LIE 代数形式的基本引理

吴宝珠

目　录

引论

本文的目的是证明 Langlands, Shelstad 和 Waldspurger 的著名猜想，通常称为 Lie 代数形式的基本引理和非标准的基本引理。下面两个结果的确切含义可在 1.11.1 和 1.12.7 中找到。

定理 1. — *设 k 是 q 个元素的有限域，$\mathcal{O}$ 是一个以 k 为剩余类域的完备离散赋值环，F 是它的分式域。设 G 是一个 $\mathcal{O}$ 上的简约群概形，其 Coxeter 数的两倍小于 k 的特征。设 (κ, ρ_κ) 是 G 在 $\mathcal{O}$ 上的一个初分线索，H 是相应的初分群概形。*

则有 κ 轨道积分和稳定轨道积分之间的一个等式

$$\Delta_G(a)\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}}, \mathrm{d}t) = \Delta_H(a_H)\mathbf{SO}_{a_H}(1_{\mathfrak{h}}, \mathrm{d}t)$$

其中 a 和 a_h 分别是 $\mathfrak{g}(F)$ 和 $\mathfrak{h}(F)$ 中相互对应的正则半单稳定共轭类，$1_{\mathfrak{g}}$ 和 $1_{\mathfrak{h}}$ 分别是 $\mathfrak{g}(F)$ 和 $\mathfrak{h}(F)$ 中的紧集 $\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ 和 $\mathfrak{h}(\mathcal{O})$ 的特征函数，并且

$$\Delta_G(a) = q^{-\mathrm{val}(\mathfrak{D}_G(a))/2} \quad \text{且} \quad \Delta_H(a_H) = q^{-\mathrm{val}(\mathfrak{D}_H(a_H))/2}$$

$\mathfrak{D}_G$ 和 $\mathfrak{D}_H$ 分别是 G 和 H 的判别式函数。

定理 2. — *设 G_1, G_2 是 $\mathcal{O}$ 上的两个简约群概形，它们的根架构是谐构的，且 Coxeter 数的两倍小于 k 的特征。则有稳定轨道积分之间的下述等式*

$$\mathbf{SO}_{a_1}(1_{\mathfrak{g}_1}, \mathrm{d}t) = \mathbf{SO}_{a_2}(1_{\mathfrak{g}_2}, \mathrm{d}t)$$

其中 a_1 和 a_2 是 $\mathfrak{g}_1(F)$ 和 $\mathfrak{g}_2(F)$ 中相互对应的正则半单稳定共轭类，$1_{\mathfrak{g}_1}$ 和 $1_{\mathfrak{g}_2}$ 分别是紧集 $\mathfrak{g}_1(\mathcal{O})$ 和 $\mathfrak{g}_2(\mathcal{O})$ 在 $\mathfrak{g}_1(F)$ 和 $\mathfrak{g}_2(F)$ 中的特征函数。

我们将在均一特征的情形下证明上述定理。根据 Waldspurger 的结果，混合特征的情形可以从均一特征的情形推出来，参照 [**82**]。

基本引理在下面两个问题中扮演着重要的角色，一是 Langlands 函子性原理的某些具体实现 (通过迹公式的比较)，二是考察 Shimura 多样体的上同调群中出现的自守形式和 Galois 表示。在迹公式的比较上的应用可以参考 Arthur 的著作 [**2**]，在 Shimura 多样体上的应用可参考 Kottwitz 的文章 [**45**] 及 Harris 正在编写的书。

---
(0) 译注：本译文的术语系统将与 EGA, SGA 中译本保持一致。日期：2015.8.27。

若干已知情形及归约方法. — 此前基本引理已经对很多特殊的群得到了证明。阿式局部域的情况是由Shelstad完成的，见 [**71**]。受到这个激励，Langlands和Shelstad对非阿式局部域提出了相应的猜想。群SL(2)的情形是Labesse和Langlands在 [**48**] 中完成的。三变量的酉群的情形是Rogawski在 [**65**] 中解决的。相似的情形Sp(4)和偏转GL(4)则是由Hales, Schröder和Weissauer通过具体计算而解决的，参照 [**31**], [**68**] 和 [**84**]。最近， Whitehouse把这样的计算又向前推进了一步，用以证明这些情形下的偏转型加权基本引理，参照 [**85**]。

稳定基变换下的基本引理已由Clozel [**14**] 和Labesse [**47**] 建立，基于Kottwitz [**43**] 在Hecke的单位上的工作。在此之前， GL(2)的情形已被Saito, Shintani所证明，参照 [**67**] 和Langlands [**49**]， GL(3)的情形则参照Kottwitz [**39**]。

另一个重要的情形是SL(n)，由Waldspurger在 [**79**] 中解决。在此之前， SL(3)带椭圆型环面的情形是由Kottwitz建立的，参照 [**40**]， SL(n)带椭圆型环面的情形则是由Kazhdan建立的，参照 [**35**]。

最近，作者与Laumon一起证明了均一特征情形下酉群的Lie代数上的基本引理。我们所用的方法是几何性的，只适用于均一特征的局部域。我们已经指出，基于Waldspurger的工作 [**82**]，混合特征的情形也可以由此推出。 Cluckers和Loeser [**15**] 使用数理逻辑的方法，在更一般的框架下建立了特征转换的理论，但对于剩余特征的界放宽了要求。

在一系列工作 (特别是[**80**] 和 [**83**]) 中，Waldspurger证明了，群上的基本引理及迁移可以从Lie代数的通常的基本引理推出。同样，偏转型的基本引理可以从Lie代数的通常的基本引理结合他所提出的非标准的基本引理而推出。在下文中，我们将限于考虑一个均一特征的局部域上关于Lie代数的通常的基本引理及非标准基本引理。

局部几何方法. — Kazhdan和Lusztig 在 [**36**] 中引入了仿Springer纤维，它们是轨道积分在几何中的承载物。这项工作探讨了仿Springer纤维的一些最基本的几何性质，我们将在第3章给出一个回顾。

在 [**36**] 的附录中，Bernstein和Kazhdan对于群Sp(6)构造出一个仿Springer纤维，它里面的点的个数不是q的多项式。事实上，这个仿Springer纤维的恒机 (1) 中包含了一个来自超椭圆曲线的恒机。这个例子显示，要得到轨道积分的一个具体明确的公式似乎是不太可能的。

Goresky, Kottwitz和MacPherson的文章 [**26**] 建立了κ轨道积分与仿Springer纤维的具体联系。他们在 [**26**] 中还引入了用循变上同调来考察仿Springer纤维的方法。这个方法特别适合于那些包含在某个非分歧环面中的元素，因为此时我们有一个很大的环面作用在仿Springer纤维上，且只有孤立不动点。他们还发现了G的仿Springer纤维的循变上同调和它的初分群H的对应纤维的循变上同调之间的一个重要的关系 (非分歧情形)。这个关系依赖于这些仿Springer纤维的上同调群上的纯性猜想。后一猜想对于那些根赋值全都相等的元素已经得到证实，参照 [**27**]。

(1) 译注：恒机 =“motif”。

在 [**51**] 和 [**52**] 中，Laumon 对于酉群引入了仿 Springer 纤维的形变方法，这是基于平面曲线的形变理论。他首先基于局部条件寻找一条几何亏格为零的平面曲线，带一个指定的奇异点，然后让这条平面曲线去形变。他还注意到，在酉群的情形，存在一个 1 维环面，作用在 $U(n)$ 的某些仿 Springer 纤维上，这些纤维所关联的稳定共轭类来源于 $U(n_1) \times U(n_2)$，上述作用的不动点多样体正好是 $U(n_1) \times U(n_2)$ 所对应的仿 Springer 纤维。通过计算合族的循变上同调，他可以有条件地证明酉群的基本引理 (包含有分歧的元素)。他的证明也依赖于 Goresky, Kottwitz 和 MacPherson 关于仿 Springer 纤维的纯性猜想。

这个纯性猜想局部几何方法的主要障碍 (在笔者看来)。它的主要作用是使某些谱序列退化，以便于使用 Atiyah-Borel-Segal 局部化定理。

实际上在这里还有另一个障碍，至少与使用一般的仿 Springer 纤维的循变上同调时遇到的问题一样严重。对于酉群之外的群，在考察那些极分歧的元素时，其仿 Springer 纤维上不再有一个环面的作用。在此情况下，即使已经建立了纯性猜想，仍然不清楚 [**26**] 和 [**52**] 中的想法能不能实现。

整体几何方法. — 在 [**34**] 中，Hitchin 证明了，紧 Riemann 曲面上稳定向量丛的参模空间上的余切丛是一个 Hamilton 完全可积系统。为此他把这个余切丛重新解释为带一个 Higgs 场的主丛的参模空间。Hamilton 量则由 Higgs 场的特征多项式的系数来提供。他还定义了著名的 Hitchin 纤维化 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$，其中 $\mathcal{M}$ 是上述余切丛，$\mathcal{A}$ 是特征多项式 (系数取在 X 上的典范丛的适当方幂的整体截面空间之中) 的分类空间，f 是一个态射，它的一般纤维本质上是一个 Abel 多样体。

我们的视角是，Hitchin 纤维化中的那些纤维相当于仿 Springer 纤维的整体化。此外，在我们所采用的方法中，很重要的一点是把 Higgs 丛的系数由典范丛换成任何一个可逆向量丛 (次数充分大)。在这种推广的形式下，参模空间 $\mathcal{M}$ 上不再有辛形式，但仍然有 Hitchin 纤维化 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$，且有类似的表现。

我们在 [**57**] 已经指出，$\mathcal{M}$ 在一个有限域上点的个数写成的表达式几乎就是 Lie 代数的迹公式中的几何学侧面。我们在 [**57**] 中使用 Hitchin 纤维化的 ℓ 进上同调重新诠释了 Langlands 和 Kottwitz 关于迹公式的稳定化过程。这个诠释引导我们用 Hitchin 纤维化的 ℓ 进上同调来写出基本引理的一个整体性的表述方式，参照 [**16**] 和 [**58**]。使用 Hitchin 纤维化来给出稳定化过程的几何学诠释，以及把基本引理改写成整体性的形式等等，这些都比使用仿 Springer 纤维给出的局部陈述复杂得多。相应的，这里也蕴含着更丰富的几何内容。

稳定化过程的几何学诠释是建立在有一个 Picard 叠形 $\mathcal{P} \to \mathcal{A}$ 作用在 $\mathcal{M}$ 上这件事之上的，可以说这个叠形 $\mathcal{P}$ 是由 Hitchin 纤维化的自然对称所组成的。借助 $\mathcal{P}$ 来完成数点的过程，这是 [**57**] 第 9 节已经做过的事情，本文将对此进行更加系统的讨论，见最后的第 8 章。$\mathcal{P}$ 的构造方法是基于正则中心化子的理论，我们要在第 2 章作一个复习。数点过程中的一个关键工具是下述事实：对任意 $a \in \mathcal{M}(k)$，商叠形 $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a]$ 都可以写成一些局部的仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v(a)$ 在其自然对称 $\mathcal{P}_v(J_a)$ 下的商叠形的乘积，参照 4.15.1 和 [**57**, 4.6]。这个乘积公式在整篇文章中几乎无处不在。

代数叠形$\mathcal{M}$不是有限型的。不过可以找到$\mathcal{A}$的一个不迷向开集$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$，定义见第6章，在它上面$f^{\mathrm{ani}}:\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}\to\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$是一个紧合(2)态射。此外我们还知道$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}$在基域$k$上是平滑的。根据Deligne [**18**]，导出顺像$f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$是一个纯权复形，也就是说它的错致上同调层

$$^p\mathrm{H}^n(f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

都是纯权错致层(3)。根据分解定理，在基变换到$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}\otimes_k\bar{k}$上以后，它们都成为半单的。从证明基本引理的角度来看，一件重要的事情是理解这个分解中出现的那些几何单的因子。

$\mathcal{P}$在$\mathcal{M}$上的作用诱导了$\mathcal{P}^{\mathrm{ani}}$在错致层$^p\mathrm{H}^n(f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$上的一个作用，并且把它分解成一些同型分支的直和

$$^p\mathrm{H}^n(f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\bigoplus_{[\kappa]}{}^p\mathrm{H}^n(f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{[\kappa]}\quad。$$

这里的指标$[\kappa]$跑遍对偶群$\hat{G}$的半单共轭类的集合，其中只有有限项是有实际贡献的。令$^p\mathrm{H}^n(f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}$是对应于$\kappa=1$的那个直和因子。对偶群出现的原因是，我们在这里使用了Tate-Nakayama对偶来计算$\mathcal{P}$的诸纤维的连通分支层，此项计算开始于[**57**, 6]，完成于本文的4.10及5.5两节。在[**57**]和[**58**]中，我们已经证明，这个分解恰好对应于迹公式中的几何学侧面的初分式分解，后者是由Langlands和Kottwitz所建立的，参照[**50**]和[**44**]。

在本文中，我们会稍微改变一下视角。即不是直接考察$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$，而是转到它的一个平展覆叠$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$上，这依赖于点$\infty\in X$的选择，参照[**54**]。在这个平展开集上，我们有一个更精细的分解

$$^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\bigoplus_{[\kappa]}{}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\kappa}\quad。$$

其中κ跑遍对偶群$\hat{\mathbf{G}}$的极大环面$\hat{\mathbf{T}}$中的一个有限子集。我们暂时不再纠缠于迹公式，转而先把一些次要的困难作一个清理。我们的几何稳定化定理6.4.1意在把这些断片$^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$用初分群的语言表达出来。事实上，我们要把它表示成一些稳定断片（即对应于$\kappa=1$）的直和，而这些稳定断片是联系到另外一些群H上的，这些群则来自点标初分线索，参照1.8.2。6.4.1还有一个算术的变体6.4.2，由它就可以推出Langlands-Shelstad的基本引理。

在[**57**]中，我们证明，$^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$的支集落在一些态射$\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}\to\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$的像的并集(应该是它的一种变形)之中。我们将在6.3中讨论这件事。我们在[**57**]和[**54**]中已经观察到，这个事实可以用来替换掉Goresky, Kottwitz和MacPherson关于Hitchin纤维化的纯性猜想。此外，这很容易让人猜测$^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$的每个单因子的支集恰好落在某一个闭浸入$\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}\to\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$的像上。注意到几何稳定化定理可以从这样的支集猜想推出来，事实上在$\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}$的某个稠密开集上不难证明这件事。

在酉群上，Laumon和笔者使用循变上同调的Atiyah-Borel-Segal正合序列证明了上述支集猜想的一个弱化的形式。把这个循变方法推广到其它群上的努力后来都没有成功，主要的障碍是在某些极分歧的元素上，Hitchin纤维上面没有环面的作用。

(2)译注：紧合 =“propre”。

(3)译注：错致 =“pervers”，取“上同调层排布得错落有致”之意。

在本文中，我们将对所有群证明一种弱形式的支集猜想。在第 7 章中，我们将证明，对于 δ 正则的 Abel 纤维化，参照 7.2.1，可以确定出所有这些支集。由于现在还无法证明 Hitchin 纤维化是 δ 正则的（不过可参考 [**60**, p. 4]），我们将使用某些中间性的命题 7.2.2 和 7.2.3，结合一个在素特征的情况下已知的 δ 正则性结果 5.7.2，再加上第 8 章中的一些繁琐的计算，最终完成 6.4.2 的证明。

δ 不等式 7.2.2 及其证明是第 7 章的主要内容，它使我们可以在 Abel 纤维化的情形下降低支集的余维数。事实上，这里的主要工作是把 Goresky 和 MacPherson 关于支集余维数的不等式 (参照 7.3) 进行适当的加工和变形。

最后我们来介绍一下本文的结构。第一章给出 Lie 代数形式的基本引理及其非标准变体的陈述。本文的核心是位于倒数第二章的第 7 章，那里将证明两个不等式 7.2.2 和 7.2.3，并由此导出一个支集定理 7.8.5。最后的第 8 章讨论数点问题，并由此导出基本引理，在支集定理 7.8.5 的基础上。其它的各章都是辅助性的。第 3 章考察仿 Springer 纤维的几何性质。然后第4 章将平行地考察 Hitchin 纤维化的几何性质。我们的得力工具是自然对称的作用，这是基于第 2 章所给出的正则中心化子的构造。在第 5 章中，我们将在 Hitchin 基底上定义几种区块化。在随后的第6 章中，我们将在 Hitchin 基底上定义出不迷向开集，在它上面， Hitchin 纤维化将具有足够好的性质，使我们能谈论几何稳定化定理 6.4.2，该定理的证明将在其后的第 7 和第 8 章给出。

1. Langlands-Shelstad 猜想和 Waldspurger 猜想

在本章中，我们要复述一下 Langlands 和 Shelstad 所猜想的 Lie 代数形式的基本引理，参照 1.11.1，以及 Waldspurger 所猜想的非标准变体，参照 1.12.7。在本章的最后一节中，我们复习一下 Langlands-Shelstad 基本引理在迹公式的几何学侧面的稳定化过程中是怎样发生效用的。正是这个稳定化过程直接激发了我们在下文中对于 Hitchin 纤维化的研究。我们将使用尽可能初等的语言来展开本章的讨论。

1.1. Chevalley 的限制定理. — 设 k 是一个域，$\mathbf{G}$ 是一个在 k 上分裂的简约群 [(4)]。我们的定义皆来自 [**21**]，特别的，简约蕴涵平滑仿射且连通。取定一个分裂的极大环面 $\mathbf{T}$ 和一个包含 $\mathbf{T}$ 的 Borel 子群 $\mathbf{B}$。设 $N_G(\mathbf{T})$ 是 $\mathbf{T}$ 的正规化子，$\mathbf{W} = N_G(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ 是 Weyl 群。$\mathfrak{g}$ 是指 $\mathbf{G}$ 的 Lie 代数，$k[\mathfrak{g}]$ 是指 $\mathfrak{g}$ 上的正常函数的代数。同样，$\mathfrak{t} = \mathrm{Spec}(k[\mathfrak{t}])$ 是指 $\mathbf{T}$ 的 Lie 代数。设 r 是 $\mathbf{G}$ 的秩。

$\mathbf{T}$ 在 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的作用定义了一个根集合 Φ，其上有 Weyl 群 $\mathbf{W}$ 的作用。选取一个 Borel 子群 $\mathbf{B}$ 后可以定义出单根的集合 Δ。每个根都可以唯一地写成 $\sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha \alpha$ 的形状，其中 $n_\alpha \in \mathbb{Z}$。此时 $\sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha$ 就叫做这个根的高度。设 $\mathbf{h}-1$ 是根的最大高度。若这个根系是单的，则 $\mathbf{h}$ 就是它的 Coxeter 数。在本文中，我们总假设特征 p 要么是零，要么比 $2\mathbf{h}$ 大。由于 Weyl 群的阶是一些不超过 $\mathbf{h}$ 的正整数的乘积，故这个条件已经蕴涵着 p 不整除 Weyl 群的阶。它还表明 p 在 [**12**, 1.14] 的意义下是一个好的素数，从而在半单的情形下 Killing 形式是非退化的。

(4) 译注：简约 =“réductif”。

群$\mathbf{G}$在它的Lie代数上有伴随作用。以下是Chevalley限制定理的陈述，其证明在半单伴随的情形可参考[**75**, 3.17]。一般的情形可由此推出（在$p > 2$的条件下），参考[**55**, 0.8]。

定理 1.1.1. — $\mathbf{g}$到$\mathbf{t}$的限制诱导了代数间的一个同构$k[\mathbf{g}]^{\mathbf{G}} = k[\mathbf{t}]^{\mathbf{W}}$。

令$\mathbf{c} = \mathrm{Spec}(k[\mathbf{t}]^{\mathbf{W}}) = \mathrm{Spec}(k[\mathbf{g}]^{\mathbf{G}})$。设$\chi : \mathbf{g} \to \mathbf{c}$是Chevalley特征态射，它来自代数的自然含入$k[\mathbf{g}]^{\mathbf{G}} \subseteq k[\mathbf{g}]$。类比于矩阵群的情形，我们称$\chi(x)$是$x$的特征式，并且称$\mathbf{c}$是特征式空间。$\mathbf{G}_m$在$\mathbf{g}$上的同筋作用(5)与$\mathbf{G}$的伴随作用是可交换的，从而诱导了它在$\mathbf{c}$上的一个作用。我们有代数叠形间的态射(6)

$$[\chi] : [\mathbf{g}/\mathbf{G}] \to \mathbf{c} \quad \text{和} \quad [\chi/\mathbf{G}_m] : [\mathbf{g}/\mathbf{G} \times \mathbf{G}_m] \to [\mathbf{c}/\mathbf{G}_m] \ 。$$

含入$k[\mathbf{t}]^{\mathbf{W}} \subseteq k[\mathbf{t}]$定义了一个态射$\pi : \mathbf{t} \to \mathbf{c}$。这是一个有限平坦态射，它把$\mathbf{c}$实现为$\mathbf{t}$在$\mathbf{W}$作用下的商（不变量理论的意义下）。进而，可以找到$\mathbf{c}$的一个非空开集$\mathbf{c}^{\mathrm{rs}}$，使得$\pi$在其上是一个有限平展Galois态射，Galois群为$\mathbf{W}$。这个态射与$\mathbf{G}_m$在$\mathbf{t}$上的同筋作用和$\mathbf{G}_m$在$\mathbf{c}$上的作用是相容的。

1.2. Kostant 截面. — 态射$\chi : \mathbf{g} \to \mathbf{c}$有很多截面。在[**38**]中，Kostant以一种整齐的方式构造了一个这样的截面。虽然他假定基域是特征零的，但他的做法可以推广到素特征$p > 2\mathbf{h}$的情形。在[**78**]中，Veldkamp设法在p不整除Weyl群的阶这个较弱的条件下给出了Kostant截面的构造方法，然而Deligne告诉笔者，Veldkamp的论证似乎是不完整的。

