b\in B$，则有

$$D(bj)\;=\;bD(j)+jD(b)\;,$$

并且 $jD(b)=0$（因为 M 是 C 模，故可被 $\mathfrak{J}$ 零化）。从而 D 在 $\mathfrak{J}$ 上的限制是 B 线性的。最后，若 j 和 j' 都在 $\mathfrak{J}$ 中，则同理可知 $D(jj')=jD(j')+j'D(j)=0$。

从而 D 在 $\mathfrak{J}$ 上的限制可以穿过 $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$，并且是通过一个 C 线性映射。故有同态

$$\mathrm{Dér}_A(B,M)\;\longrightarrow\;\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2,M)\;\;。$$

序列

$$0\;\longrightarrow\;\mathrm{Dér}_A(C,M)\;\longrightarrow\;\mathrm{Dér}_A(B,M)\;\longrightarrow\;\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2,M)$$

是正合的，因为 B 的在 $\mathfrak{J}$ 上取值为零的导射就是 C 的导射。根据定理 1，这又给出关于 C 模 M 函子性的一个正合序列

$$0\;\longrightarrow\;\mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A},M)\;\longrightarrow\;\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A},M)\;\longrightarrow\;\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2,M)\;\;。$$

故得命题的结论。

5) $\Omega_{B/A}$ **的计算方法**

我们需要下面的：

引理 1. —设 A 是环，B 是 A 代数，$\Omega_{B/A}$ 是 B 相对于 A 的微分模。于是若族 $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 可以生成 A 代数 B，则有:

1) 族 $(1\otimes b_\lambda - b_\lambda\otimes 1)_{\lambda\in\Lambda}$ 可以生成 $B\otimes_A B$ 的理想 $\mathfrak{I}$。
2) 族 $(db_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 可以生成 B 模 $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 = \Omega_{B/A}$。

证明：设 $m : B\otimes_A B \to B$，则有 $\mathfrak{I} = \mathrm{Ker}(m)$。族 $(1\otimes b - b\otimes 1)_{b\in B}$ 可以生成 B 模 $\mathfrak{I}$（模结构由 d_1 所定义）。事实上，若 $t = \sum x\otimes y \in \mathfrak{I}$，则有

$$\sum x\otimes y \;=\; \sum(x\otimes 1)(1\otimes y - y\otimes 1) + \Big(\sum xy\Big)\otimes 1$$

然而 $m(t) = \sum xy = 0$，这就证明了上面这件事。

由此可知，诸元素 $(db)_{b\in B}$（其中 $db = \overline{1\otimes b - b\otimes 1}$）可以生成 B 模 $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$。

为了证明 (1)，只需验证任何 $1\otimes b - b\otimes 1$ $(b\in B)$ 都是诸 $(1\otimes b_\lambda - b_\lambda\otimes 1)_{\lambda\in\Lambda}$ 的 $B\otimes_A B$ 系数线性组合即可。为此只需考虑 $b = st$ 且 $s,t\in\{b_\lambda\}$ 的情形。现在 $1\otimes st - st\otimes 1 = (1\otimes a)(1\otimes t - t\otimes 1) + (t\otimes 1)(1\otimes s - s\otimes 1)$，这就证明了 (1)。(2) 的情况也相同，因为有

$$d(st) \;=\; sdt + tds \quad 。$$

而且这里取的是 B 系数的线性组合。

注解 — 若我们把 I 藉由 i_1 或 i_2 定义为 B 模，则一般来说这些 $(1\otimes b_\lambda - b_\lambda\otimes 1)_{\lambda\in\Lambda}$ 并不能生成 I。

命题 8 — 设 A 是环，B 是多项式代数 $A[X_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$。则 $\Omega_{B/A}$ 是以 $(dX_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为基底的自由 B 模。

证明：根据上述引理，诸 dX_λ 可以生成 $\Omega_{B/A}$。为了证明它们是线性无关的，我们还需要下面的：

引理 — 在命题 8 的记号下，设 M 是一个 B 模，$(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 M 的任意一族元素。则存在唯一的 A 导射 $D : B\to M$ 使得

$$(\forall\,\lambda\in\Lambda)\qquad D(X_\lambda) \;=\; m_\lambda \quad 。$$

事实上，对于 $P\in B$，总有

$$D(P) \;=\; \sum_\lambda \frac{\partial P}{\partial X_\lambda} m_\lambda$$

反过来，这个公式也定义出一个满足 $D(X_\lambda) = m_\lambda$ 的导射。

在这个引理中取 M 是以 $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为基底的自由 B 模就可以证明上述命题。

一般情形下 $\Omega_{C/A}$ 的计算方法

现在设 C 是任意 A 代数，把 C 写成 B/J 的形状，其中 $B = A[X_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ 并且 J 是由一族关于 X_λ 的多项式 $(P_\alpha)_{\alpha\in I}$ 所生成的理想。根据 § 4，存在正合序列

$$J/J^2 \ \xrightarrow{d}\ \Omega_{B/A}\otimes_B C \ \longrightarrow\ \Omega_{C/A} \ \longrightarrow\ 0 \quad 。$$

根据上述命题，$\Omega_{B/A}\otimes_B C$ 是以 $(dX_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为基底的自由 C 模。J/J^2 在该模中的像是由诸 $(dP_\alpha)_{\alpha\in I}$ 所生成的子模，从而

$$\Omega_{C/A} \ \simeq\ \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C\,dX_\lambda \big/ ((dP_\alpha)_{\alpha\in I})$$

依此便可对任意 A 代数 C 来计算 $\Omega_{C/A}$。

§ 3　形式孤直代数的本征性质

定理 2. — 设 A 是环，B 是 A 代数。则 B 在 A 上形式孤直的充分必要条件是

$$\Omega_{B/A} \ =\ 0 \quad 。$$

证明：设 C 是一个 A 代数，$\mathfrak{J}$ 是 C 的一个平方为零的理想，$\overline{u}\in \mathrm{Hom}_{A\,\text{代数}}(B,\overline{C})$。若 $\Omega_{B/A}=0$，则

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A},\mathfrak{J}_{[\overline{u}]}) \ =\ \mathrm{Dér}_A(B,\mathfrak{J}_{[\overline{u}]}) \ =\ 0$$

从而由命题 1 知，B 在 A 上是形式孤直的。

反之假设 B 在 A 上是形式孤直的。设 $C = B\oplus\Omega_{B/A}$，在其上定义乘法使 $\Omega_{B/A}$ 成为一个平方为零的理想。设 $\overline{u}: B\to C/\Omega_{B/A} \xrightarrow{\sim} B$ 是 B 到自身的恒同。于是 $\overline{u}$ 的提升集合（根据命题 1 和定理 1）与

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A},\Omega_{B/A})$$

是一一对应的。由于 $\overline{u}$ 的典范提升

$$u\ :\ B\ \longrightarrow\ B\oplus\Omega_{B/A}\ , \qquad u(b)\ =\ (b,0)$$

是唯一的，从而 $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A},\Omega_{B/A})=0$，故得 $\Omega_{B/A}=0$。

§ 4　孤直代数

仍以 $m: B\otimes_A B\to B$ 来表示同态 $b\otimes b'\mapsto bb'$。

命题 9. — 设 B 是一个有限型 A 代数。则以下诸条件是等价的:

(1) B 在 A 上是孤直的。

(1′) $\Omega_{B/A}=0$。

(2) 对角线态射

$$\mathrm{Spec}(m)\ :\ \mathrm{Spec}(B)\ \longrightarrow\ \mathrm{Spec}(B\otimes_A B)$$

是一个开 (且闭的) 浸入。

(3) $B\otimes_A B$ 模 B (由 m 所定义) 是 $B\otimes_A B$ 的一个直和因子。

证明：(1) ⇒ (2)。设 $\delta=\mathrm{Spec}(m)$，则 δ 显然是一个闭浸入。设 Δ 是 δ 的像。若 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(B\otimes_A B)$，则有

$$\mathfrak{p}\in\Delta\iff\mathfrak{p}\supset\mathfrak{I}\ ,$$

其中 $\mathfrak{I}$ 是指 m 的核。现在证明若 B 在 A 上是孤直的，则必有 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}=0$。由于 B 在 A 上是孤直的，故知 $\Omega_{B/A}=\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2=0$，从而有 $(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}^2=0$。然而 $\mathfrak{I}\subseteq\mathfrak{p}$，从而 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}\subseteq\mathfrak{p}(B\otimes_A B)_{\mathfrak{p}}=\mathrm{rad}(B\otimes_A B)_{\mathfrak{p}}$。由于 B 在 A 上是有限型的，故知 $\mathfrak{I}$ 是 $B\otimes_A B$ 的有限型理想 (引理 1)，从而 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$ 在 $(B\otimes_A B)_{\mathfrak{p}}$ 上是有限型的。于是由 Nakayama 引理知，$(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)_{\mathfrak{p}}=0\Rightarrow\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}=0$。进而由于 $\mathfrak{I}$ 在 $B\otimes_A B$ 上是有限型的，故知 $\mathrm{Supp}(\mathfrak{I})$ 是闭的，从而若 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}=0$，则可以找到 $f\in B\otimes_A B-\mathfrak{p}$，使得 $\mathfrak{I}_f=0$。这表明 δ 在 $\mathfrak{p}$ 的某个邻域上是开浸入。

(2) ⇒ (1)。设 $\mathfrak{p}$ 是 $B\otimes_A B$ 的一个包含 $\mathfrak{I}$ 的素理想。由于 δ 是开浸入，故可找到 $f\in B\otimes_A B-\mathfrak{p}$，使得 $\mathfrak{I}_f=0$，如此则有 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}=0$，从而 $(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)_{\mathfrak{p}}=0$。这对所有包含 $\mathfrak{I}$ 的素理想都是成立的，故有 $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2=0$。最后，很容易证明 (2) 和 (3) 的等价性。

命题 10. — 设 B 是一个有限型 A 代数。则以下诸条件是等价的:

(1) B 在 A 上是孤直的。

(2) 对于 A 的任意素理想 $\mathfrak{p}$，$B\otimes_A\kappa(\mathfrak{p})$ 在 $\kappa(\mathfrak{p})$ 上都是孤直的 (注意 $\kappa(\mathfrak{p})=A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$)。

证明：(1) ⇒ (2) 是显然的 (第二章命题 2)。

(2) ⇒ (1)。设 $\mathfrak{q}$ 是 B 的一个素理想。则只需证明 $(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}}=0$。把 A 换成 $A_{\mathfrak{p}}$ 并把 B 换成 $B_{\mathfrak{p}}$ (其中 $\mathfrak{p}$ 是 A 的“位于 $\mathfrak{q}$ 之下”的素理想)，则可以归结到 A 是局部环的情形。由于 B 在 A 上是有限型的，故知 $\Omega_{B/A}$ 是有限型 B 模 (引理 1)，从而 $(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}}$ 是有限型 $B_{\mathfrak{q}}$ 模。令 $\overline{B}=B/\mathfrak{p}B=B\otimes_A\kappa(\mathfrak{p})$。则有

$$(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}}/(\mathfrak{p}\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}}\ =\ (\Omega_{B/A}/\mathfrak{p}\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}}\ =\ (\Omega_{\overline{B}/\kappa(\mathfrak{p})})_{\mathfrak{q}}\ =\ 0\ ,$$

因为 $\overline{B}$ 在 $\kappa(\mathfrak{p})$ 上是孤直的。于是应用 Nakayama 引理就可以推出 $(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}}=0$。

这样一来，考察环上的孤直代数便归结为考察域上的孤直代数。

§ 5 域上的孤直代数

命题 11. — 设 k 是域，$\bar{k}$ 是 k 的代数闭包，B 是一个有限型 k 代数。则以下诸条件是等价的:

(1) B 在 k 上是孤直的。

(2) $\Omega_{B/k} = 0$。

(3) $B \cong \prod_1^r k_i$，其中 k_i 都是 k 的可分有限扩张。

(4) $\bar{B} = B \otimes_k \bar{k} \cong \prod_1^s \bar{k}$。

(5) B 在 k 上是有限的，并且对任意域扩张 $k \to L$，$B \otimes_k L$ 都是既约的。

(6) $B \cong \prod_{i \in I} k[X]/(f_i)$，其中 $\operatorname{Card}(I)$ 是有限的，f_i 都是首一的，并且 $(f_i, f_i') = 1$。进而若 k 是无限的，则可以取 $\operatorname{Card}(I) = 1$，亦即 $B \cong k[X]/(f)$，f 首一且 $(f, f') = 1$。

证明：(1) $\Leftrightarrow$ (2) 是已知的。

(4) $\Rightarrow$ (2)。扩张 $k \to \bar{k}$ 是忠实平坦的，并且 $\Omega_{B/A}$ 的构作方式与基变换是相容的，从而只需证明 $\Omega_{\bar{B}/\bar{k}} = 0$，然而这是显然的。

(2) $\Rightarrow$ (4)。

a) B **在** k **上有限的情形**。

可以假设 k 是代数闭的。由于 B 在 k 上是有限的，故知 B 是 Artin 环，从而可以分解为它的局部分支的乘积。分别考虑每一个局部分支，则可以假设 B 是局部环，极大理想为 $\mathfrak{m}$。于是 $B_{\mathrm{red}} = B/\mathfrak{m} = k$ 且 $(B \otimes_k B)_{\mathrm{red}} = k \otimes_k k = k$。从而 $B \otimes_A B$ 是一个局部环。由于 B 在 k 上是孤直的，故知 B 是 $B \otimes_k B$ 的一个直和因子（命题 9），从而等于 $B \otimes_k B$，因为 $B \otimes_k B$ 是局部环。设 n 是 k 向量空间 B 的维数。则同构 $B \simeq B \otimes_k B$ 表明 $n = n^2$，从而 $n = 1$，即 $B = k$，这就推出了结论。

b) **一般情形**。

B 在 k 上是有限型的。首先复习下面的古典结果（参考 Bourbaki《交换代数学》, V, § 3, 定理 3）：

命题 12. — 设 A 是域 k 上的有限型代数，$\mathfrak{m}$ 是 A 的一个极大理想，则 $A/\mathfrak{m}$ 是 k 的有限扩张。

有此结果，现在设 $\mathfrak{m}$ 是 B 的一个极大理想。对任意整数 $n > 0$，$B/\mathfrak{m}^n$ 都有一个有限合成列，其逐次商都同构于 $B/\mathfrak{m}$，从而（命题 12）$B/\mathfrak{m}_n$ 在 k 上是有限的。另一方面，$B/\mathfrak{m}^n$ 是 B 的商环，从而在 k 上是孤直的。

根据 a)，对任意整数 $n > 0$，均有 $B/\mathfrak{m}^n = k = B/\mathfrak{m}$，从而 $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$。然而 $B_{\mathfrak{m}}$ 是一个 Noether 局部环，从而是 $\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}$ 进分离的 (Bourbaki《交换代数学》, III, § 3)，故知 $\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}} = 0$，即 $B_{\mathfrak{m}} = k$。这表明 $\mathfrak{m}$ 也是一个极小素理想。由于这

对于 B 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$ 都是成立的，故知 B 是 Artin 环，从而 $B = \prod_{i=1}^{r} B_{\mathfrak{m}} = \prod_{i=1}^{r} k$。

(6) ⇒ (4)。若 $B = k[X]/(f)$，其中 f 是首一的，并且 $(f,f') = 1$，则有 $\bar{B} = \bar{k}[X]/(\bar{f})$，并且 $(\bar{f},\bar{f}') = 1$。于是 $\bar{f}$ 在 $\bar{k}[X]$ 中可以分解为一次因子的乘积，并且没有重数。

$$\bar{f} = \prod (X-\lambda_i), \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \; (i \neq j),$$

从而 $\bar{B} = \prod \bar{k}[X]/(X-\lambda_i) \simeq \prod \bar{k}$。

(4) ⇒ (6)。

a) k **是有限域**。

设 $k = \mathbb{F}_q$ 是 q 个元素的域。则 B 是既约的，因为 B 包含在 $\bar{B}$ 中，并且后者是既约的。从而 B 是 k 的有限个扩张 k_i 的乘积。故由下面的引理就可以推出 (4) ⇒ (6)：

引理 — $\mathbb{F}_q$ 的任何有限扩张 K 都具有 $\mathbb{F}_q[X]/(f)$ 的形状，其中 $(f,f') = 1$。

证明：参考 Lang *Algebra* VII § 5 定理 10 及其推论。

b) k **是无限域**。

把 B 看作是 k 向量空间。则 B 的每一个元素 b 都定义了 $\mathrm{End}_k(B)$ 中的一个元素，即乘以 b 的运算。设 $P(X,b)$ 是对应的特征多项式。只需找到一个元素 $b \in B$，使得 $P(X,b)$ 在 $\bar{k}$ 中的根是互不相同的即可。事实上，假设已经找到了这样的一个元素 b，则 $P(X,b)$ 在 $\bar{k}$ 中的根恰好是 b 在 $\bar{B} = \prod_{1}^{s} \bar{k}$ 中的诸分量 $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s$。从而对于 $i \neq j$，均有 $\bar{b}_i \neq \bar{b}_j$。于是元素 b 是 $\prod_{1}^{s}(X-\bar{b}_i) = P(X,b)$ 的根，并且 b 不是 $P(X,b)$ 的任何真因子的根。这表明映射

$$\begin{array}{ccc} k[X]/P(X,b) & \longrightarrow & B \\ X & \longmapsto & b \end{array}$$

是单的，从而是一一的（因为它们的维数相等）。由于 $(P(X,b), P'(X,b)) = 1$，故可取 $P(X,b) = f$。

现在只消找到 B 的一个元素 b，使得 $P(X,b)$ 没有重根即可。设 $e_1, \ldots, e_n$ 是 B 在 k 上的一个基底，并假设 $b = \sum_{i=1}^{n} X_i e_i$。于是 $P(X,b)$ 和 $P'(X,b)$ 都是 $k[X, X_1, \ldots, X_n]$ 中的多项式。设 $R \in k[X_1, \ldots, X_n]$ 是 P 和 P' 的结式。则归结为寻找一个元素 $b \in B$，使得它的坐标 $b_1, \ldots, b_n$ 满足 $R(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$。由于 k 是无限的，故知这样的元素存在的充分必要条件是 $R \neq 0$。然而 R 的构成形式与域扩张 $k \to \bar{k}$ 是可交换的，故可假设 $k = \bar{k}$ 是代数闭的。此时可以找到元素 b 使得它在 $\bar{B} \prod \bar{k}$ 中的诸分量 b_i 互不相同。从而 $R \neq 0$。

(4) $\Leftrightarrow$ (5) 留给读者。

习题 — 1) B 是一个有限型 A 代数，$\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ 且 $\mathfrak{p}$ 是 A 的位于 $\mathfrak{q}$ 之下的素理想。则 B 在 $\mathfrak{q}$ 处是孤直的当且仅当：
1°) $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$ 是 $B_{\mathfrak{q}}$ 的极大理想，
2°) $\kappa(\mathfrak{q})$ 在 $\kappa(\mathfrak{p})$ 上是可分有限的。

2) 设 k 是域，$\bar{k}$ 是 k 的代数闭包。则 $\bar{k}$ 在 k 上是形式孤直的。

3) 考察特征零的域上的 Noether 形式孤直代数。

第四章　拟有限代数，Zariski 主定理

在第三章已经看到，若B是一个孤直A代数，则诸纤维$B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$都是剩余类域$\kappa(\mathfrak{p})$上的有限代数。本章将系统地研究具有后一性质的这种代数。

命题 1. — 设k是域，B是有限型k代数，$\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$。则以下诸条件是等价的:

(1) $\mathfrak{q}$是$\mathrm{Spec}(B)$中的一个孤立点。

(2) $B_{\mathfrak{q}}$在k上是有限的。

证明：(1) $\Rightarrow$ (2)。假设$\mathfrak{q}$在$\mathrm{Spec}(B)$中是孤立的。则可以找到一个$f \in B - \mathfrak{q}$，使得$\mathrm{Spec}(B_f) = \{\mathfrak{q}\}$。由于$B_f$是Noether环，并且只有一个素理想，故知它是Artin的，进而是一个局部环，以$\mathfrak{q}B_f$为极大理想。然而$B_f/\mathfrak{q}B_f$既是域，又是k上的有限型代数，从而$B_f/\mathfrak{q}B_f$在k上是有限的（参考第三章命题12）。环B_f是Artin的，从而是一个长度有限的B_f模，故知B_f在k上是有限的。最后，$B_{\mathfrak{q}} = (B_f)_{\mathfrak{q}}$，而由于$B_f$是局部环，从而$B_{\mathfrak{q}} = B_f$，这就证明了 (1) $\Rightarrow$ (2)。

(2) $\Rightarrow$ (1)。假设B_q在k上是有限的。考虑正合序列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow B \longrightarrow B_{\mathfrak{q}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \ 。$$

易见$N_{\mathfrak{q}} = Q_{\mathfrak{q}} = 0$。进而$N$是一个有限型$B$模，因为$B$是Noether环。再由于$B_{\mathfrak{q}}$在$k$上是有限的，故知$Q$在$k$上也是有限型的。由此可知，$Q$和$N$的支集都是闭的，从而存在一个$f \in B - \mathfrak{q}$使得$N_f = Q_f = 0$。从而$B_f = B_{\mathfrak{q}}$。而由于$B_{\mathfrak{q}}$是局部环，并且在$k$上是有限的（从而是Artin的），故有$\mathrm{Spec}(B_f) = \mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{q}}) = \{\mathfrak{q}\}$，这就证明了 (2) $\Rightarrow$ (1)。

现在我们考虑任意基环的情形。

命题 2. — 设A是环，B是有限型A代数，$\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$，$\mathfrak{p}$是$\mathfrak{q}$在$A$中的逆像。则以下诸条件是等价的:

(1) $\mathfrak{q}$在它的纤维$\mathrm{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$中是孤立的。

(2) $B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$在$\kappa(\mathfrak{p})$上是有限的。

证明：两者都是逐点的性质，故可通过基变换$A \to A_{\mathfrak{p}}$把问题归结到A是局部环且$\mathfrak{p}$是其根的情形。此时$B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = B/\mathfrak{p}B$，并且$B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}} = (B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{q}}$，从而只需把命题1应用到$\kappa(\mathfrak{p})$代数$B/\mathfrak{p}B$上即可。

定义 1. — 若命题2中的等价条件得到满足，则称有限型A代数B在$\mathfrak{q}$处在A上

是拟有限的。如果有限型 A 代数 B 在 $\mathrm{Spec}(B)$ 的任意点 $\mathfrak{q}$ 处都在 A 上是拟有限的，则称 B 在 A 上是拟有限的。

命题 3. — 设 A 是环，B 是有限型 A 代数。则以下诸条件是等价的:
(1) B 在 A 上是拟有限的。
(2) 对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$，纤维 $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ 在 $\kappa(\mathfrak{p})$ 上都是有限的。

注解 — 由命题 3 可知，若 B 在 A 上是孤直的，则它在 A 上是拟有限的。

证明：可以归结到 A 是域 k 的情形。

(2) ⇒ (1)。若 B 在 k 上是有限的，则 B 是 Artin 的，从而是半局部环，故有 $B = \prod_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{q}}$，从而 $B_{\mathfrak{q}}$ 在 k 上是有限的，并且 $\mathfrak{q}$ 在 $\mathrm{Spec}(B)$ 中是孤立的。

(1) ⇒ (2)。若 $\mathrm{Spec}(B)$ 中的所有点都是孤立的，则有 $\mathrm{Spec}(B) = \coprod_f \mathrm{Spec}(B_f)$，其中每个 $\mathrm{Spec}(B_f)$ 都是单点集。然而 $\mathrm{Spec}(B)$ 是拟紧的，从而这个和是有限的，并且 $B = \prod_f B_f$。由于 $B_f = B_{\mathfrak{q}}$ 在 k 上是有限的（命题 1），故知 B 在 k 上是有限的。

拟有限代数的例子

1) 已经看到孤直代数都是拟有限的。

2) 若 B 在 A 上是有限的，则它在 A 上也是拟有限的。

3) 若 B 在 A 上是有限的，并且 $f \in B$，则 B_f 在 A 上是拟有限的。事实上，拟有限性是纤维上的性质，而如果 B 在 k 上是有限的，则 B_f 也是（它是 B 的一个直和因子）。

4) 更一般的，若 C 是有限 A 代数，B 是一个 C 代数，并且态射 $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(C)$ 是开浸入，则 B 在 A 上是拟有限的。实际上，我们将证明拟有限 A 代数都是这种形状的：这就是：

定理 1 (Zariski 主定理) — 设 A 是环，B 是有限型 A 代数，A' 是 A 在 B 中的相对整闭包，$\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$。若 B 在 $\mathfrak{q}$ 处在 A 上是拟有限的，则可以找到一个 $f \in A'$, $f \notin \mathfrak{q}$ 使得 $A'_f \xrightarrow{\sim} B_f$ （这表明在 $\{\mathfrak{q}\}$ 的某个邻域上，B 同构于某个整型 A 代数的“开部分”）。

先给出一些推论。

推论 1. — 设 A 是环，B 是一个有限型 A 代数，则使得 B 在 A 上拟有限的点组成 $\mathrm{Spec}(B)$ 的一个开集。

证明：设 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$。若 B 在 $\mathfrak{q}$ 处是拟有限的，则可以找到 $f \in A' - \mathfrak{q}$，使得 $A'_f \xrightarrow{\sim} B_f$。把 A' 写成它的那些包含 f 的有限型 A 子代数（它们在 A 上是有限的，因为 A' 在 A 上是整型的）的归纳极限，

$$A' = \varinjlim A'_\alpha$$

则有 $A'_f = \varinjlim (A'_\alpha)_f = B_f$。

然而 B_f 在 A 上是有限型的，从而当 α 充分大时，等号成立的

$$B_f \ = \ (A'_\alpha)_f$$

由于 A'_α 在 A 上是有限的，故知 B_f 在 A 上是拟有限的，从而使 B 在 A 上拟有限的点构成一个开集。

推论 2. — 设 A 是环，B 是有限型 A 代数，假设 B 在 A 上是拟有限的，A' 是 A 在 B 中的相对整闭包。则有

1) $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A')$ 是一个开浸入。

2) 可以找到 A' 的一个有限 A 子代数 A'_i，使得 $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A'_i)$ 是一个开浸入。