取定$\mathbf{G}$的一个摆置(7)，即除了取定$\mathbf{T}$和$\mathbf{B}$之外，还取定了一个向量$\mathbf{x}_+ \in \mathrm{Lie}(\mathbf{U})$，它具有形状$\mathbf{x}_+ = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbf{x}_\alpha$，其中$\Delta$是单根的集合，$\mathbf{x}_\alpha$是$\mathrm{Lie}(\mathbf{U})_\alpha$的一个非零向量，此处$\mathrm{Lie}(\mathbf{U})_\alpha$是$\mathrm{Lie}(\mathbf{U})$的对应于特征值$\alpha$（在$\mathbf{T}$的作用下）的特征子空间，$\mathbf{U}$则表示$\mathbf{B}$的幂合根(8)。

由此可以得到$\mathbf{g}$中的一个$\mathfrak{sl}_2$三元组$(h, \mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-)$（唯一），其中$h \in \mathbf{t} \cap \mathrm{Lie}(\mathbf{G}^{\mathrm{der}})$是一个半单元。事实上，考察根的高度可以证明$\mathrm{ad}(\mathbf{x}_+)^{2\mathbf{h}-1} = 0$，参照[**12**, 5.5.2]。于是在$p > 2\mathbf{h}$的条件下，我们有一个Jacobson-Morozov类型的定理[**12**, 5.3.2]。根据[**12**, 5.4.8]，我们还知道$\mathfrak{sl}_2$在$\mathbf{g}$上的主表示是完全可约的，在$p > 2\mathbf{h}$的条件下。

引理 1.2.1. — 设$\mathbf{g}^{\mathbf{x}_+}$是$\mathbf{x}_+$在$\mathbf{g}$中的中心化子。把特征式态射$\chi : \mathbf{g} \to \mathbf{c}$限制在向量空间$\mathbf{g}$的仿射子空间$\mathbf{x}_- + \mathbf{g}^{\mathbf{x}_+}$上可以给出一个同构。

这个结果是Kostant在特征零的条件下给出的[**38**, 定理0.10]。他首先注意到$\mathrm{Lie}(B) = [\mathbf{x}_-, \mathrm{Lie}(U)] \oplus \mathbf{g}^{\mathbf{x}_+}$。再从这个等式推出$\mathfrak{sl}_2$在$\mathbf{g}$上的主表示的完全可约性，后者在$p > 2\mathbf{h}$的条件下就是成立的。他从这件事出发来证明引理的方法[**38**, 命题19]实际上与特征无关，此事在[**6**]的最后一页中也有讨论。

(5)译注：同筋 =“homothétie”。
(6)译注：叠形 =“champ”。
(7)译注：摆置 =“épinglage”。
(8)译注：幂合 =“unipotent”。

把这个同构的取逆

$$\epsilon : \mathbf{c} \to \mathbf{x}_- + \mathbf{g}^{\mathbf{x}_+} \hookrightarrow \mathbf{g} \tag{1.2.2}$$

就定义出 Chevalley 态射 $\chi : \mathbf{g} \to \mathbf{c}$ 的一个截面。这就是 Kostant 截面。

对于典型群来说，使用线性代数的方法就可以明确地写出这些截面 $\mathbf{c} \to \mathbf{g}$，完全不必考虑摆置，参照 [**59**]。这些截面是一般线性群上的共伴矩阵 (9) 的推广，它们看起来非常适合于处理仿 Springer 纤维和 Hitchin 纤维上的具体计算问题。

回到 Kostant 所构造的截面。由 1.2.1 可知，$\mathbf{c}$ 同构于一个仿射空间。$\mathbf{G}_m$ 在 $\mathbf{G}$ 上的作用诱导了它在 $\mathbf{c}$ 上的一个作用。使用 $\mathfrak{sl}_2$ 在 $\mathbf{g}$ 上的主表示的完全可约性，可以选出 $\mathbf{c}$ 上的一组坐标，使得上述作用可以写成

$$t(a_1, \ldots, a_r) = (t^{e_1} a_1, \ldots, t^{e_r} a_r)$$

的形状。这些整数 $e_1 - 1, \ldots, e_r - 1$ 就是根系的指数，参考 [**11**]。

设 $\mathbf{g}^{\mathrm{reg}}$ 是 $\mathbf{g}$ 的一个开集，由这样的点 $x \in \mathbf{g}$ 所组成，它的中心化子 I_x 的维数正好是 r。在 [**38**, 引理 10] 中已经证明，Kostant 截面的像包含在开集 $\mathbf{g}^{\mathrm{reg}}$ 之中。Kostant 还证明，若 $x, x' \in \mathbf{g}^{\mathrm{reg}}(\bar{k})$ 具有相同的特征式 $\chi(x) = \chi(x')$，则它们是相互共轭的，参照 [**38**, 定理 2]。把这件事与截面的存在性结合起来，他得出下面的结果。

引理 1.2.3. — χ 在 $\mathbf{g}^{\mathrm{reg}}$ 上的限制是一个平滑态射。它的几何纤维都是 G 作用下的齐性空间。

1.3. 外偏转. — 为了算术上的应用，我们有必要考虑群 $\mathbf{G}$ 的拟分裂偏转 (10)。取定 $\mathbf{G}$ 的一个摆置 $(\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{x}_+)$，参考 1.2。设 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 是 $\mathbf{G}$ 的保持这个摆置方式的自同构群。这是一个离散群，但可能是无限的。它可以作用在根集合 Φ 上，并使单根的子集保持稳定。它还作用在 Weyl 群 $\mathbf{W}$ 上，且具有相容性，也就是说，由这个作用所定义的半直积 $\mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 仍可作用在 $\mathbf{T}$ 和根集合 Φ 上，并且是由 $\mathbf{W}$ 和 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 的作用拼合而成的。

定义 1.3.1. — $\mathbf{G}$ 在 k 概形 X 上的一个拟分裂偏转是指由 X 上的一个在平展拓扑下局部平凡的 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 回旋子 (11) ρ_G 所给出的偏转。

1.3.2. — 用 ρ_G 对 $\mathbf{G}$ 进行偏转可以得到一个平滑简约 X 群概形 $G = \rho_G \wedge^{\mathrm{Out}(\mathbf{G})} \mathbf{G}$，它上面带着一个摆置，且定义在 X 上，也就是说，这是一个三元组 $(T, B, \mathbf{x}_+)$，其中 B 是 G 的一个闭子群概形，在 X 上是平滑的，T 是 B 的一个子环面，$\mathbf{x}_+$ 是 $\mathrm{Lie}(B)$ 的一个整体截面，且在每根纤维上 $(T, B, \mathbf{x}_+)$ 都同构于摆置 $(\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{x}_+)$。反之，任给一个简约平滑 X 群概形附带一个摆置 $(T, B, \mathbf{x}_+)$，如果它在平展拓扑下局部同构于 $\mathbf{G}$ 连同它的摆置方式，则它定义了一个群 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 作用下的回旋子。我们经常粗略地称 G 是一个拟分裂偏转，而不提它的摆置方式。

---

(9) 译注：共伴矩阵 =“matrice compagnon”。

(10) 译注：偏转 =“tordu, torsion”，外偏转 = 外自同构所定义的偏转，内偏转 = 内自同构所定义的偏转。

(11) 译注：回旋子 =“torseur”。

1.3.3. — 设 ρ_G 是 X 上的一个 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 回旋子，G 是由此得到的拟分裂偏转，连同摆置方式 $(T, B, \mathbf{x}_+)$。上面两节中所提到的各种构造都可以搬运到这个拟分裂偏转上。设 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$。$\mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 在 $\mathbf{t}$ 上的作用诱导了 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 在 $\mathbf{c} = \mathbf{t}/\mathbf{W}$ 上的一个作用。从而可以把 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 的特征式空间定义为 X 概形

$$\mathfrak{c} = \rho_G \wedge^{\mathrm{Out}(\mathbf{G})} \mathbf{c} \quad 。$$

我们有一个态射

$$\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$$

它是由 Chevalley 态射 $\chi : \mathbf{g} \to \mathbf{c}$ 所导出的。由于 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 使 $\mathfrak{sl}_2$ 三元组 $(h, \mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-)$ 保持不动，故知 Kostant 截面 $\epsilon : \mathbf{c} \to \mathbf{g}$ 是 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 循变的。经过偏转，又可以得到一个 X 态射

$$\epsilon : \mathfrak{c} \to \mathfrak{g} \tag{1.3.4}$$

它是 Chevalley 态射 $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ 的截面，也被称为 Kostant 截面。此外我们还有一个有限平坦态射

$$\pi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{c}$$

它是由 $\pi : \mathbf{t} \to \mathbf{c}$ 所导出的。有限平展 X 群概形

$$W = \rho_G \wedge^{\mathrm{Out}(\mathbf{G})} \mathbf{W}$$

作用在 $\mathfrak{t}$ 上。由于 $\mathbf{c}$ 是 $\mathbf{t}$ 在 $\mathbf{W}$ 作用下的商 (在不变量理论的意义下)，故知 $\mathfrak{c}$ 也是 $\mathfrak{t}$ 在 W 作用下的商 (在不变量理论的意义下)。在开集 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}} = \rho_G \wedge^{\mathrm{Out}(\mathbf{G})} \mathbf{c}$ 上，态射 $\pi : \mathfrak{t}^{\mathrm{rs}} \to \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 是有限平展群概形 W 作用下的一个回旋子。

1.3.5. — 有时候把回旋子的语言翻译成更具体的基本群的表示会比较方便。设 x 是 X 的一个几何点，$\pi_1(X, x)$ 是 X 的基本群，以 x 为基点。以下将假设 X 是连通且正规的。

$\mathbf{G}$ 的一个点标拟分裂偏转是指一个连续同态

$$\rho_G^\bullet : \pi_1(X, x) \to \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \quad 。$$

由此导出的 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 回旋子 ρ_G 上面自动带着一个几何点 x_G，位于 x 之上。

1.3.6. — 选定基点后也可以用 Galois 理论的语言来描述 W 作用下的回旋子，W 本身则是 $\mathbf{W}$ 的一个偏转形。设 $\rho_G^\bullet : \pi_1(X, x) \to \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 是一个连续同态，G 和 W 分别是 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{W}$ 经过偏转而得到的群。

设 $X_\bullet$ 是 X 的普适投影有限平展 Galois 覆叠，它是所有有限平展 Galois 覆叠 $X_1 \to X$ 的投影极限，每个 X_1 上都指定了一个几何点 x_1，位于 x 之上。于是极限 $X_\bullet$ 上指定了一个几何点 $x_\bullet$，位于 x 之上。二元组 $(X_\bullet, x_\bullet)$ 是 (X, x) 的点标投影有限平展 Galois 覆叠范畴中的初始对象。

W 在普适覆叠 $X_\bullet$ 上的逆像典范同构于常值群 $\mathbf{W}$。

设 $\pi : \widetilde{X} \to X$ 是一个 W 回旋子，$\tilde{x}$ 是 $\widetilde{X}$ 的一个几何点，位于 x 之上。则纤维积 $\widetilde{X}_\bullet = \widetilde{X} \times_X X_\bullet$ 上也指定了一个几何点 $\tilde{x}_\bullet = (\tilde{x}, x_\bullet)$。$\pi_1(X, x)$ 和 $\mathbf{W}$ 都可以作用在 $\widetilde{X}_\bullet$ 上，并可拼合出半直积 $\mathbf{W} \rtimes \pi_1(X, x)$ 的一个作用，该作用在投影有限平展态

射 $\widetilde{X}_\bullet \to X$ 的诸纤维上是传递的。根据 $X_\bullet$ 的普适性质，给出这样一个 $\widetilde{X}_\bullet$ 相当于给出一个截面 $\pi^\bullet$

$$\mathbf{W} \rtimes \pi_1(X,x) \overset{\pi^\bullet}{\underset{}{\rightleftarrows}} \pi_1(X,x).$$

由于半直积 $\mathbf{W} \rtimes \pi_1(X,x)$ 是借助同态 $\rho_G^\bullet : \pi_1(X,x) \to \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 做出来的，所以构造一个这样的截面又相当于做出下面图表中的那个虚线箭头：

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \arrow[d] \\ \pi_1(X,x) \arrow[ur, dotted] \arrow[r, "\rho_G^\bullet"'] & \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \end{tikzcd}$$

我们将使用同样的记号 $\pi^\bullet$ 来表示这个同态

$$\pi^\bullet : \pi_1(X,x) \to \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \quad 。$$

这种记号的混用将不会导致误解。

1.4. 正则半单中心化子. — 与上节相同，设 G 是简约群 $\mathbf{G}$ 在概形 X 上的一个拟分裂偏转。

设 $\mathfrak{g}^{\mathrm{rs}}$ 是开集 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 在态射 $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ 下的逆像。则对任意 $a \in \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(\bar{k})$，纤维 $\chi^{-1}(a)$ 在 G 的伴随作用下只有一个轨道。对任意 $\gamma \in \mathfrak{g}^{\mathrm{rs}}(\bar{k})$，$\gamma$ 的中心化子 I_γ 都是 $G \otimes_k \bar{k}$ 的一个极大环面。

1.4.1. — 设 $a \in \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(\bar{k})$，$\gamma, \gamma' \in \chi^{-1}(a)$。则可以找到 $g \in G(\bar{k})$，它把 γ 送到 γ'，也就是说 $\mathrm{ad}(g)\gamma = \gamma'$。从而内自同构 $\mathrm{ad}(g)$ 定义了一个同构 $\mathrm{ad}(g) : I_\gamma \xrightarrow{\sim} I_{\gamma'}$。进而，若 g 和 g' 是 $G(\bar{k})$ 的两个元素，分别被送到 γ 和 γ' 上，则 g 和 g' 只差 I_γ 中的一个元素。由于 I_γ 是一个环面，特别的，它是交换的，故知两个同构

$$\mathrm{ad}(g) \text{ 和 } \mathrm{ad}(g') : I_\gamma \xrightarrow{\sim} I_{\gamma'}$$

是相同的。这就证明了环面 I_γ 和 $I_{\gamma'}$ 是典范同构的。从而这就定义出一个只依赖于 a 的环面，对任意 $\gamma \in \chi^{-1}(a)$，该环面都典范同构于 I_γ。我们也可以对任意系数的 a 直接描述这个环面，方法如下。

设 S 是一个 X 概形，$a \in \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(S)$ 是 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 的一个 S 值点。则 a 所给出的**分合覆叠**[12]是指这样一个 W 回旋子 $\pi_a : \tilde{S}_a \to S$，它是由下面的卡氏图表给出的：

$$\begin{tikzcd} \tilde{S}_a \arrow[r] \arrow[d, "\pi_a"'] & \mathfrak{t}^{\mathrm{rs}} \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, "a"'] & \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}} \end{tikzcd}$$

令

$$J_a = \pi_a \wedge^W T \quad 。 \tag{1.4.2}$$

[12]译注：分合 =“caméral”，取“观察 Weyl 房的分合配布”之意。“caméral”来自古希腊文，与“chambre”同词源，和照相机没有关系。

下面的引理是Donagi和Gaitsgory的某个结果的特殊情形。我们将在2.4中复习那个一般的结果。

引理 1.4.3. — 设S是一个X概形，$a \in \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(S)$是$\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$的一个$S$值点。设$x$是$\mathfrak{g}^{\mathrm{rs}}(S)$的一个$S$值点，且满足$\chi(x)=a$，$I_x$是中心化子在$\mathfrak{g}$上的逆像。则有一个典范同构$J_a = I_x$。

1.4.4. — 现在考虑上述构造的一个带基点的变化形式。先选好S的一个几何点s和$\tilde{S}_a$的一个几何点$\tilde{s}$，都位于s之上。和1.3.6一样，我们有一个交换图表：

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \arrow[d] \\ \pi_1(X,x) \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \end{tikzcd}$$

于是环面J_a可以经由对常值环面$\mathbf{T}$进行偏转而得到，使用$\pi_1(S,s)$在$\mathbf{T}$上的一个由同态

$$\pi_a^{\bullet} : \pi_1(X,x) \to \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$$

所导出的作用，也就是说

$$J_a = S_{\bullet} \wedge^{\pi_1(S,s),\pi_a^{\bullet}} \mathbf{T} \tag{1.4.5}$$

其中$(S_{\bullet}, s_{\bullet})$是$(S,s)$的普适投影有限平展Galois覆叠。

1.5. 稳定共轭类中的所有共轭类. — 在本节中，G是$\mathbf{G}$在某个包含k的域F上的拟分裂偏转。我们把$\mathfrak{g}$在F上的一个正则半单稳定共轭类理解为一个元素$a \in \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F)$。Langlands最早给出的稳定共轭类的定义相当复杂，但如果只考虑Lie代数中的正则半单元的话，则他的定义与我们的定义是一致的。由于我们只关心正则半单稳定共轭类，所有下文中出现的稳定共轭类都是正则半单的，除非另有声明。

1.5.1. — 设$a \in \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F)$是一个稳定共轭类。设$\gamma_0 = \epsilon(a) \in \mathfrak{g}(F)$是$a$在Kostant截面下的像。$\gamma_0$的中心化子$I_{\gamma_0}$是一个环面，定义在$F$上，典范同构于前节所定义的环面$J_a$，参照1.4.3。设$\gamma$是$\chi^{-1}(a)$的另一个$F$值点。作为$\mathfrak{g}(\overline{F})$的元素，$\gamma_0$和$\gamma$是共轭的，也就是说，存在一个$g \in G(\overline{F})$使得$\gamma = \mathrm{ad}(g)\gamma_0$。这个等式还表明，对任意$\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$，均有$g^{-1}\sigma(g) \in I_{\gamma_0}(\overline{F})$。映射$\sigma \mapsto g^{-1}\sigma(g)$定义了一个元素

$$\mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma) \in \mathrm{H}^1(F, I_{\gamma_0})$$

它只依赖于γ的$G(F)$共轭类，而不依赖于传输子[(13)] g。这个上同调类在$\mathrm{H}^1(F,G)$中的像是平凡的，这来自做法本身。根据Langlands，映射$\gamma \mapsto \mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma)$定义了一个一一映射，一边是$\chi^{-1}(a)$中的$F$值点的$G(F)$共轭类的集合，另一边是映射$\mathrm{H}^1(F,I_{\gamma_0}) \to \mathrm{H}^1(F,G)$在中性元处的纤维，参照[**50**]。这根纤维将被记为

$$\ker(\mathrm{H}^1(F,I_{\gamma_0}) \to \mathrm{H}^1(F,G)) \quad 。$$

1.5.2. — 除了$\mathfrak{g}(F)$，我们还有必要考虑下面的疏群[(14)] $[\mathfrak{g}/G](F)$，它是由这样的二元组(E,ϕ)构成的，其中E是F上的一个G回旋子，ϕ是$\mathrm{ad}(E) = E \wedge^G \mathfrak{g}$的一个$F$值点。Chevalley态射定义了一个由$[\mathfrak{g}/G](F)$到集合$\mathfrak{c}(F)$的函子$[\chi]$。

(13)译注：传输子 =“transporteur”。

(14)译注：疏群 =“groupoïde”，它是这样一种范畴，其中的态射都是同构，换句话说，两个对象只要不同构就没有什么联系，这是一个“相互疏离的群体”，虽然还不是完全“离散”的。

设 $a \in \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F)$。考虑 $[\chi]^{-1}(a)$ 的 F 值点的疏群。$[\chi]^{-1}(a)(F)$ 中的对象在平展拓扑下都是局部同构的。此外，上述疏群有一个基点 (E_0, γ_0)，其中 E_0 是平凡的 G 回旋子，$\gamma_0 \in \mathfrak{g}(F)$ 是由 Kostant 截面所定义的元素 $\gamma_0 = \epsilon(a)$。对于 $[\chi]^{-1}(a)$ 的任意 F 值点 (E, ϕ)，均有一个不变量

$$\mathrm{inv}((E_0, \gamma_0), (E, \phi)) \in \mathrm{H}^1(F, I_{\gamma_0}) \quad 。$$

映射 $(E, \phi) \mapsto \mathrm{inv}((E_0, \gamma_0), (E, \phi))$ 定义了一个由 $[\chi]^{-1}(a)(F)$ 的同构类集合到 $\mathrm{H}^1(F, I_{\gamma_0})$ 上的一一映射。

设 (E, ϕ) 是 $[\chi]^{-1}(a)$ 的一个 F 值点，$\mathrm{inv}((E_0, \gamma_0), (E, \phi))$ 是它的不变量。则 E 的同构类对应于其不变量在映射

$$\mathrm{H}^1(F, I_{\gamma_0}) \to \mathrm{H}^1(F, G)$$

下送到 $\mathrm{H}^1(F, G)$ 中的像。我们再一次得到了上面所说的一一映射，一边是 $\chi^{-1}(a)(F)$ 中的 $G(F)$ 共轭类，另一边是 $\mathrm{H}^1(F, I_{\gamma_0})$ 的这样一个子集，其元素在 $\mathrm{H}^1(F, G)$ 中的像是平凡元。

1.6. Tate-Nakayama 对偶. — 在非阿氏局部域上，上节的内容还可以有更精细的描述方法，这有赖于 Tate-Nakayama 对偶。设 F_v 是一个非阿氏局部域，$\mathcal{O}_v$ 是它的整数环，且 v 是其赋值。设 F_v^{sep} 是 F_v 的可分代数闭包。以 Γ_v 来记 Galois 群 $\mathrm{Gal}(F_v^{\mathrm{sep}}/F_v)$。再设 $X = \mathrm{Spec}(F_v)$，$x = \mathrm{Spec}(F_v^{\mathrm{sep}})$ 是对应的几何点。

1.6.1. — 设 G 是 $\mathbf{G}$ 在 F_v 上的一个拟分裂偏转，由同态 $\rho_G^{\bullet} : \Gamma_v \to \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 所给出。设 $\hat{\mathbf{G}}$ 是 $\mathbf{G}$ 的复对偶群。根据定义，它有一个摆置 $(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{x}})$，其所对应的根架构可以通过把 $\mathbf{G}$ 的根架构中的根和余根交换位置而得到。特别的 $\mathrm{Out}(\mathbf{G}) = \mathrm{Out}(\hat{\mathbf{G}})$。从而我们有一个 Γ_v 在 $\hat{\mathbf{G}}$ 上的作用 $\rho_G^{\bullet}$，且保持摆置方式。

根据 Kottwitz，参照 [**41**] 和 [**44**]，$\mathrm{H}^1(F, G)$ 是有限的，并且具有一个自然的 Abel 群结构。进而，它的 Pontryagin 对偶可由下式给出

$$\mathrm{H}^1(F, G)^* = \pi_0((Z_{\hat{\mathbf{G}}})^{\rho_G^{\bullet}(\Gamma_v)})$$

其中 $(Z_{\hat{\mathbf{G}}})^{\rho_G^{\bullet}(\Gamma_v)}$ 是 $\hat{\mathbf{G}}$ 的中心 $Z_{\hat{\mathbf{G}}}$ 在 $\rho_G^{\bullet}(\Gamma_v)$ 作用下的不动点子群。特别的，$\mathrm{H}^1(F_v, G)^*$ 是一个有限型 Abel 群。这里的符号 * 表示 Pontryagin 对偶。

1.6.2. — 现在让我们再回到 1.4.4 的情况，此时 $S = \mathrm{Spec}(F_v)$，$s = \mathrm{Spec}(F_v^{\mathrm{sep}})$。对任意 $a \in \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$ 和任何位于 a 之上的 $\gamma \in \mathfrak{t}^{\mathrm{rs}}(F_v^{\mathrm{rs}})$，均可使用 1.3.6 的方法构造出一个群同态

$$\pi_a^{\bullet} : \Gamma_v \to \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$$

位于 $\rho_G^{\bullet} : \Gamma_v \to \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 之上。根据引理 1.4.3，我们有

$$I_\gamma = J_a = \mathrm{Spec}(F_v^{\mathrm{sep}}) \wedge^{\Gamma_v, \pi_a^{\bullet}} \mathbf{T} \quad 。$$

根据 Tate-Nakayama 局部对偶性 [**44**, 1.1]，可以得到

$$\mathrm{H}^1(F_v, J_a)^* = \pi_0(\hat{\mathbf{T}}^{\pi_{\rho,a}^{\bullet}(\Gamma_v)}) \quad 。 \tag{1.6.3}$$

换句话说，$\mathrm{H}^1(F_v, J_a)$ 的复特征标群可以等同于 $\hat{\mathbf{T}}$ 在 $\pi_{\rho,a}^{\bullet}(\Gamma_v)$ 作用下的不动点群的连通分支群。这里的 $\hat{\mathbf{T}}$ 是指 $\mathbf{T}$ 的对偶复环面，是通过交换特征标群和余特征标群而定义出来的。

1.6.4. — 含入映射 $\iota : \hat{\mathbf{T}} \hookrightarrow \hat{\mathbf{G}}$ 在共轭的意义下是 Γ 循变的，也就是说，对任意 $t \in \hat{\mathbf{T}}$ 对任意 $\sigma \in \Gamma_v$，$\rho^\bullet(\sigma)(\iota(t))$ 和 $\iota(\pi_a^\bullet(\sigma)(t))$ 总是 $\hat{\mathbf{G}}$ 共轭的。由此可以导出含入映射

$$(Z_{\hat{\mathbf{G}}})^{\rho_G^\bullet(\Gamma_v)} \subseteq \hat{\mathbf{T}}^{\pi_a^\bullet(\Gamma_v)}$$

它又诱导了连通分支之间的一个同态

$$\pi_0((Z_{\hat{\mathbf{G}}})^{\rho_G^\bullet(\Gamma_v)}) \to \pi_0(\hat{\mathbf{T}}^{\pi_a^\bullet(\Gamma_v)}) \quad 。$$

取它的对偶，则可以重新得到上节所定义的映射 $\mathrm{H}^1(F_v, I_{\gamma_0}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G)$。

1.7. κ 轨道积分. — 沿用上节的记号。进而假设 G 是 $\mathbf{G}$ 在 $\mathcal{O}_v$ 上的一个拟分裂偏转。则局部紧群 $G(F_v)$ 有一个极大紧开子群 $G(\mathcal{O}_v)$。设 $\mathrm{d}g_v$ 是 $G(F_v)$ 上的正规化 Haar 测度，它使得 $G(\mathcal{O}_v)$ 的体积是 1。

对于 $a \in \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$，我们在环面 $J_a(F_v)$ 上指定一个 Haar 测度 $\mathrm{d}t_v$。对于 $\gamma \in \mathfrak{g}(F_v)$ 且满足 $\chi(\gamma) = a$，使用典范同构 $J_a = I_\gamma$ 可以把 $J_a(F_v)$ 上的 Haar 测度 $\mathrm{d}t_v$ 搬运到 $I_\gamma(F_v)$ 上。

对任意 γ 如上，及 $\mathfrak{g}(F_v)$ 上的任意紧支集局部常值函数 f，均可定义下面的轨道积分

$$\mathbf{O}_\gamma(f, \mathrm{d}t_v) = \int_{I_\gamma(F_v)\backslash G(F_v)} f(\mathrm{ad}(g_v)^{-1}\gamma)\frac{\mathrm{d}g_v}{\mathrm{d}t_v} \quad 。$$

定义 1.7.1. — 设 κ 是 $\hat{\mathbf{T}}^{\pi_a^\bullet(\Gamma_v)}$ 的一个元素。对于 $\mathfrak{g}(F_v)$ 上的一个紧支集局部常值函数 f，定义 f 在稳定共轭类 $a \in \mathfrak{c}(F_v)$ 上的 κ 轨道积分为下面的式子

$$\mathbf{O}_a^\kappa(f, \mathrm{d}t_v) = \sum_\gamma \langle \mathrm{inv}(\gamma_0, \gamma), \kappa \rangle \mathbf{O}_\gamma(f, \mathrm{d}t_v)$$

其中 γ 跑遍以 a 为特征的稳定共轭类中的所有 $G(F_v)$ 共轭类，其中基点 $\gamma_0 = \epsilon(a)$ 是用 Kostant 截面来定义的，而 $\mathrm{d}t_v$ 则是环面 $J_a(F_v)$ 上的一个 Haar 测度。

注意到 κ 轨道积分的定义依赖于 $\widetilde{X}_{\rho,a}$ 的几何点 $x_{\rho,a}$ 的选择，因为否则就没有办法把上同调群 $\mathrm{H}^1(F_v, J_a)$ 和对偶环面 $\hat{\mathbf{T}}$ 联系起来，从而也无法把 Tate-Nakayama 对偶写成 1.6.3 的形式。

1.8. 初分群. — 根据定义，对偶群 $\hat{\mathbf{G}}$ 上带有一个摆置 $(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{x}}_+)$。

设 κ 是这个摆置中的极大环面 $\hat{\mathbf{T}}$ 里的一个元素。κ 在 $\hat{\mathbf{G}}$ 中的中心化子的单位分支是一个简约子群，记为 $\hat{\mathbf{H}}$。$\hat{\mathbf{G}}$ 的摆置确定了 $\hat{\mathbf{H}}$ 的一个极大环面和一个包含前者的 Borel 子群。设 $\mathbf{H}$ 是一个在 k 上分裂的简约群，其根架构与 $\hat{\mathbf{H}}$ 的根架构相对偶。特别的，$\mathrm{Out}(\mathbf{H}) = \mathrm{Out}(\hat{\mathbf{H}})$。

考虑 κ 在半直积 $\hat{\mathbf{G}} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 中的中心化子 $(\hat{\mathbf{G}} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G}))_\kappa$。则有正合序列

$$1 \to \hat{\mathbf{H}} \to (\hat{\mathbf{G}} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G}))_\kappa \to \pi_0(\kappa) \to 1$$

其中 $\pi_0(\kappa)$ 是 $(\hat{\mathbf{G}} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G}))_\kappa$ 的连通分支群。于是有下面的典范同态

$$\begin{tikzcd} & \pi_0(\kappa) \arrow[dl, "\mathbf{o_H}(\kappa)"'] \arrow[dr, "\mathbf{o_G}(\kappa)"] & \\ \mathrm{Out}(\mathbf{H}) & & \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \end{tikzcd}$$

定义 1.8.1. — 设 G 是 $\mathbf{G}$ 在 X 上的一个拟分裂偏转，由一个 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 回旋子 ρ_G 所给出。G 在 X 上的一个初分线索 [15]是指一个二元组 (κ, ρ_κ)，其中 κ 如上，而 ρ_κ 则是这样一个 $\pi_0(\kappa)$ 回旋子，它是由 ρ_G 通过结构群变换 $\mathbf{o_G}(\kappa)$ 所诱导的。

由初分线索 (κ, ρ_κ) 所引出的初分群是指 $\mathbf{H}$ 在 X 上的这样一个拟分裂偏转 H，它是由 $\mathrm{Out}(\mathbf{H})$ 回旋子 ρ_H 所给出的，而这个 ρ_H 则来自 ρ_κ 和结构群变换 $\mathbf{o_H}(\kappa)$。

初分线索的概念还有一个带基点的形式，也是很有用的。设 X 是一个概形，带有一个几何点 x。设 G 是一个 X 上的连通简约群，是常值群 $\mathbf{G}$ 的拟分裂偏转，由一个同态 $\rho_G^\bullet : \pi_1(X, x) \to \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 所定义。

定义 1.8.2. — G 在 X 上的一个点标初分线索是指一个二元组 $(\kappa, \rho_\kappa^\bullet)$，其中 $\kappa \in \hat{\mathbf{T}}$ 并且 $\rho_\kappa^\bullet$ 是一个同态

$$\rho_\kappa^\bullet : \pi_1(X, x) \to \pi_0(\kappa)$$

位于 $\rho_G^\bullet$ 之上。

从一个点标初分线索出发，可以绘制下面的交换图表

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X,x) \arrow[d, "\rho_\kappa^\bullet"] \arrow[ddl, "\rho_H^\bullet"'] \arrow[ddr, "\rho_G^\bullet"] & \\ & \pi_0(\kappa) \arrow[dl, "\mathbf{o_H}(\kappa)"] \arrow[dr, "\mathbf{o_G}(\kappa)"'] & \\ \mathrm{Out}(\mathbf{H}) & & \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \end{tikzcd}$$

与点标初分线索 $(\kappa, \rho_\kappa^\bullet)$ 相对应的初分群 H 则可以借助同态 $\rho_H^\bullet$ 来定义。

1.9. 稳定共轭类的迁移. — 设 (κ, ρ_κ) 是一个 1.8.1 所说的初分线索，H 是对应的初分群。为了定义 H 的稳定共轭类到 G 上的迁移，我们要构造一个态射 $\nu : \mathfrak{c}_H \to \mathfrak{c}$。

根据上述构造，回旋子 ρ_G 和 ρ_H 可以同时约化为群 $\pi_0(\kappa)$ 作用下的回旋子

$$\rho_\kappa : X_{\rho_\kappa} \to X \quad 。$$

[15] 译注：初分 =“endoscopique”，取“稳定共轭类中的混沌初分”之意。把endoscopique 按照字面意思称为“内窥”让人反胃。

于是可以把 $\mathfrak{c}$ 实现为 $\rho_\kappa \times \mathbf{t}$ 在 $\mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$ 作用下的商（在不变量理论的意义下），同样，可以把 $\mathfrak{c}_H$ 实现为 $\rho_\kappa \times \mathbf{t}$ 在 $\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa)$ 作用下的商（在不变量理论的意义下）。于是为了定义态射 $\mathfrak{c}_H \to \mathfrak{c}$，只需定义一个同态

$$\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa) \to \mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

且使之与它们在 $\rho_\kappa \times \mathbf{t}$ 上的作用相容，这就引出了下面的引理。

引理 1.9.1. — 设 $\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa)$ 是由 $\mathbf{o_H}(\kappa) : \pi_0(\kappa) \to \mathrm{Out}(\mathbf{H})$ 所定义的半直积， $\mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$ 是由 $\mathbf{o_G}(\kappa) : \pi_0(\kappa) \to \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 所定义的半直积。则有一个典范同态

$$\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa) \to \mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

它在正规子群 $\mathbf{W_H} \subseteq \mathbf{W}$ 上给出了自然同态，在商群 $\pi_0(\kappa)$ 上给出恒同，并且与这两个群 $\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa)$ 和 $\mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$ 在 $\mathbf{T}$ 上的作用是相容的。

证明. — κ 在 $\mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 中的中心化子 $(\mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G}))_\kappa$ 可以典范同构于半直积 $\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa)$，参照 [**57**, 引理 10.1]。由此可以导出一个同态 $\theta : \pi_0(\kappa) \to \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$，进而得到一个群同态

$$\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa) \to \mathbf{W} \rtimes^\theta \pi_0(\kappa)$$

其中第二个半直积借助 $\pi_0(\kappa)$ 在 $\mathbf{W}$ 上的一个作用来定义的，这个作用来自同态 $\theta : \pi_0(\kappa) \to \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 和 $\mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 在 $\mathbf{W}$ 上的作用。上述同态明显与它们在 $\mathbf{t}$ 上的作用是相容的。

现在只消再构造出一个半直积的同构

$$\mathbf{W} \rtimes^\theta \pi_0(\kappa) \to \mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

其中第二个半直积是用同态 $\mathbf{o_G}(\kappa) : \pi_0(\kappa) \to \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 来定义的。对任意 $\alpha \in \pi_0(\kappa)$，元素 $\theta(\alpha) \in \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 都能够以唯一的方式写成 $\theta(\alpha) = w(\alpha)\mathbf{o_G}(\alpha)$，其中 $w(\alpha) \in \mathbf{W}$。于是可以定义一个同态

$$\pi_0(\kappa) \to \mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

它就是 $\alpha \mapsto w(\alpha)\alpha$。这个同态诱导了一个同构 $\mathbf{W} \rtimes^\theta \pi_0(\kappa) \to \mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$，且使图表

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{W} \rtimes^\theta \pi_0(\kappa) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa) \arrow[dl] \\
& \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G}) &
\end{tikzcd}$$

成为交换的。特别的，这个同构与它们在 $\mathbf{t}$ 上的作用是相容的。 □

在 $\mathfrak{c}$ 的正则半单开集 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 上，我们有一个有限平展态射

$$\nu^{\mathrm{rs}} : \mathfrak{c}_H^{G-\mathrm{rs}} \to \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$$

这里的 $\mathfrak{c}_H^{G-\mathrm{rs}}$ 是指 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 在 $\mathfrak{c}_H$ 中的逆像。这个态射就实现了由 H 中的半单且 G 正则的稳定共轭类到 G 的正则半单稳定共轭类的迁移。

引理 1.9.2. — 设 $a_H \in \mathfrak{c}_H^{G-\mathrm{rs}}(S)$ 是一个取值在概形 S 上的点， $a \in \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(S)$ 是它的像。则有一个从环面 J_a 到环面 J_{H,a_H} 的典范同构，其中 J_a 是由公式 (1.4.2) 所定义的， J_{H,a_H} 则是把同一公式应用上 H 上而定义出来的。

证明. — 选好了基点，我们就可以使用公式 (1.4.5) 来定义出 J_a 和 J_{a_H}。为了在这两个环面之间构造出一个同构，还需要证明 1.3.6 所给出两个同态 $\rho_\kappa^\bullet\circ\pi_a^\bullet:\pi_1(S,s)\to\mathbf{W}\rtimes\pi_0(\kappa)$ 和 $\rho_\kappa^\bullet\circ\pi_{a_H}^\bullet:\pi_1(S,s)\to\mathbf{W_H}\rtimes\pi_0(\kappa)$ 可以定义出 $\pi_1(S,s)$ 在 $\mathrm{Aut}(\mathbf{T})$ 上的同一个作用。然而这可由上面的引理 1.9.1 立得。 □

注解 1.9.3. — 现在设 $S=\mathrm{Spec}(F_v)$，其中 F_v 是一个局部域，与 1.6 相同。选定回旋子 π_{a_H} 的一个 F_v^{sep} 值点，则可以得到一个同态 $\rho_\kappa^\bullet\circ\pi_{a_H}^\bullet:\Gamma_v\to\mathbf{W}_H\rtimes\pi_0(\kappa)$。于是有 Tate-Nakayama 对偶 1.6.3

$$\mathrm{H}^1(F_v,J_a)^*=\mathrm{H}^1(F_v,J_{H,a_H})^*=\hat{\mathbf{T}}^{\pi_{a_H}^\bullet(\Gamma_v)}\quad。$$

根据这个构造方法，$\kappa\in\hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{W}_H\rtimes\pi_0(\kappa)}$，从而可以按照 1.7.1 的方法定义出 κ 轨道积分 $\mathbf{O}_a(f,\mathrm{d}t_v)$。

1.10. 判别式和结式. — 设 Φ 是分裂群 $\mathbf{G}$ 所确定的根系。对任意一个根 $\alpha\in\Phi$，令 $\mathrm{d}\alpha\in k[\mathbf{t}]$ 是特征标 $\alpha:\mathbf{T}\to\mathbf{G}_m$ 的导函数。由此给出判别式

$$\underline{\mathfrak{D}}_{\mathbf{G}}=\prod_{\alpha\in\Phi}\mathrm{d}\alpha\in k[\mathbf{t}]$$

它显然是这个多项式代数中的一个 $\mathbf{W}$ 不变的元素，从而定义出特征式空间 $\mathbf{c}=\mathrm{Spec}(k[\mathbf{t}]^{\mathbf{W}})$ 上的一个函数。设 $\mathfrak{D}_{\mathbf{G}}$ 是由这个函数定义出来的 $\mathbf{c}$ 上的除子。下面的结果是熟知的。

引理 1.10.1. — $\mathfrak{D}_{\mathbf{G}}$ 是 $\mathbf{c}$ 上的一个既约除子。同态 $\pi_{\mathbf{t}}:\mathbf{t}\to\mathbf{c}$ 在该除子的补集上是平展的，这个补集就是正则半单开集 $\mathbf{c}^{\mathrm{rs}}$。进而，该除子在 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 的作用下保持稳定。

证明. — 唯一需要验证的事情是 $\mathfrak{D}_{\mathbf{G}}$ 是一个既约除子。由于这是一个完全交叉体，故只需证明 $\mathfrak{D}_{\mathbf{G}}$ 有一个稠密开集是既约的。从而可以在 $\mathfrak{D}_{\mathbf{G}}$ 中拿掉那些 $\mathbf{t}$ 中落在两个以上的根超平面中的点所对应的像点。于是问题可以归结到半单秩为 1 的群上，此时直接验证即可。 □

设 X 是一个 k 概形，G 是 $\mathbf{G}$ 在 X 上的一个拟分裂偏转，由一个 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 回旋子 ρ_G 给出。使用 ρ_G 对 $\mathfrak{D}_{\mathbf{G}}$ 进行偏转，可以得到 $\mathfrak{c}$ 的一个既约除子 $\mathfrak{D}_G$，且其开补集是 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$。设 (κ,ρ_κ) 是 G 的一个初分线索，参照 1.8.1。于是还有 $\mathbf{c_H}$ 上的一个除子 $\mathfrak{D}_{\mathbf{H}}$，它通过偏转又给出 $\mathfrak{c}_H$ 上的一个除子 $\mathfrak{D}_H$。

下面的结果是两位匿名的阅稿人向笔者指出的。

引理 1.10.2. — 选定一个子集 $\Psi\subseteq\Phi\setminus\Phi_{\mathbf{H}}$，使得对任意一对互相反号的根 $\pm\alpha\in\Phi\setminus\Phi_{\mathbf{H}}$，集合 $\{\pm\alpha\}\cap\Psi$ 中恰好有一个元素。则函数 $\prod_{\alpha\in\Psi}\mathrm{d}\alpha\in k[\mathbf{t}]$ 在 $\mathbf{W_H}$ 的作用下是不变的。

证明. — 元素 $w\in\mathbf{W_H}$ 在 $\Phi\setminus\Phi_{\mathbf{H}}$ 上的作用一般来说把一对互相反号的根 $\{\pm\alpha\}\subseteq\Phi\setminus\Phi_{\mathbf{H}}$ 送到该集合中的另外一对互相反号的根。由此可知，存在一个正负号 $\epsilon(w)$，使得 $w(\prod_{\alpha\in\Psi}\mathrm{d}\alpha)=\epsilon(w)\prod_{\alpha\in\Psi}\mathrm{d}\alpha$，并且这个正负号不依赖于集合 Ψ 的选择。只消再证明这个符号总是 >0 的即可。