注解 — 这个结果相当于说：任何拟有限 A 代数都“可以实现为”某个有限 A 代数的“开部分”。

证明：1) 由于 B 在 A 上是拟有限的，故可把定理 1 应用到 $\mathrm{Spec}(B)$ 的所有点上。然而 $\mathrm{Spec}(B)$ 是拟紧的，从而可以找到有限个 $f_i \in A'$，使得 $\mathrm{Spec}(B)$ 可被诸 $\mathrm{Spec}(B_{f_i})$ 所覆盖，并且 $B_{f_i} \simeq A'_{f_i}$。由此可知，态射 $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A')$ 是一个开浸入。

2) 由于 f_i 是有限个，故可使用推论 1 的证明方法找到 A' 的一个在 A 上有限的子代数 A'_α，它包含所有 f_i，并使得 $B_{f_i} \xrightarrow{\sim} (A'_\alpha)_{f_i}$。从而态射 $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A'_\alpha)$ 就是一个开浸入。

定理 1 的证明（采自 Peskine, Bul. Sciences Maths. t. 90, 1966, p. 119-127）：归结为下面的命题：

命题 4. — 设 $A \subseteq C \subseteq B$ 是三个环。假设 C 在 A 上是有限型的，B 在 C 上是有限型的，并且 A 在 B 中是相对整闭的。设 $\mathfrak{q}$ 是 B 的一个素理想，$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$，若 B 在 $\mathfrak{q}$ 处在 A 上是拟有限的，则有 $B_\mathfrak{q} = A_\mathfrak{p}$。

首先看定理是怎样由这个命题推出的。这缘自下面的引理：

引理 0. — 设 $A \to C \to B$ 是三个环，假设 $A \to B$ 是有限型的。于是若 B 在 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ 处在 A 上是拟有限的，则 B 在 $\mathfrak{q}$ 处在 C 上也是拟有限的。

事实上，若 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$，则 $\mathfrak{q}$ 在 C 上的所属的纤维是 $\mathfrak{q}$ 在 A 上的所属的纤维的一个子空间，从而若 $\mathfrak{q}$ 在 A 上是孤立的，则它在 C 上也是孤立的。

有此引理，现在把命题 4 应用到 $A = A'$ 且 $B = C$ 的情形（定理中的条件）。根据引理 0，B 在 $\mathfrak{q}$ 处在 A' 上是拟有限的，从而若令 $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q} \cap A'$，则有 $B_{\mathfrak{p}'} = A'_{\mathfrak{p}'}$。设 $b_1, \ldots, b_n$ 是 A' 代数 B 的一个生成元组，则可以找到 $f \in A' = \mathfrak{p}'$ 使得诸 b_i 在 $B_{\mathfrak{p}'}$ 中的像（自然也属于 $A'_{\mathfrak{p}'}$ 的像）实际上包含在 A'_f 的像之中。从而映射 $A'_f \to B_f$ 是满的，进而是一一的（因为 $A' \subseteq B$），这就证明了定理。

命题 4 的证明：首先证明四个引理。

引理 1. — 命题在 $B = C = A[x]$（x 未必是变元）的情况下是对的。

证明：a) 利用基变换 $A \to A_{\mathfrak{p}}$ 可以把问题归结到 A 是局部环且 $\mathfrak{p}$ 是根的情形：事实上，$A \to A_{\mathfrak{p}}$ 不会改变 $\mathfrak{p}$ 处的纤维 (从而 $B_{\mathfrak{p}}$ 在 $\mathfrak{q}$ 处在 $A_{\mathfrak{p}}$ 上是拟有限的)，并且 $A_{\mathfrak{p}}$ 在 $B_{\mathfrak{p}}$ 中是相对整闭的。

b) 令 $k = A/\mathfrak{p}$。现在需要证明 $B = A[x] = A$。因为 A 在 B 中是相对整闭的，故只需证明 x 在 A 上是整型的。考虑 k 代数 $k[\overline{x}] = A[x] \otimes_A k = B/\mathfrak{p}B$。则 $\mathrm{Spec}(k[\overline{x}])$ 就是 $\mathfrak{p}$ 的纤维，从而 $\mathfrak{q}$ 在 $\mathrm{Spec}(k[\overline{x}])$ 中是孤立的。此时 $\overline{x}$ 在 k 上必须是代数的。事实上，假如 $\overline{x}$ 是超越的，则 $k[\overline{x}]$ 是多项式代数，在它的谱中没有一个点是孤立的 (矛盾)。从而纤维 $\mathrm{Spec}(k[\overline{x}])$ 在 k 上是有限的。

c) 根据 b)，可以找到一个首一多项式 $F \in A[X]$，使得 $\overline{F}(\overline{x}) = 0$（在 $k[\overline{x}]$ 中），并且 $\deg F \geqslant 1$。于是 $F(x) \in \mathfrak{p}B$。

现在令

$$y = 1 + F(x) \quad 。$$

则有

$$A \subseteq A[y] \subseteq A[x] = B ,$$

并且 $A[x]$ 在 $A[y]$ 上显然是整型的。设 $\overline{y}$ 是 y 在 $k[\overline{y}] = A[y] \otimes_A k$ 中的像。则 $\overline{y}$ 在 $k[\overline{x}]$ 中的像等于 1，因为 $\overline{F}(\overline{x}) = 0$。根据 Cohen-Seidenberg 下行定理，映射 $\mathrm{Spec}(A[x]) \to \mathrm{Spec}(A[y])$ 是满的，从而由 $\mathrm{Spec}(A[x])$ 在 k 上的纤维是有限的就可以推出 $\mathrm{Spec}(k[y])$ 在 k 上的纤维也是有限的。这表明 $k[\overline{y}]$ 在 k 上是有限的。

在 $k[\overline{y}]$ 中，$\overline{y}$ 不属于任何素理想，否则它在 $k[\overline{x}]$ 中的像 $(= 1)$ 就不是可逆的 (矛盾)。从而 $\overline{y}$ 在 $k[\overline{y}]$ 中是可逆的。

d) 现在证明 y 在 A 上是整型的。

由于 $\overline{y}$ 在 k 上是整型的，并且可逆，故知 $\overline{y}$ 满足一个方程

$$\overline{y}^n + \overline{a}_{n-1}\overline{y}^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = 0 , \qquad (n \geqslant 1,\ \overline{a}_i \in k,\ \overline{a}_0 \neq 0) \quad 。$$

从而 $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathfrak{p}A[y]$，于是

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_0 = p_m y^m + \cdots + p_1 y + p_0 , \qquad p_i \in \mathfrak{p} ,$$

添加若干个零以后，可以假设 $m = n$，从而

$$(a_0 - p_0) + (a_1 - p_1)y + \cdots + (a_m - p_m)y^m = 0 \quad 。$$

由于 $a_0 \notin \mathfrak{p}$，故有 $a_0 - p_0 \notin \mathfrak{p}$，从而 $a_0 - p_0$ 在局部环 A 中是可逆的。这表明 y 在 $A[y]$ 中是可逆的，并且 y^{-1} 在 A 上是整型的。从而 $y^{-1} \in A$（因为 A 在 B 中相对整闭）。然而 y^{-1} 在 B 中是可逆的，并且 $y^{-1} \notin \mathfrak{q}$，从而 $y^{-1} \notin \mathfrak{q} = \mathfrak{q} \cap A$，从而 y^{-1} 在 A 中是可逆的，即 $y \in A$。于是 $A = A[y] \subseteq A[x] = B$。又因为 x 在 $A[y]$ 上是整型的，故有 $A = B$。证毕。

引理 2. — 设 B 是一个包含多项式环 $A[T]$ 的整环，并假设 B 在 $A[T]$ 上是整型的。设 $\mathfrak{q}$ 是 B 的一个素理想。则 B 在 $\mathfrak{q}$ 处不可能在 A 上是拟有限的。

证明：设 $\mathfrak{q}$ 是 B 的一个素理想，$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$。

假设 $\mathfrak{q}$ 在所有位于 $\mathfrak{p}$ 上的素理想之中是极大的，下面将证明它不可能是极小的，如此一来 $\mathfrak{q}$ 在它的纤维中就不可能是孤立的，从而 B 在 A 上也不是拟有限的。

a) 首先假设 A 是整闭的，并设 $\mathfrak{r} = \mathfrak{q} \cap A[T]$。由于 B 在 $A[T]$ 上是整型的，故知 $\mathfrak{r}$ 在 $A[T]$ 的所有位于 $\mathfrak{p}$ 上的素理想之中也是极大的（下行定理）。设 $\bar{\mathfrak{r}}$ 是 $\mathfrak{r}$ 在 $\kappa(\mathfrak{p})[T]$ 中的逆像，则 $\bar{\mathfrak{r}}$ 是一个极大理想，从而 $\bar{\mathfrak{r}} \neq (0)$。于是 $\mathfrak{r}$ 必严格包含着素理想 $\mathfrak{p}A[T]$。由于 A 是整闭的，故知 $A[T]$ 也是整闭的。根据上行定理，$\mathfrak{q}$ 也严格包含着一个位于 $\mathfrak{p}A[T]$ 之上的素理想，从而 $\mathfrak{q}$ 在所有位于 $\mathfrak{p}$ 上的素理想之中不是极小的。

b) 一般情形。设 A' 是 A 的整闭包，B' 是 B 的整闭包。则 B' 在 $A'[T]$ 上是整型的。设 $\mathfrak{q}'$ 是 B' 的一个位于 $\mathfrak{q}$ 之上的素理想，$\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}' \cap A'$。由于 $\mathfrak{q}$ 在所有位于 $\mathfrak{p}$ 上的素理想之中是极大的，故知 $\mathfrak{q}'$ 在所有位于 $\mathfrak{p}'$ 上的素理想之中也是极大的。根据 a)，$\mathfrak{q}'$ 不是极小的，从而 $\mathfrak{q}$ 也不会是极小的。

引理 3. — 设 $A \subseteq A[x] \subseteq B$ 是三个环，B 在 $A[x]$ 上是整型的，并且 A 在 B 中是相对整闭的。假设存在一个首一多项式 $F \in A[X]$ 满足 $F(x)B \subseteq A[x]$（亦即，$F(x)$ 掉进了 $A[x]$ 在 B 中的导子之中）。则 $A[x] = B$。

证明：设 $b \in B$，现在证明 $b \in A[x]$。由于 $F(x)b \in A[X]$，故可在 $A[X]$ 中找到一个多项式 G 使得 $F(x)b = G(x)$。

由于 F 是首一的，故以 F 去除 G 可得：

$$G = QF + R, \qquad \deg R < \deg F$$

并且有

$$G(x) = F(x)b = Q(x)F(x) + R(x) \quad 。$$

令 $y = b - Q(x)$，则有

$$yF(x) = R(x) \quad 。$$

下面证明 $y \in A$（如此立得 $b \in A[x]$）。

设 $\widetilde{B} = B_y$，并以 $A^{\mathrm{h}}, \widetilde{y}, \widetilde{x}, \ldots$ 来记 $A, y, x, \ldots$ 在 $\widetilde{B}$ 中的像。则有 $\widetilde{y}\widetilde{F}(\widetilde{x}) = \widetilde{R}(\widetilde{x})$，从而 $\widetilde{F}(\widetilde{x}) = (\widetilde{y})^{-1}\widetilde{R}(\widetilde{x})$，又因为 $\deg R < \deg F$，故知 $\widetilde{x}$ 在 $A^{\mathrm{h}}[(\widetilde{y})^{-1}]$ 上是整型的。然而由 $y \in B$ 知 y 在 $A[x]$ 上是整型的，因而 $\widetilde{y}$ 在 $A^{\mathrm{h}}[\widetilde{x}]$ 上是整型的，最终 $\widetilde{y}$ 在 $A^{\mathrm{h}}[(\widetilde{y})^{-1}]$ 上是整型的。由此可知 $\widetilde{y}$ 在 A^{h} 上是整型的（乘以适当的公分母）。从而存在首一多项式 $\widetilde{H} \in A^{\mathrm{h}}[X]$ 使得 $\widetilde{H}(\widetilde{y}) = 0$。设 $H \in A[X]$ 是 $\widetilde{H}$ 的一个首一提升。则 $H(y)$ 在 B_y 中等于零，从而可以找到 $n \in \mathbb{N}$，使得 $y^n H(y) = 0$，这表明 y 在 A 上是整型的，又因为 A 在 B 中相对整闭，故有 $y \in A$。

引理 4. — 设 $A \subseteq A[x] \subseteq B$ 是三个环，B 在 $A[x]$ 上是有限的，并且 A 在 B 中是相对整闭的。设 $\mathfrak{q}$ 是 B 的一个素理想，$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$。若 B 在 $\mathfrak{q}$ 处在 A 上是拟有限的，则有 $A_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}$。

证明：以 $\mathfrak{f}$ 来记 $A[x]$ 在 B 中的导子

$$\mathfrak{f} = \{\alpha \mid \alpha \in A[x] \text{ 且 } \alpha B \subseteq A[x]\} \text{ 。}$$

区分两种情况：

第一种： $\mathfrak{f} \not\subseteq \mathfrak{q}$ 。令 $\mathfrak{r} = A[x] \cap \mathfrak{q}$，则有 $A[x]_{\mathfrak{r}} = B_{\mathfrak{r}}$，随之 $A[x]_{\mathfrak{r}} = B_{\mathfrak{q}}$。由于 $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \cap A = \mathfrak{q} \cap A$，故知 $A[x]$ 在 $\mathfrak{r}$ 处在 A 上是拟有限的，从而根据引理 1，$A[x]_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$。然而 B 在 $A[x]$ 上是有限的，从而 $B_{\mathfrak{p}}$ 在 $A[x]_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ 上是有限的，由于 A 在 B 中是相对整闭的，故知 $A_{\mathfrak{p}}$ 在 $B_{\mathfrak{p}}$ 中是相对整闭的，从而 $A_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}$。

第二种： $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{q}$。设 $\mathfrak{n}$ 是 B 的一个包含于 $\mathfrak{q}$ 之中的素理想，且在所有包含 $\mathfrak{f}$ 的素理想中是极小的。设 $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$。

a) 首先证明，x 在 $\kappa(\mathfrak{n})$ 中的像在 $\kappa(\mathfrak{m})$ 上是超越的。我们需要下面的引理：

引理 4 补 — 设 $A \subseteq C \subseteq B$ 是三个环，且 B 在 C 上是有限的。设 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想，若以 $\mathfrak{f}$ 来记 C 在 B 中的导子，并以 $\mathfrak{f}'$ 来记 $C_{\mathfrak{p}}$ 在 $B_{\mathfrak{p}}$ 中的导子，则有 $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$（证明留给读者）。

采取基变换 $A \to A_{\mathfrak{m}}$，则可以 (为了证明 a)) 假设 A 是局部环且 $\mathfrak{m}$ 是它的根。假设 x 在 $\kappa(\mathfrak{n})$ 中的像在 $\kappa(\mathfrak{m})$ 上是代数的。则 $A/\mathfrak{m} \to A[x]/\mathfrak{n} \cap A[x]$ 是整型的，并且是单的，从而 $\mathfrak{n} \cap A[x]$ 是 $A[x]$ 的一个极大理想，并且利用下行定理可知 $\mathfrak{n}$ 是 B 的一个极大理想，故有 $\kappa(\mathfrak{n}) = B/\mathfrak{n}$。从而存在首一多项式 $F \in A[X]$ 使得 $F[x] \in \mathfrak{n}$。然而 $\mathfrak{n}$ 在 B 的所有包含 $\mathfrak{f}$ 的素理想中是极小的，从而 $\mathfrak{n}B_{\mathfrak{n}}$ 是 $B_{\mathfrak{n}}$ 中包含 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{n}}$ 的唯一素理想，故知 $\mathfrak{n}B_{\mathfrak{n}}$ 是 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{n}}$ 的根。于是若令 $\overline{F(x)}$ 是 $F(x)$ 在 $B_{\mathfrak{n}}$ 的像，则可以找到 $r \in \mathbb{N},\ r > 0$，使得 $(F(x))^r \in \mathfrak{f}_{\mathfrak{n}}$，从而可以找到 $y \in B - \mathfrak{n}$ 使得 $yF(x)^r \in \mathfrak{f}$。

故有 $yF(x)^r B \subseteq A[x]$。把引理 3 应用到 $A \subseteq A[x] \subseteq B' = A[x][yB]$ 和 $F' = F^r$ 上，则可以推出 $B' = A[x]$，从而 $yB \subseteq A[x]$，继之 $y \in \mathfrak{f}$，最终 $y \in \mathfrak{n}$，这与 y 的定义矛盾。

b) 令 $\overline{A} = A/\mathfrak{m},\ \overline{B} = B/\mathfrak{n}$。则 $\overline{B}$ 是整环，并且包含 $\overline{A}$。进而根据 a)，x 在 $\overline{B}$ 中的像 $\overline{x}$ 在 $\overline{A}$ 上是超越的。设 $\overline{\mathfrak{q}}$ 是 $\mathfrak{q}$ 在 $\overline{B}$ 中的像，由于 B 在 $\mathfrak{q}$ 处在 A 上是拟有限的，故知 $\overline{B}$ 在 $\overline{\mathfrak{q}}$ 处在 $\overline{A}$ 上是拟有限的，这与引理 2 矛盾。

命题的证明： 对于 A 代数 C 的生成元个数 n 进行归纳。

若 $n = 0$，则 B 在 A 上是整型的，从而 $B = A$。

现在设 $n > 0$，并假设命题在 $n-1$ 个生成元的情形已经成立。

此时 $C = A[x_1, \ldots, x_n]$。设 A' 是 $A[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ 在 B 中的整闭包，则有 $A' \subseteq A'[x_n] \subseteq B$。

B 在 $A'[x_n]$ 上是有限的，同时 B 在 $\mathfrak{q}$ 处在 A 上是拟有限的，于是 B 在 $\mathfrak{q}$ 处在 A' 上是拟有限的 (引理 0)。从而应用引理 4 可得：令 $\mathfrak{p}' = A' \cap \mathfrak{q}$，则有 $A'_{\mathfrak{p}'} = B_{\mathfrak{p}'}$。

由于 A' 在 $A[x_1, \ldots, x_{n-1}] = R$ 上是整型的，故知 A' 是它的有限 R 子代数的归

纳极限。

$$A' = \varinjlim A'_i \qquad A'_i \text{ 在 } R \text{ 上是有限的。}$$

设 $\mathfrak{p}'_i = \mathfrak{q} \cap A'_i = \mathfrak{p}' \cap A'_i$ 。

由于 B 在 R 上是有限型的，故知当 i 充分大时，典范态射

$$(A'_i)_{\mathfrak{p}'_i} \to B_{\mathfrak{p}'_i}$$

是一个同构。取 i 是这样一个指标。则也有

$$(A'_i)_{\mathfrak{p}'_i} \simeq B_{\mathfrak{q}}$$

从而 A'_i 在 $\mathfrak{p}'_i$ 处在 A 上是拟有限的。对于 A 使用归纳假设，故得

$$A_{\mathfrak{p}} \simeq (A'_i)_{\mathfrak{p}} \simeq (A'_i)_{\mathfrak{p}'_i}$$

从而 $A_{\mathfrak{p}} \simeq B_{\mathfrak{p}}$ ，这就证明了主定理。

第五章　孤直代数和平展代数的局部结构，Jacobi 判别法

§1　局部结构

定义 1. — 设 B 是一个 A 代数，$\mathfrak{q}$ 是 B 的一个素理想。所谓 B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是孤直（相应的，平展）的，是指可以找到 $f \in B - \mathfrak{q}$ 使得 B_f 在 A 上是孤直（相应的，平展）的。

定理 1. — 设 B 是一个 A 代数，$\mathfrak{q}$ 是 B 的一个位于 A 的素理想 $\mathfrak{p}$ 之上的素理想。

1. 以下诸条件是等价的:

   a) B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是平展的。

   b) 存在 $f \in B - \mathfrak{q}$ 和 $h \in A - \mathfrak{p}$，使得 B_f 可以 A 同构于一个**标准平展** A_h **代数** $C = (A_h[X]/P)_g$（第二章命题 8 注解 2）。

2. 以下诸条件是等价的:

   a) B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是孤直的。

   b) 存在 $f \in B - \mathfrak{q}$ 和 $h \in A - \mathfrak{p}$ 以及一个标准平展 A_h 代数 C（前引）连同一个 A 满同态 $u : C \to B_f$。

在 b) 中，可以进而要求同态

$$u \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \ : \ C \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow B_f \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$$

是一个同构。

换句话说，从 Spec(B) 和 Spec(A) 的局部上来看，平展 A 代数 B 都是标准型的，且孤直 A 代数 B 都是某个标准平展 A 代数的商。

有下面一些推论：

推论 1. — 设 B 是一个孤直 A 代数。则从 Spec(B) 和 Spec(A) 的局部来看，B 总是某个平展 A 代数的商。

推论 2. — 若 B 在 A 上是平展的，则 B 在 A 上是**平坦**的。

事实上，易见标准平展 A 代数在 A 上都是平坦的。

定理 1 的证明：b) ⇒ a) 缘自下面的事实：“ B 在 A 上是孤直（相应的，平展）的”

是一个在 $\mathrm{Spec}(B)$ 和 $\mathrm{Spec}(A)$ 上都局部化的性质（第二章命题 5），且平展 A 代数的商代数都是孤直 A 代数（第二章命题 8）。

b) $\Rightarrow$ a)。

(i) **归结到 A 是局部环且 $\mathfrak{p}$ 是极大理想的情形**。只考虑平展的情形（孤直的情形类似）。设代数 $B_\mathfrak{p}$ 在 $\mathfrak{q}B_\mathfrak{p}$ 的近旁在 $A_\mathfrak{p}$ 上是平展的。假设已找到 $f \in B_\mathfrak{p} - \mathfrak{q}B_\mathfrak{p}$ 使得 $(B_\mathfrak{p})_f$ 与某个标准平展 $A_\mathfrak{p}$ 代数 C 是 $A_\mathfrak{p}$ 同构的。选择适当的 $h \in A - \mathfrak{p}$，把 $A_\mathfrak{p}$ 换成 A_h，可以假设 f 来自 B_h 的某个元素（仍记作 f），并且 B_f 在 A_h 上是平展的；同时还可以假设 C 来自某个标准平展 A_h 代数（仍记作 C）。由于 C 和 B_f 在 A_h 上都是有限呈示的，故可假设它们之间限制在 $A_\mathfrak{p}$ 上的那个同构也是来自 A_h 上的某个同构。

现在对孤直的情形来证明 a) $\Rightarrow$ b)。

(ii) **归结到 B 在 A 上有限的情形**。由于 B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是孤直的，故可假设 B 在 A 上是孤直的，从而拟有限。根据 Zariski 主定理（第四章定理 1 的推论 2），可以找到 B 的一个有限 A 子代数 B'，以及一个 $f' \in B'$, $f' \in B - \mathfrak{q}$，使得 $B_{f'} \simeq B'_{f'}$。把 B 换成 B'，则可以假设 B 在 A 上是有限的，并且 B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是孤直的。

(iii) **归结到一个生成元的情形**。以 k 来记 A 的剩余类域，令 $\overline{B} = B \otimes_A k$，$\overline{\mathfrak{q}}$ 是 $\mathfrak{q}$ 在 $\overline{B}$ 中的像。由于 B 在 $\mathfrak{q}$ 处在 A 上是孤直的，故知 $\overline{B}_{\overline{\mathfrak{q}}}$ 就是域 $\kappa(\mathfrak{q})$，并且是 k 的一个可分有限扩张（第三章命题 11），从而是一个单苇 k 代数（前引）。于是可以在有限 k 代数 $\overline{B}$ 中找到一个元素 $\overline{x}$，使得它在不同于 $\overline{B}_{\overline{\mathfrak{q}}}$ 的局部分支上都取零值，同时它在 $\overline{B}_{\overline{\mathfrak{q}}}$ 中的像是该 k 代数的一个生成元。设 x 是 $\overline{x}$ 在 B 上的一个提升，$C = A[x] \subseteq B$，且 $\mathfrak{r} = \mathfrak{q} \cap C$。

引理 — 典范同态 $C_\mathfrak{r} \to B_\mathfrak{q}$ 是一个同构。

由于 B 在 A 上是有限的，故知 B 在 C 上是有限的，并且 $B_\mathfrak{r}$ 在 $C_\mathfrak{r}$ 上是有限的。根据 x 的选择，$\mathfrak{q}$ 是 B 的位于 $\mathfrak{r}$ 之上的唯一极大理想，从而半局部环 $B_\mathfrak{r}$ 必等于 $B_\mathfrak{q}$。由此可知 $B_\mathfrak{q}$ 在 $C_\mathfrak{r}$ 上是有限的。另一方面，由 x 的选择知，同态 $C_\mathfrak{r} \otimes_A k \to B_\mathfrak{q} \otimes_A k \to \kappa(\mathfrak{q})$ 是满的。从而根据 Nakayama 引理，$C_\mathfrak{r} \to B_\mathfrak{q}$ 也是满的。另一方面 $C \to B$ 是单的，从而 $C_\mathfrak{r} \to B_\mathfrak{r} \to B_\mathfrak{q}$ 也是单的。

现在 B 和 C 在 A 上都是有限的，故由上述引理知，存在 $f \in C - \mathfrak{r}$，使得 $B_f \xrightarrow{\sim} C_f$。把 B 换成 C，则可以假设 B 是由一个元素 x 生成。

(iv) **孤直情形下证明的完结**。设 r 是有限 k 代数 $\overline{B}$ 的秩。则由 Nakayama 引理知，$1, x, \ldots, x^{r-1}$ 可以生成 A 模 B，从而 x 是某个 r 次首一多项式 P 的根，$B = A[x]$ 是 $A[X]/(P)$ 的一个商代数，并且同态 $k[X]/(\overline{P}) \to \overline{B}$ 是一个同构。设 $\mathfrak{q}'$ 是 $\mathfrak{q}$ 在 $A[X]/(P)$ 中的逆像。由于 B 在 $\mathfrak{q}$ 处在 A 上是孤直的，且“孤直性”是纤维上的性质（第三章命题 10），故知 $A[X]/(P)$ 在 $\mathfrak{q}'$ 处在 A 上是孤直的，从而 P 的导式 P' 在其中的像在 $\mathfrak{q}'$ 处是可逆的。于是可以找到 $g \in (A[X]/(P)) - \mathfrak{q}'$ 使得 $C = (A[X]/(P))_g$ 是一个标准平展代数，这就完成了孤直情形的证明。

(v) **平展情形下 a) $\Rightarrow$ b) 的证明**。现在假设 B 在 A 上是平展的，特别的，是

孤直的。根据上面所述，通过把 B 局部化，可以假设存在一个标准平展 A 代数 C 和一个满同态 $u : C \to B$，使得 $\overline{u} : \overline{C} \to \overline{B}$ 是一个同构。设 $\mathfrak{I} = \mathrm{Ker}(u)$，且 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{q}$ 在 C 中的逆像。则需要证明 $\mathfrak{I}$ 在 $\mathfrak{r}$ 的近旁是零。现在由于 B 和 C 在 A 上都是有限呈示的，故知 $\mathfrak{I}$ 是 C 的一个有限型理想，从而只需证明 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}} = 0$ 即可，进而根据 Nakayama 引理，可以限于证明 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}}^2 = (\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)_{\mathfrak{r}} = 0$。考虑正合序列

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \longrightarrow C/\mathfrak{I}^2 \longrightarrow B \longrightarrow 0 \ 。$$

由于 $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ 是 $C/\mathfrak{I}^2$ 的一个平方为零的理想，并且 B 在 A 上是平展的，故由提升性质可知，同构

$$B \xrightarrow{\sim} (C/\mathfrak{I}^2)/(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2) \simeq C/\mathfrak{I}$$

可以提升为一个 A 同态 $B \to C/\mathfrak{I}^2$。换句话说，正合序列 (*) 是可裂的。从而与 k 取张量积后仍得到一个正合序列

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2) \otimes_A k \longrightarrow C/\mathfrak{I}^2 \otimes_A k \longrightarrow \overline{B} \longrightarrow 0 \ 。$$

根据定义 $\overline{C} \to \overline{B}$ 是一个同构，自然 $C/\mathfrak{I}^2 \to \overline{B}$ 也是同构，从而 $(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2) \otimes_A k = 0$。再根据 Nakayama 引理，$(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)_{\mathfrak{r}} = 0$。

习题 — 设 A 是一族环 $\{A_i\}_{i \in I}$ 的滤相归纳极限。对某个 $i \in I$，设 B_i 是一个有限呈示的 A_i 代数。对于 $j \geqslant i$，令 $B_j = B_i \otimes_{A_i} A_j$，并设 $B = A \otimes_{A_i} A$。于是若 B 在 A 上是平展的，则当 j 充分大时，B_j 在 A_j 上都是平展的。设 C 是一个平展 A 代数。则对充分大的 i，存在一个平展 A_i 代数 C_i，使得 $C_i \otimes_{A_i} A$ 与 C 是 A 同构的。

下面的定理从某个角度来说是推论 2 的逆。

定理 2. — *设 B 是一个有限呈示 A 代数，$\mathfrak{q}$ 是 B 的一个素理想。则以下诸条件是等价的:*

1) *B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是平展的。*
2) *$(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} = 0$，并且 $B_{\mathfrak{q}}$ 在 A 上是平坦的。*

注解 — 定理 2 中的条件 2) 只和局部环 $B_{\mathfrak{q}}$ 有关。

先看下面一些推论：

推论 1. — *设 B 是有限呈示的 A 代数，则 B 在 A 上是平展的当且仅当 B 在 A 上是孤直且平坦的。*

推论 2. — *设 A 是 Noether 环，B 是一个 A 代数。则 B 在 A 上是平展的当且仅当 B 在 A 上是孤直且平坦的。*

定理 2 的证明：1) ⇒ 2) 是显然的。为了证明 2) ⇒ 1)，可以限于 (参照定理 1 的证明) 考虑 A 是局部环且 $\mathfrak{p}$ (= $\mathfrak{q}$ 的逆像) 极大的情形。由于 B 在 A 上是有限型的，故知 $\Omega_{B/A}$ 是有限型 B 模，从而支集是闭的；于是把 B 适当局部化，可以假设 $\Omega_{B/A} = 0$，从而 B 在 A 上是孤直的。再次局部化，还可以假设存在一个标准平展 A 代数 C 和一个满同态 $u : C \to B$，使得 $\overline{u} : \overline{C} \to \overline{B}$ 是一个同构 (定理 1 之 2))。设 $\mathfrak{I} = \mathrm{Ker}(u)$。由于 B 和 C 在 A 上都是有限呈示的，故知 $\mathfrak{I}$ 是有限

型的。设$\mathfrak{r}$是$\mathfrak{q}$在C中的逆像。则需要证明$\mathfrak{J}$在$\mathfrak{r}$的近旁是零，为此只需证明$\mathfrak{J}_\mathfrak{r}=0$。由于$B_\mathfrak{q}$在$A$上是平坦的，故有正合序列 (Bourbaki《交换代数学》, I, §2, 命题4)：

$$0 \longrightarrow \overline{\mathfrak{J}}_\mathfrak{r} \longrightarrow \overline{C}_\mathfrak{r} \longrightarrow \overline{B}_\mathfrak{r} \longrightarrow 0$$

由于$\overline{C}\simeq\overline{B}$，故有$\overline{C}_\mathfrak{r}\simeq\overline{B}_\mathfrak{q}$，从而$\overline{\mathfrak{J}}_\mathfrak{r}=0$。根据Nakayama引理，$\mathfrak{J}_\mathfrak{r}=0$。

定理 3. — 设B是一个平展A代数。则态射$\mathrm{Spec}(B)\to\mathrm{Spec}(A)$是开的。

问题在$\mathrm{Spec}(A)$和$\mathrm{Spec}(B)$上都是局部性的。故可假设B是一个标准平展A代数C_g，其中$C=A[X]/P$（P是首一的）（定理1）。于是只需证明下面的引理即可：

引理 — 设C是一个有限自由A代数，则$\mathrm{Spec}(C)\to\mathrm{Spec}(A)$是一个开态射。

可以假设C具有常数秩r。设$f\in C$，下面证明$\mathrm{Spec}(C_f)$在$\mathrm{Spec}(A)$中的像是一个开集。设$\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$。说“$\mathfrak{p}$不在$\mathrm{Spec}(C_f)$的像之中”相当于说“$f$在$C\otimes_A\kappa(\mathfrak{p})$中的像是幂零的”，也即“它在$\kappa(\mathfrak{p})[T]$中的特征多项式等于$T^r$”。从而若$f$在$A$代数$C$中的特征多项式等于$T^r+a_1T^{r-1}+\cdots+a_r$，则$\mathrm{Spec}(C_f)$在$\mathrm{Spec}(A)$中的像等于开集

$$\mathrm{Spec}(A)-V(a_1,\ldots,a_r)\ 。$$

定理 4. — 设A是环，$\mathfrak{J}$是A的一个诣零理想，$\overline{A}=A/\mathfrak{J}$，$\overline{B}$是一个平展$\overline{A}$代数。

a) $\overline{B}$可以提升为一个平展A代数B，也就是说，存在一个$\overline{A}$同构$\overline{u}:B/\mathfrak{J}B\xrightarrow{\sim}\overline{B}$。

b) $\overline{B}$的平展提升B在只差唯一的A同构的意义下是唯一的。确切地说，若B'是$\overline{B}$的另一个提升，在A上是平展的，并且存在一个$\overline{A}$同构$\overline{u}':B'/\mathfrak{J}B'\xrightarrow{\sim}\overline{B}$，则有唯一一个$A$同构$v:B\xrightarrow{\sim}B'$，使得下述图表交换:

(*)
$$\begin{tikzcd} B/\mathfrak{J}B \arrow[rr, "v\otimes\overline{A}"] \arrow[dr, "\overline{u}"'] & & B'/\mathfrak{J}B' \arrow[dl, "\overline{u}'"] \\ & \overline{B} & \end{tikzcd}$$

a) **归结到$\mathfrak{J}$是幂零的**。把$\mathfrak{J}$写成它的有限型子理想$\mathfrak{J}_\alpha$的滤相归纳极限，并设$A_\alpha=A/\mathfrak{J}_\alpha$。诸$\mathfrak{J}_\alpha$都是幂零的，并且$\overline{A}=\varinjlim A_\alpha$。取$\alpha$充分大，则$\overline{B}$来自某个平展$A_\alpha$代数$B_\alpha$（参考前面的习题）。假设a)对于幂零的$\mathfrak{J}$是成立的。则$B_\alpha$可以提升为一个平展$A$代数$B$，它也是$\overline{B}$的一个提升。设$B'$是$\overline{B}$的另一个提升，在$A$上平展，于是存在同构

$$B/\mathfrak{J}B \ \underset{\simeq}{\xrightarrow{\overline{u}}}\ \overline{B}\ \underset{\simeq}{\xleftarrow{\overline{u}'}}\ B'/\mathfrak{J}B'$$

取α充分大，则同构$(\overline{u}')^{-1}\overline{u}$来自某个同构$v_\alpha:B/\mathfrak{J}_\alpha B\xrightarrow{\sim}B'/\mathfrak{J}_\alpha B'$。基于平展代数的提升性质 (第一章定义2)，$v_\alpha$能以唯一方式提升为一个$A$同态$v:B\to B'$。对$v^{-1}$可重复同样的过程，这表明$v$是一个同构。这个方法还可以证明$v$是唯一的使图表(*)交换的$A$同构。

b) 基于上述结果，只需在$\mathfrak{I}$幂零时证明$\overline{B}$的平展提升B是存在的即可。通过逐次拆解，可以进而归结到$\mathfrak{I}$平方为零的情形。首先假设$\overline{B}$是一个标准平展$\overline{A}$代数，具有$\overline{C}_{\overline{g}}$的形状，其中$\overline{C} = \overline{A}[X]/(\overline{f})$，$\overline{f}$是首一的，且其导式$\overline{f}'$在$\overline{C}_{\overline{g}}$中是可逆的。于是若$f$是$\overline{f}$在$A[X]$中的一个首一提升，并且$g$是$\overline{g}$在$C = A[X]/(f)$中的一个提升，则易见$B = C_g$是$\overline{B}$的一个平展提升。在一般情形，令$S = \operatorname{Spec}(A)$，$\overline{S} = \operatorname{Spec}(\overline{A})$，$\overline{X} = \operatorname{Spec}(\overline{B})$。根据定理1，对任意$s \in \overline{S}$和$\overline{X}$的位于$s$上的任意一点$\overline{x}$，均有$S$的一个仿射开集$S_{a_i}$和$\overline{X}$的一个包含$\overline{x}$的仿射开集$\overline{X}_{\overline{b}_i}$，使得$\overline{X}_{\overline{b}_i}$的仿射环是$\overline{S}_{a_i} = S_{a_i} \times_S \overline{S}$的仿射环上的一个标准平展代数。根据前面的结果，存在一个在S_{a_i}上平展的仿射概形X_i（从而在S上也平展），它是$\overline{X}_{\overline{b}_i}$的提升。对任意一对指标$(i,j)$，令$X_{i,j}$是$X_i$的以$\overline{X}_{\overline{b}_i} \cap \overline{X}_{\overline{b}_j} = \overline{X}_{\overline{b}_i\overline{b}_j}$为底空间的仿射开子概形。则由于$X_{i,j}$和$X_{j,i}$都是$\overline{X}_{\overline{b}_i\overline{b}_j}$的提升，并且在$S$上平展，故由a)知，存在唯一的$S$同构$u_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$作为$\overline{X}_{\overline{b}_i\overline{b}_j}$的恒同自同构的提升。把这些$X_{i,j}$通过诸同构$u_{i,j}$黏合起来就可以得到一个$S$概形$X$。事实上，把平展代数的提升唯一性应用到三项交集$\overline{X}_{\overline{b}_i} \cap \overline{X}_{\overline{b}_j} \cap \overline{X}_{\overline{b}_k}$上就可以证明黏合条件（EGA 0.4.1.7）是满足的。另外X也是仿射的（EGA I.5.1.9）。从而它的仿射环B就是$\overline{B}$的一个提升，且在A上是平展的。

§ 2 Jacobi 判别法

定理 5. — 设A是环，$C = A[X_1, \ldots, X_n]$，$\mathfrak{I}$是C的理想，$B = C/\mathfrak{I}$，$\mathfrak{q}$是B的一个素理想，$\mathfrak{r}$是它在C中的逆像。

1) 以下诸条件是等价的：

(1) B在$\mathfrak{q}$的近旁在A上是孤直的。

(2) $\mathfrak{I}$中存在多项式$P_1, \ldots, P_n$使得$D = \det\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}\right) \notin \mathfrak{r}$。

(3) 存在$P_1, \ldots, P_n \in \mathfrak{I}$使得$D$在$B_{\mathfrak{q}}$中的像是可逆的。

2) 以下诸条件是等价的：

(1) B在$\mathfrak{q}$的近旁在A上是平展的。

(2) 存在$f \in C - \mathfrak{r}$和$P_1, \ldots, P_n \in \mathfrak{I}$使得：

a) 诸$P_1, \ldots, P_n$在$\mathfrak{I}_f$中的像可以生成$\mathfrak{I}_f$；

b) $\det\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}\right) \notin \mathfrak{r}$。

进而若上述条件成立，且$Q_1, \ldots, Q_n \in \mathfrak{I}$，则$Q_1, \ldots, Q_n$可以生成$\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}}$的充分必要条件是$\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial X_j}\right) \notin \mathfrak{r}$。

证明：1) **孤直性**。需要一个引理：

引理 — 设R是局部环，$\mathfrak{m}$是它的极大理想，M是一个n秩自由R模，P是M的一个子模。若$(P_i)_{i \in I}$是P的一族生成元，则$M/P = 0$的充分必要条件是，在P_i中可以找到$P_1, \ldots, P_n$，使得它们在$\overline{M} = M/\mathfrak{m}M$中的像构成$\overline{M}$在$k = A/\mathfrak{m}$上的一个基底。

证明：若$M/P = 0$，则$M = P$，从而$\overline{M} = \overline{P}$，结论是显然的。

反之，若有 $P_1,\ldots,P_n \in P$，且它们在 $\overline{M}$ 中的像 $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$ 构成 $\overline{M}$ 的一个基底，则易见 $\overline{P} \to \overline{M}$ 是满的，从而由 Nakayama 引理知，$M = P$。

回到定理 5 的证明。

由于 B 在 A 上是有限型的，故知 $\Omega_{B/A}$ 是一个有限型 B 模，从而 $\Omega_{B/A}$ 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁是零的充分必要条件是 $(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} = 0$。然而 $(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} = \Omega_{B_{\mathfrak{q}}/A} = \big(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_{\mathfrak{q}} dX_i\big)/(d\mathfrak{J}_{\mathfrak{q}})$。设 $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathfrak{J}_{\mathfrak{q}}$ 的一个生成元组，则 $(dP_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $d\mathfrak{J}_{\mathfrak{q}}$ 的一个生成元组。把上述引理应用到 $R = B_{\mathfrak{q}},\ M = \sum\limits_{i=1}^{n} B_{\mathfrak{q}} dX_i,\ P = (d\mathfrak{J}_{\mathfrak{q}})$ 上。故得 $(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}}$ 等于零的充分必要条件是，在 P_λ 中可以找到 $P_1,\ldots,P_n$，使得诸 $(\overline{dP_i})_{i=1,\ldots,n}$ 构成 $\overline{M}$ 在 $\kappa(\mathfrak{q})$ 上的一个基底。但现在

$$dP_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial X_j} dX_j \quad 。$$

从而诸 $(\overline{dP_i})_{i=1,\ldots,n}$ 构成 $\overline{M}$ 的基底的充分必要条件是 $\det\big(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}\big) \neq 0$（在 $\kappa(\mathfrak{q})$ 中），亦即 $\det\big(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}\big)$ 在 $B_{\mathfrak{q}}$ 中是可逆的。这就证明了 (1) 和 (3) 的等价性，另外 (2) 显然等价于 (3)，从而证明了 1)。

2) **平展性**。

首先证明 (2) ⇒ (1)。

设 $B_f = C_f(P_1,\ldots,P_n),\ D = \det\big(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}\big)$，并设 d 是 D 在 B_f 中的像。下面证明 $(B_f)_d$ 是一个平展 A 代数（由此立知，若 $D \notin \mathfrak{r}$，则 B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是平展的）。设 E 是一个 A 代数，$\mathfrak{J}$ 是 E 的一个平方为零的理想，$\overline{u}: B_d \to \overline{E} = E/\mathfrak{J}$ 是一个 A 同态。我们需要找到一个 A 同态 $u: B_d \to E$ 来提升 $\overline{u}$。方法与构造标准平展代数的方法类似（第二章命题 8）。

存在图表

$$\begin{tikzcd} C = A[X_1,\ldots,X_n] \arrow[r] & C_f \arrow[r] & B_f \arrow[r] & B_d \arrow[dr, "\overline{u}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & & & & E/\mathfrak{J} = \overline{E} \end{tikzcd}$$

下面构造一个 $u: B_d \to E$ 使得 $p \circ u = \overline{u}$。

设 $\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n$ 是 $X_1,\ldots,X_n$ 在 $\overline{E}$ 中的像。则有 $P_i(\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n) = 0\ (i = 1,\ldots,n)$。设 $e_1,\ldots,e_n$ 是诸 $\overline{e}_i$ 在 E 中的提升，则有 $P_i(e_1,\ldots,e_n) \in \mathfrak{J}$。

我们希望用 $\mathfrak{J}$ 中的一些元素 ν_i 来适当调整 e_i 以使得

$$P_i(e_1+\nu_1,\ldots,e_n+\nu_n) \;=\; 0 \qquad (i = 1,\ldots,n) \quad 。$$

为此写出展开式 $P_i(e_1+\nu_1,\ldots,e_n+\nu_n) = P_i(e_1,\ldots,e_n) + \sum\limits_{j=1}^{n} \nu_j \frac{\partial P_i}{\partial X_j}(e_1,\ldots,e_n) +$ 高阶项。注意这些高阶项都等于零，因为 $\nu_i \in \mathfrak{J}$ 并且 $\mathfrak{J}^2 = 0$。

于是问题变成解线性方程组，并可使用 Cramer 法则，因为 $\det\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}\right)(e_1,\ldots,e_n)$ 是可逆的。从而可以找到唯一的 ν_j，并由此给出同态 u（与标准平展代数的情形类似）。

下面证明 (1) ⇒ (2)。

假设 B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁是平展的。则 B 在该近旁是孤直的，根据 1，在 $\mathfrak{I}$ 中有多项式 $Q_1,\ldots,Q_n$，使得 $\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial X_j}\right)\notin\mathfrak{r}$。现在证明存在 $f\in C-\mathfrak{r}$ 使得诸 Q_i 在 $\mathfrak{I}_f$ 中的像可以生成 $\mathfrak{I}_f$。

设 $B'=C/(Q_1,\ldots,Q_n)$。由于 (2) ⇒ (1)，故知 B' 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁是平展的。考虑正合序列

$$0\longrightarrow\mathfrak{I}'\longrightarrow B'\longrightarrow B\longrightarrow 0\quad 。$$

设 $\mathfrak{q}'$ 是 $\mathfrak{q}$ 在 B' 中的逆像；则需要证明 $\mathfrak{I}'$ 在 $\mathfrak{q}'$ 的近旁等于零。由于 B 和 B' 都是有限呈示的，故知 $\mathfrak{I}'$ 是（在 $\mathfrak{q}'$ 的近旁）有限型的，从而只需证明 $\mathfrak{I}'_{\mathfrak{q}'}=0$。

由于 ${\mathfrak{I}'_{\mathfrak{q}'}}^2\subseteq\mathrm{rad}(B'_{\mathfrak{q}'})$，故只需证明 $\mathfrak{I}'_{\mathfrak{q}'}/{\mathfrak{I}'_{\mathfrak{q}'}}^2=0$（Nakayama 引理）。考虑正合序列

$$(*)\qquad 0\longrightarrow\mathfrak{I}'/\mathfrak{I}'^2\longrightarrow B/\mathfrak{I}'^2\longrightarrow B\longrightarrow 0$$

由于 B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁是平展的，故知该序列在 $\mathfrak{q}$ 的近旁是可裂的 (参考第五章定理 1 之 1 的 a) ⇒ b) 的证明）。在 $\mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{q}'$ 处对 (*) 取局部化后仍然是可裂正合的，令 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{q}$ 在 A 中的逆像，则与 $\kappa(\mathfrak{p})$ 取张量积后还是正合的。从而有下面的正合序列

$$0\longrightarrow\overline{(\mathfrak{I}'/\mathfrak{I}'^2)}_{\mathfrak{q}'}\longrightarrow\overline{(B'/\mathfrak{I}'^2)}_{\mathfrak{q}'}\xrightarrow{u}\overline{B}_{\mathfrak{q}}\longrightarrow 0$$

下面证明 u 是一个同构。

显然只需证明 $\overline{B'_{\mathfrak{q}'}}\simeq\overline{B_{\mathfrak{q}}}$ 即可。由于 B' 在 $\mathfrak{q}'$ 处和孤直的，故知 $\overline{B'}$ 是一些域的乘积，并且 $\overline{B'_{\mathfrak{q}'}}$（作为 $\overline{B'}$ 的局部分支）是一个域。这表明同态 $\overline{B'_{\mathfrak{q}'}}\to\overline{B_{\mathfrak{q}}}$ 既是满的又是单的，从而是一个同构。于是得到 $\overline{(\mathfrak{I}'/\mathfrak{I}'^2)}_{\mathfrak{q}'}=\overline{\mathfrak{I}'_{\mathfrak{q}'}/{\mathfrak{I}'_{\mathfrak{q}'}}^2}=0$，再根据 Nakayama 引理，$\mathfrak{I}'_{\mathfrak{q}'}/{\mathfrak{I}'_{\mathfrak{q}'}}^2=0$。

现在证明 2) 的最后一部分。

若 $\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial X_j}\right)\notin\mathfrak{r}$，则由上面的论证可知，诸 Q_i 可以生成 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}}$。反之，若诸 Q_i 可以生成 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}}$，则诸 $(dQ_i)_{i=1,\ldots,n}$ 可以生成 $d\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}}$，且由于 B 在 $\mathfrak{q}$ 处是孤直的，故有 $d\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}}=\bigoplus_{i=1}^{n}B_{\mathfrak{q}}dX_i$，从而 $\overline{d\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}}}=\bigoplus_{i=1}^{n}\kappa(\mathfrak{q})dX_i$ 是 n 维的，因为诸 $\overline{dQ_i}$ 可以生成 $\overline{d\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}}}$，所以它们构成 $\overline{d\mathfrak{I}_{\mathfrak{r}}}$ 在 $\kappa(\mathfrak{q})$ 上的一个基底，从而 $\det\left(\frac{\partial\overline{Q_i}}{\partial X_j}\right)\neq 0$，亦即 $\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial X_j}\right)\notin\mathfrak{r}$。

Jacobi 判别法的几何意义

设 k 是域，$\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$, $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_m)$，$k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ 是以诸 X_i,Y_j 为变元的多项式环，$\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_r)$ 是 $k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ 中的一族多项式 (有限个）。设 $A=k[\mathbf{X}]$, $B=k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]/(\mathbf{f})$；并且把 B 看作是一个 A 代数。

设Σ是在$\mathrm{Spec}(A)$上的m维仿射空间中由$(\mathbf{f})$所定义的子概形，$(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$是$\Sigma$的一个有理点。下面我们把“$B$（或者$\Sigma$）在$(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$（它是$\mathrm{Spec}(B)$的一个闭点）处在$A$上是平展的”翻译成几何语言。

根据Jacobi判别法，这相当于说，在$(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$的近旁，$(\mathbf{f})$可由$m$个方程$f_1$, $\ldots, f_m$所生成，并且$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_l}\right)$在$(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$处是可逆的。考虑$\Sigma$在$(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$处的切空间$T_0$。这是$k^{n+m}$的一个子空间，由线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial X_j}dX_j+\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial Y_l}dY_l \ = \ 0 \qquad i=1,\ldots,m$$

所定义。

以V来记A所对应的多样体，自然投影定义了Σ到V的一个典范映射，它在切空间上诱导了一个线性映射

$$\varphi \ : \ T_0 \ \longrightarrow \ k^n \qquad \varphi(dX_j) \ = \ dX_j \ , \ \varphi(dY_l) \ = \ 0 \ 。$$

说“$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_l}\right)$在$(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$处是可逆的”相当于说“任给$k^n$（$=\mathrm{Spec}(A)$在$(\mathbf{x}_0)$处的切空间）中的一点$\alpha$，均可找到$T_0$中的唯一一点$\beta$，使得$\varphi(\beta)=\alpha$”。事实上，方程组：

$$\sum_{1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial Y_l}\beta_l \ = \ -\sum_{1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\alpha_j$$

总有唯一解（Cramer法则），因为$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_l}\right)(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\neq 0$。

从而Σ在$(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$处在$A$上平展的充分必要条件是，该点处的切映射是一个一一映射。

于是代数几何中的平展态射可与微分几何中的覆叠映射相类比，然而一般来说，在代数几何中没有类似于反函数定理这样的东西（至少对于Zariski拓扑来说）：一个平展态射未必就是一个局部同构。

第六章　平展代数的例子

命题1. — 设A是环，$a \in A$，n是一个$\geqslant 1$的整数，$B = A[T]/(T^n - a)$。则B在A上是平展的当且仅当$n = 1$或na在A中是可逆的。

证明：B作为A代数是有限呈示的。进而由于B在A上是自由的，故知B在A上是平坦的。为了证明B是平展的，只需在纤维上考虑即可 (第五章定理2的推论1)。设$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$，$k = \kappa(\mathfrak{p})$，$\overline{B} = B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = k[T]/(T^n - \alpha)$，其中$\alpha$是$a$在$k$中的像。把Jacobi判别法应用到$\overline{B}$上可知：$\overline{B}$在$k$上平展的充分必要条件是，$T^n - \alpha$的导多项式$nT^{n-1}$在$\overline{B}$中的像是可逆的，也就是说，$nT^{n-1}$与$T^n - \alpha$是互素的。该条件在$n = 1$或$n\alpha \neq 0$ (在k中) 时显然成立，而当n是k的特征的倍数时或者$n \neq 1$且$\alpha = 0$时显然不成立，故得结论。