选定一个子集$\Psi_{\mathbf{G}}\subseteq\Phi$，使得对每一对互相反号的根$\pm\alpha\in\Phi$，集合$\{\pm\alpha\}\cap\Psi_{\mathbf{G}}$都仅含一个元素。设$\Psi_{\mathbf{H}}=\Psi_{\mathbf{G}}\cap\Psi_{\mathbf{H}}$。还可以假设$\Psi_{\mathbf{G}}=\Psi_{\mathbf{H}}\cup\Psi$。对任意$w\in\mathbf{W}$，均有一个正负号$\epsilon_{\mathbf{G}}(w)$，使得$w(\prod_{\alpha\in\Psi_{\mathbf{G}}}\mathrm{d}\alpha)=\epsilon_{\mathbf{G}}(w)\prod_{\alpha\in\Psi_{\mathbf{G}}}\mathrm{d}\alpha$，且这个正负号不依赖于$\Psi_{\mathbf{G}}$的选择。取$\Psi_{\mathbf{G}}$是正根的集合，则易见$\epsilon_{\mathbf{G}}(w)=(-1)^{\ell_{\mathbf{G}}(w)}$，其中$\ell_{\mathbf{G}}(w)$是$w$在Coxeter群$\mathbf{W}_{\mathbf{G}}$中的长度。若$w\in\mathbf{W}_{\mathbf{H}}$，则又有公式$w(\prod_{\alpha\in\Psi_{\mathbf{H}}}\mathrm{d}\alpha)=\epsilon_{\mathbf{H}}(w)\prod_{\alpha\in\Psi_{\mathbf{H}}}\mathrm{d}\alpha$，其中$\epsilon_{\mathbf{H}}(w)=(-1)^{\ell_{\mathbf{H}}(w)}$。

为了证明$\epsilon(w)=1$，只消再证明等式

$$(-1)^{\ell_{\mathbf{G}}(w)}=(-1)^{\ell_{\mathbf{H}}(w)}\quad。$$

注意到这两个正负号都可以被理解为反射的矩阵表示的行列式。于是上述等式来自这样的事实：$\mathbf{W}_{\mathbf{H}}$的反射的矩阵表示可以通过$\mathbf{W}_{\mathbf{G}}$的相应表示通过限制而得到。 □

1.10.3. — 上一引理中的不变函数$\prod_{\alpha\in\Psi}\mathrm{d}\alpha\in k[\mathbf{t}]^{\mathbf{W}_{\mathbf{H}}}$定义了$\mathbf{c}_{\mathbf{H}}$上的一个有效除子，记为$\mathfrak{R}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}$。于是有一个除子的等式

$$\nu^*\mathfrak{D}_{\mathbf{G}}=\mathfrak{D}_{\mathbf{H}}+2\mathfrak{R}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}\quad。$$

设(κ,ρ_κ)是G的一个初分线索，参照1.8.1。使用ρ_κ对$\mathfrak{R}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}$进行偏转，还可以得到$\mathfrak{c}_H$上的一个有效除子$\mathfrak{R}_H^G$，它满足下面的关系式

$$\nu^*\mathfrak{D}_G=\mathfrak{D}_H+2\mathfrak{R}_H^G\quad。$$

1.11. Lie代数形式的基本引理. — **现**在我们可以开始陈述Langlands和Shelstad所猜想的Lie代数形式的基本引理，以及Waldspurger所猜想的一种变体。

设F_v是一个非阿氏局部域，$\mathcal{O}_v$是它的整数环，$v:F_v^\times\to\mathbb{Z}$是其离散赋值，$\mathbb{F}_q$是$\mathcal{O}_v$的剩余类域，$X_v=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$，$F_v^{\mathrm{sep}}$是$F_v$的可分代数闭包，它定义了$X_v$的一个几何点$x$。

设G是$\mathbf{G}$在$\mathcal{O}_v$上的拟分裂偏转，由一个同态$\rho_G^\bullet:\pi_1(X_v,x)\to\mathrm{Out}(\mathbf{G})$给出。考虑一个点标初分线索$(\kappa,\rho_\kappa^\bullet)$，其中$\kappa\in\hat{\mathbf{T}}$并且$\rho_\kappa^\bullet:\pi_1(X_v,x)\to\pi_0(\kappa)$是一个同态，位于$\rho_G^\bullet$之上，参照1.8.2。由此可以获得一个$X_v$上的简约群概形$H$以及一个$X_v$概形的态射$\mathfrak{c}_H\to\mathfrak{c}$。

设$a_H\in\mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$的像是$a\in\mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)\cap\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$。选定环面$J_a(F_v)$上的一个Haar测度$\mathrm{d}t_v$。根据引理1.9.2，我们有一个从环面$J_a$到环面$J_{H,a_H}$的同构，并可借此把Haar测度$\mathrm{d}t_v$搬运到$J_{H,a_H}(F_v)$上。

按照1.9.3选出一个F_v^{sep}值点x_a，则对于$\mathfrak{g}(F_v)$上的任何紧支集局部常值函数都可以定义它的κ轨道积分$\mathbf{O}_a^\kappa$。设$1_{\mathfrak{g}_v}$是$\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$在$\mathfrak{g}(F_v)$中的特征函数，$1_{\mathfrak{h}_v}$是$\mathfrak{h}(\mathcal{O}_v)$在$\mathfrak{h}(F_v)$中的特征函数。

定理 1.11.1. — 在上述记号下，我们有等式

$$\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v},\mathrm{d}t_v)=q^{r_{H,v}^G(a_H)}\mathbf{SO}_{a_H}(1_{\mathfrak{h}_v},\mathrm{d}t_v)$$

其中$r_{H,v}^G(a_H)=\deg_v(a_H^*\mathfrak{R}_H^G)$。

Langlands 和 Shelstad 是对非阿氏局部域上的 Lie 群提出的猜想，上面的定理是它在 Lie 代数上的一种变形。这个变形是 Waldspurger 给出的，他证明了由这种形式可以推出 Lie 群上的原始猜想。他还证明了，如果这个命题对于 F 是素特征的局部域且特征不整除 $\mathbf{W}$ 的阶的情形是对的，则它对于 F 是特征零的局部域且剩余特征不整除 $\mathbf{W}$ 的阶的情形也是对的，参照 [**82**]。我们将限于考虑第一种情形。

Langlands-Shelstad 的原始陈述相当复杂，一个重要的原因是迁移因子 [16] 中所出现的一个正负号。在 [**46**] 中，Kottwitz 在 Langlands-Shelstad 的迁移因子与 Kostant 截面之间建立起联系，这使我们能够把 Langlands 和 Shelstad 的猜想陈述成上面这个简单的形式。对于典型群的情形，Waldspurger 在 [**81**] 中给出了一个更加具体的形式。Hales 的综述性文章 [**32**] 也对 Langlands-Shelstad 猜想的陈述形式作出了一个很漂亮的介绍。

1.11.2. — 注意上面的陈述可以很容易地扩展到那些不落在 $\mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$ 中的元素 $a_H \in \mathfrak{c}^{G-\mathrm{rs}}(F_v)$ 上。在这种情框下，同样有 $a \notin \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)$。事实上，把紧合性的赋值判别法应用到有限态射 $\nu_H : \mathfrak{c}_H \to \mathfrak{c}$ 上就可以推出这一点。由此易见，这种情况下的轨道积分 $\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}t_v)$ 和 $\mathbf{SO}_{a_H}(1_{\mathfrak{h}_v}, \mathrm{d}t_v)$ 都等于零。

1.11.3. — 最后注意到 1.10.3 可以给出除子的等式

$$a_*\mathfrak{D}_G = a_H^*\mathfrak{D}_H + 2a_H^*\mathfrak{R}_G^H$$

它进而给出

$$\Delta_H(a_H)\Delta_G(a)^{-1} = q^{\deg_v(a_H^*\mathfrak{R}_G^H)}$$

其中 $\Delta_H(a_H) = q^{-\deg(a_H^*\mathfrak{D}_H)/2}$ 且 $\Delta_G(a) = q^{-\deg(a^*\mathfrak{D}_G)/2}$。从而可以把公式 1.11.1 改写成下面的更常见的形状

$$\Delta_G(a)\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}t_v) = \Delta_H(a_H)\mathbf{SO}_{a_H}(1_{\mathfrak{h}_v}, \mathrm{d}t_v) \quad 。$$

1.12. 非标准的基本引理. — 在 [**83**] 中，Waldspurger 给出了 Langlands-Shelstad 猜想的一种变体，他称之为非标准的基本引理。在本节中，我们来复述一下这个猜想。

设 $\mathbf{G}_1$ 和 $\mathbf{G}_2$ 是两个在 k 上分裂的简约群，都作出了摆置。特别的，对每个 $i \in \{1,2\}$，都指定了 $\mathbf{G}_i$ 的一个极大环面 $\mathbf{T}_i$，连同根的集合 $\Phi_i \subseteq \mathbf{X}^*(\mathbf{T}_i)$，以及单根的集合 $\Delta_i \subseteq \Phi_i$，再加上余根的集合 $\check{\Phi}_i \subseteq \mathbf{X}_*(\mathbf{T}_i)$。五元组

$$(\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_i), \mathbf{X}_*(\mathbf{T}_i), \Phi_i, \check{\Phi}_i, \Delta_i)$$

就是摆置好的群 $\mathbf{G}_i$ 所产生的根架构，反过来这个根架构在只差唯一同构的意义下也确定了一个摆置好的群。

定义 1.12.1. — $\mathbf{G}_1$ 和 $\mathbf{G}_2$ 的根架构之间的一个谐构是由两个 $\mathbb{Q}$ 向量空间的同构

$$\psi^* : \mathbf{X}^*(\mathbf{T}_2) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{X}^*(\mathbf{T}_1) \otimes \mathbb{Q}$$

和

$$\psi_* : \mathbf{X}_*(\mathbf{T}_1) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{X}_*(\mathbf{T}_2) \otimes \mathbb{Q}$$

[16] 译注：迁移因子 =“facteur de transfert”。

所组成的，它们互为转置，并且ψ^*建立了形如$\mathbb{Q}\alpha_2$ $(\alpha_2 \in \Phi_2)$的$\mathbb{Q}$直线与形如$\mathbb{Q}\alpha_1$ $(\alpha_1 \in \Phi_1)$的$\mathbb{Q}$直线之间的一一对应，把单根所生成的直线对应到单根所生成的直线，同时ψ_*在余根所生成的$\mathbb{Q}$直线上也具有完全类似的性质。

例子 1.12.2. — 两个半单群若有相同的伴随群则具有谐构的根架构。事实上，这时我们有一个典范同构$\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_1)\otimes\mathbb{Q}\to\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_2)\otimes\mathbb{Q}$，它照应了根的集合与单根的集合，且它的对偶同构照应了余根的集合。

例子 1.12.3. — 更有意思的例子涉及到Langlands意义下相互对偶的两个简约群。简单起见，假设$\mathbf{G}$是一个单群。根据定义，对偶群$\hat{\mathbf{G}}$的根架构可以通过把$\mathbf{G}$的特征标群与余特征标群相互交换并把根集合和余根集合相互交换而得到。于是有一个向量空间的同构$\mathbf{X}^*(\mathbf{T})\otimes\mathbb{Q}\to\mathbf{X}_*(\mathbf{T})\otimes\mathbb{Q}$，它把一个短根$\alpha$映到对应的余根$\check{\alpha}$，并把一个长根$\alpha$映到$n\check{\alpha}$，其中$n=|\alpha_{\text{long}}|^2/|\alpha_{\text{court}}|^2$。如果所有的根都是一样长的，则把它们都看成是短根。最有意思的情况是$B_n\leftrightarrow C_n$, F_4和G_2，此时存在不同长度的根。读者可在[**83**, p. 14]中找到更详细的讨论。

1.12.4. — 由于一个根α所定义的反射只依赖于α所生成的$\mathbb{Q}$直线，故知同构ψ^*和ψ_*诱导了两个结伴的简约群$\mathbf{G}_1$和$\mathbf{G}_2$的Weyl群之间的一个同构$\mathbf{W}_1\xrightarrow{\sim}\mathbf{W}_2$。

1.12.5. — 设$\mathbf{G}_1$和$\mathbf{G}_2$是两个分裂群，且它们的根架构是谐构的。设Out_{12}是由$\mathbf{X}_*(\mathbf{T}_1)\otimes\mathbb{Q}$的这样一些自同构所组成的群，它使得$\Phi_1,\Delta_1$保持稳定，也使得$\Phi_2,\Delta_2$（看作是$\mathbf{X}_*(\mathbf{T}_1)\otimes\mathbb{Q}$的子集），进而它的对偶自同构要在$\mathbf{X}_*(T_1)\otimes\mathbb{Q}$上具有相同的性质。对任意$k$概形$X$，和任意$\mathrm{Out}_{12}$回旋子$\rho_{12}$，我们可以用$\rho_{12}$对$\mathbf{G}_1$和$\mathbf{G}_2$连同其摆置进行偏转，由此给出拟分裂偏转$G_1$和$G_2$。这样得到的两个拟分裂偏转将被称为结伴的。

给定了$\mathbb{Q}$向量空间的一个同构ψ^*

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_1)\otimes\mathbb{Q}\simeq\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_2)\otimes\mathbb{Q},$$

我们可以比较两个网格$\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_1)$和$\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_2)$（看作是同一个$\mathbb{Q}$向量空间中的网格）的相互位置。所谓一个素数$p$相对于$\psi^*$是好的，是指$p$不整除下面两个整数

$$|\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_1)/(\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_1)\cap\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_2))| \quad 和 \quad |\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_2)/(\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_2)\cap\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_1))| \ 。$$

若k是一个域，其特征相对于ψ^*是好的，则可以得到一个同构$\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_1)\otimes k\xrightarrow{\sim}\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_2)\otimes k$。

引理 1.12.6. — 设G_1和G_2是基概形X上的两个结伴的群，且X的所有剩余特征都是好的。设T_1和T_2是G_1和G_2的摆置中的极大环面，$\mathfrak{t}_1,\mathfrak{t}_2$是它们的Lie代数。则有一个典范同构$\mathfrak{t}_1\to\mathfrak{t}_2$和一个与之相容的同构$\nu:\mathfrak{c}_{G_1}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{c}_{G_2}$。

证明. — 我们有

$$\mathfrak{t}_i=\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_i)\otimes\mathcal{O}_X))$$

其中$\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_i)\otimes\mathcal{O}_X)$是指自由$\mathcal{O}_X$模层$\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_i)\otimes\mathcal{O}_X$的$\mathcal{O}_X$对称代数。若$X$的所有剩余特征都是好的，则$\psi^*$诱导了自由$\mathcal{O}_X$模层的一个同构

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_2)\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_1)\otimes\mathcal{O}_X$$

从而也给出一个同构$\mathfrak{t}_1\xrightarrow{\sim}\mathfrak{t}_2$。我们已经看到，$(\psi^*,\psi_*)$诱导了一个同构$\mathbf{W}_1\xrightarrow{\sim}\mathbf{W}_2$，它明显与这些群在$\mathfrak{t}_1\xrightarrow{\sim}\mathfrak{t}_2$上的作用是相容的。由此可以得到

$$\mathfrak{c}_1=\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_i)\otimes\mathcal{O}_X))^{\mathbf{W}_1}$$

和
$$\mathfrak{c}_2 = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{X}^*(\mathbf{T}_i)\otimes \mathcal{O}_X))^{\mathbf{W}_2}$$
之间的一个同构。再使用 ρ_{12} 进行外偏转，就得到了所要的同构 $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2$ 。 □

让我们回到上述引理的前提条件。设 X 是圆盘 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ ，其中 $\mathcal{O}_v = k[[\epsilon_v]]$ ，这个 k 是一个有限域，其特征相对于 ψ^* 是好的。设 $a_1 \in \mathfrak{c}_{G_1}(\mathcal{O}_v)$ ， $a_2 \in \mathfrak{c}_{G_2}(\mathcal{O}_v)$ ，且满足 $\nu(a_1) = a_2$ 。 ψ^* 所给出的谐构 $\mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$ 经过偏转诱导出环面的一个谐构 $J_{a_1} \to J_{a_2}$ ，参考 1.4.3。进而，这个谐构又诱导出环面的 Lie 代数之间的一个同构（基于特征相对于 ψ^* 是好的这个前提条件）。从而可以把 $J_{a_1}(F_v)$ 和 $J_{a_2}(F_v)$ 上的 Haar 测度进行相互搬运。我们将把两个群上的相容 Haar 测度用同一个记号 $\mathrm{d}t_v$ 来表示。

定理 1.12.7. — 假设剩余特征大于 G_1 和 G_2 的 Coxeter 数的两倍。则有稳定轨道积分之间的下述等式
$$\mathbf{SO}_{a_1}(1_{G_1}, \mathrm{d}t_v) = \mathbf{SO}_{a_2}(1_{G_2}, \mathrm{d}t_v)$$
其中 1_{G_i} 是紧集 $\mathfrak{g}_i(\mathcal{O}_v)$ 在 $\mathfrak{g}_i(F_v)$ 中的特征函数。

这个等式就是 Waldspurger 所猜想的非标准基本引理。他在 [**83**] 中还证明了，把通常的基本引理 1.11.1 和非标准的基本引理结合起来就可以推出偏转型基本引理。

1.13. 稳定化过程的整体表述. — 回到 Langlands-Shelstad 猜想。基本引理说的是局部轨道积分之间的一个等式。然而我们有必要把它放回其在整体域上的起源，这就是迹公式的稳定化。这引导我们去考察素特征的整体域上的不迷向子集的结构。这个考察有助于我们在后面理解 Hitchin 纤维化的上同调的结构。

设 $k = \mathbb{F}_q$ ， F 是 k 上一条几何连通的平滑射影曲线 X 的有理函数域。对任意闭点 $v \in |X|$ ，设 F_v 是 F 关于 v 处的赋值的完备化， $\mathcal{O}_v$ 是 F_v 的整数环。简单起见，我们在这里假设 G 是一个分裂的半单群。

对任意上同调类 $\xi \in \mathrm{H}^1(F, G)$ ，令 G^ξ 是 G 的一个内偏转，由 ξ 在 $\mathrm{H}^1(F, G^{\mathrm{ad}})$ 中的像所定义。这样定义的 G^ξ 也被称为狭义内偏转。我们先忘掉 G 的迹公式，转而考察在所有局部平凡的狭义内偏转上的迹公式的和。这个和的稳定化要来得更加简单，并且可以有一个直接的几何学诠释。下面将要陈述的稳定化过程是由 Langlands 和 Kottwitz 提出的，参照 [**50**] 和 [**44**]。这里采用的是 [**58**] 中的表述方式。

考虑和式
$$\sum_{\xi \in \ker^1(F,G)} \sum_{\gamma \in \mathfrak{g}^{\xi,\mathrm{ani}}(F)/\sim} \mathbf{O}_\gamma(1_D) \tag{1.13.1}$$
其中

(1) $\ker^1(F, G)$ 是 F 上的这样一些 G 回旋子的同构类集合，在每个 $v \in |X|$ 处，其在 $\mathrm{H}^1(F_v, G)$ 中的像都是平凡的。
(2) $\mathfrak{g}^\xi$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 F 上的一个偏转，由 ξ 所定义。
(3) γ 跑遍 $\mathfrak{g}^\xi(F)$ 的这样一些正则半单共轭类，它在 $\mathfrak{g}^\xi(F \otimes_k \bar{k})$ 中的中心化子是一个不迷向环面。

(4) $\mathbf{O}_\gamma(1_D)$ 是函数

$$1_D=\bigotimes_{v\in|X|}1_{D_v}:\mathfrak{g}(\mathbb{A})\longrightarrow\mathbb{C}$$

的整体轨道积分

$$\mathbf{O}_\gamma(1_D)=\int_{G_\gamma^\xi(F)\backslash G(\mathbb{A})}1_D(\mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma)dg$$

其中 D 是一个除子 $\sum_{v\in|X|}d_v v$，1_{D_v} 是 $\mathfrak{g}(F_v)$ 的紧开子群 $\varepsilon^{-d_v}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ 的特征函数，整数 d_v 都是偶数，并且只在有限个 v 处不为零。对于不迷向共轭类 γ，这个积分是收敛的。

(5) dg 是 $G(\mathbb{A})$ 上的正规化 Haar 测度，使得 $G(\mathcal{O}_\mathbb{A})$ 的体积等于 1 。

考虑 Chevalley 特征态射 $\chi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{c}$ 及其偏转形

$$\chi^\xi:\mathfrak{g}^\xi\longrightarrow\mathfrak{c}$$

对应于上同调类 $\xi\in\mathrm{H}^1(F,G)$。注意到 G 的自同构群在 $\mathfrak{c}$ 上的作用穿过外自同构群，从而 ξ 所定义的偏转不会影响到 $\mathfrak{c}$。从而 $\mathfrak{g}^\xi(F)$ 的每一个共轭类 γ 都定义了一个元素 $a\in\mathfrak{c}(F)$。由于一个正则半单元 γ 的中心化子只依赖于 a，故有 $\mathfrak{c}(F)$ 的一个子集 $\mathfrak{c}^{\mathrm{ani}}(F)$，其中的元素 a 都来自 $\mathfrak{g}^\xi(F\otimes_k\bar{k})$ 中的不迷向的正则半单共轭类 γ。和式 (1.13.1) 可以改写成在这些 $a\in\mathfrak{c}^{\mathrm{ani}}(F)$ 上的求和：

$$\sum_{a\in\mathfrak{c}^{\mathrm{ani}}(F)}\ \sum_{\xi\in\ker^1(F,G)}\ \sum_{\gamma\in\mathfrak{g}^\xi(F)/\sim,\,\chi(\gamma)=a}\mathbf{O}_\gamma(1_D)\quad。\tag{1.13.2}$$

对每一个元素 $a\in\mathfrak{c}^{\mathrm{ani}}(F)$，Kostant 截面1.2.1 都提供了一个元素 $\gamma_0=\epsilon(a)\in\mathfrak{g}(F)$，使得它的像是 $\chi(\gamma_0)=a$。令 J_a 是 γ_0 的中心化子 I_{γ_0}。由于我们局限在不迷向的正则半单子集上，故知 J_a 是一个不迷向环面。它的定义在 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上的对偶环面 $\hat{J}_a$ 带有一个 $\Gamma=\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ 的有限作用，从而不动点群 $\hat{J}_a^\Gamma$ 是一个有限群。

对任意 $\xi\in\ker^1(F,G)$，存在一个一一映射，一边是满足 $\chi(\gamma)=a$ 的那些 $\gamma\in\mathfrak{g}^\xi(F)$ 的共轭类，另一边是这样一些上同调类

$$\alpha=\mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma)\in\mathrm{H}^1(F,J_a)$$

它在 $\mathrm{H}^1(F,G)$ 中的像就是元素 ξ。如此一来，和式 (1.13.2) 中的那些二元组 (ξ,γ) 的集合（其中 $\xi\in\ker^1(F,G)$ 并且 γ 是一个de $\mathfrak{g}^\xi(F)$ 中映到 $a\in\mathfrak{c}^{\mathrm{ani}}(F)$ 的元素的一个共轭类）可以和

$$\ker\Big[\mathrm{H}^1(F,J_a)\to\bigoplus_{v\in|X|}\mathrm{H}^1(F_v,G)\Big]$$

建立一一对应。

为了使一个共轭类族 $(\gamma_v)_{v\in|X|}$（其中 γ_v 是 $\mathfrak{g}(F_v)$ 中的共轭类，并且 $\chi(\gamma_v)=a$）能够来自于和式 (1.13.2) 中的一个二元组 (ξ,γ)，必须且只需对几乎所有的 v 都有 $\gamma_v=\gamma_0$，同时

$$\sum_{v\in|X|}\alpha_v|_{\hat{I}_a^\Gamma}=0\tag{1.13.3}$$

其中 $\alpha_v = \mathrm{inv}_v(\gamma_0,\gamma_v)$，参照 [**41**]。在这种情况下，送到 $(\gamma_v)_{v\in|X|}$ 上的那些二元组 (ξ,γ) 的个数恰好等于下面这个群的阶数

$$\ker^1(F,J_a)=\ker\Big[\mathrm{H}^1(F,J_a)\to\bigoplus_{v\in|X|}\mathrm{H}^1(F_v,J_a)\Big]\quad。$$

现在我们可以引出局部轨道积分。设 $\bigotimes_{v\in|X|}\mathrm{d}t_v$ 是 $J_a(\mathbb{A})$ 上的 Tamagawa 测度，参照 [**62**]。在 J_a 是一个不迷向环面的情形，商群 $J_a(F)\backslash J_a(\mathbb{A})$ 是紧的。它的体积

$$\tau(J_a)=\mathrm{vol}\Big(J_a(F)\backslash J_a(\mathbb{A}),\bigotimes_{v\in|X|}\mathrm{d}t_v\Big)$$

就是 Tamagawa 数。根据 Ono 公式 [**62**]

$$\Big|\ker^1(F,J_a)\Big|\ \tau(J_a)=\Big|\pi_0(\hat{J}_a^{\Gamma})\Big|. \tag{1.13.4}$$

现在和式 (1.13.2) 可以改写为下面的形状

$$\sum_{a\in\mathfrak{c}^{\mathrm{ani}}(F)}\Big|\ker^1(F,J_a)\Big|\ \tau(J_a)\sum_{(\gamma_v)_{v\in|X|}}\prod_v\mathbf{O}_{\gamma_v}(1_{D_v},\mathrm{d}t_v) \tag{1.13.5}$$

其中这些 γ_v 分别是 $\mathfrak{g}(F_v)$ 中的共轭类，且满足方程 (1.13.3)。通过把 Tamagawa 数 $\tau(J_a)$ 进行分解，可以把原来那些整体轨道积分 $\mathbf{O}_\gamma(1_D)$ 之和替换成一些局部轨道积分的乘积 $\prod_v\mathbf{O}_{\gamma_v}(1_{D_v},\mathrm{d}t_v)$ 之和。应用 Ono 公式 (1.13.4)，和式 (1.13.2) 变为

$$\sum_{a\in\mathfrak{c}^{\mathrm{ani}}(F)}\Big|\pi_0(\hat{J}_a^{\Gamma})\Big|\sum_{(\gamma_v)_{v\in|X|}}\prod_v\mathbf{O}_{\gamma_v}(1_{D_v},\mathrm{d}t_v) \tag{1.13.6}$$

其中 (γ_v) 满足条件 (1.13.3)。注意到在 J_a 是不迷向的这个条件下，群 $\hat{J}_a^{\Gamma}$ 是一个有限群，从而 $\pi_0(\hat{J}_a^{\Gamma})=\hat{J}_a^{\Gamma}$。

使用有限群 $\hat{J}_a^{\Gamma}$ 上的 Fourier 变换，则和式 (1.13.2) 变为

$$\sum_{a\in\mathfrak{c}^{\mathrm{ani}}(F)}\sum_{\kappa\in\hat{J}_a^{\Gamma}}\mathbf{O}_a^{\kappa}(1_D,\bigotimes_{v\in|X|}\mathrm{d}t_v) \tag{1.13.7}$$

avec

$$\mathbf{O}_a^{\kappa}(1_D,\bigotimes_{v\in|X|}\mathrm{d}t_v)=\prod_{v\in|X|}\sum_{\substack{\gamma_v\in\mathfrak{g}(F_v)/\sim\\ \chi(\gamma_v)=a}}\langle\mathrm{inv}_v(\gamma_0,\gamma_v),\kappa\rangle\mathbf{O}_{\gamma_v}(1_{D_v},\mathrm{d}t_v)\quad。\tag{1.13.8}$$

接下来的做法是交换对 a 的求和与对 κ 的求和。选定 $\hat{J}_a$ 到 $\hat{G}$ 的一个嵌入，则 κ 定义了一个半单共轭类 $[\kappa]$。$\hat{J}_a^{\Gamma}$ 与共轭类 $[\kappa]$ 的交集 $\hat{J}_a^{\Gamma}\cap[\kappa]$ 不依赖于 $\hat{J}_a$ 到 $\hat{G}$ 的上述嵌入的选择。和式 (1.13.2) 现在成为

$$\sum_{[\kappa]\in\hat{G}/\sim}\sum_{a\in\mathfrak{c}^{\mathrm{ani}}(F)}\sum_{\kappa\in\hat{J}_a^{\Gamma}\cap[\kappa]}\mathbf{O}_a^{\kappa}(1_D,\bigotimes_{v\in|X|}\mathrm{d}t_v)\quad。\tag{1.13.9}$$

还记得我们曾假设 G 是一个伴随半单群。对每一个共轭类 $[\kappa]$，选择一个代表元 $\kappa\in\hat{G}$。由于 $\hat{G}$ 是一个单连通的半单群，故知 $\hat{G}_\kappa$ 是一个连通简约群。设 $\hat{H}=$

$\hat{G}_\kappa$， H 是 $\hat{H}$ 的对偶简约群。由于我们只关心不迷向子集，故可摒除所有那些非半单的 H 。从而可以假设 H 是半单的，现在考察态射

$$\nu_H : \mathfrak{c}_H^{\mathrm{ani}}(F) \longrightarrow \mathfrak{c}^{\mathrm{ani}}(F) \quad 。$$

一个元素 a 落在 ν_H 的像之中当且仅当 $\hat{J}_a^\Gamma \cap [\kappa]$ 不是空的。一般来说，存在一个典范的一一映射，从集合 $\hat{J}_a^\Gamma \cap [\kappa]$ 映到由 a 的逆像 $a_H \in \mathfrak{c}_H^{\mathrm{ani}}(F)$ 所组成的集合。

假设基本引理是成立的，则和式 (1.13.2) 变为

(1.13.10) $$\sum_H \sum_{a_H \in \mathfrak{c}_H^{\mathrm{ani}}(F)} \mathbf{SO}_a(1_D, \bigotimes_{v \in |X|} \mathrm{d}t_v) \quad 。$$

其中第一个求和跑遍 G 的椭圆型初分群的等价类集合。

我们在 [**57**, 1] 中已经指出， Higgs 丛的参模空间在有限域上的点的个数本质上给出了表达式 (1.13.2)。我们还要给稳定化过程 (1.13.2)=(1.13.7) 作一个几何学的诠释，它将对应于 Hitchin 纤维化的上同调在自然对称作用下的一个分解。这里的主要问题是在 Hitchin 纤维化的基底上讨论纯权复形的直和分解。

等式 (1.13.2)=(1.13.10) 将被重新解释为两个纯权复形在 Grothendieck 群中的一个相等关系。定理 6.4.1 就是这一诠释的一个精确表达，由它就可以推出 Langlands-Shelstad 的基本引理 1.11.1。

2. 正则中心化子和 Kostant 截面

我们在这里要复习一下正则中心化子以及它到中心化子是如何构造的，参照 [**57**]。同时也复习一下 Donagi 和 Gaitsgory 是怎样用 Galois 理论的语言来描述正则中心化子的，参照 [**23**]。

沿用 1.3 中的记号。特别的， $\mathbf{G}$ 是一个在域 k 上分裂的简约群， G 是 $\mathbf{G}$ 在 k 概形 X 上的一个拟分裂偏转。假设 k 的特征不整除 $\mathbf{W}$ 的阶。

2.1. 正则中心化子. — 设 I 是 $\mathfrak{g}$ 上的中心化子概形。I 在 $\mathfrak{g}$ 的一点 x 处的纤维就是 G 的中心化 x 的子群

$$I_x = \{g \in G | \mathrm{ad}(g)x = x\} \quad 。$$

I_x 的维数一般依赖于 x， 因而 I 在 $\mathfrak{g}$ 上不是平坦的， 不过 I 在开集 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 上的限制 I^{reg} 是一个相对维数 r 的平滑群概形。由于它的一般纤维是一个环面，故知它是一个平滑交换群概形。

下面的引理 [**57**, 3.2] 是我们考察 Hitchin 纤维化的出发点。为了方便读者，我们简要复习一下它的证明。

引理 2.1.1. — *在 $\mathfrak{c}$ 上有唯一一个平滑交换群概形 J 连同一个 G 循变的同构*

$$(\chi^* J)|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}} \xrightarrow{\sim} I|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}} \quad 。$$

进而，这个同构可以扩展为一个同态 $\chi^* J \to I$ 。

证明. — 设 x_1, x_2 是 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}(\bar{k})$ 的两个点，满足 $\chi(x_1) = \chi(x_2) = a$。设 I_{x_1} 和 I_{x_2} 分别是 I 在 x_1 和 x_2 处的纤维。可以找到 $g \in G(\bar{k})$ 使得 $\mathrm{ad}(g)x_1 = x_2$。g 所定义的共轭诱导了一个同构 $I_{x_1} \to I_{x_2}$，而且它不依赖于 g 的选择，因为 I_{x_1} 是交换的。由此就可以定义出 J 在 a 处的纤维 J_a。

把 J 定义成 $\mathfrak{c}$ 上的仿射群概形的方法是采用忠实平坦下降。设 I_1^{reg} 和 I_2^{reg} 是 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 上的两个群概形，是对 $I^{\mathrm{reg}} = I|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}}$ 分别取关于第一投影和第二投影的逆像而得到的。I^{reg} 关于态射 $\chi^{\mathrm{reg}} : \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{c}$ 的下降支架是一个同构 $\sigma_{12} : I_2^{\mathrm{reg}} \to I_1^{\mathrm{reg}}$，并满足上圈条件。下面我们来构造 σ_{12}，上圈条件的验证则留给读者。

同构 σ_{12} 的定义本身也是通过下降来实现的。考虑态射

$$G \times \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$$

它的定义是 $(g, x) \to (x, \mathrm{ad}(g)x)$。这是一个平滑且映满的态射从而更是忠实平坦的。在 $G \times \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 上，存在一个 I_1^{reg} 到 I_2^{reg} 的典范同构，它来自 I 的 G 循变结构。为了让这个同构下降到 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 上，需要验证一个等式，这个等式定义在 $G \times \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 在 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 处的纤维平方上。经过把这个纤维平方等同于 $G \times I_1^{\mathrm{reg}}$，这个等式的验证就可以归结为 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 群概形 I_1^{reg} 的交换性。

从而得到了一个 $\mathfrak{c}$ 上的平滑交换群概形 J 连同一个 G 循变的同构 $\chi^* J|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}} \to I|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}}$。这个同构可以扩展为一个群概形的同态 $\chi^* J \to I$，因为 $\chi^* J$ 是一个平滑 k 概形，I 是一个仿射 k 概形，并且 $\chi^* J - \chi^* J|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}}$ 是 $\chi^* J$ 的一个余 3 维的闭集。 □

我们把 J 称为*正则中心化子*。实际上可以把它定义为 $J := \epsilon^* I$，其中 ϵ 是 Kostant 截面 1.2。注意到 J 上还带有一个 $\mathbf{G}_m$ 循变的结构，这里 $\mathbf{G}_m$ 在 $\mathfrak{c}$ 上的作用是通过根系的指数。经过下降，可以得到一个 $[\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]$ 上的群概形，仍记为 J，参考 [**57**, 3.3]。

2.2. 关于商叠形 $[\mathfrak{g}/G]$ **. — 由**于 Chevalley 态射 $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ 是 G 不变的，故可穿过商叠形 $[\mathfrak{g}/G]$ 和态射

$$[\chi] : [\mathfrak{g}/G] \to \mathfrak{c} \quad 。$$

复习一下，$[\mathfrak{g}/G]$ 是这样一个叠形，它在一个 k 概形 S 处的取值是二元组 (E, ϕ) 的疏群，其中 E 是一个 S 上的 G 回旋子，ϕ 则是 G 的伴随表示所定义的伴随丛 $\mathrm{ad}(E)$ 上的一个截面。

在 $\mathfrak{c}$ 上，我们已经定义了一个平滑交换群概形 J。设 $\mathbf{B}J$ 是 J 的分类空间，它在一个 $\mathfrak{c}$ 概形 S 处的取值是 S 上的 J 回旋子所组成的 Picard 疏群。引理 2.1.1 表明，我们有 $\mathbf{B}J$ 在 $[\mathfrak{g}/G]$ 上的一个作用，定义在 $\mathfrak{c}$ 上。事实上，借助 2.1.1 中的同态 $\chi^* J \to I$，我们可以用一个 J 回旋子对二元组 $(E, \phi) \in [\mathfrak{g}/G](S)$ 进行偏转。

命题 2.2.1. — *态射 $[\chi^{\mathrm{reg}}] : [\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G] \to \mathfrak{c}$ 定义出一个用正则中心化子 J 绑起*(17)*的团簇*(18)*。进而，这个团簇是中性的。*

证明. — $[\chi^{\mathrm{reg}}]$ 是一个团簇这件事来自下面的事实：同态 $\chi^* J \to I$ 在 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 上的限制是一个 G 循变的同构，这是根据 J 的定义本身。Kostant 截面 $\epsilon : \mathfrak{c} \to \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 与商

(17)译注：绑带 =“lien”。
(18)译注：团簇 =“gerbe”。

态射 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \to [\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G]$ 的合成就使这个团簇成为中性的。我们把该点记为 $[\epsilon] : \mathfrak{c} \to [\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G]$。 □

2.2.2. — 我们有理由把 $[\mathfrak{g}/G]$ 想象为Picard叠形 $\mathbf{B}J$ 的一种紧化。这就像是一个模子，可以放在各种具体的几何背景下，用来烧铸我们需要的东西，比如仿Springer纤维和Hitchin纤维化，只要在不同的概形 S 上取值即可。对于仿Springer纤维，我们是在一元形式幂级数环上取值，参照3。对于Hitchin纤维化，我们是在平滑射影曲线上取值，参照4。在后一情形中，还需要关照 $\mathbf{G}_m$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的同筋作用。

2.2.3. — 正则中心化子 J 上带有一个 $\mathbf{G}_m$ 的作用，它是 $\mathbf{G}_m$ 在 $\mathfrak{c}$ 上的作用的提升。$[\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]$ 上的分类空间 $\mathbf{B}J$ 作用在 $[\mathfrak{g}/G \times \mathbf{G}_m]$ 上。后者包含一个开集 $[\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G \times \mathbf{G}_m]$。态射

$$[\chi^{\mathrm{reg}}/\mathbf{G}_m] : [\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G \times \mathbf{G}_m] \to [\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m] \tag{2.2.4}$$

也是一个用 J 绑起的团簇。这个团簇一般不是中性的。不过可以通过对 $\mathbf{B}\mathbf{G}_m$ 上的普适可逆向量丛开平方而把它变成中性的。考虑由 $t \mapsto t^2$ 所定义的同态 $[2] : \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$。它诱导了一个态射 $\mathbf{B}[2] : \mathbf{B}\mathbf{G}_m \to \mathbf{B}\mathbf{G}_m$，这相当于把 $\mathbf{B}\mathbf{G}_m$ 上的普适可逆向量丛开平方。我们用上指标 $[2]$ 来表示相对于这个态射的基变换。特别的，存在一个态射

$$[\chi/\mathbf{G}_m]^{[2]} : [\mathfrak{g}/G \times \mathbf{G}_m]^{[2]} \to [\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]^{[2]} \quad 。$$

事实上，$[\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]^{[2]}$ 是 $\mathfrak{c}$ 在 $\mathbf{G}_m$ 的一个作用下的商，该作用是用指数作用的平方来定义的，$[\mathfrak{g}/G \times \mathbf{G}_m]^{[2]}$ 则是 $\mathfrak{g}$ 在 G 的伴随作用和 $\mathbf{G}_m$ 的同筋作用平方下的商。考虑同态的合成

$$\mathbf{G}_m \to T \times \mathbf{G}_m \to G \times \mathbf{G}_m$$

其中第一个同态是由 $t \mapsto (2\rho(t), t)$ 所定义的，这里 2ρ 是指正的余根之和。Kostant截面1.2 $\epsilon : \mathfrak{c} \to \mathfrak{g}$ 对于这个同态来说是循变的，从而诱导了 $[\chi/\mathbf{G}_m]^{[2]}$ 的一个截面。我们现在要把上述结果整理成更方便的形式。

引理 2.2.5. — *设 S 是一个 k 概形，带有一个可逆向量丛 D，$h_D : S \to \mathbf{B}\mathbf{G}_m$ 是它所对应的态射，映到 $\mathbf{G}_m$ 的分类空间里。设 $a : S \to [\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]$ 是一个态射，位于 h_D 之上。选择 D 的一个平方根 D'，则它和Kostant截面一起定义了一个截面*

$$[\epsilon]^{D'}(a) : S \to [\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G \times \mathbf{G}_m] \quad 。$$

2.3. G 的中心和 J 的连通分支. — 本节是一些熟知的结果。

命题 2.3.1. — *若群 G 的中心是连通的，则其正则中心化子 J 具有连通的纤维。*

证明. — 在正则幂零元的情形，这是Springer的一个定理，参照[**75**, III, 3.7和1.14]和[**73**, 定理4.11]。借助Jordan分解，我们将把一般情形归结到上述情形。设 $x \in \mathfrak{g}(\bar{k})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个几何点，并且是正则的。设 $x = s + n$ 是它的Jordan分解，其中 $s \in \mathfrak{g}(\bar{k})$ 是一个半单元，$n \in \mathfrak{g}(\bar{k})$ 是一个幂零元，并且 $[x, n] = 0$。根据[**38**, 3, 引理8]，x 的中心化子 G_x 是 G 的一个连通简约子群，并且它的中心是连通的。从而可以把Springer定理应用到 $\mathrm{Lie}(G_s)$ 的正则幂零元 n 上。 □

推论 2.3.2. — *对任意 $x \in \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}(\bar{k})$，典范同态 $Z_G \to I_x$ 都诱导了一个满同态 $\pi_0(Z_G) \to \pi_0(I_x)$。*

证明. — 设 G^{ad} 是 G 的伴随群，I_x^{ad} 是 x 在 G^{ad} 中的中心化子。则有正合序列

$$1 \to Z_G \to I_x \to I_x^{\mathrm{ad}} \to 1 \quad 。$$

上面的命题表明，I_x^{ad} 是一个连通群，从而典范映射 $\pi_0(Z_G) \to \pi_0(I_x)$ 是满的。 □

2.4. J 的 Galois 式描述法. — 按照 Donagi 和 Gaitsgory [**23**]，我们也可以借助有限平坦覆叠 $\pi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{c}$ 来描述 $\mathfrak{c}$ 上的群概形 J。下面给出的陈述方式与他们的略有不同。

对于 $\mathfrak{t}$ 上的环面 $T \times \mathfrak{t}$，我们考虑它的 Weil 限制

$$\Pi := \prod_{\mathfrak{t}/\mathfrak{c}} (T \times \mathfrak{t}) = \pi_*(T \times \mathfrak{t}) \quad 。$$

作为 $\mathfrak{c}$ 上的群概形，对任意 $\mathfrak{c}$ 概形 S，均有

$$\Pi(S) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{t}}(S \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t}, T \times \mathfrak{t})$$

这个函子是可表识的 [19]，因为态射 $\mathfrak{t} \to \mathfrak{c}$ 是有限且平坦的 [**10**, 7.6]。由于平滑条件在 Weil 限制下是保持的，故知 Π 是一个 $\mathfrak{c}$ 上的平滑交换群概形，相对维数是 $r\sharp\,\mathbf{W}$。在开集 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 上，覆叠 $\mathfrak{t}^{\mathrm{rs}} \to \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 是有限且平展的，如此一来 Π 在这个开集上的限制就成为一个环面。

有限平展 S 群概形 W 在 T 和 $\mathfrak{t}$ 上都有作用。W 在 $T \times \mathfrak{t}$ 上的对角线作用诱导了 W 在 Π 上的一个作用。这个作用的不动点就定义了 Π 的一个闭子函子 J^1。

引理 2.4.1. — *Π 的闭子概形 J^1 是一个在 $\mathfrak{c}$ 上平滑的交换群概形。*

证明. — Weil 限制保持平滑性，故知 Π 在 $\mathfrak{c}$ 上是平滑的，由于 W 的阶与特征互素，故知 W 在平滑概形 Π 中的不动点构成一个闭子概形 J^1，且在 $\mathfrak{c}$ 上是平滑的。 □