注解 — 若$a = 1$，且n在A中可逆，则平展A代数$B = A[T]/(T^n - 1)$连同T的像$t \in B$可以表识函子μ_n，这里μ_n的定义如下：对任意A代数C，$\mu_n(C) = C$中的n次单位根的集合。

整体化

对于一个概形S，下面将定义平展$\mathscr{O}_S$代数层的概念，并且构造一个非平凡的例子。

定义1. — 设S是概形，$\mathscr{B}$是一个拟凝聚$\mathscr{O}_S$代数层，所谓$\mathscr{B}$在S上是平展的，是指对任意$s \in S$，均可找到s在S中的一个仿射开邻域$U = \operatorname{Spec}(A)$，使得$\Gamma(U, \mathscr{B})$是一个平展$A$代数。

命题1可以按照下面的方式来进行整体化。

命题2. — 设S是概形，$\mathscr{L}$是一个可逆$\mathscr{O}_S$模层，n是一个整数，并且$u : \mathscr{L}^{\otimes n} \to \mathscr{O}_S$是一个同构。则在$\mathscr{O}_S$模层$\mathscr{B} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathscr{L}^{\otimes i}$上可以定义一个$\mathscr{O}_S$代数层的结构，使得当$n$在$S$上可逆时$\mathscr{B}$在$S$上是平展的。

证明：在$\mathscr{B}$上给出一个$\mathscr{O}_S$代数层的结构等价于给出一个态射

$$\mu \ : \ \mathscr{B} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{B} \ \longrightarrow \ \mathscr{B}$$

并满足适当的条件 (参考EGA 0_{I} §4)。

于是需要定义

$$\mu_{i,j}\ :\ \mathscr{L}^{\otimes i}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{L}^{\otimes j}\ \longrightarrow\ \mathscr{B}\ ,\quad 0\leqslant i,j\leqslant n-1\ 。$$

有两种可能性：

— 若 $i+j<n$，则取 $\mu_{i,j}$ 是典范同构

$$\mathscr{L}^{\otimes i}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{L}^{\otimes j}\ \xrightarrow{\sim}\ \mathscr{L}^{\otimes(i+j)}\ 。$$

— 若 $i+j\geqslant n$，则有 $i+j=n+k$ 且 $k<n$。此时取 $\mu_{i,j}$ 是合成同构

$$\mathscr{L}^{\otimes i}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{L}^{\otimes j}\ \xrightarrow{\sim}\ \mathscr{L}^{\otimes(i+j)}\ =\ \mathscr{L}^{\otimes(n+k)}\ \xrightarrow{u\otimes 1}\ \mathscr{L}^{\otimes k}\ 。$$

验证 μ 在 $\mathscr{B}$ 上定义了 $\mathscr{O}_S$ 代数层结构的事实可以在 S 上局部地进行。由于 $\mathscr{L}$ 是可逆层，故可假设 S 是仿射的，环为 A，并使得 $\mathscr{L}\simeq\mathscr{O}_S$，从而 $\mathscr{L}$ 可由一个截面 e 所生成。此时 $\mathscr{L}^{\otimes i}$ 可由 $e^{\otimes i}$ 所生成，并且同构 $u:\mathscr{L}^{\otimes n}\to\mathscr{O}_S$ 把 $e^{\otimes n}$ 映到 A 的一个可逆元 a 上。于是 $\mathscr{B}$ 是一个自由 $\mathscr{O}_S$ 模层，以 $1,e,\ldots,e^{\otimes(n-1)}$ 为基底，并且 μ 的定义可以写成下面的形状：

$$\mu(e^{\otimes i}\otimes e^{\otimes j})\ =\ e^{\otimes(i+j)}\qquad i+j<n$$

$$\mu(e^{\otimes i}\otimes e^{\otimes j})\ =\ ae^{\otimes k}\qquad i+j=n+k\ 。$$

故知 μ 在 $\mathscr{B}$ 上定义了一个 $\mathscr{O}_S$ 代数层的结构。更确切地说，$\Gamma(S,\mathscr{B})$ 同构于 A 代数 $A[T]/(T^n-a)$。从而最后的部分可由命题 1 立得。

下面将对某个有限阶可逆层 $\mathscr{L}$ 具体地写出对应的平展代数，

设 k 是一个特征 $\neq 2$ 的域，A 是 k 代数 $k[X,Y]/(F)$，其中 $F=Y^2-(X-2)P$，P 是 $k[X]$ 中的一个 2 次首一多项式，且不以 a 为零点。换句话说，$S=\mathrm{Spec}(A)$ 是 k 上的一条亏格为 1 的代数曲线的一个开集，并且当 P 没有重根时，这是一条椭圆曲线。下面我们将在 S 上构造一个非平凡的 2 阶可逆层 $\mathscr{L}$。具体来说，我们将证明，若 H 是 S 的有理点 $(a,0)$，则由 H 所定义的除子 $\mathrm{div}(H)$ 是 A 的一个理想 $\mathfrak{I}$，它在 S 上局部地是主除子，整体上却不是主除子，但又使 $\mathfrak{I}^2$ 成为主除子。

按照定义，$\mathfrak{I}=\mathrm{div}(H)=\{a\in A\,|\,a(H)=0\}$。理想 $\mathfrak{I}$ 在 S 上局部是主除子，因为它在 $V(P)$ 的补集上可由 y 所生成，并且在 $S\smallsetminus\{H\}$ 上可由 $X-a$ 所生成。另一方面，$\mathfrak{I}^2$ 是由 $X-a$ 所生成的主理想。只消再证明 $\mathfrak{I}$ 本身不是主理想。假如 $\mathfrak{I}$ 可由一个元素 $z\in A$ 生成。则由于 A 是自由 $k[X]$ 模，基底为 $1,y$，故有 $z=Q+yR$，其中 Q 和 R 都落在 $k[X]$ 中。然而曲线 S 对于 Ox 轴是对称的，从而又有 $\mathrm{div}(H)=(Q-yR)$，这表明 $2\mathrm{div}(H)=(Q^2-y^2R^2)=(Q^2-(X-a)PR^2)$。已知 $2\mathrm{div}(H)=(X-a)$，故可找到 A 的可逆元 f 使得 $Q^2-(X-a)PR^2=f(X-a)$。然而 $X-a$ 和 $Q^2-(X-a)PR^2$ 都是 $k[X]$ 的元素，且 A 在 $k[X]$ 上是忠实平坦的。故知 f 是 $k[X]$ 的一个可逆元，从而是一个非零常数 b。于是 $Q^2-(X-a)PR^2=b(X-a)$，这与 P 是二次多项式相矛盾，从而 $\mathrm{div}(H)$ 不可能是主除子。

现在开始构造A代数B（参考命题2）。作为A模，$B = A \oplus \mathfrak{I}$。存在$A$模同态$A^2 \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{I} \to 0$，其定义是$\varphi(e_1) = y,\ \varphi(e_2) = X - \alpha$，其中$(e_1, e_2)$是$A^2$的典范基底，易见

$$(X-\alpha)e_1 \;=\; ye_2\,, \qquad ye_1 \;=\; Pe_2 \;\;。$$

且容易证明它们可以生成$\mathrm{Ker}(\varphi)$。从而B作为A代数可由$\varphi(e_1)$和$\varphi(e_2)$所生成，我们把这两个元素仍记为e_1, e_2。下面绘制B的乘法表：

设u是$\mathfrak{I}^2 = (X-a)A$到A的同构，把$X-a$映到1。则有

$$u(e_1^2) \;=\; u(y^2) \;=\; u((X-a)P) \;=\; P$$

$$u(e_1e_2) \;=\; u(y(X-a)) \;=\; y$$

$$u(e_2^2) \;=\; u((X-a)^2) \;=\; X-a \;\;。$$

于是可以验证，B等于$A[e_1, e_2]$除以一个理想$\mathfrak{J}$后的商，这个$\mathfrak{J}$是由下列元素生成的：

$$(X-a)e_1 - ye_2\,, \quad ye_1 - Pe_2\,, \quad e_1^2 - P\,, \quad e_1e_2 - y\,, \quad e_2^2 - (X-a)$$

（其实可以省略$e_1e_2 - y$，因为它是其它元素的线性组合）。由于k的特征不是2，故知B在A上是平展的；进而，在由$X-a$所定义的开集上有$B \simeq A[e_2]/(e_2^2 - (X-a))$，而由在$P$所定义的开集上则有$B \simeq A[e_1]/(e_1^2 - P)$。

平展代数的其它例子

设k是一个域，$B = k[X, Y]$。假设$\mathrm{char}(k) \neq 2$。群$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$在平面$k^2$上的自然作用$(x, y) \mapsto (-x, -y)$（中心对称）给出$G$在$B$上的一个作用。设$A = B^G$是$G$不动的子环。则$A$可由$u = X^2, v = Y^2, w = XY$所生成，并满足关系式$uv = w^2$，从而$A = k[u, v, w]/(uv - w^2)$（$k^3$中的一个二次锥面）。进而$B$是一个有限$A$代数（$X$和$Y$在$A$ 上显然是整型的），且$B = A[X, Y]/(X^2 - u, Y^2 - v, XY - w)$。

现在把Jacobi判别法应用到多项式$P_1 = X^2 - u,\ P_2 = Y^2 - v,\ P_3 = XY - w$上，

$$J \;=\; \begin{pmatrix} 2X & 0 \\ 0 & 2Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

2阶子式的值分别是$4XY, -2X^2, -2Y^2$。在原点（即素理想(X, Y)）之外的任何点处，至少有一个子式是可逆的，对应的多项式可以生成理想$(X^2 - u, Y^2 - v, XY - w)$。从而$B$在$A$上除$\mathfrak{p} = (X, Y)$之外都是平展的。

注解 — 此例将在第十章被推广。

第七章　稳恒性质，Hensel 环的例子

§1　预备知识（根据 J. Tate 的讲义）

设 A 是环，B 是有限自由 A 代数，基底为 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$。则对偶 A 模 B^* 也是自由的，并有对偶基底 $(e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$。在下文中，我们将把 B^* 按下面的方式看作是一个 B 模：

对于 $u\in B^*$ 和 $b\in B$，定义 bu 是 A 线性映射 $b'\mapsto u(bb')$。

现在证明 B 模 B^* 中的元素 $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i e_i^*$ 恰好等于 $\mathrm{Tr}_{B/A}: B\to A$（迹同态）。

事实上，对于 $b\in B$，设 $be_i=\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}e_j$，其中 $c_{ij}\in A$。则有

$$\sum_{i=1}^{n} e_i e_i^*(b) \;=\; \sum_{i=1}^{n} e_i^*(be_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\delta_{ij} \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \;=\; \mathrm{Tr}(b) \quad 。$$

证毕。

下面考虑 $B=A[X]/(f)$ 的情形，其中 $f(X)=X^n+\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_iX^i$。以 x 来记 X 在 B 中的典范像，我们想要确定一下 $1,x,\ldots,x^{n-1}$ 在 B^* 中的对偶基底。

首先注意到 $B[X]$ 中的下述等式：$f(X)=(X-x)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_iX^i\Big)$，$b_i\in B$。

命题 0. — 1°) 设 $\tau\in B^*$ 是元素：$\tau(x^{n-1})=1$ 且当 $0\leqslant i\leqslant n-2$ 时 $\tau(x^i)=0$。则 $(b_i\tau)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ 是 $(1,x,\ldots,x^{n-1})$ 的对偶基底。

2°) 在 B 模 B^* 中有等式 $\mathrm{Tr}_{B/A}=f'(x)\tau$。

证明：令 $C=A[X]$ 和 $D=B[X]$，则 D 是自由 C 模，基底为 $1,x,\ldots,x^{n-1}$。我们把 τ 在 $\mathrm{Hom}_C(B\otimes_A C,C)$ 中所导出的元素仍记作 τ，则有

$$\tau(1) \;=\; \tau(x) \;=\; \cdots \;=\; \tau(x^{n-2}) \;=\; 0\,, \qquad \tau(x^{n-1}) \;=\; 1$$

设 $\sigma: D\to C$ 是下式所给出的 C 模同态

$$\sigma(x^i) \;=\; X^i \qquad i=0,\ldots,n-1 \quad 。$$

引理 1. — 对任意 $h(X)\in D$，均有 $f(X)\tau(h(X))=\sigma((X-x)h(X))$。

两边都是C线性的，故只需考虑$h(X)=x^i$。

情形一： $0\leqslant i\leqslant n-2$。此时$\tau(x^i)=0$，故左边等于零，而右边则是

$$\sigma((X-x)x^i)\ =\ XX^i-X^{i+1}\ =\ 0\quad 。$$

情形二： $h(X)=x^{n-1}$。此时$\sigma((X-x)h(X))=\sigma((X-x)x^{n-1})=\sigma(Xx^{n-1}+\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_ix^i)=X^n+\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_iX^i=f(X)$且$f(X)\tau(x^{n-1})=f(X)$，故得结论。

命题0的1°)可由引理1推出。事实上，对于每个$i=0,\ldots,n-1$，令$h(X)=x^i\big(\sum\limits_{j=0}^{n-1}b_jX^j\big)$（$b_j$就是上面所定义的系数），则由引理1知

$$f(X)\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\tau(x^ib_j)X^j\Big)\ =\ \sigma(x^if(X))\ =\ X^if(X)\quad 。$$

由于f是首一的，从而在C中不是零因子，故有：

$$\sum_{j=0}^{n-1}\tau(x^ib_j)X^j\ =\ X^i\ \Longrightarrow\ \tau(X^ib_j)\ =\ \delta_{ij}$$

这相当于说，诸$b_i\tau$构成(x^j)的对偶基底。

2°) **迹的计算**

$$\mathrm{Tr}_{B/A}\ =\ \sum_{i=1}^{n}e_ie_i^*\ =\ \sum_{i=0}^{n-1}x^i(b_i\tau)\ =\ \Big(\sum_{i=0}^{n-1}x^ib_i\Big)\tau\ =\ f'(x)\tau\quad 。$$

推论 — 对任意$y\in B$，均有 $f'(x).y\ =\ \sum\limits_{i=0}^{n-1}\mathrm{Tr}_{B/A}(b_iy)x^i$。

事实上，由于$(b_i\tau)$是(x^i)的对偶基底，故有$f'(x)y=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(b_i\tau)(f'(x)y)x^i$。另一方面，$(b_i\tau)(f'(x)y)=(b_if'(x))\tau(y)=(f'(x)\tau)(b_iy)=\mathrm{Tr}_{B/A}(b_iy)$。证毕。

§ 2 稳恒定理

命题 1. — 设A是环，B是平展A代数。若A是**既约**的，则B也是**既约**的。

证明：这对于$\mathrm{Spec}(A)$和$\mathrm{Spec}(B)$来说是局部性质，故可假设B是一个标准平展A代数（第五章定理1），具有C_f的形状，且$C=A[X]/(f)$，其中f是首一的。以x来记X在C中的像。

引理 — 设 $\mathfrak{M}$（相应的，$\mathfrak{N}$）是 A（相应的，C）的诣零根。则有

$$f'(x)\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}C$$

证明：根据上面的推论，对任意 $y \in C$，均有

$$f'(x)y = \sum_{0}^{n-1} \mathrm{Tr}_{C/A}(b_i y)x^i \quad 。$$

取 $y \in \mathfrak{N}$，则 $B_i y$ 也都属于 $\mathfrak{N}$。另一方面，若 $z \in \mathfrak{N}$，则有 $\mathrm{Tr}_{C/A}(z) \in \mathfrak{M}$（由此立得结论）。事实上，对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$，$z$ 在 $C \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ 中的像都是幂零的，从而在 $\kappa(\mathfrak{p})$ 中的迹等于零。这表明 $\mathrm{Tr}_{C/A}(z) \in \mathfrak{p}$。这对 A 的任意素理想 $\mathfrak{p}$ 都成立，从而 $\mathrm{Tr}_{C/A}(z) \in \mathfrak{M}$。

下面使用引理来证明命题 1。由于 A 被假定为既约的。故有 $f'(x)\mathfrak{N} = 0$。利用 $f'(x)$ 来局部化，则有 $f'(x)(\mathrm{nilrad}(B)) = 0$，这表明 B 是既约的，因为 $f'(x)$ 在 B 中可逆。

定义 — 所谓一个环 A 是正规的，是指对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$，$A_{\mathfrak{p}}$ 都是整且整闭的。

命题 2. — 设 A 是环，B 是平展 A 代数。若 A 是**正规**的，则 B 也是**正规**的。

证明：可以限于考虑 B 是标准平坦代数的情形，$B = C_f$，其中 $C = A[X]/(f)$。取局部化，又可归结到 A 是局部环的情形，从而 A 是整的。设 K 是 A 的分式域。则 $L = C \otimes_A K$ 是一个有限 K 代数，并且包含 C。设 C' 是 C 在 L 中的相对整闭包，y' 是 C' 的一个元素。采用 §1 的记号。由于 $y' \in C'$，故也有 $b_i y' \in C'$。然而 A 是正规的，从而 $\mathrm{Tr}_{L/K}(b_i y') \in A$（Bourbaki《交换代数学》, V, §1, 命题 17 的推论 2）。于是由命题 0 的推论可知，$f'(x)y'$ 落在 C 中。故有 $f'(x)C' \subseteq C$，从而 $C_{f'}$ 是正规的。

习题：若 A 是正则的，则任何平展 A 代数 B 都是正则的。

§ 3 Hensel 局部环的另一些本征性质

设 A 是局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想，k 是剩余类域。

命题 3. — 以下诸条件是等价的:

(1) A 是 Hensel 的。

(2) 对任意首一多项式 $P \in A[X]$，它在 $k[X]$ 中的像 $\overline{P}$ 在 k 中的任何**单根** $\overline{a}$ 都可以提升为 P 在 A 中的一个根。

(3) 若 B 在 A 上是平展的，$\mathfrak{n} \in \mathrm{Spec}(B)$ 位于 $\mathfrak{m}$ 之上，并且 $k(\mathfrak{n}) = k$，则 $A \to B_{\mathfrak{n}}$ 是一个同构。

进而，若 B 是一个有限型 A 代数，并且在 $\mathfrak{n}$ 处（位于 $\mathfrak{m}$ 之上）是拟有限的，则 $B_{\mathfrak{n}}$ 在 A 上是**有限**的，并且是 B 的一个直和因子。

证明：1) ⇒ 2)。若 $\overline{a}$ 是 $\overline{P}$ 的一个单根，则有 $\overline{P} = (X-\overline{a})\overline{Q}$，并且 $(\overline{Q}, X-\overline{a}) = 1$。从而只需应用第一章命题5即可。

2) ⇒ 3)。可以假设 B 是一个标准平展代数（$B = C_{f'}, C = A[X]/f$，f 是首一的）。由于 $k(\mathfrak{n}) = k$，故知 B 的素理想 $\mathfrak{n}$ 对应于 f 的像 $\overline{f} \in k[X]$ 的一个根 $\overline{a}$。由于 f' 在 $\mathfrak{n}$ 处是可逆的，故知 $\overline{a}$ 是 $\overline{f}$ 的一个单根。条件2)表明，$\overline{a}$ 可以提升为 f 的一个根 a。从而 $f = (X-a)g$，其中 f 是 $A[X]$ 中的一个首一多项式。利用第一章命题5的 (4) ⇒ (3) 的证明方法，同样可以证明

$$C \;=\; A[X]/(f) \;\longrightarrow\; A[X]/(X-a) \times A[X]/(f)$$

是一一的，因为它在模 $\mathfrak{m}$ 后是如此。于是只需注意到（基于 $\overline{a}$ 的选择）C 的理想 $\mathfrak{n}$ 恰好对应到 C 的直和因子 $A[X]/(X-a)$ 的极大理想，故有 $A \simeq C_{\mathfrak{n}} \simeq B_{\mathfrak{n}}$。

3) ⇒ 1)。设 B 是一个有限自由 A 代数，下面证明 B 是完全分解的。在第一章 §4 中曾构造了平展 A 代数 E，它可以表识 B 的幂等元。于是为了证明 B 是完全分解的，只需证明 $\overline{B} = B \otimes_A k$ 的任何幂等元 $\overline{e}$ 都可以提升为 B 的一个幂等元 e 即可。幂等元 $\overline{e}$ 对应于一个 A 同态 $\overline{u} : E \to k$。设 $\mathfrak{n} = \mathrm{Ker}(\overline{u})$。则 $\overline{u}$ 可以分解为 $E \xrightarrow{\text{典范}} E_{\mathfrak{n}} \xrightarrow{\overline{v}} k$。提升幂等元 $\overline{e}$ 的问题可以归结到把 $\overline{u}$ 提升为一个 A 同态 $u : E \to A$ 的问题。这也相当于要把 $\overline{v}$ 提升为一个 A 同态 $v : E_{\mathfrak{n}} \to A$。现在 $E_{\mathfrak{n}}$ 是一个平展 A 代数的局部化，并且剩余扩张是平凡的。根据3)，典范同态 $A \to E_{\mathfrak{n}}$ 是一个同构，这就得到了 v。

下面证明命题3最后一段关于拟有限 A 代数的陈述。设 B 是一个有限型 A 代数，在 $\mathfrak{n}$ 处及 $\mathfrak{m}$ 上是拟有限的。根据 Zariski 主定理（第四章定理1的推论2），可以找到 $f \in B - \mathfrak{n}$，使得 $\mathrm{Spec}(B_f)$ 是某个 $\mathrm{Spec}(C)$（C 在 A 上有限）的开集。由于 A 是 Hensel 的。故知 C 是完全分解的；从而 $B_{\mathfrak{n}}$ 是 C 的一个直和因子，进而是 B_f 的一个直和因子。故有开浸入 $\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{n}}) \to \mathrm{Spec}(B_f)$，它与开浸入 $\mathrm{Spec}(B_f) \to \mathrm{Spec}(B)$ 的合成又给出开浸入 $\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{n}}) \to \mathrm{Spec}(B)$。另一方面，$B_{\mathfrak{n}}$ 是 C 的直和因子，从而在 A 上是有限的，自然在 B 上也是有限的。而有限态射都是闭态射，从而 $\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{n}})$ 在 $\mathrm{Spec}(B)$ 中又是闭的；这样一来 $B_{\mathfrak{n}}$ 就是 B 的一个直和因子。

§ 4　Hensel 局部环的例子

命题 4. — 设 k 是一个完备乘值域，且赋值不是离散的，X 是一个拓扑空间，x 是 X 中的一点，A 是由 x 处的 k 值连续函数芽所组成的局部环，则 A 是 Hensel 的。

首先证明下面的引理：

引理 — 设 $F = T^n + \sum_0^{n-1} Y_i T^i$ 是 $k[Y_0, \ldots, Y_{n-1}, T]$ 的一个元素。对于 k^n 的一点 $\mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_{n-1})$，令

$$F(\mathbf{y}, T) \;=\; T^n + \sum_0^{n-1} y_i T^i \;\in\; k[T] \;\; .$$

设 $\mathbf{z}$ 是 k^n 的一点，且 $t_0 \in k$ 是 $F(\mathbf{z}, T)$ 的一个单零点。则可以找到乘积空间 k^n 的一个包含 $\mathbf{z}$ 的开集 V 和一个解析函数 $u : V \to k$，使得 $u(\mathbf{z}) = t_0$，且使得对任意 $\mathbf{y} \in V$，均有 $F(\mathbf{y}, u(\mathbf{y})) = 0$。

此引理可由隐函数定理推出。

为了证明环 A 是 Hensel 的，我们使用命题 3 的条件 2)。

设 $P = T^n + \sum_0^{n-1} f_i T^i$ 是 $A[T]$ 中的一个首一多项式，并假设 $\overline{P} = T^n + \sum_0^{n-1} f_i(x) T^i$ 在 k 中有一个单零点 t_0。则只需证明 t_0 可以提升为 A 中的一个零点即可。这相当于寻找一个函数 $f \in A$，使得 $P(f) = 0$ 且 $f(x) = t_0$。把 X 换成 x 的一个邻域，则可以假设诸函数 f_i 都定义在 X 上。设 $\varphi : X \to k^n$ 是由诸 f_i 定义的连续映射。若 $F \in k[Y_0, \ldots, Y_{n-1}, T]$ 是引理中的多项式，则有 $P = F \circ \varphi$。令 $\mathbf{z} = \varphi(x)$。于是 $F(\varphi(x), T)$ 在 $\mathbf{z}$ 处有一个零点 t_0。根据引理，存在 $\mathbf{z}$ 在 k^n 中的一个邻域 V 和一个解析函数 $u : V \to k$，使得 $u(\mathbf{z}) = t_0$，并且对任意 $\mathbf{y} \in V$，均有 $F(\mathbf{y}, u(\mathbf{y})) = 0$。此时 $W = \varphi^{-1}(V)$ 是 x 在 X 中的一个邻域，并且连续函数 $f = u \circ \varphi : W \to k$ 满足 $F(f) = 0$ 和 $f(x) = t_0$。

同样的证明方法也适用于下面的例子 2 和例子 3。

例子 2.：取 $k = \mathbb{R}$，X 是一个 C^r 流形（r 有限或无限）。则 $x \in X$ 处的 C^r 函数芽的局部环是 Hensel 的。

例子 3.：设 k 是一个完备秉值域，且赋值不是离散的，X 是 k 上的一个解析流形，则 $x \in X$ 处的全纯函数芽的局部环是 Hensel 的。

例子 4.：设 $k = \mathbb{C}$，X 是 $\mathbb{C}$ 上的一个解析空间，则 $x \in X$ 处的局部环是 Hensel 的，因为它是收敛幂级数环的商环（参考例子 3）。