下述命题是 1.4.2 的一个强化。

命题 2.4.2. — *存在一个典范同态 $J \to J^1$，进而它在 $\mathfrak{c}$ 的开集 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 上是一个同构。*

证明. — 首先来构造一个由 J 到 Weil 限制 $\pi_*(T \times \mathfrak{t})$ 的同态。利用函子的伴随性，这也相当于构造一个群概形的同态

$$\pi^* J \to T \times \mathfrak{t}$$

定义在 $\mathfrak{t}$ 上。

复习一下 Grothendieck 和 Springer 的同时解消法。设 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 是二元组 (x, gB) 的概形，其中 $x \in \mathfrak{g}$ 且 $gB \in G/B$ 并满足 $\mathrm{ad}(g)^{-1}(x) \in \mathrm{Lie}(B)$。这里 B 是指 G 的摆置中出现

[19] 译注：可表识 =“représentable”。

的 Borel 子群。令 $\pi_{\mathfrak{g}} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ 是到变量 x 上的投影。则投影 $\mathrm{Lie}(B) \to \mathfrak{t}$ 定义了一个态射 $\tilde{\chi} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{t}$，由此组成一个交换方图

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\tilde{\chi}"] \arrow[d, "\pi_{\mathfrak{g}}"'] & \mathfrak{t} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "\chi"'] & \mathfrak{c} \end{tikzcd}$$

进而，限制到 $\mathfrak{g}$ 的开集 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 上，可以得到一个卡氏图表

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}} \arrow[r, "\tilde{\chi}^{\mathrm{reg}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}"'] & \mathfrak{t} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \arrow[r, "\chi^{\mathrm{reg}}"'] & \mathfrak{c} \end{tikzcd}$$

根据 2.1.1，$(\chi^{\mathrm{reg}})^* J = I|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}}$，从而为了构造一个 $\mathfrak{t}$ 群概形的同态 $\pi^* J \to (T \times \mathfrak{t})$，只需构造一个 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}$ 群概形的同态

$$(\pi_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}})^*(I|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}}) \to T \times \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}$$

并且是 G 循变的。我们需要下面的引理。

引理 2.4.3. — 对任意 $(x, gB) \in \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}(\bar{k})$，均有 $I_x \subseteq \mathrm{ad}(g)B$。

证明. — 当 x 是正则半单元时，结论是显然的。事实上，此时中心化子 I_x 是一个环面，并且作用在纤维 $\pi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x)$ 上。由于此纤维是一个离散集合，故知这个环面作用必然是平凡的。

考虑 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}$ 上的群概形 H，它在 $(x, gB) \in \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}$ 处的纤维是 I_x 的一个子群，由满足 $h \in gBg^{-1}$ 的元素 h 所组成。根据其构造方法，这是 $(\pi_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}})^* I$ 的一个闭子群概形，并且在那些使 x 正则半单的二元组 (x, gB) 所组成的稠密开集上重合于 $(\pi_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}})^* I|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}}$。然而 $(\pi_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}})^* I|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}}$ 在 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}$ 上是平坦的，从而这个子群概形必然等于 $(\pi_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}})^* I|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}}$。 □

考虑 G/B 上的群概形 $\underline{B}$，它在 gB 处的纤维是 G 的子群 $\mathrm{ad}(g)B$。我们把 $\underline{B}$ 在 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}$ 上的基变换记为 $\underline{B}|_{\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}}$。上述引理表明，在 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}$ 上，我们有一个同态

$$I|_{\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}} \to \underline{B}|_{\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}} \quad 。$$

此外，我们还有一个从 $\underline{B}$ 到 G/B 环面 $T \times G/B$ 的同态。取合成，则可以得到一个 G 循变的同态

$$I|_{\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}} \to T \times \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}$$

它在正则半单区域上是一个同构。同样在正则半单区域上，W 在 $I|_{\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}}$ 上的作用搬运到 $T \times \mathfrak{g}^{\mathrm{rs}}$ 上就是对角线作用。利用函子的伴随性，可以得到一个同态

$$I|_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}} \to (\pi_{\mathfrak{g}})_*(T \times \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}) \ ,$$

它可以穿过 W 在 $(\pi_{\mathfrak{g}})_*(T \times \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}})$ 上的对角线作用下的不动点子函子。

经过下降，我们得到一个同态 $J \to J^1$，它在 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 上是一个同构。 □

现在我们指出 J^1 的上述描述法的一个变体。

引理 2.4.4. — 设 $\rho : X_\rho \to X$ 是一个有限平展Galois覆叠， Galois群为 Θ_ρ，且使回旋子 ρ_G 成为平凡的。则 J^1 典范同构于Weil限制

$$\prod_{(X_\rho \times \mathfrak{t})/\mathfrak{c}} (\mathbf{T} \times X_\rho \times \mathfrak{t})$$

中的不动点子概形，这是针对 $\mathbf{W} \rtimes \Theta_\rho$ 在 $\mathbf{T} \times X_\rho \times \mathfrak{t}$ 上的对角线作用来说的。

证明. — 要证的事情对于 X 的平展拓扑来说是局部性的，故可假设 ρ_G 和 ρ 都是平凡的。此时结论是显然的。 □

仿照 [**23**] 的方法，我们先定义出 J^1 的一个子层 J'，再证明它与 $J \to J^1$ 的像是重合的。为此需要先作一些准备。下面的构造方法对于 X 的平展拓扑来说是局部性的，故可假设 G 是分裂的。对每个根 $\alpha \in \Phi$，设 h_α 是 $\mathfrak{t}$ 的一个超平面，由线性映射 $\mathrm{d}\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbf{G}_a$ 的核来定义。设 $s_\alpha \in W$ 是关于超平面 h_α 的反射。设 T^{s_α} 是 T 的一个子群，由那些在 s_α 作用下不动的元素所组成。于是有包含关系

$$\alpha(T^{s_\alpha}) \subseteq \{\pm 1\} \quad 。$$

设 x 是 $\mathfrak{t}$ 的一个几何点，满足 $s_\alpha(x) = x$， a 是它在 $\mathfrak{c}$ 中的像。由于 J^1 是层 $\prod_{\mathfrak{t}/\mathfrak{c}}(T \times \mathfrak{t})$ 的 W 不变部分，故有一个从 J^1_a 到纤维 $T \times \{x\}$ 的典范同态，且它的像包含在 $T^{s_\alpha} \times \{x\}$ 之中。把它与根 $\alpha : T \to \mathbf{G}_m$ 进行合成，就得到一个同态 $\alpha_x : J^1_a \to \mathbf{G}_m$，它的像包含在 $\{\pm 1\}$ 之中。

设 J^0 是 J^1 的单位分支，这是一个开子群概形。根据构造方法， J^0_a 是 J^1_a 的单位分支，从而 J^0_a 包含在 α_x 的核之中。

定义 2.4.5. — 设 J' 是 J^1 的一个子函子，它在一个 $\mathfrak{c}$ 概形 S 处的取值是 $J^1(S)$ 的一个子集 $J'(S)$，它是由这样一些 W 循变的态射

$$f : S \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t} \to T$$

组成的，对于 $S \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t}$ 的每一个几何点 x，只要它在某个根 α 所定义的对合下是不动的 $s_\alpha(x) = x$，就一定有 $\alpha(f(x)) \neq -1$。

引理 2.4.6. — J^1 的子函子 J' 可以表识为 J^1 的一个仿射开子群概形。进而，我们有包含关系 $J^0 \subseteq J' \subseteq J^1$。

证明. — 首先证明子函子 J' 可以表识为 J^1 的一个仿射开子概形。由于态射 $\mathfrak{t} \to \mathfrak{c}$ 是有限且平坦的，故而只要能说明该命题在基变换到 $\mathfrak{t}$ 之后是对的就足够了。从而只需证明 $J' \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t}$ 是 $J^1 \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t}$ 上的某个Cartier除子的补集。

对任意 $\mathfrak{t}$ 概形 S， J' 的 S 值点就是 W 循变的态射 $f : S \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t} \to T$。把这个限制到对角线上可以诱导出一个态射 $f_\Delta : S \to T$。

可以限于考虑分裂的情形。此时 $\mathfrak{c}$ 上的判别式除子 $\mathfrak{D}_G$ 的逆像是一些根超平面 h_α 的并集。于是 J^1 在每个超平面 h_α 上的限制都有一个映到 T 的子群 T^{s_α} 上的典范态射。把它和根 α 进行合成，从而得到一个态射 $J^1 \times_{\mathfrak{c}} h_\alpha \to \{\pm 1\}$。此时 -1 的逆像是 $J^1 \times_{\mathfrak{c}} h_\alpha$ 的一个既开又闭的子集，可以是空的，从而是 $J^1 \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t}$ 上的一个Cartier除子。根据定义， $J' \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t}$ 就是这些除子的并集的补集。

同样的方法还表明，$J' \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t}$ 是 $J^1 \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t}$ 的一个开子群概形。由此可知，J' 是 J^1 的一个开子群概形。从而它包含了单位分支所形成的群概形 J^0。 □

下面的结果是 Donagi 和 Gaitsgory 的一个定理 [**23**, 定理 11.6] 的一种变形，我们将给出一个不同的证明。

命题 2.4.7. — *2.4.2 中的同态 $J \to J^1$ 可以穿过 2.4.5 中的开子群概形 J'，并且诱导了一个同构 $J \to J'$。*

证明. — 为了证明 $J \to J^1$ 可以穿过 J'，只需证明对任意 $a \in \mathfrak{c}(\bar{k})$，同态 $\pi_0(J_a) \to \pi_0(J^1_a)$ 都可以穿过 $\pi_0(J'_a)$。并且只需对每根纤维逐个验证同态 $\pi_0(J_a) \to \pi_0(J^1_a)$ 可以穿过 $\pi_0(J')$ 即可。已经知道同态 $Z_G \to J_a$ 诱导了一个满同态 $\pi_0(Z_G) \to \pi_0(J_a)$，参照 2.3.2。从而只需验证同态 $Z_G \to J^1_a$ 可以穿过 J'_a。然而这是显然的，因为每个根在 Z_G 上的限制都是平凡的。

由于 J 和 J' 都是 $\mathfrak{c}$ 上的平滑仿射群概形，从而为了证明同态 $J \to J'$ 是一个同构，只需在 $\mathfrak{c}$ 的某一个具有余 2 维补集的开集上证明即可。现在 $\mathfrak{D}_G$ 在 $\mathfrak{t}$ 中的逆像是一些根超平面 h_α 的并集。设 $\mathfrak{D}_G^{\mathrm{sing}}$ 是 $\mathfrak{D}_G$ 的这样一个闭集，它的逆像是由那些至少包含在两个超平面 h_α 之中的所组成的。则易见 $\mathfrak{D}_G^{\mathrm{sing}}$ 是 $\mathfrak{c}$ 的一个余 2 维的闭集。从而只需证明 $\mathfrak{c} - \mathfrak{D}_G$ 上的那个由 J 到 J' 同构可以扩展为 $\mathfrak{c} - \mathfrak{D}_G^{\mathrm{sing}}$ 上的一个同构即可。

设 $a \in (\mathfrak{c} - \mathfrak{D}_G^{\mathrm{sing}})(\bar{k})$。只需证明同态 $J \to J'$ 在 a 的某个平展邻域上是一个同构。若 $a \notin \mathfrak{D}_G$，则没有什么需要证明的，因为在开集 $\mathfrak{c} - \mathfrak{D}_G$ 上总有 $J = J' = J^1$。现在设 $a \in \mathfrak{D}_G - \mathfrak{D}_G^{\mathrm{sing}}$，可以找到一个 $s \in \mathfrak{t}(\bar{k})$，它的像是 a，并且 s 恰好被一个根 α 送到 0。设 T_α 是 $\alpha : T \to \mathbf{G}_m$ 的核，H_α 是 T_α 的中心化子。设 n 是 H_α 的 Lie 代数 $\mathfrak{h}_\alpha$ 中的一个正则幂零元，且可以把 $\mathfrak{h}_\alpha$ 等同于 $\mathfrak{g}$ 的一个 Lie 子代数。元素 $x = s + n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个正则元，且在 $\mathfrak{c}$ 中的像是 a。它也是 $\mathfrak{h}_\alpha$ 的一个正则元，并且在 H_α 的特征式空间 $\mathfrak{c}_{H_\alpha}$ 中的像是 a_{H_α}。可以验证，态射 $\mathfrak{c}_{H_\alpha} \to \mathfrak{c}$ 把 a_{H_α} 送到 a，并且在该点处是平展的。还可以验证，在 a_{H_α} 的某个邻域上，J, J' 和 J^1 在 $\mathfrak{c}_{H_\alpha}$ 上的逆像重合于 H_α 所对应的那些群。如此一来，问题归结到了半单秩为 1 的群上。

半单秩为 1 的群同构于 SL_2, PGL_2 或 GL_2 与一个环面的乘积。从而只需局限在这三个群上。通过直接计算可以验证，中心化子 J 在 SL_2 的情形有一个不连通的纤维，而在另两个群上，它的纤维都是连通的。J' 也是如此。 □

推论 2.4.8. — *2.4.7 中的同态 $J \to J^1$ 在每根纤维的单位分支 (开子概形) 上都诱导了一个同构。*

2.5. 初分群的情形. — 考虑 G 的一个初分线索 (κ, ρ_κ)，以及相应的初分群 H，参照 1.8.1。前面已经定义了一个有限平坦态射 $\nu : \mathfrak{c}_H \to \mathfrak{c}$，由 H 的特征式 X 概形映到 G 的特征式 X 概形，参照 1.9。$\mathfrak{c}$ 上的正则中心化子 J 和 $\mathfrak{c}_H$ 上的正则中心化子 J_H 是用下面的方式联系起来的。

命题 2.5.1. — *存在一个典范同态*

$$\mu : \nu^* J \longrightarrow J_H$$

它在开集 $\mathfrak{c}_H^{G-\mathrm{rs}} = \nu^{-1}(\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}})$ 上是一个同构。

证明. — 采用 1.9 中的记号。特别的，存在一个有限平坦覆叠 $\rho_\kappa \times \mathbf{t} \to \mathfrak{c}$，它把 $\mathfrak{c}$ 实现为 $\rho_\kappa \times \mathbf{t}$ 在 $\mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$ 作用下的不变量商。同样，$\mathfrak{c}_H$ 是 $\rho_\kappa \times \mathbf{t}$ 在 $\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa)$ 作用下的不变量商。还记得 1.9 中定义态射 $\nu : \mathfrak{c}_H \to \mathfrak{c}$ 的方法就是构造了一个同态

$$\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa) \to \mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

且与这两个群在 $\rho_\kappa \times \mathbf{t}$ 上的作用是相容的。

根据 2.4.4，可以把 J^1 描述为

$$J^1 = \prod_{\rho_\kappa \times \mathbf{t}/\mathfrak{c}} (\rho_\kappa \times \mathbf{t} \times \mathbf{T})^{\mathbf{W} \rtimes \pi_0(\kappa)}$$

类似的描述法也适用于 H，故得

$$J^1_H = \prod_{\rho_\kappa \times \mathbf{t}/\mathfrak{c}_H} (\rho_\kappa \times \mathbf{t} \times \mathbf{T})^{\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa)}$$

自然态射

$$\rho_\kappa \times \mathbf{t} \to (\rho_\kappa \times \mathbf{t}) \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{c}_H$$

（是 $\mathbf{W_H} \rtimes \pi_0(\kappa)$ 循变的，参照 1.9.1）诱导了一个同态 $\nu^* J^1 \to J^1_H$。我们在 1.9.2 中已经证明，这个同态在开集 $\mathfrak{c}_H^{G-\mathrm{rs}}$ 上是一个同构。

根据 2.4.8，存在一个同态 $J \to J^1$，它在诸纤维的单位分支开子概形上都诱导了同构。为了验证同态 $\nu^* J^1 \to J^1_H$ 可以通过限制给出一个同态 $\nu^* J \to J_H$，只需证明，对任意 $a_H \in \mathfrak{c}_H(\bar{k})$ 和它的像 $a \in \mathfrak{c}(\bar{k})$，由 $J^1_a \to J^1_{H,a_H}$ 所导出的同态

$$\pi_0(J^1_a) \to \pi_0(J^1_{H,a_H})$$

把子群 $\pi_0(J_a) \subseteq \pi_0(J^1_a)$ 送到子群 $\pi_0(J_{H,a_H}) \subseteq \pi_0(J^1_{H,a_H})$ 之中。由于 H 的根集合是 G 的根集合的一个子集，故知在群 $\pi_0(J^1_{H,a_H})$ 中界定出子群 $\pi_0(J_{H,a_H})$ 的那些条件 $\pi_0(J_a)$ 中的元素都是满足的，参照 2.4.5。命题于是得证。 □

3. 仿 Springer 纤维

仿照 Grothendieck-Springer 同时消解法中的 Springer 纤维，Kazhdan 和 Lusztig 引入了仿 Springer 纤维，并且研究了它们的几何性质。Goresky, Kottwitz 和 MacPher--son 通过考察仿 Springer 纤维的商空间的数点问题把它和稳定轨道积分建立了联系。在本章中，我们要复习一下 Kazhdan 和 Lusztig 关于仿 Springer 纤维几何性质的主要结果，并给出若干补充。数点问题将留到第 8 章再讨论。

下面是本章要使用的一些记号。设 k 是 q 个元素的有限域，$\bar{k}$ 是 k 的可分代数闭包。k 的特征大于 Coxeter 数的两倍这个条件总是有效的。设 F_v 是一个均一特征的局部域，$\mathcal{O}_v$ 是它的整数环，且其剩余类域 k_v 是 k 的一个有限扩张。再设 $X_v = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ 是对应的形式圆盘，$X_v^\bullet$ 是去心形式圆盘。设 v 是 X_v 的闭点，η_v 是一般点。

设$\overline{\mathcal{O}}_v=\mathcal{O}_v\hat{\otimes}_k\bar{k}$，$\overline{X}_v=\mathrm{Spec}(\overline{\mathcal{O}}_v)$。$\overline{X}_v$ 的连通分支集合与 k_v 到 $\bar{k}$ 的 k 嵌入之间之间有一个一一对应

$$\overline{X}_v=\bigsqcup_{\bar{v}:k_v\to\bar{k}}\overline{X}_{\bar{v}}\quad 。$$

选定一个齐化元[20] ϵ_v。

在$\overline{X}_{\bar{v}}$ 的几何纤维上取一个几何点 $\bar{\eta}_v$，则可以得到熟知的正合序列

$$1\to I_v\to\Gamma_v\to\mathrm{Gal}(\bar{k}/\bar{k}_v)\to 1$$

其中 $\Gamma_v=\pi_1(\eta_v,\bar{\eta}_v)$ 是 F_v 的 Galois 群，$I_v=\pi_1(\overline{X}_{\bar{v}},\bar{\eta}_v)$ 是它的惯性群。

设 G 是 $\mathbf{G}$ 在 X_v 上的一个拟分裂偏转，来自一个 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 回旋子 ρ_G。选定 ρ_G 的一个位于 $\bar{\eta}_v$ 之上的几何点，则可以得到一个同态 $\rho_G^\bullet:\Gamma_v\to\mathrm{Out}(\mathbf{G})$，它可以穿过 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k_v)$。在 $\overline{X}_v$ 上，ρ_G 是平凡回旋子。

3.1. 仿 Grassmann 多样体的复习. — 对任意 k 概形 S，令 $X_v\hat{\times}S=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v\hat{\times}_kR)$，其中 $\mathcal{O}_v\hat{\times}_kR$ 是指 $\mathcal{O}_v\times_k R$ 的 v 进完备化。再设 $X_v^\bullet\hat{\times}S$ 是 $\{v\}\times S$ 在 $X_v\hat{\times}S$ 中的开补集。

仿 Grassmann 多样体是指下面这个函子 $\mathcal{G}_v$，它在一个 Noether 仿射 k 概形 S 上的取值是这样一个疏群，它的每个对象都是一个二元组，由 $X_v\hat{\times}S$ 上的一个 G 回旋子 E_v 和其在 $X_v^\bullet\hat{\times}S$ 上的一个平凡化所组成 [**33**, 命题 2]。注意到 E_v 的一个自同构若在 $X_v^\bullet\hat{\times}S$ 上是平凡的则本身也必然是平凡的，从而这个疏群是一个离散范畴。我们可以把它换成其同构类的集合。

根据 [**33**, 命题 2]，$\mathcal{G}_v$ 可以表识为一个 k 上的归纳概形：即可以找到一个射影 k 概形的归纳系，以正整数为指标，其中的传递态射都是闭浸入，且它的归纳极限表识了函子 $\mathcal{G}_v$。由于 G 是一个平滑群概形，且具有连通的纤维，故知 $\mathcal{G}_v$ 的 k 值点的集合可以写成一个商

$$\mathcal{G}_v(k)=G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)\quad 。$$

当 $G=\mathrm{GL}_r$ 时，这个集合可以自然等同于 F_v 向量空间 $F_v^{\oplus r}$ 中的全体 $\mathcal{O}_v$ 网格的集合。

当把 k 换成 $\bar{k}$，把 X_v 换成 $\overline{X}_{\bar{v}}$（相对于任何嵌入 $\bar{v}:k_v\to\bar{k}$）时，同样的定义也是有效的。由此得到一个定义在 $\bar{k}$ 上的仿 Grassmann 多样体 $\mathcal{G}_{\bar{v}}$。我们有下面的公式

$$\mathcal{G}\otimes_k\bar{k}=\prod_{\bar{v}:k_v\to\bar{k}}\mathcal{G}_{\bar{v}}\quad 。$$

3.2. 仿 Springer 纤维. — 我们仍旧沿用 1.3 中的记号。特别的，我们有一个 X_v 上的概形 $\mathfrak{c}$，它是通过对 $\mathbf{g}$ 的特征式空间 $\mathbf{c}$ 进行外偏转而得到的，参照 Chevalley 定理 1.1.1。