第八章　Hensel 化

§1　Hensel 化

设 A 是局部环，则对它来说存在一个具有普适性质的 Hensel 局部环。

定义 1. — 设 A 是局部环，所谓 **A 的 Hensel 化**，是指一个二元组 (A^{h}, i)，其中 A^{h} 是一个 Hensel 局部环，i 是一个局部同态 $i : A \to A^{\mathrm{h}}$，并且满足下面的条件：对任意 Hensel 局部环 B 和任意局部同态 $u : A \to B$，均有唯一的局部同态 $u^{\mathrm{h}} : A^{\mathrm{h}} \to B$，使得 $u = u^{\mathrm{h}} i$。

于是有下面的交换图表：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "u"'] & A^{\mathrm{h}} \arrow[d, "u^{\mathrm{h}}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

在证明 (A^{h}, i) 的存在性之前，首先给出一些定义。

定义 2. — 设 A 是局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想。所谓**平展性局部** A 代数，是指一个形如 $B_{\mathfrak{n}}$ 的 A 代数，其中 B 在 A 上是平展的，且 $\mathfrak{n}$ 是 B 的一个位于 $\mathfrak{m}$ 之上的素理想。（这相当于说同态 $A \to B_{\mathfrak{n}}$ 是一个局部同态）。

注解 — 一般来说，$B_{\mathfrak{n}}$ 在 A 上未必是有限呈示的 (从而在 A 上也未必是平展的）。

定义 3. — 设 A 是局部环，所谓**归纳平展性局部** A 代数，是指一族平展性局部 A 代数的滤相归纳极限 (其中的传递态射都是局部同态）。

引理 1. — 设 A 是局部环，B' 是平展性局部 A 代数，C' 是平展性局部 B' 代数。则 C' 是平展性局部 A 代数。

证明：我们有 $B' = B_{\mathfrak{n}}$，其中 B 在 A 上是平展的，另外 $C' = C_{\mathfrak{p}}$，其中 C 在 B' 上是平展的 ($\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{p}$ 都是素理想）。可以假设 C 是标准的：$C = (B'[T]/(f))_g$，其中 f 是 $B'[T]$ 中的首一多项式，且 f' 在 C 中可逆。于是存在 $h \in B - \mathfrak{n}$ 使得 f 和 g 都来自 $B_h[T]$ 中的多项式，仍记作 f 和 g。另外还可以假设 f 是首一的，并且 f' 在 $(B_h[T]/(f))_g = D$ 中是可逆的。则 D 在 B_h 上是平展的，从而在 A 上也是平展的，并且 $C' = C_{\mathfrak{p}}$ 是 D 的一个局部化，从而在 A 上是一个平展性局部代

数。

命题 1. — 设 A 是局部环，B 是归纳平展性局部 A 代数，C 是一个局部 A 代数，并且 $A \to C$ 是局部同态。分别以 $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$ 来记 A, B, C 的剩余类域。设 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}\, A}(B,C)$ 是 B 到 C 的局部 A 同态的集合。则有:

1) 典范映射

$$\varphi \ :\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}\, A}(B,C) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(B,C)$$

是一个同构。

2) 考虑典范映射 φ:

$$\varphi \ :\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}\, A}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\kappa_B,\kappa_C)$$

则有:

a) φ 是单的。

b) 进而若 C 是 Hensel 的，则 φ 是一一的。

证明：1) 设 $u : B \to C$ 是一个 A 同态，下面证明 u 是局部同态。以 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ 来记 A, B, C 的极大理想，则相当于要证明 $u^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{n}$，为此只需证明 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathrm{Spec}(B)$ 中的位于 $\mathfrak{m}$ 之上的唯一素理想即可。回到归纳极限，只要证明这对某个平展性局部代数是成立的即可。简言之，只需证明：若 B 是一个平展 A 代数，$\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{q}$ 是 B 的两个位于 $\mathfrak{m}$ 之上的素理想，则在 $\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{q}$ 之间没有包含关系。然而这是缘自下面的事实：B 在 $\kappa(\mathfrak{m})$ 上的纤维是有限个域的乘积。

2) 首先把问题归结到 B 在 A 上平展的情形。根据前提条件，B 是归纳平展性局部 A 代数，从而 $B = \varinjlim B_i$，其中 B_i 都是平展性局部 A 代数。于是有 $\kappa_B = \varinjlim \kappa_{B_i}$。如此一来，$\mathrm{Hom}_A(B,C) = \varprojlim \mathrm{Hom}_A(B_i,C)$，并且有 $\mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\kappa_B,\kappa_C) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\kappa_{B_i},\kappa_C)$。从而问题归结为 B 是平展性局部代数的情形。

换一下记号，假设 B 具有 $B_{\mathfrak{n}}$ 的形状[8]，其中 B 在 A 上是平展的，$\mathfrak{n}$ 是一个位于 $\mathfrak{m}$ 之上的素理想。则由于 B 在 A 上是孤直的，故知 B 在 $\mathfrak{m}$ 上只有有限个素理想。于是可以找到 $f \in B - \mathfrak{n}$，使得 $f \in \mathfrak{n}_i$，这里 $\mathfrak{n}_i$ 是 B 的所有位于 $\mathfrak{m}$ 之上且不同于 $\mathfrak{n}$ 的素理想。现在把 B 换成 B_f，则可以假设 $\mathfrak{n}$ 是 B 的位于 $\mathfrak{m}$ 之上的唯一素理想。于是有 $\mathrm{Hom}_A(B,C) = \mathrm{Hom}_A(B_{\mathfrak{n}},C)$。事实上，若 $u : B \to C$ 是一个 A 同态，则 $u^{-1}(\mathfrak{p})$ 等于 $\mathfrak{n}$（作为 B 的位于 $\mathfrak{m}$ 之上的素理想），从而 u 能以唯一的方式穿过 $B_{\mathfrak{n}}$。另外还有 $\mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\kappa_{B_{\mathfrak{n}}},\kappa_C) = \mathrm{Hom}_{\kappa_A}(B/\mathfrak{m}B,\kappa_C)$。于是若把 $B_{\mathfrak{n}}$ 换成 B，则可以假设 B 是一个平展 A 代数。

3) 下面证明 φ 是单的。为此先证明下面的引理：

引理 2. — 设 B 是一个孤直 A 代数，C 是一个 A 代数，$\mathfrak{r}$ 是 C 的一个素理想，$i : C \to \kappa(\mathfrak{r})$ 是典范同态，u 和 v 是两个由 B 到 C 的 A 同态，并且两个合成映射 iu 和 iv 是重合的:

$$B \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{i} \kappa(\mathfrak{r})$$

则可以找到 $f \in C - \mathfrak{r}$，使得两个合成 $B \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} C \to C_f$ 是重合的。

[8]译注：此段记号略有混乱。

首先由这个引理推出 φ 是单的 (这里只需要孤直的条件)，设 $B \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} C$ 是两个 A 同态，且使得 $\overline{u}$ 和 $\overline{v}$ 是重合的。则两个合成同态 $B \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{i} \kappa_C$ 是重合的；从而可以找到 $f \in C - \mathfrak{p}$，使得 $B \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{i} C_f$ 是重合的。然而 C 是局部环，故有 $C = C_f$，因而 $u = v$。

引理 2 的证明： 采用概形的语言，令 $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $T = \mathrm{Spec}(C)$，并以 u^{h} 和 v^{h} 来记 u 和 v 所定义的态射

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, "u^{\mathrm{h}}"] \arrow[r, shift right, "v^{\mathrm{h}}"'] \arrow[dr] & X \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{r}$ 对应于 T 的点 t，设 $\delta : X \to X \times_S X$ 是对角线态射。考虑卡氏方图

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, hook, "\delta"] \\ T \arrow[r, "u^{\mathrm{h}} \times_S v^{\mathrm{h}}"] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

则 W 是 T 的使 u 和 v 在其上重合的最大子概形，从而 $t \in W$。由于 X 在 S 上是孤直的，故 δ 是一个开浸入 (第三章命题 9) 从而在基变换下 i 也是开浸入，这就证明了引理 (因为形如 $\mathrm{Spec}(C_f)$ 的开集构成 $T = \mathrm{Spec}(C)$ 的一个拓扑基)。

4) 下面总假设 C 是 Hensel 的，继而证明 φ 是满的。令 $D = B \otimes_A C$，则有

$$\mathrm{Hom}_A(B, C) \ = \ \mathrm{Hom}_C(D, C)$$

连同

$$\mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\kappa_B, \kappa_C) \ = \ \mathrm{Hom}_A(B, \kappa_C) \ = \ \mathrm{Hom}_C(D, \kappa_C) \quad 。$$

易见 $\mathrm{Hom}_C(D, \kappa_C)$ 与 D 的那些位于 $\mathfrak{p} = \mathrm{rad}(C)$ 之上并且满足 $\kappa(\mathfrak{d}) = \kappa_C$ 的极大理想 $\mathfrak{d}$ 是一一对应的。根据第七章命题 3，这样的 $\mathfrak{d}$ 一定满足 $D_{\mathfrak{d}} \simeq C$。从而每个以 $\mathfrak{d}$ 为核的同态 $u^{\mathrm{h}} : D \to \kappa_C$ 都可以提升为一个 $u : D \to C$，如下图所示

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] & D_{\mathfrak{d}} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & k \\ & C \arrow[ur] \end{tikzcd}$$

推论 — 设 A 是 **Hensel 局部环**。则函子:

$$F \ : \ B \longmapsto \overline{B} \ = \ B \otimes_A \kappa_A$$

是一个由有限平展 A 代数 (相应的，有限平展局部 A 代数) 的范畴到平展 κ_A 代数 (相应的，κ_A 的可分有限扩张) 的范畴上的**等价**。

证明：1) **局部情形**

若 B 是局部代数，且在 A 上是有限且孤直的，则 $\overline{B} = \kappa_B$ 是 κ_A 的一个可分有限扩张。先证明 F **是完全忠实的**，也就是说，

$$\mathrm{Hom}_A(B, C) \ \simeq\ \mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\kappa_B, \kappa_C)$$

事实上，由于 C 在 A 上是有限的，故知 C 是 Hensel 的，从而上面的同构可由命题 1 推出。

再证明 F **是本质映满的**。设 $\kappa_A \to K$ 是一个可分有限扩张，根据本原元素定理，K 可由一个元素生成 (参考第三章命题 11)，从而 $K \simeq \kappa_A[X]/(\overline{P})$，其中 $\overline{P}$ 是一个首一多项式，且与它的导式互素。把 $\overline{P}$ 提升为一个首一且相同次数的多项式 P，再令 $B = A[X]/(P)$。则易见 B 是有限平展的局部 A 代数，并且 $F(B) \simeq K$。

2) **一般情形**

由于 A 是 Hensel 的，故若 C 在 A 上是有限的，则 C 可以分解成局部分支的乘积 $C = \prod_i C_{\mathfrak{n}_i}$，从而 $\mathrm{Hom}_A(B, C) = \prod_i \mathrm{Hom}_A(B, C_{\mathfrak{n}_i})$。进而 $\overline{C} = \prod_i \overline{C}_{\mathfrak{n}_i} = \prod_i \kappa_{C_{\mathfrak{n}_i}}$，故有 $\mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\overline{B}, \overline{C}) = \prod_i \mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\overline{B}, \kappa_{C_{\mathfrak{n}_i}})$。于是问题归结到 C 是局部环的情形。另一方面 $B = \prod_j B_{\mathfrak{p}_j}$，故有 $\mathrm{Hom}_A(B, C) = \coprod \mathrm{Hom}_A(B_{\mathfrak{p}_j}, C)$。事实上，换成概形的语言

$$\mathrm{Hom}_A(B, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(C), \mathrm{Spec}(B)) \ =\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(C), \coprod \mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}_j}))$$

由于 C 是局部环，故知 $\mathrm{Spec}(C)$ 是连通的，从而任何态射 $\mathrm{Spec}(C) \to \coprod \mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}_j})$ 都穿过某一个 $\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}_j})$。同理可得 $\mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\overline{B}, \kappa_C) = \coprod \mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\kappa_{B_\mathfrak{p}}, \kappa_C)$，从而归结为局部环的情形。

命题 2. — 设 A 是局部环，极大理想为 $\mathfrak{m}$。

1) 存在一个集合 Λ 和以此为指标集的一族平展性局部 A 代数 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，使得任何平展性局部 A 代数 B 都可以 A 同构于唯一一个 A_λ。以 $\mathfrak{m}_\lambda$ 来记 A_λ 的极大理想。

2) 设 I 是 Λ 的下述子集

$$I \ =\ \{\lambda \in \Lambda \mid A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda \simeq A/\mathfrak{m}\}\ 。$$

则关系“$i \leqslant j$ 当且仅当存在一个局部 A 同态 $\varphi_{ji} : A_i \to A_j$”在 I 上定义了一个序，并且 I 在这个序关系下是右滤相的。

证明：1) 设 Λ_0 是 $A[T] \times \mathrm{Spec}(A[T])$ 的这样一个子集：它是由形如 $(P, \mathfrak{q})$ 的二元组所组成，其中 P 是一个首一多项式，$\mathfrak{q}$ 是 $A[T]$ 的一个位于 $\mathfrak{m}$ 之上的素理想，且使

得 P 的导式 P' 落在 $\mathfrak{q}$ 之外。对于 $\lambda_0 = (P, \mathfrak{q}) \in \Lambda_0$，令 $B_{\lambda_0} = A[T]/(P)$，$A_{\lambda_0} = (B_{\lambda_0})_{\mathfrak{q}}$。

由局部结构定理 (第五章定理 1) 知，任何平展性局部 A 代数都可以 A 同构于某个 A_{λ_0}。在 Λ_0 上定义等价关系 R 如下：

$\lambda_0 \, R \, \mu_0$ 当且仅当 A_{λ_0} 和 A_{μ_0} 是 A 同构的。

设 Λ 是商集合 Λ_0/R，且对每一个 $\lambda \in \Lambda$，在 λ 所属的等价类中选取一个局部代数，并记作 A_λ。族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 就满足 1) 中所说的条件。

2) 关系 $i \leqslant j$ 显然是自返的和传递的。另一方面，若有两个 A 同态 $A_i \xrightarrow{\varphi_{ji}} A_j$ 及 $A_j \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_i$，则合成同态 $A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}\circ\varphi_{ji}} A_i$ 在剩余类域上诱导了恒同，因为 $\kappa_{A_i} = \kappa_{A_j} = \kappa_A$。根据命题 1，必有 $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} = \mathrm{id}_{A_i}$，从而 φ_{ji} 是一个同构，这表明 $i = j$。

最后证明 I 是滤相的。设 A_i 和 A_j 是两个平展性局部 A 代数，极大理想分别是 $\mathfrak{m}_i$ 和 $\mathfrak{m}_j$，并且 $A_i = (B_i)_{\mathfrak{n}_i}$，$A_j = (B_j)_{\mathfrak{n}_j}$，其中 B_i 和 B_j 都是平展 A 代数。可以假设 $\mathfrak{n}_i$ 和 $\mathfrak{n}_j$ 分别是 B_i 和 B_j 中位于 $\mathfrak{m}$ 之上的唯一素理想。由于当 $i, j \in I$ 时总有 $A_i/\mathfrak{m}_i = A_j/\mathfrak{m}_j = \kappa_A$，故有 $(A_i \otimes_A A_j) \otimes_A \kappa_A \simeq (A_i \otimes_A \kappa_A) \otimes_{\kappa_A} (A_j \otimes_A \kappa_A) \simeq \kappa_A \otimes_{\kappa_A} \kappa_A \simeq \kappa_A$。现在 $A_i \otimes_A A_j$ 的位于 $\mathfrak{m}$ 之上的素理想是唯一的，我们把它在该素理想处的局部化记为 A'，则 A' 是一个局部环，剩余类域同构于 κ_A，并且同时承托 A_i 和 A_j。另外，由于 A_i（相应的，A_j）是平展 A 代数 B_i（相应的，B_j）的局部化，故知 A' 是平展 A 代数 $B_i \otimes_A B_j$ 的局部化。这就证明了集合 I 是右滤相的。

定理 1. — *仍然使用命题 2 之 2) 中的记号。设 A^{h} 是诸局部环 A_j, $j \in I$ 的滤相归纳极限，并设 $i : A \to A^{\mathrm{h}}$ 是典范局部同态。则二元组 (A^{h}, i) 是 A 的一个* **Hensel 化**。*进而，若 (A', i') 是 A 的另一个 Hensel 化，则有唯一一个 A 同构 $u : A^{\mathrm{h}} \xrightarrow{\sim} A'$，使得图表*

$$\begin{tikzcd} A^{\mathrm{h}} \arrow[rr, "u"] & & A' \\ & A \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

成为交换的。

最后一句话可由 Hensel 化的定义立得。下面证明 (A^{h}, i) 是 A 的一个 Hensel 化。

a) **环 A^{h} 是 Hensel 的**。为此只需证明，若 B^{h} 是一个平展 A^{h} 代数，$\mathfrak{n}^{\mathrm{h}}$ 是 B^{h} 的一个位于 $\mathfrak{m}^{\mathrm{h}} = \mathrm{rad}(A^{\mathrm{h}})$ 之上的素理想，并且 $\kappa(\mathfrak{n}^{\mathrm{h}}) = \kappa_{A^{\mathrm{h}}} = \kappa_A$，则典范同态 $A^{\mathrm{h}} \to B^{\mathrm{h}}_{\mathfrak{n}^{\mathrm{h}}}$ 是一个同构 (第七章命题 3)。可以假设 B^{h} 是一个标准平展 A^{h} 代数 $(A^{\mathrm{h}}[T]/(f))_g$。则 B^{h} 来自某个标准平展 A_i 代数 B_i（取 i 充分大），这只要考

虑 f 和 g 的系数就可以完成。于是得到一个余卡氏图表

$$\begin{tikzcd} B_i \arrow[r] & B^{\mathrm{h}} \\ A_i \arrow[u] \arrow[r] & A^{\mathrm{h}} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

设 $\mathfrak{n}_i$ 是 $\mathfrak{n}^{\mathrm{h}}$ 在 B_i 中的逆像。

易见剩余扩张 $\kappa_{A_i} \to \kappa(\mathfrak{n}_i)$ 是平凡的，从而 $(B_i)_{\mathfrak{n}_i}$ 是一个具有平凡剩余扩张的平展性局部 A_i 代数。根据引理 1，$(B_i)_{\mathfrak{n}_i}$ 是平展性局部 A 代数，且具有平凡的剩余扩张。根据集合 I 的定义，可以找到 $j \in I$ 且 $j \geqslant i$ 使得 $A_j \simeq (B_i)_{\mathfrak{n}_i}$。令 $B_j = B_i \otimes_{A_i} A_j$，并设 $\mathfrak{n}_j$ 是 $\mathfrak{n}^{\mathrm{h}}$ 在 B_j 中的逆像。下面证明 $(B_j)_{\mathfrak{n}_j}$ 是 B_j 的一个直和因子。为此令 $S = \mathrm{Spec}(B_j)$，则由于 B_i 在 A_i 上是孤直的，故知对角线态射 $X \xrightarrow{\Delta} X \times_S X$ 是开且闭的浸入。现在同构 $A_j \simeq (B_i)_{\mathfrak{n}_i}$ 给出一个 S 态射 $T \xrightarrow{s} X$，故知 Δ 在 s 下的逆像也是一个开且闭的浸入：

$$\begin{tikzcd} X \times_S X & X \times_S T \arrow[l] \\ X \arrow[u, "\Delta"'] & T \arrow[l, "s"'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

这就证明了 $(B_j)_{\mathfrak{n}_j}$ 是 B_j 的直和因子，从而同构于 A_j。再通过基变换 $A_j \to A^{\mathrm{h}}$，就得到 $B^{\mathrm{h}}_{\mathfrak{n}^{\mathrm{h}}} \simeq A^{\mathrm{h}}$。

b) (A^{h}, i) **是 A 的 Hensel 化**。设 B 是一个承托 A 的 Hensel 局部环。则需要证明典范同态 $A \to B$ 可以经过 i 来分解，并且是以唯一的方式。现在 A^{h} 是一个归纳平展性局部 A 代数，故由命题 1 知

$$\mathrm{Hom}_A(A^{\mathrm{h}}, B) \ \simeq\ \mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\kappa_{A^{\mathrm{h}}}, \kappa_B) \quad 。$$

然而 $\kappa_{A^{\mathrm{h}}} = \kappa_A$，从而 $\mathrm{Hom}_A(A^{\mathrm{h}}, B)$ 只包含一个元素。

§2 严格 Hensel 化

现在要进行的构造与上一节相似，只是不再要求剩余扩张是平凡的。

命题 3. — 仍然使用命题 2 的记号。设 Ω 是 κ_A 的可分代数闭包，J 是由形如 $(\lambda, \alpha_\lambda)$ 的二元组所组成的集合，其中 $\lambda \in \Lambda$ 且 $\alpha_\lambda : A_\lambda \to \Omega$ 是一个局部 A 同态，并使得下面的图表交换

$$\begin{tikzcd} A_\lambda \arrow[r, "\alpha_\lambda"] \arrow[d] & \Omega \\ \kappa_{A_\lambda} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

在 J 上可以定义一个序关系如下："$(\lambda,\alpha_\lambda)\leqslant(\mu,\alpha_\mu)$ 当且仅当存在一个局部 A 同态 $\alpha_{\mu\lambda}:A_\lambda\to A_\mu$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} A_\lambda \arrow[d, "\alpha_{\mu\lambda}"'] \arrow[dr, "\alpha_\lambda"] & \\ A_\mu \arrow[r, "\alpha_\mu"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

成为交换的"，J 在这个序关系下是右滤相的。

证明：自返性和传递性是显然的。

a) 对称性：若有交换图表

$$\begin{tikzcd} A_\lambda \arrow[d, shift right, "\alpha_{\mu\lambda}"'] \arrow[dr, "\alpha_\lambda"] & \\ A_\mu \arrow[u, shift right, "\alpha_{\lambda\mu}"'] \arrow[r, "\alpha_\mu"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

易见 $\alpha_{\mu\lambda}$ 和 $\alpha_{\lambda\mu}$ 在剩余类域上诱导了互逆的同构，从而根据命题 1，$\alpha_{\mu\lambda}$ 和 $\alpha_{\lambda\mu}$ 本身就是互逆的同构。再根据 Λ 的定义，$\lambda=\mu$。

b) J 是滤相的。设 (λ,α_λ) 和 (μ,α_μ) 是 J 的两个元素，A_λ 和 A_μ 是对应于 λ 和 μ 的平展性局部 A 代数。以 $\varphi:A_\lambda\otimes_A A_\mu\to\Omega$ 来记 $\alpha_\lambda\otimes\alpha_\mu$，并设 $\mathfrak{n}=\mathrm{Ker}(\varphi)$。则 $\mathfrak{n}$ 是一个位于 $\mathfrak{m}$ 之上的素理想，并且 $(A_\lambda\otimes_A A_\mu)_{\mathfrak{n}}=A_\nu$ 是一个平展性局部 A 代数。取 φ 在 $\mathfrak{n}$ 处的局部化，则得到一个 A 同态 $\alpha_\nu:A_\nu\to\Omega$。易见 (A_ν,α_ν) 同时超过了 $(A_\lambda,\alpha_\lambda)$ 和 (A_μ,α_μ)。

定义 4. — 所谓一个局部环 A 是**严格 Hensel** 的，是指它既是 Hensel 的，又具有可分代数闭的剩余类域。

例子：在 $\mathbb{C}^n$ 的原点处的全纯函数芽所构成的局部环是严格 Hensel 的。

定理 2. — 继续使用命题 3 的记号。设 (A^{sh},α) 是二元组 $(A_\lambda,\alpha_\lambda)$ 的归纳系（其中 $(\lambda,\alpha_\lambda)\in J$）的归纳极限，并设 $i:A\to A^{\mathrm{sh}}$ 是典范局部同态。则有：
1) A^{sh} 是严格 Hensel 的。
2) 对于任意给出的实线交换图表

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "u"'] & A^{\mathrm{sh}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "u^{\mathrm{sh}}"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ & B \arrow[r, "\beta"] & \Omega' \end{tikzcd}$$

— 其中 B 是一个严格 Hensel 局部环，u 是一个局部同态，Ω' 是一个域，β 是一个局部同态 —，均有唯一的虚线同态 $u^{\mathrm{sh}}:A\to B$ 使得上述图表交换。

证明：证明 A^{sh} 是 Hensel 局部环的方法与定理 1 中给出的相同。另外，对于 κ_A 的任何可分有限扩张 L，在证明命题 1 的推论时已经构造了一个在 A 上平展的有限

局部 A 代数，具有同构于 L 的剩余类域。从而 $\kappa_{A^{\mathrm{sh}}}$ 作为诸剩余类域 κ_{A_λ} 的归纳极限必然是可分代数闭的，这就证明 A^{sh} 是严格 Hensel 的。

现在证明 2)。由于 B 是 Hensel 的，且 A^{sh} 是归纳平展性局部 A 代数，故可由命题 1 得知典范映射

$$\mathrm{Hom}_A(A^{\mathrm{sh}}, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\kappa_{A^{\mathrm{sh}}}, \kappa_B)$$

是一一的。于是若 $\overline{\alpha} : \kappa_{A^{\mathrm{sh}}} \to \Omega$ 和 $\overline{\beta} : \kappa_B \to \Omega'$ 是由 α 和 β 所导出的同态。则 u^{sh} 的存在性和唯一性缘自下面这个事实：存在唯一的同态 $\overline{u} : \kappa_{A^{\mathrm{sh}}} \to \kappa_B$ 使得下述图表交换

$$\begin{tikzcd}
\kappa_{A^{\mathrm{sh}}} \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[d, "\overline{u}"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
\kappa_B \arrow[r, "\overline{\beta}"'] & \Omega'
\end{tikzcd}$$

定义 5. — 设 A 是一个局部环，考虑四元组 $(A^{\mathrm{sh}}, \Omega, i, \alpha)$，其中 A^{sh} 是一个严格 Hensel 局部环，$i : A \to A^{\mathrm{sh}}$ 是一个局部同态，Ω 是 κ_A 的一个可分代数闭包，$\alpha : A^{\mathrm{sh}} \to \Omega$ 是一个局部同态。所谓 $(A^{\mathrm{sh}}, \Omega, i, \alpha)$ 是 A 的一个**严格 Hensel 化**，是指它满足定理 2 之 2) 所给出的普适性质。

如上所示，A 总有一个严格 Hensel 化 $(A^{\mathrm{sh}}, \Omega, i, \alpha)$。进而若 $({A'}^{\mathrm{sh}}, \Omega', i', \alpha')$ 是另一个严格 Hensel 化，则典范映射 $\mathrm{Hom}_A(A^{\mathrm{sh}}, {A'}^{\mathrm{sh}}) \to \mathrm{Hom}_{\kappa_A}(\Omega, \Omega')$ 是一一的。特别的，局部环 A^{sh} 的 A 自同构群典范地同构于扩张 Ω/κ_A 的 Galois 群。

记号 — 设 A 是一个局部环。以下我们将以 A^{h} 或 A^{h} 来记 A 的 Hensel 化。同时我们也粗略地把四元组 $(A^{\mathrm{sh}}, \Omega, i, \alpha)$ 中的局部环 A^{sh} 称为 A 的严格 Hensel 化，也记作 A^{hs}。

§ 3 Hensel 化的性质

命题 4. （Hensel 化的函子性）— 1) 设 $u : A \to B$ 是局部环的一个局部同态。则可以找到唯一一个（局部）同态 $u^{\mathrm{h}} : A^{\mathrm{h}} \to B^{\mathrm{h}}$，使得下面的图表成为交换的

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A^{\mathrm{h}} \arrow[r, "u^{\mathrm{h}}"'] & B^{\mathrm{h}}
\end{tikzcd} 。$$

2) 设 $u : A \to B$ 是局部环之间的局部同态，$(A^{\mathrm{sh}}, \Omega, i, \alpha)$ 是 A 的严格 Hensel 化，$(B^{\mathrm{sh}}, \Omega', j, \beta)$ 是 B 的严格 Hensel 化。则对任意满足 $\beta j u = v \alpha i$ 的同态 $v : \Omega \to \Omega'$，均可找到唯一一个（局部）同态 $u^{\mathrm{sh}} : A^{\mathrm{sh}} \to B^{\mathrm{sh}}$，使得下面的图表成为交换

的

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A^{\mathrm{sh}} & \longrightarrow & \Omega \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B^{\mathrm{sh}} & \longrightarrow & \Omega' \end{array}$$

。

证明：这个性质可由Hensel化和严格Hensel化的普适性质立得。

命题5. — 设$(A_i)_{i\in I}$是局部环的滤相归纳系，传递态射都是局部同态，并且$A=\varinjlim A_i$。设A_i^{h}是A_i的Hensel化。则诸A_i^{h}可以典范地构成归纳系（命题4），并且$A^{\mathrm{h}}=\varinjlim A_i^{\mathrm{h}}$就是$A$的Hensel化。

证明：首先由第一章§3命题1知，$\varinjlim A_i^{\mathrm{h}}$是一个Hensel局部环。另一方面，通过标准的程序可以验证典范同态$A\to\varinjlim A_i^{\mathrm{h}}$具有Hensel化所要的普适性质。

注解 — 对于严格Hensel化也与命题5相类似的结论，读者可以自己完成。

习题：1) 设A是一个局部环。试证明，A的严格Hensel化也可以用下面的方法来产生：先取A的Hensel化A^{h}，再取A^{h}的严格Hensel化A^{sh}；而且此时A^{sh}在A^{h}上是整型的。

2) 设k是域，$\bar{k}$是k的可分代数闭包，$k[[T]]$是k系数的一元形式幂级数环，把它看作是$\bar{k}$系数一元形式幂级数环$\bar{k}[[T]]$的子环。设R是$\bar{k}[[T]]$的一个子环，由满足下述条件的幂级数$\sum\limits_{i\geqslant 0}a_iT^i$所组成：

诸a_i生成k的一个有限扩张。

证明R是$k[[T]]$的严格Hensel化。试问R是不是完备的？

§4 局部环和它的Hensel化及严格Hensel化之间的关系

定理3. — 设A是局部环，B是一个归纳平展性局部A代数，$\mathfrak{m}$是A的极大理想，$\mathfrak{n}$是B的极大理想，q是一个整数。

1) B在A上是忠实平坦的，并且$\mathfrak{m}^qB=\mathfrak{n}^q$。对于$A$的任意素理想$\mathfrak{p}$，$B\otimes_A\kappa(\mathfrak{p})$都是一个整型$\kappa(\mathfrak{p})$代数，且它的每个局部环都是$\kappa(\mathfrak{p})$的可分代数扩张。

2) B是既约（相应的，正规）的当且仅当A是如此。

3) B是Noether环当且仅当A是Noether环，此时对于A的任意素理想$\mathfrak{p}$，$B\otimes_A\kappa(\mathfrak{p})$都可以写成$\kappa(\mathfrak{p})$的有限个可分代数扩张的乘积。

证明：性质1)和2)可以通过对平展代数的性质取归纳极限而得到。由于B在A上是忠实平坦的，故可由B是Noether环推出A是Noether环。利用1)，反过来的蕴涵关系可由下面的引理推出。

引理 — 设 $(A_\lambda, \varphi_{\lambda,\mu})$ 是 Noether 局部环的滤相归纳系，传递态射 $\varphi_{\lambda,\mu}$ 都是局部同态。设 $\mathfrak{m}_\lambda$ 是 A_λ 的极大理想，于是 $A = \varinjlim A_\lambda$ 是一个局部环，极大理想为 $\mathfrak{m} = \varinjlim \mathfrak{m}_\lambda$。假设对任意 $\lambda \leqslant \mu$，均有 $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$，并且 A_μ 在 A_λ 上都是平坦的。则 A 是 Noether 环。

首先注意到 A 在 A_λ 上是平坦的 (Bourbaki《交换代数学》, I, §2, 命题 9)，并且 $\mathfrak{m} = \varinjlim \mathfrak{m}_\mu = \varinjlim_\mu \mathfrak{m}_\lambda A_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A$。设 $\widehat{A}$ 是 A 在 $\mathfrak{m}$ 进拓扑下的分离完备化。现在证明 $\widehat{A}$ 是 Noe- -ther 环，并且在每个 A_λ 上都是平坦的，从而也是忠实平坦的 (这就表明 $\widehat{A}$ 在 A 上是忠实平坦的 (Boubaki 前引)，从而 A 是 Noether 环）。

$\widehat{A}$ 的极大理想是 $\mathfrak{m}$ 的完备化 $\widehat{\mathfrak{m}}$ (Bourbaki《交换代数学》, III, §2, 命题 19)，并且对任意整数 n 和任意 λ，均有同构

$$\widehat{\mathfrak{m}}^n/\widehat{\mathfrak{m}}^{n+1} = \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1} \underset{A_\lambda}{\otimes} A = \mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1} \underset{\kappa_{A_\lambda}}{\otimes} \kappa_A 。$$

由于 A_λ 是 Noether 环，故知 $\widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}}^2$ 是 $\kappa_A = \kappa_{\widehat{A}}$ 上的一个有限维向量空间。从而 $\widehat{A}$ 是 Noether 环 (Bourbaki《交换代数学》, III, §2, 定理 2 的推论 5)。另一方面，对任意整数 n 和任意 λ，$\widehat{A}/\mathfrak{m}_\lambda^n\widehat{A} = \widehat{A}/\mathfrak{m}^n\widehat{A} = A/\mathfrak{m}^n A$ 在 $A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^n A_\lambda$ 上都是平坦的，因为 A 在 A_λ 上是平坦的。于是由 Bourbaki《交换代数学》, III, §5, n° 3, 命题 1 和 n° 2, 定理 1 就可以推出 $\widehat{A}$ 在 A_λ 上是平坦的。

推论 — A 和它的 Hensel 化 A^{h} 具有相同的分离完备化。

习题：在定理 3 的记号下，证明 $\dim(A) = \dim(B)$；并且 A 是 Krull（相应的，赋值、正则、Cohen-Macaulay）的 $\Leftrightarrow$ B 是如此。

第九章　独枝环和几何独枝环

§1　独枝环和几何独枝环

设 A 是整局部环，A^{h} 是 A 的 Hensel 化。则 A^{h} 一般不是整环。我们现在来考察 A^{h} 的极小素理想。

命题 1. — 设 A 是整局部环，B 是 A 的正规化 (即 A 在它的分式域中的整闭包)，A^{h} 是一个归纳平展性局部 A 代数，并且是 Hensel 的。则在 A^{h} 的极小素理想和 $B^{\mathrm{h}} = B \otimes_A A^{\mathrm{h}}$ 的极大理想之间有一个典范的一一对应 (后者又一一对应于纤维 $\overline{A^{\mathrm{h}}} = B \otimes_A \kappa_{A^{\mathrm{h}}}$ 的素理想，这里 $\kappa_{A^{\mathrm{h}}}$ 是 A^{h} 的剩余类域)。

证明：以 $\mathrm{Min}(C)$ 来记环 C 的极小素理想的集合，并以 $\mathrm{Max}(C)$ 来记 C 的极大理想的集合。

a) 由于 B 在 A 上是整型的，故知 B^{h} 在 A^{h} 上也是整型的。根据 Cohen-Seidenberg 定理，B^{h} 的极大理想恰好就是 B^{h} 的那些位于 A^{h} 的极大理想之上的素理想。由此立得 $\mathrm{Max}(B^{\mathrm{h}})$ 的点与 $\mathrm{Spec}(\overline{B^{\mathrm{h}}})$ 的点之间的典范一一对应。

b) 由于 B 是正规的，并且 A^{h} 在 A 上是归纳平展性的，故知 B^{h} 也是正规的。设 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Max}(B^{\mathrm{h}})$。则 $B^{\mathrm{h}}_{\mathfrak{q}}$ 是一个正规局部环，从而是整的；于是 B^{h} 的包含在 $\mathfrak{q}$ 中的极小素理想只有一个 (对应于 $B^{\mathrm{h}}_{\mathfrak{q}}$ 的零理想)；记作 $f(\mathfrak{q})$。这就定义了一个映射

$$f \ : \ \mathrm{Max}(B^{\mathrm{h}}) \longrightarrow \mathrm{Min}(B^{\mathrm{h}})$$

它显然是满的，因为 B^{h} 的任何极小素理想都包含在某个极大理想之中。

c) 现在证明 f 也是单的。设 $\mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{q}'$ 是 $\mathrm{Max}(B^{\mathrm{h}})$ 的两个不同的元素。由于 B^{h} 在 A^{h} 上是整型的，并且 A^{h} 是 Hensel 的，故由第一章 §3 命题 2 知，存在 B^{h} 的一个幂等元 e，它在 $B^{\mathrm{h}}_{\mathfrak{q}}$ 上取值为 1 但在 $B^{\mathrm{h}}_{\mathfrak{q}'}$ 上取值为 0。于是 $\mathrm{Spec}(B^{\mathrm{h}})$ 是两个既开又闭的子概形 X 和 X' 的无交和，并且 $\mathfrak{q} \in X, \mathfrak{q}' \in X'$。此时必有 $f(\mathfrak{q}) \in X$ 和 $f(\mathfrak{q}') \in X'$，从而 $f(\mathfrak{q}) \neq f(\mathfrak{q}')$。

d) 现在我们需要一个引理：

引理 1. — 设 $A \to A'$ 是环的一个平坦同态。则 A' 的任何极小素理想都位于 A 的某个极小素理想之上。

事实上，设 $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Min}(A')$，并设 $\mathfrak{p}$ 是它在 A 中的逆像。则由 $A \to A'$ 所导出

的同态 $A_{\mathfrak{p}} \to A'_{\mathfrak{p}'}$ 是平坦的局部同态，从而是忠实平坦的，故知 $\mathrm{Spec}(A'_{\mathfrak{p}'}) \to \mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$ 是满的 (Bourbaki《交换代数学》, II, § 2, 命题 11 的推论 4)，从而 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个极小素理想。

现在设 K 是 A 的分式域，则它也是正规化 B 的分式域。由于 A^{h} 是一个归纳平展性的 A 代数，故知 A^{h} 在 A 上是平坦的，从而 B^{h} 在 B 上也是平坦的。于是由引理 1 知， $\mathrm{Min}(A^{\mathrm{h}}) = \mathrm{Min}(A^{\mathrm{h}} \otimes_A K)$ 且 $\mathrm{Min}(B^{\mathrm{h}}) = \mathrm{Min}(B^{\mathrm{h}} \otimes_B K)$。然而典范同态 $A^{\mathrm{h}} \otimes_A K \to B^{\mathrm{h}} \otimes_B K$ 是一个同构，故有典范的一一映射 $\mathrm{Min}(A^{\mathrm{h}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Min}(B^{\mathrm{h}})$。从而最终得到 $\mathrm{Min}(A^{\mathrm{h}})$ 和 $\mathrm{Max}(B^{\mathrm{h}})$ 的之间的典范一一对应，这就证明了命题。

推论 1. — 设 A 是整局部环， B 是它的正规化。

1) 若 A^{h} 是 A 的 Hensel 化，则在 A^{h} 的极小素理想和 B 的极大理想之间有一个典范一一对应。特别的， A^{h} 是整环的充分必要条件是， B 是局部环。

2) 若 A^{hs} 是 A 的严格 Hensel 化，并且 $\overline{k}_A$ 是 κ_A 的可分代数闭包，则在 A^{hs} 的极小素理想和 $B \otimes_A \overline{k}_A$ 的素理想之间有一个一一对应。特别的， A^{hs} 是整环的充分必要条件是， B 是局部环并且它的剩余类域 κ_B 是 κ_A 的一个纯不可分扩张[9]。

证明：1) 仍使用命题 1 的记号。若取 A^{h} 就是 A 的 Hensel 化 A^{h}，则有 $\kappa_{A^{\mathrm{h}}} = \kappa_A$，从而 $\overline{B^{\mathrm{h}}} = \overline{B}$。由于 B 在 A 上是整型的，故知 $\mathrm{Max}(B)$ 与 $\mathrm{Spec}(\overline{B})$ 一一对应。于是由命题 1 知，在 $\mathrm{Max}(B)$ 和 $\mathrm{Min}(A^{\mathrm{h}})$ 之间存在一个典范一一对应。

另外，由于 A 是整的，自然也是既约的，故知 A^{h} 也既约 (第七章定理 3)。从而 A^{h} 是整环的充分必要条件是， $\mathrm{Min}(A^{\mathrm{h}})$ 仅含一个元素。这又相当于说 $\mathrm{Max}(B)$ 仅含一个元素，也就是说 B 是局部环。

2) 仍由命题 1（取 $A^{\mathrm{h}} = A^{\mathrm{hs}}$）可以推出 A^{hs} 的极小素理想和 $B \otimes_A \overline{k}_A$ 的素理想是一一对应的。

设 $\mathfrak{q}_i, i \in I$ 是 B 的诸极大理想。对于 $i \in I$，设 κ_i 是 $B_{\mathfrak{q}_i}$ 的剩余类域。则 κ_i 是 κ_A 的一个代数扩张，并且 $\kappa_i \otimes_{\kappa_A} \overline{k}_A$ 的素理想个数等于 κ_i 在 κ_A 上的可分次数，记作 $[\kappa_i : \kappa_A]_s$。从而 A^{hs} 的极小素理想的个数等于 $\sum_{i \in I} [\kappa_i : \kappa_A]_s$。特别的， A^{hs} 是整环的充分必要条件是， $\mathrm{Card}(I) = 1$（也就是说 B 是局部环）并且 $[\kappa_B : \kappa_A]_s = 1$（也就是说 κ_B 是 κ_A 的一个纯不可分扩张）。

定义 1. — 设 A 是局部环。所谓 A 是**独枝**的[10]，是指它满足下面的等价条件:

(1) A_{red} 是整环，并且它的正规化仍然是局部环。

(2) A^{h} 只有一个极小素理想。

定义 2. — 设 A 是局部环。所谓 A 是几何独枝的，是指它满足下面的等价条件:

(1) A_{red} 是整环，它的正规化仍然是局部环，并且剩余扩张是纯不可分的。

(2) A^{hs} 只有一个极小素理想。

---

[9]译注：原词是“extension radicielle”，意为“纯不可分扩张”，然而“radicielle”一词并不仅限于修饰“扩张”，还可用来修饰“概形间的态射”，参考 EGA 第一章，故从几何意义出发更名为“纯不可分扩张”。

[10]译注：原词是“unibranche”。

例子：正规环都是几何独枝的。

§ 2 曲线情形的补充

命题 2. — 设 A 是一个 Noether 既约局部环，B 是 A 的正规化，A^{hs} 是 A 的严格 Hensel 化。则以下诸条件是等价的:

1) B 在 A 上是孤直的。
2) A^{hs} 的诸“不可约分支”都是正规的。

证明：由于 A^{hs} 在 A 上是忠实平坦的，故知 B 在 A 上是孤直的当且仅当 $B\otimes_A A^{\mathrm{hs}}$ 在 A^{hs} 上是孤直的。现在由于 A^{hs} 在 A 上是归纳平展性的，故知 $B\otimes_A A^{\mathrm{hs}}$ 是 A^{hs} 在其全分式环中的整闭包。从而只需对 A 是严格 Hensel 环的情形证明命题 2 即可。设 $\mathfrak{p}_i$ $(i\in I)$ 是 A 的全体极小素理想，并设 B_i 是整环 $A/\mathfrak{p}_i$ 的正规化。则有 $B=\prod\limits_{i\in I} B_i$。

2) $\Rightarrow$ 1)。若 A 的诸不可约分支 $A/\mathfrak{p}_i$ 都是正规的，则有 $B_i=A/\mathfrak{p}_i$。由于 $A/\mathfrak{p}_i$ 是 A 的商环，故在 A 上是孤直的，从而 $B=\prod A/\mathfrak{p}_i$ 在 A 上也是孤直的。

1) $\Rightarrow$ 2)。假设 B 在 A 上是孤直的。则每个 B_i 在 A 上都是孤直的，从而也是有限型的。由于 B_i 在 A 上是整型的，故它在 A 上甚至是有限的。另外因为 A 是 Hensel 的，从而作为整环的 B_i 必然也是局部环。根据孤直的条件，并利用第五章定理 1 的推论 1，可知 B_i 是某个平展 A 代数 C 的商，我们可以取 C 是局部环，因为 B_i 是如此。由于 A 是严格 Hensel 的，故知同态 $A\to C$ 必然是一个同构，从而同态 $A\to B_i$ 是满的，这表明同态 $A/\mathfrak{p}_i\to B_i$ 是一一的，因而 $A/\mathfrak{p}_i$ 是正规的。

定义 1. — 设 A 是一个 1 维 Noether 既约局部环。则在上述条件被满足时，我们称 A 的奇异点是**非尖性**的。

例子：1) 尖性奇异点。

$$A\ =\ \big(k[X,Y]/(Y^2-X^3)\big)_{(0)}$$

（在 0 处具有一个尖点的曲线）。

2) 非尖性奇异点

$$A\ =\ \big(k[X,Y]/((X+Y)(X-Y)+X^3)\big)_{(0)}$$

（具有两条不同切线的二重点）。

习题：设 k 是域，$k[X,Y]$ 是 k 系数的二元多项式环，C 是由方程 $f(X,Y)=0$ 所定义的平面代数曲线，并且通过原点 ($X=Y=0$)。把 $f(X,Y)$ 写成

$$f(X,Y)\ =\ p_n(X,Y)+R(X,Y)$$

其中 $p_n(X,Y)$ 是一个次数 $n\geqslant 1$ 的非零齐次多项式，且 $R(X,Y)$ 的所有非零项都具有 $\geqslant n+1$ 的次数。

a) 曲线 C 在原点处至多有“n 个枝杈”（也就是说，C 在原点处的严格 Hensel 化至多有 n 个极小素理想）。

b) C 在原点处的奇异点是非尖性的当且仅当它在原点处恰好有 n 个枝杈。

c) 若 $p_n(X,Y) = 0$ 是 n 条不同的直线（在 k 的代数闭包上），则曲线在原点处有 n 个枝杈，并且方程 $p_n(X,Y) = 0$ 恰好就是这 n 个枝杈的切线方程。进而此时 C 在原点处的严格 Hensel 化同构于曲线 $p_n(X,Y) = 0$ 在原点处的严格 Hensel 化（换句话说，在“平展拓扑”的意义下，C 在原点的近旁同构于曲线 $p_n(X,Y)=0$）。

第十章　带有有限群作用的环

§1　分解群和惯性群

设 R 是环，带有一个有限群 G 的作用。我们用 R^G 来记 R 在 G 作用下不动的元素所组成的子环。则 R 在 R^G 上是整型的，且若 $\mathfrak{p}$ 是 R^G 的一个素理想，则 G 在 R 的位于 $\mathfrak{p}$ 之上的素理想集合上的作用是传递的 (Bourbaki《交换代数学》, V, §2, 定理 2)。设 $\mathfrak{q}$ 是 R 的一个素理想。则 $\mathfrak{q}$ 处的分解群 $D_{\mathfrak{q}}$ 是 G 的那些把理想 $\mathfrak{q}$ 映到自身的元素所组成的子群。于是 $D_{\mathfrak{q}}$ 可以作用在域 $\kappa(\mathfrak{q})$ 上，且 $D_{\mathfrak{q}}$ 中的惯性群 $I_{\mathfrak{q}}$（即那些使 $\kappa(\mathfrak{q})$ 的每个元素都不动的元素所组成的子群）就是 $\mathfrak{q}$ 处的惯性群。

定理 1. — *设 C 是环，带有一个有限群 G 的作用，H 是 G 的一个子群。令 $B = C^H$ 和 $A = C^G$，则有包含关系 $A \subseteq B \subseteq C$。设 $\mathfrak{r}$ 是 C 的一个素理想，$\mathfrak{q}$ 是它在 B 中的逆像，$\mathfrak{p}$ 是它在 A 中的逆像。*

*1) 若 H 包含 $\mathfrak{r}$ 处的惯性群 $I_{\mathfrak{r}}$，则可以找到 $f \in B - \mathfrak{q}$，使得 B_f 在 A 上是*平展*的。*

2) 反之，若 B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是孤直的，并且 C 是整环，则 $I_{\mathfrak{r}}$ 在 B 上只有平凡的作用。

情形一。A 是严格 Hensel 局部环，以 $\mathfrak{p}$ 为极大理想。令 $k = \kappa(\mathfrak{p})$。

此时分解群 $D_{\mathfrak{r}}$ 等于惯性群 $I_{\mathfrak{r}}$。由于 C 在 A 上是整型的，故知 C（作为半局部 A 代数）可以分解成它的局部分支 $(C_{\mathfrak{m}})$ 的乘积，这里 $\mathfrak{m}$ 跑遍 C 的极大理想集合 M。$C_{\mathfrak{r}}$ 的稳定化子就是惯性群 $I_{\mathfrak{r}} = I$。

从 I 在 $C_{\mathfrak{r}}$ 上的作用可以反过来构造出 G 在 C 上的作用，这只要借助下面的引理：

引理 1. — *设 $\mathrm{Hom}^I(G, C_{\mathfrak{r}})$ 是 G 到 $C_{\mathfrak{r}}$ 的映射集合的一个子集，由所有满足下述条件的 u 所组成：对任意 $g \in G$ 和 $i \in I$，均有 $u(gi) = i^{-1}u(g)$。定义 G 在 $\mathrm{Hom}^I(G, C_{\mathfrak{r}})$ 上的作用如下：*

$$ {}^h u(g) \;=\; u(h^{-1}g) \qquad \forall\, h, g \in G \;\;. $$

则有一个保持 G 作用的典范同构

$$ \varphi \;:\; C \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{Hom}^I(G, C_{\mathfrak{r}}) $$

它把 $c \in C$ 映到函数 $u : g \mapsto (g^{-1}c)_{\mathfrak{r}}$。

由此可以推出下面的：

推论 — 考虑 $C_{\mathfrak{r}}$ 的子环 $C_{\mathfrak{r}}^I$（I 作用不动的子环）。则合成映射

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}^I(G, C_{\mathfrak{r}}) & \longrightarrow & C_{\mathfrak{r}} \\ & & u & \longmapsto & u(1_G) \end{array}$$

诱导了一个由 $A = C^G$ 到 $C_{\mathfrak{r}}^I$ 的同构 $\widetilde{\varphi}$。

设 $B_{\mathfrak{q}}$ 是 B 在 $\mathfrak{q}$ 处的局部分支。由于 $C_{\mathfrak{q}}$ 的极大理想与 C 的位于 $\mathfrak{q}$ 之上的素理想是一一对应的，故它们都具有 $h\mathfrak{r}$ 的形状，其中 $h \in H$。H 在 $\mathfrak{r}$ 处的惯性群显然是 $H \cap I$。于是若把 A 换成 $B_{\mathfrak{q}}$，把 C 换成 $C_{\mathfrak{q}}$，把 G 换成 H，把 I 换成 $H \cap I$，则可以得到同构

$$\Psi \ : \ C_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{H\cap I}(H, C_{\mathfrak{r}})$$

且合成同态

$$\begin{array}{ccccc} C_{\mathfrak{q}} & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{Hom}^{H\cap I}(H, C_{\mathfrak{r}}) & \longrightarrow & C_{\mathfrak{r}} \\ & & v & \longmapsto & v(1_H) \end{array}$$

可以诱导出一个由 $B_{\mathfrak{q}} = C_{\mathfrak{q}}^H$ 到 $C_{\mathfrak{r}}^{H\cap I}$ 的同构 $\widetilde{\Psi}$。由此推出典范同态 $A \to B_{\mathfrak{q}}$ 可以等同于典范同态 $C_{\mathfrak{r}}^I \to C_{\mathfrak{r}}^{H\cap I}$，从而当 $H \supseteq I$ 时是一个同构，自然 B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是平展的。