设

$$\mathfrak{c}^\heartsuit(\mathcal{O}_v)=\mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)\cap\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$$

[20]译注：齐化元 = “uniformisant”。

是 $\mathfrak{c}$ 的这样一些 $\mathcal{O}_v$ 值点的集合，其一般纤维是正则半单的。我们有一个 Kostant 截面 $\epsilon : \mathfrak{c} \to \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$，参照 1.3.4。从而对任意 $a \in \mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_v)$，均给出一个点

$$[\epsilon](a) \in [\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G]$$

它是由 X_v 上的平凡 G 回旋子 E_0 和一个截面

$$\gamma_0 \in \Gamma(X_v, \mathrm{ad}(E_0))$$

所组成的，且 γ_0 的特征式等于 a。

对每一个 $a \in \mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_v)$，可以定义它的仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v(a)$ 如下。函子 $\mathcal{M}_v(a)$ 在每个 Noether 仿射 k 概形 S 上的取值是这样一个疏群，它的每个对象都是由一个二元组 (E, ϕ) 连同一个从 (E_0, γ_0) 到 $X_v^\bullet \hat{\times} S$ 的同构所组成的，其中 E 是 $X_v \hat{\times} S$ 上的一个 G 回旋子，ϕ 是 $\mathrm{ad}(E)$ 的一个截面。特别的

$$[\chi](E, \phi) = [\chi](E_0, \gamma_0) = a \quad 。$$

根据这个构造方法，G 回旋子 E_0 是平凡回旋子，从而 E 确定了仿 Grassmann 多样体上的一个点。

命题 3.2.1. — 遗忘函子 $(E, \phi) \mapsto E$ 定义了一个由仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v(a)$ 到仿 Grassmann 多样体 $\mathcal{G}_v$ 的态射，并且是一个闭浸入。特别的，$\mathcal{M}_v(a)$ 可以严格表识为一个归纳概形。进而，$\mathcal{M}_v(a)$ 的既约化 $\mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a)$ 可以表识为一个局部有限型概形。

证明. — 第一部分是显然的。第二部分则是由 Kazhdan 和 Lusztig 所证明的，参照 [**36**]。 □

考虑 $\mathcal{M}_v(a)$ 的 k 值点的集合。设 (E, ϕ) 是 $\mathcal{M}_v(a, k)$ 的一个对象。E 和 E_0 的一般纤维是可以等同的，因而给出 E 相当于给出一个等价类 $g \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$。由于 ϕ 在一般纤维上等同于 γ_0，为了使 ϕ 能够定义出 $\mathrm{ad}(E) \otimes D$ 在 X_v 上的一个截面，必须且只需 $\mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$。从而有

$$\mathcal{M}_v(a, k) = \{g \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v) \mid \mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)\} \quad 。$$

现在我们要考虑上述构造的一个简单变形，即在 X_v 上引入一个可逆向量丛 D'。这个变形对于建立仿 Springer 纤维和 Hitchin 纤维之间的联系是必要的。

设 $D = D'^{\otimes 2}$，$h_D : X_v \to \mathbf{BG}_m$ 是映到 $\mathbf{G}_m$ 的分类空间的一个态射，对应于直线丛 D。取定一个态射 $h_a : X_v \to [\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]$，使之可以嵌入交换图表：

$$\begin{tikzcd} X_v \arrow[r, "h_a"] \arrow[dr, "h_D"'] & {[\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]} \arrow[d] \\ & \mathbf{BG}_m \end{tikzcd}$$

设 $[\epsilon]^{D'}(a)$ 是 a 的 Kostant 点，作法见引理 2.2.5。我们把 a 和 h_a 在 $X_v^\bullet$ 上的限制记为 $a^\bullet$ 和 $h_a^\bullet$，并把对应的 Kostant 点记为 $[\epsilon]^{D'}(a^\bullet)$。

定义 3.2.2. — 仿Springer纤维$\mathcal{M}_v(a)$是指下面的函子，它在一个Noether仿射k概形S上的取值是这样一些态射$h_{E,\phi} : X_v\hat{\times}S \to [\mathfrak{g}/G \times \mathbf{G}_m]$的同构类集合$\mathcal{M}_v(a,S)$，它可以嵌入交换图表

$$\begin{tikzcd} X_v\hat{\times}S \arrow[r, "h_{E,\phi}"] \arrow[dr, "h_a"'] & {[\mathfrak{g}/G \times \mathbf{G}_m]} \arrow[d, "{[\chi]}"] \\ & {[\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]} \end{tikzcd}$$

并且还指定了一个从$h_{E,\phi}$在$X_v^\bullet\hat{\times}S$上的限制到Kostant点$[\epsilon]^{D'}(a^\bullet)$上的同构。

同样的定义在把k换成$\bar{k}$并把X_v换成$\overline{X}_{\bar{v}}$（相对于任何嵌入$\bar{v} : k_v \to \bar{k}$）时仍然有效。于是对任意$a \in \mathfrak{c}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \cap \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(\overline{F}_{\bar{v}})$，均有一个定义在$\bar{k}$上的仿Springer纤维$\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$。并且对任意$a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$，均有下面的公式

$$\mathcal{M}_v(a) \otimes_k \bar{k} = \prod_{\bar{v}:k_v\to\bar{k}} \mathcal{M}_{\bar{v}}(a) \quad 。$$

3.3. 仿Springer纤维上的对称. — 使用正则中心化子我们可以定义出仿Springer纤维上的对称。设$a \in \mathfrak{c}^\heartsuit(\mathcal{O}_v)$，$h_a : X_v \to \mathfrak{c}$是对应的态射。再设$J_a = h_a^*J$是正则中心化子的逆像。

考虑Spec(k)上的纤维化Picard疏群$\mathcal{P}_v(J_a)$，它在一个Noether仿射k概形S处的取值是这样一个Picard疏群$\mathcal{P}_v(J_a,S)$，它的每个对象都是由一个$X_v\hat{\times}S$上的J_a回旋子连同其在$X_v^\bullet\hat{\times}S$上的一个平凡化所组成的。可以验证，对每个这样的k概形S，$\mathcal{P}_v(J_a,S)$都是一个离散Picard范畴。进而，把S对应到$\mathcal{P}_v(J_a,S)$中的同构类的群这样一个函子可以表识为一个k上的归纳群概形，记之为$\mathcal{P}_v(J_a)$。它的$\bar{k}$值点的群$\mathcal{P}_v(J_a,k)$可以典范等同于商群$J_a(\overline{F}_v)/J_a(\overline{\mathcal{O}}_v)$。若$J_a$的纤维都是连通的，则$\mathcal{P}_v(J_a)$的$k$值点的集合可以等同于商群$J_a(F_v)/J_a(\mathcal{O}_v)$。

使用引理2.1.1可以定义出$\mathcal{P}_v$在$\mathcal{M}_v$上的一个作用。事实上，对任意$(E,\phi) \in \mathcal{M}_a(S)$，均有一个$X_v\hat{\times}S$上的群层同态

$$J_a \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(E,\phi)$$

这是由2.1.1导出的。于是可以使用一个$X_v\hat{\times}S$上的J_a回旋子（在$X_v^\bullet\hat{\times}S$上取定了平凡化）对(E,ϕ)进行偏转。

在k值点上，这个作用可以描述得很具体。简单起见，假设J_a的纤维都是连通的。群$\mathcal{P}_v(J_a,k) = J_a(F_v)/J_a(\mathcal{O}_v)$在集合

$$\mathcal{M}_v(a,k) = \{g \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v) \,|\, \mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)\}$$

上的作用可以具体地描述为下面的形状。根据2.1.1，我们有一个从$J_a(F_v)$到γ_0的中心化子$G_{\gamma_0}(F_v)$上的典范同构，记之为$j \mapsto \theta(j)$。我们让$J_a(F_v)$通过$j.g = \theta(j)g$作用在集合$\left\{g \in G(F_v) \,\middle|\, \mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)\right\}$上。为了使它能给出$J_a(F_v)/J_a(\mathcal{O}_v)$在$\mathcal{M}_v(a,k)$上的一个作用，必须且只需对任意$g \in \mathcal{M}_v(a,k)$，均有包含关系

$$\theta(J_a(\mathcal{O}_v)) \subseteq \mathrm{ad}(g)G(\mathcal{O}_v) \quad 。$$

设 $\gamma = \mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ 。根据 2.1.1，同构 $\mathrm{ad}(g)^{-1}\circ\theta : I_a \to G_{\gamma_0}$ 可以扩展为 X_v 群概形的一个同态

$$\mathrm{ad}(g)^{-1}\circ\theta : J_a \longrightarrow I_\gamma$$

由此特别给出

$$\theta(J_a(\mathcal{O}_v)) \subseteq \mathrm{ad}(g)(I_{\gamma_0}(\mathcal{O}_v)) \subseteq \mathrm{ad}(g)G(\mathcal{O}_v) \quad 。$$

我们现在考虑仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v(a)$ 的一个子函子 $\mathcal{M}_v^{\mathrm{reg}}(a)$，其中的点是那些可以穿过开集 $[\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G\times\mathbf{G}_m]$ 的态射 $h_{E,\phi} : X_v \to [\mathfrak{g}/G\times\mathbf{G}_m]$ 。易见 $\mathcal{M}_v^{\mathrm{reg}}(a)$ 是 $\mathcal{M}_v(a)$ 的一个开集。

引理 3.3.1. — 开集 $\mathcal{M}_v^{\mathrm{reg}}(a)$ 在 $\mathcal{P}_v(J_a)$ 的作用下是一个主齐性空间。

证明. — 这可由引理 2.2.1 推出。 □

设 $\bar{v} : k_v \to \bar{k}$ 。对任意 $a \in \mathfrak{c}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \cap \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(\overline{F}_{\bar{v}})$，均有仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$ 上的对称群 $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$，定义在 $\bar{k}$ 上。若 $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$，则有下面的公式

$$\mathcal{P}_v(J_a) \otimes_k \bar{k} = \prod_{\bar{v}:k_v\to\bar{k}} \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a) \quad 。$$

在本章随后的内容中，我们将转到 $\bar{k}$ 上去考察 $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$ 的几何性质。注意到 G 在 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 上是一个分裂群。

3.4. 仿 Springer 纤维的射影商. — 设 $a \in \mathfrak{c}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 且其一般纤维落在 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(\overline{F}_{\bar{v}})$ 中。Kazhdan 和 Lusztig 指出，函子 $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$ 的既约底概形 $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{red}}(a)$ 是局部有限型的，参照 3.2.1 和 [**36**]。他们还证明，$\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{red}}(a)$ 在除以一个适当的离散群后可以成为一个射影概形。下面我们就更细致地复习一下他们的结果。

设 Λ 是 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$ 的最大自由商群。任意选取一个提升

$$\Lambda \to \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$$

它诱导了 Λ 在 $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$ 和 $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{red}}(a)$ 上的一个作用。

命题 3.4.1. — 离散群 Λ 自由地作用在 $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{red}}(a)$ 上，由此得到的商空间 $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{red}}(a)/\Lambda$ 是一个射影 $\bar{k}$ 概形。

证明. — [**36**, p. 138] 中的命题 1 表明，Λ 自由地作用在 $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{red}}(a)$ 上，适当截取既约化仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{red}}(a)$ 的一段，可以得到一个射影概形，它可以映满商空间 $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{red}}(a)/\Lambda$ 。由此可知，这个商空间同样是一个射影概形。 □

3.5. 近似性. — 根据 Harish-Chandra 的一个定理。正则半单的轨道积分是局部常值的。在本节中，我们将给出这个定理的一个几何变体，结论较原定理稍强。

命题 3.5.1. — 设 $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$，$\mathcal{M}_a$ 是其仿 Springer 纤维，$\mathcal{P}_v(J_a)$ 是 $\mathcal{M}_v(a)$ 上的对称。则存在一个整数 N，使得对于 k 的任意有限扩张 k'，以及任意 $a' \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v \otimes_k k')$，只要 a' 满足

$$a \equiv a' \bmod \epsilon_v^N,$$

那么它的仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v(a')$ 连同 $\mathcal{P}_v(J_{a'})$ 的作用就同构于 $\mathcal{M}_v(a)\otimes_k k'$ 连同 $\mathcal{P}_v(J_a)\otimes_k k'$ 的作用。

证明. — 考虑 a 所给出的 X_v 的分合覆叠 $\widetilde{X}_{a,v}$，它来自下面的卡氏图表

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_{a,v} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_a"'] & \mathfrak{t} \arrow[d] \\ X_v \arrow[r, "a"'] & \mathfrak{c} \end{tikzcd}$$

态射 π_a 是有限平坦的，并且是一般位平展的 [21]。覆叠 $\widetilde{X}_{a,v}$ 带有一个 W 的作用，这是由 W 在 $\mathfrak{t}$ 上的作用所诱导的。$a'\in\mathfrak{c}(\mathcal{O}_v\otimes_k k')$ 也有它的分合覆叠 $\widetilde{X}_{a',v}\to X_v\otimes_k k'$。

引理 3.5.2. — 设 $a\in\mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)\cap\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$。对每一个整数 $N_1>0$，均可找到一个整数 $N>N_1$，使得对于 k 的任意有限扩张 k'，以及任意 $a'\in\mathfrak{c}(\mathcal{O}_v\otimes_k k')$，只要 a' 满足

$$a\equiv a' \bmod \epsilon_v^N \quad ,$$

那么 $X_v\otimes_k k'$ 的覆叠 $\widetilde{X}_{a',v}$ 连同 W 的作用就同构于覆叠 $\widetilde{X}_{a,v}\otimes_k k'$ 连同 W 的作用。我们可以进而要求这个同构在模 ϵ_v^N 之后给出那个显然的同构。

证明. — 这是 Artin-Hironaka 引理 [**3**, 引理 3.12] 的一个特殊情形。第二部分已经隐含在 Artin 的证明之中。 □

假设 $X_v\otimes_k k'$ 的两个分合覆叠 $\widetilde{X}_{a,v}$ 和 $\widetilde{X}_{a',v}$ 是同构的，下面证明 $\mathcal{M}_v(a)\otimes_k k'$ 连同 $\mathcal{P}_v(J_a)\otimes_k k'$ 的作用与 $\mathcal{M}_v(a')$ 连同 $\mathcal{P}_v(J_{a'})$ 的作用是同构的。把 k 换成 k'，则还可以假设 $k=k'$。

为了达到目的，我们需要使用正则中心化子来描述仿 Springer 纤维。设 $\gamma_0=\epsilon(a):X_v\to\mathfrak{g}$ 是 a 的 Kostant 截面。则有一个由 J_a 到 X_v 群概形 $I_{\gamma_0}=\gamma_0^*I$ 的典范同构，其中 I 是 $\mathfrak{g}$ 上的中心化子概形。显然的同态 $I_{\gamma_0}\to G$ 诱导了 X_v 上向量丛的一个单同态

$$\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0})\to\mathfrak{g} \quad 。$$

下面的引理表明，仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v(a)$ 不依赖于 γ_0，而只依赖于 $\mathfrak{g}$ 的交换 Lie 子代数 $\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0})$。

引理 3.5.3. — 设 $g\in G(F_v)$。则 $\mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0)\in\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ 当且仅当 $\mathrm{ad}(g)^{-1}\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0})\subseteq\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$。

证明. — 由于 $\gamma_0\in\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0})$，故由 $\mathrm{ad}(g)^{-1}\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0})\subseteq\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ 立得 $\mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0)\in\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$。反之，设 $g\in G(F_v)$ 满足 $\gamma=\mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0)\in\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$。并设 $I_\gamma=\gamma^*I$。则一般纤维上的同构

$$\mathrm{ad}(g)^{-1}:J_{a,F_v}=I_{\gamma_0,F_v}\to I_{\gamma,F_v}$$

可以扩展为一个同态 $J_a\to I_\gamma$ 的事实（参照 2.1.1）表明，$\mathrm{ad}(g)^{-1}\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0})\subseteq\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$。 □

(21) 译注：一般位平展 =“génériquement étale”。

为了完成命题 3.5.1 的证明，只消再证明下面的引理。 □

引理 3.5.4. — 设 $a, a' \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}_{\mathrm{rs}}(F_v)$ 满足 $a \equiv a' \bmod \epsilon_v$。假设在分合覆叠 $\widetilde{X}_{a,v}$ 和 $\widetilde{X}_{a',v}$ 之间存在一个同构，与 W 的作用相容，并且在特殊纤维上给出显然的同构。设 $\gamma_0 = \epsilon(a)$ 是 a 的 Kostant 截面，$\gamma_0' = \epsilon(a')$ 是 a' 的 Kostant 截面，I_{γ_0} 和 $I_{\gamma_0'}$ 是分别是 G 在截面 γ_0 和 γ_0' 处的中心化子概形。则可以找到 $g \in G(\mathcal{O}_v)$ 使得

$$\mathrm{ad}(g)^{-1} I_{\gamma_0} = I_{\gamma_0'} \quad 。$$

证明. — 这个引理是 Donagi 和 Gaitsgory 的某个结果 [**23**, 定理 11.8] 的自然推论。为了方便读者，我们把所需的部分单独取出来讨论。由于群概形 I_{γ_0} 和 $I_{\gamma_0'}$ 分别是由分合覆叠 $\widetilde{X}_{a,v}$ 和 $\widetilde{X}_{a',v}$ 所完全确定的，参照 2.4.7，故知 $\widetilde{X}_{a,v}$ 和 $\widetilde{X}_{a',v}$ 之间的这个同构诱导了一个同构 $\iota : I_{\gamma_0} \to I_{\gamma_0'}$。该同构把 $\gamma_0 \in \mathrm{Lie}(I_{\gamma_0})$ 映到一个元素 $\iota(\gamma_0) \in \mathrm{Lie}(I_{\gamma_0'})$ 上。由于 $\iota(\gamma_0)$ 和 γ_0' 的特殊纤维是重合的，因而 $\iota(\gamma_0) : X_v \to \mathfrak{g}$ 可以穿过开集 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$。由此可以导出 G 的子群概形之间的一个等式 $I_{\iota(\gamma_0)} = I_{\gamma_0'}$。

现在我们有两个截面

$$\gamma_0, \iota(\gamma_0) : X_v \to \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$$

它们有相同的特征式 a，并且它们在模 ϵ_v 后是相等的。由于态射

$$G \times_X \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$$

是一个平滑态射，故可找到 $g \in G(\mathcal{O}_v)$，使得 $g \equiv 1 \bmod \epsilon_v$ 并且 $\mathrm{ad}(g^{-1}(\gamma_0)) = \iota(\gamma_0)$。由此可以导出

$$\mathrm{ad}(g)^{-1}(I_{\gamma_0}) = I_{\iota(\gamma_0)} = I_{\gamma_0'} \quad 。$$

这正是我们所要的。 □

3.6. 一般线性群的情形. — **现**在我们来考察一般线性群的仿 Springer 纤维，比照 Laumon [**51**] 中的作法。其它典型群的情形可参考 [**59**]。设 $G = \mathrm{GL}(r)$。

沿用本章开头所指定的记号。一个点 $a \in \mathfrak{c}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar v})$ 可以用一个以 t 为变元的 r 次首一多项式来表示

$$P(a,t) = t^r - a_1 t^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r \in \overline{\mathcal{O}}_{\bar v}[t]$$

构作一个 r 阶有限平坦 $\overline{\mathcal{O}}_{\bar v}$ 代数

$$B = \overline{\mathcal{O}}_{\bar v}[t]/P(a,t)$$

再设 $E = B \otimes_{\overline{\mathcal{O}}_{\bar v}} \overline{F}_{\bar v}$。前提条件 $a \in \mathfrak{c}^{\heartsuit}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar v})$ 表明 E 是一个 r 维有限平展 $\overline{F}_{\bar v}$ 代数。从而可以把 E 写成 $\overline{F}_{\bar v}$ 的 s 个可分扩张的乘积 $E_1 \times \cdots \times E_s$，并且 $s \leq r$。

3.6.1. — 这种情况下，我们可以把仿 Springer 纤维用网格的语言来表达。仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_{\bar v}(a)$ 的 $\bar k$ 值点就是 E 中的 B 网格的集合，也就是说，是 $\overline{F}_{\bar v}$ 向量空间 E 中的这样一些 B 子模，它们同时也是 $\overline{\mathcal{O}}_{\bar v}$ 网格。正则部分 $\mathcal{M}_{\bar v}^{\mathrm{reg}}(a)$ 上的 $\bar k$ 值点则对应于 E 中的这样一些 B 网格，它们是自由 B 模。$\mathcal{P}_{\bar v}(J_a)$ 的 $\bar k$ 值点群就是商群 $E^\times / B^\times$。

3.6.2. — B 的正规化 $B^\flat$ 是 $E_{\bar v}$ 的整数环。于是有 $E^\times/B^\times$ 的一个拆解

$$1 \to (B^\flat)^\times/B^\times \to E^\times/B^\times \to E^\times/(B^\flat)^\times \to 1$$

其中 $(B^\flat)^\times/B^\times$ 就是群 $\mathcal{P}_{\bar v}(J_a)$ 的单位分支的 $\bar k$ 值点群。从而连通分支群 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar v}(J_a))$ 可以典范同构于 $E^\times/(B^\flat)^\times$，它是一个自由 Abel 群，带有一个以 $\mathrm{Spec}(B^\flat)$ 的连通分支为指标的基底。

3.6.3. — 在此情形下，$\mathcal{P}_{\bar v}(J_a)$ 的维数就等于 Serre 的 δ 不变量

$$\delta_{\bar v}(a) = \dim(\mathcal{P}_{\bar v}(J_a)) = \dim_k(B^\flat/B) \quad 。$$