一般情形。设 A^{h} 是 A 在 $\mathfrak{p}$ 处的严格 Hensel 化。把 A^{h} 写成一些平展性局部 $A_{\mathfrak{p}}$ 代数 A_i 的滤相归纳极限，且令 $C_i = C \otimes_A A_i, \ldots, C^{\mathrm{h}} = C \otimes_A A^{\mathrm{h}}, \ldots$。注意到 A^G 和 A^H 的构作方式与平坦扩张 $A \to A'$ 是可交换的。设 $\mathfrak{r}^{\mathrm{h}}$ 是 C^{h} 的一个位于 $\mathfrak{r}$ 之上的素理想，$\mathfrak{r}_i$ 是 $\mathfrak{r}^{\mathrm{h}}$ 在 C_i 中的逆像。以显明的方法定义素理想 $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}^{\mathrm{h}}, \mathfrak{p}^{\mathrm{h}}$，并注意到在把 $\mathfrak{r}$ 换成 $\mathfrak{r}_i$ 或 $\mathfrak{r}^{\mathrm{h}}$ 时惯性群 I 保持不变。

当 i 充分大时，C^{h} 的所有基本幂等元都来自 C_i。于是可以把引理 1 及其推论应用到每个 A_i 上。由此得知，B_i 在 $\mathfrak{q}_i$ 的近旁在 A_i 上是平展的（只要 i 充分大）。

可以假设 A_i 是某个平展 A 代数 A' 在一个素理想 $\mathfrak{p}'$ 处的局部化。令 $C' = C \otimes_A A', \ldots$。

把 $A'_{\mathfrak{p}'}$ 写成 A'_f 的滤相归纳极限，其中 f 跑遍 $A' - \mathfrak{p}'$。则可以把 A' 换成某个 A'_f 以使得 $C'_{\mathfrak{p}'}$ 的基本幂等元可以提升为 C' 的一族幂等元 $e_m,\ m \in M$，并且两两正交（M 是指 C' 的位于 $\mathfrak{p}'$ 之上的素理想的族）。进而可以假设 G 在诸 e_m 上的作用是传递的，此时幂等元 $e_{\mathfrak{r}'}$（在 $\mathfrak{r}'$ 处取值为 1）的稳定化子必然等于 I。在这样的条件下，引理 1 及其推论对于 C' 和它的直和因子 $C'(\mathfrak{r}')$（幂等元 $e_{\mathfrak{r}'}$ 取值为 1）也是有效的。故知 $C'(\mathfrak{r}')$ 同构于 A'，从而 B' 在 $\mathfrak{q}'$ 的近旁在 A' 上是平展的。

取 $f' \in B' - \mathfrak{q}'$ 使得 $B'_{f'}$ 在 A' 上是平展的。由于 A' 在 A 上是平展的，故知 $B'_{f'}$ 在 A 和 B 上都是平展的。从而 $\mathrm{Spec}(B'_{f'})$ 在 $\mathrm{Spec}(B)$ 中的像是一个开集（第五章定理 3）且包含 $\mathfrak{q}$。适当改变 f'，可以假设存在 $b \in B - \mathfrak{q}$，使得 $B'_{f'}$ 在 B_b 上是忠实平坦且平展的。于是由下面的引理就可以推出 B_b 在 A 上是平展的，这就证明了定理的 1)。

引理 2. — 设 $A \to B \to C$ 都是环同态。假设 C 在 B 上是平展且忠实平坦的。于是若 C 在 A 上是有限型（相应的，有限呈示，孤直，平展）的，则 B 在 A 上也是有限型（相应的，有限呈示，孤直，平展）的。

a) 假设 C 在 A 上是有限型的，下面证明 B 在 A 上也是有限型的。为此把 B 写成它的有限型 A 子代数 B_i $(i \in I)$ 的滤相归纳极限。则对充分大的 i，存在一个平展 B_i 代数 C_i，使得 $C \simeq C_i \otimes_{B_i} B$（参考第五章习题）。根据第五章定理 3 及其证明，$\mathrm{Spec}(C_i)$ 在 $\mathrm{Spec}(B_i)$ 中的像是开的，并且拟紧（即有限个仿射开集的并集）。这相当于说它的补集具有 $V(\mathfrak{a}_i)$ 的形状，其中 $\mathfrak{a}_i$ 是 B_i 的一个有限型理想。由于 C 在 B 上是忠实平坦的，故有 $\mathfrak{a}_i B = B$，从而当 j 充分大时 $\mathfrak{a}_i B_j = B_j$。简言之，可以假设 $\mathrm{Spec}(C_i) \to \mathrm{Spec}(B_i)$ 是映满的，从而 C_i 在 B_i 上是忠实平坦的。

现在 $C = \varinjlim C_i$。由于 C_i 在 B_i 上是平坦的，并且 B_i 包含在 B 之中，故知 C_i 包含在 C 之中。从而若 C 在 A 上是有限型的，则对充分大的 i，必有 $C_i = C$，再根据忠实平坦性，$B_i = B$，从而 B 在 A 上是有限型的。

b) 假设 C 在 A 上是有限呈示的。根据 a)，可以把 B 写成一个多项式 A 代数 $A[T_1, \ldots, T_n]$ 除以一个理想 $\mathfrak{J}$ 后的商。把 $\mathfrak{J}$ 看作是它的有限型子理想 $\mathfrak{J}_i$ 的归纳极限，并设 $B_i = A[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{J}_i$。与上面同理，对于充分大的 i，C 来自某个在 B_i 上忠实平坦的平展 B_i 代数 C_i。由于 C 在 A 上是有限呈示的，故当 i 充分大时，满同态 $C_i \to C$ 是一一的。再根据忠实平坦性，$B_i = B$。

c) 孤直性和平展性。若 C 在 A 上是平坦的，且在 B 上是忠实平坦的，则 B 在 A 上是平坦的。根据上面的结果，为了证明当 C 在 A 上孤直（相应的，平展）时 B 也有相同的性质，只需检验 B 在 A 上的诸纤维都是平展的即可，于是归结到 A 是域 k 的情形。此时 B 是一个平展 k 代数的子代数，从而显然也是平展 k 代数。

现在证明定理 1 的 2)。设 $g \in I$。考虑 B 到 C 的两个 A 同态 u, v，其中 u 是典范含入，v 是 u 与 g 平移的合成。设 $\pi : C \to \kappa(\mathfrak{r})$ 是典范同态。由于 $g \in I$，故有 $\pi \circ u = \pi \circ v$。若 B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是孤直的，则由第八章命题 1 的引理 2 知，存在 $f \in C - \mathfrak{r}$，使得两个同态 $B \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} C \to C_f$ 是重合的。进而若 C 是整环，则 C 可以嵌入 C_f，故有 $u = v$，从而 g 在 B 上只有平凡的作用。

推论 1（整体化）— 设 G 是一个有限群，作用在环 C 上，$A = C^G$。

1) 若 G 在 C 上的作用是无惯性的（即对 C 的任何素理想 $\mathfrak{r}$，惯性群 $I_{\mathfrak{r}}$ 都是平凡群），则 C 在 A 上是有限且平展的。

2) 假设 G 在 C 上的作用是忠实的，$\mathrm{Spec}(C)$ 是连通的，并且 C 在 A 上是孤直的，则 G 的作用是无惯性的。

证明：1) 定理 1 表明 C 在 A 上是平展的，从而也是有限型的，进而由于 C 在 A 上是整型的，故知它在 A 上是有限的。

2) $\mathfrak{r}$ 是 C 的一个素理想，g 是惯性群 $I_{\mathfrak{r}}$ 的一个元素。设 u 和 v 是 $\mathrm{Spec}(C)$ 的两个自同构，分别对应于恒同和 g 平移。它们的张量积可以给出一个态射 $w : \mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(C \otimes_A C)$，$u$ 和 v 的重合化子概形 F 就是 $\mathrm{Spec}(C \otimes_A C)$ 的对角线在 w 下的逆像。若 C 在 A 上是孤直的，则 F 作为 $\mathrm{Spec}(C)$ 的子概形既是开的又是闭的（第三章命题 9）。基于 g 的选择，必有 $\mathfrak{r} \in F$。由于 $\mathrm{Spec}(C)$ 是连通的，故

有 $F=\operatorname{Spec}(C)$。这表明 $u=v$，从而 g 在 C 上只有平凡的作用。然而 G 在 C 上的作用又是忠实的，从而 g 是单位元，即 G 的作用是无惯性的。

推论 2. — 若 G 在 Noether 环 C 上的作用是无惯性的，则 $A=C^G$ 也是 Noether 环。

事实上，C 在 A 上是忠实平坦的。

例子：设 k 是域，n 是 >0 的整数，并设对称群 S_n 在 $k[T_1,\ldots,T_n]=C$ 上的作用就是这些 T_i 的置换。则不变量环 A 是由 T_i 的基本对称多项式所生成的。根据定理 1，C 在 A 上恰好在方程 $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(T_i-T_j)=0$ 所定义的闭集之外是平展的。

习题：1) 采用定理 1 的记号，并假设 H 包含分解群 $D_{\mathfrak{r}}$，则 B 在 $\mathfrak{q}$ 的近旁在 A 上是平展的，并且 $\kappa(\mathfrak{q})=\kappa(\mathfrak{p})$。

2) 设 A 是环，n 是 $\geqslant 3$ 的整数，并设对称群 S_n 在乘积环 $C=A^n$ 上作用就是各分量的置换。试证明 C 在不变量环上是平展的，尽管 S_n 的这个作用不是无惯性的。

§2 正规环的 Hensel 化及严格 Hensel 化的另一种描述法

定理 2. — 设 A 是一个正规局部环，$\mathfrak{p}$ 是极大理想，K 是分式域，$\bar{K}$ 是 K 的可分代数闭包，C 是 A 在 $\bar{K}$ 中的整闭包，则 $\bar{K}$ 在 K 上的 Galois 群 G 作用在 C 上。设 $\mathfrak{r}$ 是 C 的一个极大理想，D 是 G 在 $\mathfrak{r}$ 处的分解群，I 是其惯性群。令 $B=C^D$，$B'=C^I$。设 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{r}$ 在 B 中的逆像，$\mathfrak{q}'$ 是 $\mathfrak{r}$ 在 B' 中的逆像。则 $B_{\mathfrak{q}}$ 是 A 的 Hensel 化，$B'_{\mathfrak{q}'}$ 是 A 的严格 Hensel 化。

只考虑严格 Hensel 化的情形，Hensel 化的情形可以类似处理（使用上面的习题 1)）。

a) 把 $\bar{K}$ 写成 K 的有限 Galois 扩张 K_i 的归纳极限。设 C_i 是 A 在 K_i 中的正规化，则 K_i/K 的 Galois 群 G_i 可以作用在 C_i 上。以 $\mathfrak{r}_i$ 来记 $\mathfrak{r}$ 在 C_i 中的逆像，I_i 是 G_i 在 $\mathfrak{r}_i$ 处的惯性群。最后，设 $B'_i=C_i^{I_i}$，$\mathfrak{q}'_i$ 是 $\mathfrak{r}_i$ 在 B'_i 中的逆像。则有 $G=\varprojlim G_i$，$I=\varprojlim I_i$，$C=\varinjlim C_i$，$B'_{\mathfrak{q}'}=\varinjlim (B'_i)_{\mathfrak{q}'_i}$。另一方面，由定理 1 知，$B'_i$ 在 $\mathfrak{q}'_i$ 的近旁在 A 上是平展的；从而 $B'_{\mathfrak{q}'}$ 是归纳平展性局部 A 代数。有见于 A 的严格 Hensel 化的描述（第八章命题 3），为了证明 $B'_{\mathfrak{q}'}$ 是 A 的严格 Hensel 化，只需证明任给平展性局部 A 代数 E，均有一个 A 同态 $u\colon E\to B'_{\mathfrak{q}'}$，亦即 E 可被某个形如 $(B'_i)_{\mathfrak{q}'_i}$ 的 A 代数所超过。

根据定义，E 具有 $A'_{\mathfrak{p}'}$ 的形状，其中 A' 是一个平展 A 代数，$\mathfrak{p}'$ 是一个位于 $\mathfrak{p}$ 之上的素理想。由于 A 是正规的，故知 A' 也是正规的，从而 $A'_{\mathfrak{p}'}$ 是整环。取 A' 关于某个元素（$\in A'-\mathfrak{p}'$）的局部化，可以假设 A' 本身就是整环。则 A' 的分式域 K' 是 K 的一个可分有限扩张，并且由 Zariski 主定理（第四章）立知，可以假设 A' 具有 $(A'')_f$ 的形状，其中 A'' 是 A 在 K' 中的整闭包。设 $\mathfrak{p}''$ 是 $\mathfrak{p}'$ 在 A'' 中的逆

像。设 L 是 K' 在 K 上所生成的 Galois 扩张， G'' 是 L/K 的 Galois 群， H'' 是 L/K' 的 Galois 群， C'' 是 A 在 L 中的整闭包， $\mathfrak{r}''$ 是 C'' 的一个位于 $\mathfrak{p}''$ 之上的素理想， I'' 是 G'' 在 $\mathfrak{r}''$ 处的惯性群。则有 $A'' = (C'')^{H''}$ ，且由定理 1 之 2) 知， H'' 包含 I'' 。从而有 $A'' \subseteq (C'')^{I''} = B''$ 。设 $\mathfrak{q}''$ 是 $\mathfrak{r}''$ 在 B'' 中的逆像。则 $B''_{\mathfrak{q}''}$ 超过了 $A''_{\mathfrak{p}''} = E$ 。另一方面，易见 $B''_{\mathfrak{q}''}$ 可以 A 同构于某个形如 $(B'_i)_{\mathfrak{q}'_i}$ 的平展性局部 A 代数，故得定理。

第十一章　Hensel 二元组

§1　平展代数和幂等元的提升

定义 1. — 在本章中，形如 $(A, \mathfrak{I})$ 的**二元组**是由一个环 A 和 A 的一个理想 $\mathfrak{I}$ 所组成的。令 $\overline{A} = A/\mathfrak{I}$。二元组之间的一个同态 $u : (A, \mathfrak{I}) \to (A', \mathfrak{I}')$ 是指一个满足条件 $u(\mathfrak{I}) \subseteq \mathfrak{I}'$ 的环同态 $u : A \to A'$。我们把 u 在商环上导出的同态记作 $\overline{u} : \overline{A} \to \overline{A'}$。严格同态是指满足 $u(\mathfrak{I})A' = \mathfrak{I}'$ 的同态。

定义 2. — 设 $(A, \mathfrak{I})$ 是一个二元组，则 $(A, \mathfrak{I})$ 的一个**平展邻域**是指一个二元组 $(A', \mathfrak{I}')$ 连同一个严格同态 $u : (A, \mathfrak{I}) \to (A', \mathfrak{I}')$，并满足下面的条件：$A'$ 在 A 上是平展的，并且 $\overline{u} : \overline{A} \to \overline{A'} = A' \otimes_A \overline{A}$ 是一个同构。（同样的，若 S 是一个概形，$\overline{S}$ 是 S 的一个闭子概形，则 $\overline{S}$ 在 S 中的一个平展邻域是指这样一个平展态射 $S' \to S$，它在 $\overline{S}$ 上给出同构）。

在本章中，我们将考察 Hensel 二元组 $(A, \mathfrak{I})$ 的概念，这是 Hensel 局部环（取 A 是局部环，$\mathfrak{I}$ 是极大理想）的一种推广。

下面的结果是整个理论的基础：

定理 1. — 设 $(A, \mathfrak{I})$ 是一个二元组，B 是一个有限 A 代数，$\overline{e}$ 是 $\overline{B} = B/\mathfrak{I}B$ 的一个幂等元。则可以找到 $(A, \mathfrak{I})$ 的一个平展邻域 $(A', \mathfrak{I}')$ 满足下面的条件：令 $B' = B \otimes_A A'$，则 $\overline{e}$ 在 $\overline{B'} = B'/\mathfrak{I}'B' \simeq \overline{B}$ 中的像 $\overline{e'}$ 可以提升为 B' 的一个幂等元 e'。

证明：1) **归结到 B 是一个元素所生成的 A 代数的情形**。设 x 是 $\overline{e}$ 在 B 中的一个提升，$C = A[x]$ 是 x 在 B 中所生成的 A 子代数，$\overline{C} = C/\mathfrak{I}C$。则典范态射 $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A[x])$ 是映满的（Cohen-Seidenberg 下行定理），从而 $\operatorname{Spec}(\overline{B}) \to \operatorname{Spec}(\overline{C})$ 也是如此。以 $\overline{x}$ 来记 x 在 $\overline{C}$ 中的像。则 $\overline{x}$ 在 $\overline{B}$ 中的像就是幂等元 $\overline{e}$。故知 $\operatorname{Spec}(\overline{C})$ 的两个闭子概形 $V(\overline{x})$ 和 $V(1-\overline{x})$ 是没有交集的，且可以覆盖 $\operatorname{Spec}(\overline{C})$。从而可以找到 $\overline{C}$ 的一个幂等元 $\overline{f}$ 使得它在 $\overline{B}$ 中的像等于 $\overline{e}$。易见只需对 C 和 $\overline{f}$ 来证明定理即可。

2) **归结到 A 在 $\mathbb{Z}$ 上有限型的情形**。设 P 是 $A[X]$ 中的一个首一多项式，并以 B 的生成元 x 为零点。令 $C = A[X]/(P)$，则 B 是 C 除以某个理想 $\mathfrak{J}$ 后的商。把 $\mathfrak{J}$ 写成它的有限型子理想 $\mathfrak{J}_\alpha$ 的滤相归纳极限，并且令 $C_\alpha = C/\mathfrak{J}_\alpha$。则有 $B = \varinjlim C_\alpha$ 和 $\overline{B} = \varinjlim \overline{C}_\alpha$。从而对于充分大的 α，幂等元 $\overline{e}$ 来自 $\overline{C}_\alpha$ 的某个幂等元 $\overline{e}_\alpha$。把 B 换成 C_α，则可以假设 B 在 A 上是有限呈示的。

同样的，把A的理想$\mathfrak{I}$也写成它的有限型子理想$\mathfrak{I}_\beta$的归纳极限。则有$\overline{B} = \varinjlim B/\mathfrak{I}_\beta B$，并且对于充分大的$\beta$，幂等元$\overline{e}$来自$B/\mathfrak{I}_\beta B$的某个幂等元$\overline{e}_\beta$。由于$(A,\mathfrak{I}_\beta)$的一个平展邻域$(A',\mathfrak{I}'_\beta)$也定义了$(A,\mathfrak{I})$的一个平展邻域，故可限于考虑$\mathfrak{I}$是有限型理想的情形。

现在把A写成它的一些包含$\mathfrak{I}$的生成元的有限型$\mathbb{Z}$子代数A_γ的滤相归纳极限，并设$\mathfrak{I}_\gamma$是由这些生成元所生成的A_γ的理想。则$(A,\mathfrak{I}) = \varinjlim(A_\gamma,\mathfrak{I}_\gamma)$。当$\gamma$充分大时，存在一个只由一个元素所生成的$A_\gamma$代数$B_\gamma$，使得$B \simeq B_\gamma \otimes_{A_\gamma} A$，并可假设$\overline{B}$的幂等元$\overline{e}$来自$B_\gamma/\mathfrak{I}_\gamma B_\gamma$的某个幂等元。从而问题归结到$A$在$\mathbb{Z}$上有限型的情形。

3) 令$S = \mathrm{Spec}(A)$，$\overline{S} = \mathrm{Spec}(\overline{A})$，$X = \mathrm{Spec}(B)$，$\overline{X} = \mathrm{Spec}(\overline{B})$。设$\mathfrak{J} = \mathrm{Ker}(A \to B)$，并设$Y = V(\mathfrak{J})$，则$X \to Y$是映满的。我们对$Y - \overline{S}$的Krull维数进行归纳。

a) 若$\dim(Y-\overline{S}) \leqslant 0$，则$Y$的底集合包含在$\overline{S}$之中，从而$B_{\mathrm{red}} = \overline{B}_{\mathrm{red}}$，归结为幂等元的无穷小可提升性（第一章§2）。

以下假设$\dim(Y-\overline{S}) = n \geqslant 0$，并假设定理已对严格小于$n$的维数得到证明。

b) 归结到S, X都既约的情形（从而Y也既约）。假设问题对于B_{red}已经解决，并且找到了$(A_{\mathrm{red}},\mathfrak{I}A_{\mathrm{red}})$的平展邻域$(A_0,\mathfrak{I}_0)$。设$A'$是$A_0$的唯一的提升平展$A$代数（第五章定理4）。则$(A',\mathfrak{I}A')$是$(A,\mathfrak{I})$的一个平展邻域，并且仍由幂等元的无穷小可提升性可以推出，$(A',\mathfrak{I}A')$即给出了问题的解答。

c) **引理1**. — *设A是一个Noether既约环，并且在$\mathbb{Z}$上是有限型的，$\mathfrak{I}$是A的一个理想，B是一个有限A代数，由一个元素生成。假设*

i) B在A上的$V(\mathfrak{I})$之外是平坦的，同时A在$V(\mathfrak{I})$之外是正规的。

ii) 在B中能够被$\mathfrak{I}$的某个方幂所零化的元素只有0本身（换句话说，$\mathrm{Ass}(B)$位于$\mathrm{Spec}(A) - V(\mathfrak{I})$之上，从而（根据i））位于$\mathrm{Min}(A)$之上）。

现在设$\overline{e}$是$\overline{B} = B/\mathfrak{I}B$的一个幂等元。则可以找到$\overline{e}$在$B$中的一个提升$t$以及一个整数$m \geqslant 0$和一个以$t$为零点的多项式$P \in A[X]$，使得

$$P \equiv (X^2 - X)^m \mod \mathfrak{I} \quad 。$$

引理的证明： 设$\mathfrak{p}_i$，$i = 1,\ldots,r$是A的全体极小素理想。令$A_i = A/\mathfrak{p}_i$。设$\widetilde{A}_i$是A_i的正规化，$\widetilde{A} = \prod \widetilde{A}_i$，$\widetilde{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\widetilde{A}$，$\widetilde{\mathfrak{I}}_i = \mathfrak{I}\widetilde{A}_i$，$\widetilde{B}_i = B \otimes_A \widetilde{A}_i$，$\widetilde{B} = B \otimes_A \widetilde{A} = \prod \widetilde{B}_i$。设$\mathfrak{T}_i$是$\widetilde{B}_i$的理想，由所有能被$\widetilde{\mathfrak{I}}_i$的某个方幂零化的元素所组成，再设$\dot{B}_i = \widetilde{B}_i/\mathfrak{T}_i$。最后，设$x$是$B$的一个生成元，$\overline{x}, \widetilde{x}_i, \dot{x}_i$分别是$x$在$\widetilde{B}, \widetilde{B}_i, \dot{B}_i$中的像。

由于A是优等的（EGA IV.7），故知$\widetilde{A}$在A上是有限型的；另一方面，A在$V(\mathfrak{I})$之外的正规性表明，$\mathrm{Spec}(\widetilde{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$在$V(\mathfrak{I})$之外是一个同构。从而$\widetilde{A}$关于$A$的导子$\mathfrak{c}$包含$\mathfrak{I}$的一个方幂。根据幂等元的无穷小可提升性，在证明引理1时可以把$\mathfrak{I}$换成它的某个方幂。从而可以假设$\mathfrak{c}$包含$\mathfrak{I}$，再把$\mathfrak{I}$换成$\widetilde{\mathfrak{I}}$，还可以假设$\mathfrak{I} = \widetilde{\mathfrak{I}}$。

我们需要使用下面的引理(Hamet Saydi)。

引理2. — 设A是一个正规整环，分式域为K，B是一个有限A代数，由一个元素生成，并且无挠，$P \in K[X]$是B的生成元x在K上的特征多项式。则$P \in A[X]$，并且B与$A[X]/(P)$同构。

P的系数都落在A中是因为A的正规性(Bourbaki《交换代数学》, V, §1, 命题17的推论1)。根据Hamilton-Cayley定理，$P(x)$在$B \otimes_A K$中等于零，从而本身就是零(因为B无挠)。故有一个满同态$A[X]/(P) \to B$(因为x可以生成B)，并且它与K取张量积可以给出同构(比较维数即可)，从而它本身也是单的(因为$A[X]/(P)$无挠)。

把引理2应用到每个A_i代数$\dot{B}_i$上；于是$\dot{B}_i$在A_i上都是自由的。设它的秩是m_i。

现在取幂等元$\overline{e}$在B中的一个提升t，并设$y = t^2 - t$。则$y \in \mathfrak{I}B$。把它在$\dot{B} = \prod \dot{B}_i$中的像记作$\dot{\mathbf{y}} = (\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_r)$。则有$\dot{y}_i \in \mathfrak{I}\dot{B}_i$。从而$\dot{y}_i$在自由$\widetilde{A}_i$代数$\dot{B}_i$中的特征多项式$P_i$是$\widetilde{A}_i[Y]$中的一个$m_i$次首一多项式，且满足$P_i \equiv Y^{m_i} \mod \mathfrak{I}\widetilde{A}_i$。

令$m = \sup(m_i)$, $Q_i = Y^{m-m_i}P_i$, $i = 1, \ldots, r$。则诸Q_i可以确定一个m次首一多项式$Q \in \widetilde{A}[Y]$，满足$Q \equiv Y^m \mod \widetilde{\mathfrak{I}}$且$\dot{\mathbf{y}}$都是它的零点。然而$\widetilde{\mathfrak{I}}$包含在$\widetilde{A}$关于$A$的导子之中，从而$Q \in A[Y]$，并且$Q(y)$被$\mathfrak{I}$的某个方幂所零化，从而本身就等于零(根据条件ii))。最后，由于$\mathfrak{I} = \widetilde{\mathfrak{I}}$，故有$Q \equiv Y^m \mod \mathfrak{I}$。从而只要取$P$是多项式$Q(X^2 - X)$就可以证明引理。

d) **定理1证明的完结**。在b)的部分，我们已经把问题归结到X和Y都既约的情形。设U是Y的以$Y - \overline{S}$为底空间的开子概形。由于Y是既约的优等概形，故知U有一个正规的稠密开子概形(EGA IV.7)。易见(Y的既约性表明)X在U的诸不可约分支的一般点处在Y上是平坦的，从而X在U的一个稠密开集上是平坦的。取V是U的这样一个正规的稠密开集。设$\mathfrak{J}$是A的一个包含在$\mathfrak{I}$中的理想，并且定义了闭集$\overline{S} \cup (Y - V) = \overline{S} \cup (U - V)$。设$Z$是$B/\mathfrak{J}B$的谱。则$Z$在$S$中的像等于$Y - V$。从而$(Y - V) - \overline{S} = U - V$。根据$V$的选择，$\dim(U - V) < \dim(U) = \dim(Y - \overline{S})$。利用归纳假设，可以找到$(A, \mathfrak{J})$的一个平展邻域$(A', \mathfrak{J}')$，使得$\overline{e}$可以提升为$B'/\mathfrak{J}'B'$的一个幂等元，此处$B' = B \otimes_A A'$, $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}A'$。令$S' = \operatorname{Spec}(A')$, $X' = \operatorname{Spec}(B')$。则$X'$在$S'$中的概像$Y'$等于$Y \times_S S'$。由于$S'$在$S$上是平展的，故知$Y'$在$V(\mathfrak{J}')$之外是正规的，并且$X'$在$V(\mathfrak{J}')$之外在$Y'$上是平坦的。

注意到$(A', \mathfrak{J}')$的一个平展邻域也自动地定义出$(A', \mathfrak{I}')$的一个平展邻域(因为$\mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{I}'$)并且$(A', \mathfrak{I}')$的一个平展邻域也是$(A, \mathfrak{I})$的一个平展邻域。从而若把$A$换成$A'$，把$\mathfrak{I}$换成$\mathfrak{J}'$，则问题归结到下面的情形：$Y$是既约的，在$V(\mathfrak{I})$之外正规，并且$X$在 $V(\mathfrak{I})$之外在Y上是平坦的。

现在设$\mathfrak{T}$是B的理想，由所有能被$\mathfrak{I}$的某个方幂零化的元素所组成，并设$\dot{B} = B/\mathfrak{T}$。以$\dot{\overline{e}}$来记$\overline{e}$在$\dot{\overline{B}} = \dot{B}/\mathfrak{I}\dot{B}$中的像。假设$\dot{\overline{e}}$可以提升为$\dot{B}$中的一个幂等元$\dot{e}$，下面证明$\overline{e}$可以提升为$B$的一个幂等元。由Artin-Rees引理(Bourbaki《交换代数学》, III, §3, 定理1的推论1)知，存在整数$k > 0$使得$\mathfrak{I}^k B \cap \mathfrak{T} = 0$。把$\mathfrak{I}$换成

它的某个方幂，则可以假设$\mathfrak{I}B \cap \mathfrak{T} = 0$。故有下面的交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{T} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & B \arrow[r] \arrow[d] & \dot{B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T \arrow[r] & \overline{B} \arrow[r] & \dot{\overline{B}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中的两行都是正合的。利用图表追踪的方法很容易证明$\overline{e}$可以提升为B的一个幂等元。现在把B换成$\dot{B}$，则可以假设$\mathfrak{T} = 0$。

设B是Y的仿射环（等于A在B中的像）。我们把引理2应用到R和$\mathfrak{I}R$上，从而可以找到$\overline{e}$在B中的一个提升x，使得以x为零点的一个首一多项式$P \in R[X]$可以满足$P \equiv (X^2 - X)^m \mod \mathfrak{I}R$。设$Q$是$P$在$A[X]$中的一个首一提升，且满足$Q \equiv (X^2 - X)^m \mod \mathfrak{I}$。令$C = A[X]/(Q)$。则有一个同态$C \to B$把$X$映到$x$上。另外$\overline{C} = \overline{A}[X]/(X^2 - X)^m$。设$\overline{f}$是$\overline{C}$的这样一个幂等元（唯一），它在$V(X)$上取值为$0$，而在$V(1-X)$上取值为$1$。于是易见$\overline{f}$在$\overline{B}$中的像是$\overline{e}$。从而只需对$C$和$\overline{f}$证明定理即可。问题于是归结到$B$是自由$A$代数的情形。

考虑在第一章§4中所引入的平展A代数E，它表识了B的幂等元。于是幂等元$\overline{e}$对应于一个$A/\mathfrak{I}$同态$\overline{u} : E/\mathfrak{I}E = \overline{E} \to \overline{A}$。由于$\overline{E}$在$\overline{A}$上是孤直的，故知$u$所定义的概形态射$\overline{S} \to \operatorname{Spec}(\overline{E})$是一个既开又闭的浸入。从而可以找到$\overline{E}$中的一个幂等元$\overline{h}$，使得它在$\overline{S}$的像上取值为$1$而在其它地方取值为$0$。设$h$是$\overline{h}$在$E$中的随便一个提升。则$(E_h, \mathfrak{I}E_h)$是$(A, \mathfrak{I})$的一个平展邻域。又因为$E$表识了$B$的幂等元，故知典范同态$E \to E_h$可以对应到$B \otimes_A E_h$的一个幂等元，并且是$\overline{e}$的一个提升。这就证明了定理1。

推论1. — 设S是一个仿射概形，$\overline{S}$是S的一个闭子概形，X是一个有限型仿射S概形，且使得$\overline{X} = X \times_S \overline{S}$在$S$上是**有限**的。于是存在一个交换图表

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & Z \arrow[l] \arrow[d] \\
S & S' \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

满足条件:

S'是$\overline{S}$在S中的一个仿射平展邻域。

Z是$\overline{X}$在X中的一个平展邻域。

Z在S'上是**有限**的。

证明：前提条件表明，X在$\overline{X}$的点处在S上是拟有限的。于是由第四章定理1的推论1知，存在$f \in \Gamma(X)$，在$\overline{X}$上可逆，且使得X_f在S上是拟有限的。把X换成X_f，则可以假设X在S上是拟有限的。根据Zariski主定理（第四章），X是某个有限S概形Y的开子概形。于是$\overline{X}$是$\overline{Y} = Y \otimes_S \overline{S}$的开子概形，然而$\overline{X}$在$\overline{S}$上是有限的，从而$\overline{X}$也是$\overline{Y}$的闭子概形。设$\overline{e}$是$\overline{Y}$上的这样一个幂等元，它在$\overline{X}$上取值为$1$，而在$\overline{Y} - \overline{X}$上取值为$0$。根据定理1，可以找到$\overline{S}$在$S$中的一个仿射平展邻域$S'$，使得幂等元$\overline{e}$可以提升为$Y' = Y \times_S S'$上的一个幂等元$e'$，设$Y' = Y'_1 \cup T'_2$是$Y'$的相应分解。则$X' = X \times_S S'$是$Y'$的一个开集，且$\overline{X'} = \overline{X} \times_S S'$等于$Y'_1 \times_S \overline{S} = \overline{Y'_1}$。考虑$Y'_1$的闭子集$Y'_1 - X'$。它在$S'$中的像是一个闭

集（因为 Y_1' 在 S' 上是有限的），并且与 $\overline{S'} = \overline{S} \times_S S'$ 没有交集。从而通过把 S' 换成某个 S'_f，其中 f 是 $\Gamma(S')$ 中的一个元素，在 $\overline{S'}$ 上可逆，可以假设 $X' \supseteq Y_1'$。于是 Y_1' 就是 $\overline{X}$ 在 X 中的一个平展邻域，可以取 $Z = Y_1'$。

例子：设 $X \to S$ 是仿射概形之间的一个有限型态射，s 是 S 中的一点，n 是一个整数，假设纤维 X_s 的维数 $\geqslant n$。则有下面的一个交换图表

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

其中 X' 是 X_s 在 X 中的一个仿射平展邻域，Y 是一个平滑 S 概形，相对维数是 n，并且 Y_s 同构于 $\kappa(s)[T_1, \ldots, T_n]$，进而 X' 在 Y 上是有限的。

事实上，根据正规化引理（参考 Bourbaki《交换代数学》, V, §3, 定理 1），存在一个有限态射 $\overline{u} : X_s \to \mathrm{Spec}(\kappa(s)[T_1, \ldots, T_n])$。把 S 适当限制到 s 的一个小邻域上，则可以把 $\overline{u}$ 扩展为一个 S 态射 $u : X \to S[T_1, \ldots, T_n]$。使用推论 1 就可以得出结论（事实上，按照定义，一个相对维数 n 的平滑态射 $Y \to S$ 就是这样一个态射，它在局部上具有 $Y \to Y' \to S$ 的形状，其中 Y 在 Y' 上是平展的，并且 Y' 同构于 $S[T_1, \ldots, T_n]$）。

§2 Hensel 二元组，Hensel 化

设 $(A, \mathfrak{I})$ 是一个二元组，考虑 A 的乘性子集 $S = 1 + \mathfrak{I}$。由于 A_S 的任何极大理想都包含 $\mathfrak{I}_S$，故知 $\mathfrak{I}_S$ 包含在 A_S 的根之中。若 A 是 Noether 环，则 $(A_S, \mathfrak{I}_S)$ 是一个 Zariski 环。我们把 $(A_S, \mathfrak{I}_S)$ 称为 A 在 $\mathfrak{I}$ 处的**局部化**。

命题 1. — 设 $(A, \mathfrak{I})$ 是一个二元组，且 $\mathfrak{I}$ 包含在 $\mathrm{rad}(A)$ 之中。则以下诸条件是等价的:

1) 对任一有限 A 代数 B，$\overline{B} = B/\mathfrak{I}B$ 的任一幂等元 $\overline{e}$ 都可以提升为 B 的一个幂等元。

2) 与 1) 相同，但假设 B 在 A 上是自由的。

3) 与 1) 相同，但假设 B 具有 $A[X]/(P)$ 的形状，其中 P 是 $A[X]$ 中的一个首一多项式，并且满足 $P \equiv (X^2 - X)^m \mod \mathfrak{I}$。

4) 对于 $A[X]$ 中的任一首一多项式 P，以及它在 $\overline{A}[X]$ 中的像 $\overline{P}$ 的任一分解 $\overline{QR}$，只要 $\overline{Q}$ 和 $\overline{R}$ 都是 $\overline{A}[X]$ 中的首一多项式，并且强互素 (Bourbaki《交换代数学》, III, §4, n° 1)，该分解必可提升为 $A[X]$ 中的一个分解 $P = QR$，并且 Q 和 R 都是首一的。

5) 对于 $(A, \mathfrak{I})$ 的任一平展邻域 $(A', \mathfrak{I}')$，必有一个 A 同态 $A' \to A$。

证明：5) $\Rightarrow$ 1) 可由定理 1 立得。1) $\Rightarrow$ 2) 和 4) $\Rightarrow$ 3) 是显然的。2) $\Rightarrow$ 4) 的方法与第一章处理局部情形时完全相同。最后，3) $\Rightarrow$ 5) 可由下面的引理推出。

引理 3. — 设 $(A', \mathfrak{I}')$ 是二元组 $(A, \mathfrak{I})$ 的一个平展邻域。则可以找到一个整数 $m \geqslant$

0和一个首一多项式$P \in A[X]$，满足$P \equiv (X^2-X)^m \bmod \mathfrak{I}$，且具有下面的性质：设$E$是表识了$A[X]/(P)$的幂等元的平展$A$代数（第一章§4），则存在$h \in E$，使得$(E_h, \mathfrak{I}E_h)$是$(A,\mathfrak{I})$的一个平展邻域，并且承托$(A', \mathfrak{I}')$（即存在$A$同态$A' \to E_h$）。

证明：使用定理1的证明方法可以把问题归结到A在$\mathbb{Z}$上有限型的情形，于是A是某个$B = \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$的商环。以$\mathfrak{J}$来记$\mathfrak{I}$在$B$中的逆像。把定理1的推论1应用到$S = \mathrm{Spec}(B)$, $\overline{S} = \mathrm{Spec}(B/\mathfrak{J}) = \mathrm{Spec}(\overline{A})$以及$X = \mathrm{Spec}(A')$上（$X$在$S$上是拟有限的，并且在$\overline{S}$之外是有限的），于是得到交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

其中S'是$\overline{S}$在S中的一个平展邻域，Z是$\overline{X} = X \times_S \overline{S}$在$X$中的一个平展邻域，并且$Z$在$S'$上是有限的。证明过程还显示，可以进而假设$Z$是$X' = X \times_S S'$的一个开（且闭的）子概形。现在设$T = \mathrm{Spec}(A)$，它是$S$的一个闭子概形，包含$\overline{S}$，以$T'$（相应的，$\overline{S'}$）来记$T$（相应的，$\overline{S}$）在$S'$中的逆像。则由前提条件知，$X$是$\overline{S}$ 在T中的一个平展邻域。由于Z是X'的开集，故知Z是$\overline{S'}$在T'中的一个平展邻域。然而Z还在S'上是有限的，从而在T'上是有限的；由此立知态射$Z \to T'$在$\overline{S'}$的某个邻域上是同构。把S'限制到$\overline{S'}$的一个适当的仿射开邻域，则可以假设$Z \to T'$是一个同构。于是T'可以承托X，为了证明引理，可以把A'换成$\Gamma(T')$。从而问题归结到A'可以提升为$B = \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$的一个平展邻域$B'$的情形，并且$B$是正规的。显然只需对$(B, \mathfrak{J})$的平展邻域$B'$证明引理即可。

现在假设A是正规整环，分式域为K。设$K' = K \otimes_A A'$并且B'是A在K'中的正规化。令$S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(A')$, $Y = \mathrm{Spec}(B')$。由Zariski主定理（第四章）及A'正规的事实立知，典范同态$B' \to A'$给出一个开浸入$X \to Y$。设$\overline{S} = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{I})$, $\overline{X} = X \times_S \overline{S}$, $\overline{Y} = Y \otimes_S \overline{S}$。则$\overline{X}$是$\overline{Y}$的开子概形，然而它也是一个闭子概形，因为$\overline{X}$在$\overline{S}$上是有限的（甚至同构于$\overline{S}$）。设$\overline{e}$是$B'/\mathfrak{I}B' = \overline{B'}$中的这样一个幂等元，它在$\overline{X}$上取值为1而在其它地方取值为零。设$t$是$\overline{e}$在$B'$中的一个提升，再设$y = t^2 - t$，则有$y \equiv 0 \mod \mathfrak{I}B'$。设$Q \in A[Y]$是$y$的特征多项式。则有$Q \equiv Y^m \mod \mathfrak{I}$（其中$m$是$B'$在$A$上的秩）。则$P = Q(X^2 - X)$是一个首一多项式，在$t$处取值为零，并且满足$P \equiv (X^2 - X)^m \mod \mathfrak{I}$。故有一个$A$同态$C = A[X]/(P) \to B'$把$X$映到$t$。若$\overline{f}$是$\overline{C} = C/\mathfrak{I}C$的这样一个幂等元，它和$X$在$\overline{C}_{\mathrm{red}}$中的像是重合的，则易见$\overline{f}$在$\overline{B'}$中的像等于$\overline{e}$。设$E$是表识了$C$的幂等元的那个平展$A$代数，并设$\overline{u} : \overline{E} = E/\mathfrak{I}E \to \overline{A}$是幂等元$\overline{f}$所对应的同态。于是$\mathrm{Spec}(\overline{u}) : \mathrm{Spec}(\overline{A}) \to \mathrm{Spec}(\overline{E})$是一个既开又闭的浸入。把$E$换成某个$E_h$，则可以假设$\overline{u}$是一个同构。此时$(E, \mathfrak{I}E)$就是$(A, \mathfrak{I})$的一个平展邻域。进而由$E$的定义知，$\overline{C}$的幂等元$\overline{f}$可以提升为$C \otimes_A E$的一个幂等元。从而$\overline{e}$可以提升为$B \otimes_A E$的一个幂等元，并且很容易证明，$E$可以承托$A'$。

定义3. — 所谓$(A, \mathfrak{I})$是一个**Hensel二元组**，是指$\mathfrak{I}$包含在A的根之中，并且$(A, \mathfrak{I})$满足命题1中所列的等价条件。

例子：1) 设A是一个局部环，极大理想为$\mathfrak{m}$，则$(A, \mathfrak{m})$是Hensel二元组的充分必

要条件是，A 是 Hensel 局部环。

2) 若 A 在 $\mathfrak{I}$ 进拓扑下是分离且完备的，则 $(A,\mathfrak{I})$ 是 Hensel 二元组。

下述命题的证明与第一章所处理的局部情形完全相同：

命题 2. — 1) 设 $(A,\mathfrak{I})$ 是一个 Hensel 二元组，B 是一个整型 A 代数，则 $(B,\mathfrak{I}B)$ 也是 Hensel 二元组。

2) 设 $(A_\lambda,\mathfrak{I}_\lambda)$ 是 Hensel 二元组的一个滤相归纳系，则 $(\varinjlim A_\lambda, \varinjlim \mathfrak{I}_\lambda)$ 也是一个 Hensel 二元组。

定义 4. — 设 $(A,\mathfrak{I})$ 是一个二元组。则 $(A,\mathfrak{I})$ 的一个 **Hensel 化**，是指一个 Hensel 二元组 $(A^{\mathrm{h}},\mathfrak{I}^{\mathrm{h}})$ 连同一个同态 $u:(A,\mathfrak{I})\to(A^{\mathrm{h}},\mathfrak{I}^{\mathrm{h}})$，且具有下面的普适性质：

对任意 Hensel 二元组 $(B,\mathfrak{J})$ 和任意同态 $v:(A,\mathfrak{I})\to(B,\mathfrak{J})$，均有唯一一个同态 $v^{\mathrm{h}}:(A^{\mathrm{h}},\mathfrak{I}^{\mathrm{h}})\to(B,\mathfrak{J})$，使得 $v^{\mathrm{h}}u=v$。

二元组 $(A^{\mathrm{h}},\mathfrak{I}^{\mathrm{h}})$ 和同态 u 显然可被这样的普适性质确定到只差一个唯一同构。

定义 5. — 设 $(A,\mathfrak{I})$ 是一个二元组，满足 $\mathfrak{I}\subseteq \mathrm{rad}(A)$。则 $(A,\mathfrak{I})$ 的一个**平展性局部邻域**是指一个位于 $(A,\mathfrak{I})$ 上的二元组，它同构于 $(A,\mathfrak{I})$ 的某个平展邻域 $(A',\mathfrak{I}')$ 在 $\mathfrak{I}'$ 处的局部化。

为了构造出 $(A,\mathfrak{I})$ 的 Hensel 化，显然可以把 $(A,\mathfrak{I})$ 换成它在 $\mathfrak{I}$ 处的局部化。于是有下面的结果，其证明方法与局部情形完全一样（参考第八章）：

定理 2. — 设 $(A,\mathfrak{I})$ 是一个二元组，且 $\mathfrak{I}$ 包含在 A 的根之中。

a) 存在 $(A,\mathfrak{I})$ 的平展性局部邻域的一个集合 $\big((A_\lambda,\mathfrak{I}_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$，且对 $(A,\mathfrak{I})$ 的任一平展性局部邻域 $(A',\mathfrak{I}')$，均有唯一的元素 $\lambda\in\Lambda$，使得 $(A',\mathfrak{I}')$ 同构于 $(A_\lambda,\mathfrak{I}_\lambda)$。

b) 集合 Λ 在下述序关系下是滤相的

“$\lambda\leqslant\mu$ 当且仅当 A_μ 可以承托 A_λ”。

c) 二元组 $(A^{\mathrm{h}},\mathfrak{I}^{\mathrm{h}})=(\varinjlim A_\lambda,\varinjlim\mathfrak{I}_\lambda)$ 连同典范同态 $(A,\mathfrak{I})\to(A^{\mathrm{h}},\mathfrak{I}^{\mathrm{h}})$ 构成 $(A,\mathfrak{I})$ 的一个 Hensel 化。

第八章 § 3 和 § 4 中所述的 Hensel 局部环以及局部环的 Hensel 化的绝大部分性质都可以推广到 Hensel 二元组以及二元组的 Hensel 化上。特别的，若 $(A^{\mathrm{h}},\mathfrak{I}^{\mathrm{h}})$ 是二元组 $(A,\mathfrak{I})$（其中 $\mathfrak{I}\subseteq\mathrm{rad}(A)$）的一个 Hensel 化，则 A^{h} 在 A 上是忠实平坦的，并且 A 和 A^{h} 在 $\mathfrak{I}$ 进拓扑下的分离完备化是同构的，A^{h} 是既约（相应的，正规，Noether）的当且仅当 A 是如此。

§3 “优良Noether环”上的Hensel二元组的另一种描述法

定理3. — 设$(A,\mathfrak{I})$是一个Hensel二元组，$\widehat{A}$是A在$\mathfrak{I}$进拓扑下的完备化。假设态射

$$\mathrm{Spec}(\widehat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$$

的纤维都是几何正规的（EGA IV 6.7.6 ）（当A是优等环时这个条件一定是成立的（EGA IV.7））。则有:

a) 态射$\mathrm{Spec}(\widehat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$的纤维都是几何整的。

b) 若A是既约的，则A在$\widehat{A}$中是相对整闭的。

证明：首先证明b)。设B是A在它的全分式环中的正规化，并设$\widehat{B} = B \otimes_A \widehat{A}$。

i) 先证B在$\overline{B}$中是相对整闭的。为此可以分别考虑$\mathrm{Spec}(B)$的每一个不可约分支，从而可以假设B是整的，分式域为K。已知$\widehat{A}$在A上是平坦的。故由前提条件知，态射$\mathrm{Spec}(\widehat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$是正规的（EGA IV 6.8.1）从而$\widehat{B}$是正规的（EGA IV 6.14.1）。于是为了证明B在$\widehat{B}$中是相对整闭的，只需证明当$\widehat{B}$包含B在K的某个有限扩张L中的相对整闭包时，必有$L = K$。令$\widehat{C} = C \otimes_B \widehat{B}$，则它仍然是正规的（EGA IV 6.14.1）。由于C包含在$\widehat{B}$之中，故有典范$\widehat{B}$同态$u : \widehat{C} \to \widehat{B}$。现在由于$\widehat{C}$正规，故易见$u$使$\widehat{B}$ 成为$\widehat{C}$的一个直和因子。设$\widehat{e}$是$\widehat{C}$中对应于投影u的那个幂等元。取模$\mathfrak{I}$约化，可得$\overline{C} = C/\mathfrak{I}C \simeq \overline{C}/\mathfrak{I}\overline{C}$的一个幂等元$\overline{e}$。然而由于$(B,\mathfrak{I}B)$是Hensel的（因为$B$在$A$上是整型的），故知$\overline{e}$可以提升为$C$的一个幂等元$e$，并且它在$\widehat{C}$中的像必然等于$\widehat{e}$。由于$C$是整的，故必有$1 = e = \widehat{e}$，从而$L = K$。

ii) 由i)知，A在$\widehat{A}$中的整闭包落在B中（把B和$\widehat{A}$都嵌入$\widehat{B}$中）。然而由于$\widehat{A}$在 A上是忠实平坦的，故有$\widehat{A} \cap B = A$，从而A在$\widehat{A}$中是相对整闭的。

a) 设$\mathfrak{p}$是A的一个素理想。为了考察$\mathfrak{p}$上的形式纤维，可以把A换成$A/\mathfrak{p}$。注意到$(A/\mathfrak{p}, \mathfrak{I}(A/\mathfrak{p}))$仍然是Hensel的（命题2），并且$A/\mathfrak{p}$在$\mathfrak{I}$进拓扑下的形式纤维显然也是$A$的形式纤维，从而是几何正规的。故可限于考虑$A$是整环的情形，设$K$是它的分式域，则只需证明$\widehat{A} \otimes_A K$是几何整的。然而这可由$\widehat{A} \otimes_A K$是几何正规的并且$K$在$\widehat{A} \otimes_A K$中相对代数闭（根据b)）的事实推出。

推论 — 设A是一个Noether既约环，$\mathfrak{I}$是A的一个理想，包含在A的根里，$\widehat{A}$是A在$\mathfrak{I}$进拓扑下的完备化。假设态射$\mathrm{Spec}(\widehat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$的纤维都是几何正规的，再设$B$是$A$在$\widehat{A}$中的整闭包。则$B$在理想$B \cap \mathfrak{I}\widehat{A}$处的局部化就是$(A,\mathfrak{I})$的一个Hensel化。

证明：设$(A^{\mathrm{h}}, \mathfrak{I}^{\mathrm{h}})$是$(A,\mathfrak{I})$的一个Hensel化。则$A^{\mathrm{h}}$可以典范地嵌入$\widehat{A}$中。由于态射$\mathrm{Spec}(A^{\mathrm{h}}) \to \mathrm{Spec}(A)$的纤维都是平展代数的归纳极限，故易见$\mathrm{Spec}(\widehat{A}) \to \mathrm{Spec}(A^{\mathrm{h}})$的纤维都是几何正规的（因为$\mathrm{Spec}(A^{\mathrm{h}}) \to \mathrm{Spec}(A)$的纤维是如此）。另外$A^{\mathrm{h}}$也是既约的（因为$A$既约）。从而由定理3的b)知，$A^{\mathrm{h}}$在$\widehat{A}$中是相对整闭的。这表明$B$就是$A$在$A^{\mathrm{h}}$中的相对整闭包，并且$B \cap \mathfrak{I}\widehat{A} = B \cap \mathfrak{I}^{\mathrm{h}}$（因为$\mathfrak{I}\widehat{A} \cap$

$A^{\mathrm{h}} = \mathfrak{I}^{\mathrm{h}}$）。

现在把 A^{h} 写成 $(A, \mathfrak{I})$ 的平展性局部邻域 A_i 的归纳极限，并设 B_i 是 A 在 A_i 中的相对整闭包。则由 Zariski 主定理立知，A_i 是 B_i 沿着理想 $B_i \cap \mathfrak{I}A_i$ 的局部化。取归纳极限就推出 A^{h} 是 B 沿着理想 $\widetilde{\mathfrak{I}} \cap B$ 的局部化。

参考文献

[1] N. Bourbaki. *Algèbres nettes et étales.*

[2] E. Crépeaux. *Une caractérisation des couples henséliens,* L'enseignement mathématique (Suisse) IIème série t.13 (1967) p. 273-279.

[3] J. Dieudonné et A. Grothendieck. *Eléments de Géométrie Algébrique (EGA).* Publ. de l'I.H.E.S. n° 4.

[4] J.P. Lafon. *Anneaux henséliens.* Bul. Soc. Math. de Fr. t. 91 (1963) p. 77-107.

[5] M. Nagata. *Local rings.* Interscience publishers.

[6] Peskine. *Le théorème principal de Zariski.* Bul. Sc. Math. (1968).