此外，这个整数还可以用判别式函数来表达。设 $d_{\bar v}(a) = \mathrm{val}_{\bar v}(\mathfrak{D}(a))$ 是 a 的判别式的 $\bar v$ 进赋值。利用 [**70**, III.3 命题 5 和 III.6 推论 1]，再加上 $r < p$ 的条件，可以得到下面的公式

$$\delta_{\bar v}(a) = (d_{\bar v}(a) - c_{\bar v}(a))/2$$

其中 $c_{\bar v}(a) = r - s$。

3.7. 维数. — 在 [36] 中，Kazhdan 和 Lusztig 证明了

$$\dim(\mathcal{M}_{\bar v}(a)) = \dim(\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}_{\bar v}(a)) \quad 。$$

从他们的结果中事实上可以推导出一个更精确的结果。

命题 3.7.1. — 仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_{\bar v}(a)$ 的正则开集 $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}_{\bar v}(a)$ 的补集的维数严格小于 $\mathcal{M}_{\bar v}(a)$ 的维数。

证明. — 在考察维数时，我们可以忽略 $\mathcal{M}_{\bar v}(a)$ 的结构层中的幂零元。在 3.2 中已经说到，$\mathcal{M}_{\bar v}(a)$ 作为仿 Grassmann 多样体的子体，是由这样的 $g \in G(F_{\bar v})/G(\mathcal{O}_{\bar v})$ 组成的，它们满足 $\mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_{\bar v})$。

仿照 Kazhdan 和 Lusztig，我们也考虑在 γ_0 作用下不动的仿射旗标所组成的不动点子体 $\mathcal{B}_{\bar v}(a)$，也就是说，$g \in G(F_{\bar v})/\mathrm{Iw}_{\bar v}$ 且满足 $\mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Iw}_{\bar v})$。这里 $\mathrm{Iw}_{\bar v}$ 是 $G(\mathcal{O}_{\bar v})$ 的一个 Iwahori 子群。在 [**36**] 中，Kazhdan 和 Lusztig 证明了 Iwahori 子群的仿 Springer 纤维都是均维的。在此之前，经典 Springer 纤维的均维性已被 Spaltenstein [**72**] 所证明。

态射 $\mathcal{B}_{\bar v}(a) \to \mathcal{M}_{\bar v}(a)$ 在 $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}_{\bar v}(a)$ 上是一个有限态射。在点 $x \in \mathcal{M}_{\bar v} - \mathcal{M}^{\mathrm{reg}}_{\bar v}$ 处的纤维都是非空的，并且它的维数大于或等于 1。从而 $\mathcal{B}_{\bar v}(a)$ 的均维性表明，$\mathcal{M}_a - \mathcal{M}^{\mathrm{reg}}_a$ 的不可约分支的维数都严格小于 $\dim(\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}_a)$。 □

推论 3.7.2. — 若 $\dim(\mathcal{M}_v(a)) = 0$，则稠密开集 $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}_v(a)$ 就是整个 $\mathcal{M}_v(a)$。

Kazhdan 和 Lusztig 还猜想了一个公式，它把上述维数用判别式函数和一个与单值化群有关的亏损项表达了出来。这个公式后来被 Bezrukavnikov 所证明，参照 [**8**]。现在我们来复习一下。

沿用本章开头所定的记号。设 $a : \overline{X}_{\bar v} \to \mathfrak{c}$ 是一个态射，且它的像没有包含在判别式 $\mathfrak{D}_G$ 所定义的除子之中。取 $\mathfrak{D}_G$ 的逆像，可以得到 $\overline{X}_{\bar v}$ 上的一个有效 Cartier 除子，支集落在它的闭点上。其次数是一个 > 0 的整数，记为

$$d_{\bar v}(a) := \deg_{\bar v}(a^*\mathfrak{D}_G) \quad 。$$

取覆叠 $\pi:\mathfrak{t}^{\mathrm{rs}}\to\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 关于态射 $a:\overline{X}_{\bar{v}}^{\bullet}\to\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 的逆像，可以得到 $\overline{X}_{\bar{v}}^{\bullet}$ 上的一个 W 回旋子 π_a。注意到前述拟分裂偏转在 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 上是典范分裂的，从而在基变换到 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 上以后，必有 $W=\mathbf{W}$。选定该回旋子的一个几何点，使之位于 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 的几何点 $\bar{\eta}_{\bar{v}}$ 之上，则可以得到一个同态

(3.7.3) $$\pi_a^{\bullet}:I_v\to\mathbf{W}$$

由于 p 不整除 $\mathbf{W}$ 的阶，因而 $\pi_a^{\bullet}$ 可以穿过 I_v 的浅层分歧群 I_v^{tame}，如此一来它的像是一个循环子群。令

(3.7.4) $$c_{\bar{v}}(a):=\dim(\mathbf{t})-\dim(\mathbf{t}^{\pi_a^{\bullet}(I_v)})\quad。$$

下述公式就是 Bezrukavnikov 在 [**8**] 中所证明的。

命题 3.7.5. — 我们有下面的等式

$$\dim(\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{reg}}(a))=\dim(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))=\frac{d_{\bar{v}}(a)-c_{\bar{v}}(a)}{2}\quad。$$

我们引入记号 $\delta_{\bar{v}}(a)=\dim(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$，并且称之为局部 δ 不变量。

3.8. Néron 范型. — $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$ 的维数还可以藉由 J_a 的 Néron 范型来计算。实际上，Néron 范型让我们可以完整的分析 $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$ 的结构。根据 Bosch, Lutkebohmer 和 Raynaud [**10**, 第十章]，也参考 [**13**, 第 3 节]，在 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 上存在唯一的有限型平滑群概形 $J_a^{\flat}$，它和 J_a 具有相同的一般纤维，并且是“最大”的，也就是说，对于 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 上的任意有限型平滑群概形 J'，只要它与 J_a 具有相同的一般纤维，就存在一个典范同态 $J'\to J_a^{\flat}$，在一般纤维上是恒同。特别的，存在一个典范同态 $J_a\to J_a^{\flat}$。在整点这个层面上，该同态定义出下面的含入

$$J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})\subseteq J_a^{\flat}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})\subseteq J_a(\overline{F}_{\bar{v}})\quad。$$

其中 $J_a^{\flat}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 是 $J_a(F_{\bar{v}})$ 中的最大有界子群。我们把 $J_a^{\flat}$ 称为 J_a 的 Néron 范型。注意，在 [**13**] 的术语中，$J_a^{\flat}$ 被称为有限型 Néron 范型，以区别于 [**10**] 中的局部有限型 Néron 范型。事实上，有限型 Néron 范型是局部有限型 Néron 范型的一个 Zariski 开集 [**10**, 第十章]。

在 $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$ 的定义 3.3 中把群概形 J_a 换成它的 Néron 范型 $J_a^{\flat}$，则可以得到一个 $\bar{k}$ 上的归纳群概形 $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{\flat})$。群概形的同态 $J_a\to J_a^{\flat}$ 诱导了归纳群概形的一个同态

$$\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)\to\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{\flat})$$

它又给出 $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$ 的一个拆解。

引理 3.8.1. — 群 $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{\flat})$ 同胚于一个有限型自由 Abel 群。同态 $p_{\bar{v}}:\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)\to\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{\flat})$ 是映满的。$p_{\bar{v}}$ 的核 $\mathcal{R}_{\bar{v}}(a)$ 是一个仿射群概形，在 $\bar{k}$ 上是有限型的。

证明. — 由于 $J_a^{\flat}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 是 $J_a(\overline{F}_{\bar{v}})$ 中的最大有界子群，因而商群 $J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a^{\flat}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 是一个有限型自由 Abel 群。同态

$$\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)(\bar{k})=J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})\to J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a^{\flat}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})=\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{\flat})(\bar{k})$$

显然是满的。

对于充分大的整数 N，$J_a(\mathcal{O}_{\bar v})$ 包含了同态 $J_a^\flat(\overline{\mathcal{O}}_{\bar v}) \longrightarrow J_a^\flat(\overline{\mathcal{O}}_{\bar v}/\varepsilon_{\bar v}^N\overline{\mathcal{O}}_{\bar v})$ 的核。由此可知 $\mathcal{R}_{\bar v}(a)$ 是 Weil 限制

$$\prod_{\mathrm{Spec}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar v}/\varepsilon_{\bar v}^N\overline{\mathcal{O}}_{\bar v})/\mathrm{Spec}(\bar k)} J_a^\flat \otimes_{\overline{\mathcal{O}}_{\bar v}} (\overline{\mathcal{O}}_{\bar v}/\varepsilon_{\bar v}^N\overline{\mathcal{O}}_{\bar v})$$

的一个商，而这个 Weil 限制是一个有限型的平滑仿射 $\bar k$ 代数群。引理可由此推出。 □

Néron 范型可以藉由分合覆叠的正规化具体地构造出来。令 $\widetilde{X}_{a,\bar v}$ 是 $\mathfrak{t} \to \mathfrak{c}$ 在态射 $a : \overline{X}_{\bar v} \to \mathfrak{c}$ 下的逆像。考虑 $\widetilde{X}_{a,v}$ 的正规化 $\widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat$，它是一个在 $\overline{X}_{\bar v}$ 上有限且平坦的概形，并带有 W 的一个作用。由于 $\overline{X}_{\bar v}$ 的剩余类域是代数闭的，故知 $\widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat$ 是一个正则且完备的半局部概形，维数是 1 。

命题 3.8.2. — 设 $\widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat = \mathrm{Spec}(\widetilde{\mathcal{O}}_{\bar v}^\flat)$ 是 $\widetilde{X}_{a,\bar v}$ 的正规化。则 J_a 的 Néron 范型 $J_a^\flat$ 就是对环面 $T \times_{\overline{X}_{\bar v}} \widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat$ 进行由 $\widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat$ 到 $\overline{X}_{\bar v}$ 的系数限制后再取 W 的对角线作用下的不动点所得到的群概形

$$J_a^\flat = \prod_{\widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat/\overline{X}_{\bar v}} (T \times_{\overline{X}_{\bar v}} \widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat)^W \quad 。$$

证明. — 令 $\pi_a^\flat$ 是态射 $\widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat \to \overline{X}_{\bar v}$ 。和引理 2.4.1 中的情况相同，W 在 Weil 限制 $\prod_{\widetilde{X}_{\bar v}^\flat/\overline{X}_{\bar v}}(T \times_{\overline{X}_{\bar v}} \widetilde{X}_{\bar v}^\flat)$ 上的对角线作用的不动点概形是一个在 $\overline{X}_{\bar v}$ 上有限型的平滑群概形。使用层 $(\pi_{a*}^\flat T)^W$ 来代替上面的 Weil 限制会使讨论更加方便。

根据正则中心化子的 Galois 式描述法 2.4，$\pi_a^{\flat *} J_a$ 在 $\widetilde{X}_{a,\bar v}^{\flat\bullet} = \widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat \times_{\overline{X}_{\bar v}} \overline{X}_{\bar v}^\bullet$ 上的限制可以典范同构于环面 $T \times_{\overline{X}_{\bar v}^\bullet} \widetilde{X}_{a,\bar v}^{\flat\bullet}$ 。由于 $T \times_{\overline{X}_{\bar v}^\bullet} \widetilde{X}_{a,\bar v}^{\flat\bullet}$ 的 Néron 范型就是环面 $T \times_{\overline{X}_{\bar v}} \widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat$，故有一个典范同态

$$\pi_a^{\flat *} J_a \longrightarrow T \times_{\overline{X}_{\bar v}} \widetilde{X}_{a,\bar v}^\flat \quad 。$$

利用函子的伴随性，又得到一个同态 $J_a \longrightarrow \pi_{a*}^\flat T$ 。在一般纤维上，这个同态可以穿过 W 在 $T \times_{\overline{X}_{\bar v}^\bullet} \widetilde{X}_{a,\bar v}^{\flat\bullet}$ 上的对角线作用的不动点子环面。由此导出一个同态 $J_a \longrightarrow (\pi_{a*}^\flat T)^W$ 。同样的过程也适用于任何与 J_a 具有相同一般纤维的有限型平滑群概形上。从而就推出了引理。 □

推论 3.8.3. — 我们有下面的公式

$$\dim(\mathcal{P}_{\bar v}(J_a)) = \dim_{\bar k}(\mathfrak{t} \otimes_{\overline{\mathcal{O}}_{\bar v}} \widetilde{\mathcal{O}}_{\bar v}^\flat/\widetilde{\mathcal{O}}_{\bar v})^W \quad 。$$

这样就得到了不变量 $\delta_{\bar v}(a)$ 的另一个公式。顺便指出，3.7.4 中的整数 $c_{\bar v}(a)$ 也等于 Néron 范型 $J_a^\flat$ 的环面秩升降，也就是说，等于 r 和 $J_a^\flat$ 的特殊纤维的环面秩之差。

3.9. 连通分支. — 在本节中，我们将给出连通分支群 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(a))$ 的描述。

设 $a : \overline{X}_{\bar{v}} \to \mathfrak{c}$ 是一个态射，且它的像没有包含在判别式除子之中。则有一个 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 上的平滑群概形 J_a，其一般纤维是一个环面。设 J_a^0 是 J_a 的单位分支构成的开子群概形。在 $\overline{F}_{\bar{v}}$ 上，J_a 是连通的，如此一来同态 $J_a^0 \to J_a$ 在 $\overline{F}_{\bar{v}}$ 上诱导了一个同构。把它看作是 Abel 群层之间的同态时，它是一个单同态，并且它的余核的支集落在 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 的特殊纤维上，茎条是

$$\pi_0(J_{a,\bar{v}}) = J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})/J_a^0(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \quad 。$$

包含关系 $J_a^0(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \subseteq J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \subseteq J_a(\overline{F}_{\bar{v}})$ 诱导了一个正合序列

$$1 \to \pi_0(J_{a,v}) \to J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a^0(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \to J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \to 1 \quad 。$$

从而得到一个满同态

(3.9.1) $$\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0) \to \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$$

且它的核是有限群 $\pi_0(J_{a,v})$。由此可以导出一个正合序列

$$\pi_0(J_{a,v}) \to \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0)) \to \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)) \to 1 \quad 。$$

从而为了确定 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$，只需把群 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))$ 和同态 $\pi_0(J_{a,v}) \to \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))$ 的像写清楚。

与 Tate-Nakayama 对偶的情况相同，借助对偶也可以把连通分支群 $\pi_0(P_a)$ 很容易地写出来。对任意有限型 Abel 群 Λ，我们令

$$\Lambda^* = \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\Lambda])$$

是以 Λ 为特征标群的可对角化 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 群，反过来，对任意可对角化 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 群 A，令 A^* 是它的特征标群，这是一个有限型 Abel 群。

为了写出精确的公式，我们先取定 ρ_{Out} 在 $\overline{X}_v$ 上的一个平凡化。特别的，这就建立了 W 到 $\mathbf{W}$ 的一个等同。设 $\widetilde{X}^\bullet_{a,\bar{v}}$ 是有限平展覆叠 $\pi : \mathfrak{t}^{\mathrm{rs}} \to \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 在态射 $a : \overline{X}_{\bar{v}} \to \mathfrak{c}$ 下的逆像。选取 $\widetilde{X}_{a,\bar{v}}$ 的一个几何点，位于 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 的几何点 $\bar{\eta}_v$ 之上，则可以得到一个同态 $\pi_a^\bullet : I_v \to \mathbf{W}$。

命题 3.9.2. — 选定了 $\widetilde{X}_{a,\bar{v}}$ 的一个位于 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 的几何点 $\bar{\eta}_v$ 之上的几何点，则有一个可对角化群的典范同构

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))^* = \hat{\mathbf{T}}^{\pi_a^\bullet(I_v)} \quad 。$$

同样，还有一个同构

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))^* = \hat{\mathbf{T}}(\pi_a^\bullet(I_v))$$

其中 $\hat{\mathbf{T}}(\pi_a^\bullet(I_v))$ 是 $\hat{\mathbf{T}}^{\pi_a^\bullet(I_v)}$ 的一个子群，由这样一些元素 $\kappa \in \hat{\mathbf{T}}$ 所组成，它使得 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))$ 包含在 κ 在 $\hat{\mathbf{G}}$ 中的中心化子的单位分支 $\hat{\mathbf{H}}$ 的 Weyl 群之中。

证明. — 考虑群概形 $J_a^{\flat,0}$，即 Néron 范型 $J_a^\flat$ 的单位分支。在 [**10**] 中把它称为连通 Néron 范型。由于 J_a^0 的纤维都是连通的，故知同态 $J_a^0 \to J_a^\flat$ 可以穿过 $J_a^{\flat,0}$。

引理 3.9.3. — 同态 $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0) \to \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{\flat,0})$ 诱导了一个由 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))$ 到 $J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a^{\flat,0}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 上的同构。

证明. — 由于 J_a^0 和 $J_a^{\flat,0}$ 的纤维都是连通的，故知同态 $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0) \to \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{\flat,0})$ 诱导了连通分支群之间的一个同构。从拓扑上来看，$\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{\flat,0})$ 就是离散群 $J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a^{\flat,0}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 。 □

对于 $\overline{F}_{\bar{v}}$ 上的任意环面 A，都可以考虑 A 在 $\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ 上的连通 Néron 范型 $A^{\flat,0}$，以及有限型 Abel 群 $A(\overline{F}_{\bar{v}})/A^{\flat,0}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 。可以验证，参照 [**63**]，函子 $A \mapsto A(\overline{F}_{\bar{v}})/A^{\flat,0}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 满足引理 [**42**, 2.2] 的诸公理。根据 Kottwitz，我们有一个关于 $A(\overline{F}_{\bar{v}})/A^{\flat,0}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 的一般公式，特别的，我们有下面的引理。

引理 3.9.4. — 在上述记号下，存在一个同构 $J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a^{\flat,0}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) = (\mathbf{X}_*)_{\pi_a^\bullet(I_v)}$ 。

把上面两个引理结合起来就给出同构

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0)) = (\mathbf{X}_*)_{\pi_a^\bullet(I_v)}$$

取对偶就得到了定理得第一部分

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))^* = \hat{\mathbf{T}}^{\pi_a^\bullet(I_v)} \quad 。$$

第二部分的证明用到了 z 扩张的技巧。根据 [**44**, 7.5]，存在一个关于 X 上的简约群概形的正合序列

$$1 \to G \to G_1 \to C \to 1$$

它是由分裂简约群的正合序列

$$1 \to \mathbf{G} \to \mathbf{G}_1 \to \mathbf{C} \to 1$$

通过外偏转而得到的，这里 $\mathbf{C}$ 是一个环面，$\mathbf{G}_1$ 是一个简约群，其中心是连通的。对偶群 $\hat{\mathbf{G}}_1$ 具有一个单连通的导出群。可以找到 $\mathbf{G}_1$ 的一个极大环面 $\mathbf{T}_1$ 连同一个正合序列

$$1 \to \mathbf{T} \to \mathbf{T}_1 \to \mathbf{C} \to 1 \quad 。$$

把 G 换成 G_1，并且用记号 $\mathfrak{c}_1$ 替换 $\mathfrak{c}$。同态 $G \to G_1$ 诱导了一个态射 $\alpha : \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}_1$ 。在 $\mathfrak{c}_1$ 上，我们有正则中心化子 J_1，它是一个平滑群概形，且纤维都是连通的，因为 G_1 的中心是连通的，参照 2.3.1。故有平滑交换群概形的一个正合序列

$$1 \to J \to \alpha^* J_1 \to C \to 1 \quad 。$$

设 $a : \overline{X}_{\bar{v}} \to \mathfrak{c}$ 使得 $a|_{\overline{X}_{\bar{v}}^\bullet}$ 的像落在 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 中。再令 $\alpha(a) : \overline{X}_{\bar{v}} \to \mathfrak{c}_1$ 是 a 和 α 的合成态射。在 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 上也有一个正合序列

$$1 \to J_a \to J_{1,\alpha(a)} \to C \to 1$$

其中 $J_a = a^* J$，$(J_1)_{\alpha(a)} = \alpha(a)^* J_1$ 。

命题 3.9.5. — 同态

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)) \to \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_{1,\alpha(a)}))$$

是单的。

证明. — 由于 $J \to \alpha^* J_1$ 是一个闭浸入，特别的，它是紧合的，故有 $J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) = J_a(\overline{F}_{\bar{v}}) \cap (J_1)_{\alpha(a)}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$。由此可知同态

$$j_{\alpha(a)} : J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \to J_{1,\alpha(a)}(\overline{F}_{\bar{v}})/J_{1,\alpha(a)}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$$

是单的。由于 C 是 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 上的一个环面，故知 $C(\overline{F}_{\bar{v}})/C(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 是一个有限型且离散的自由 Abel 群。从而

$$J_{1,\alpha(a)}(\overline{F}_{\bar{v}})/J_{1,\alpha(a)}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$$

单位分支落在 $j_{\alpha(a)}$ 的像之中。这样一来，$j_{\alpha(a)}$ 诱导了 $J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 的单位分支到 $J_{1,\alpha(a)}(\overline{F}_{\bar{v}})/J_{1,\alpha(a)}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 的单位分支上的一个同构。由此可知同态 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)) \to \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}((J_1)_{\alpha(a)}))$ 是单的。 □

推论 3.9.6. — 群 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$ 可以典范等同于同态

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0)) \to \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_{1,\alpha(a)}))$$

的像。

证明. — 除上述命题之外，只需再引用 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0)) \to \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$ 是满的这个事实。 □

选定 $\widetilde{X}^\bullet_{a,\bar{v}}$ 的一个几何点，则可以把群 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$ 等同于同态

$$(\mathbf{X}_*)_{I_v} \to (\mathbf{X}_{1,*})_{I_v}$$

的像，这里 $\mathbf{X}_{1,*} = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, \mathbf{T}_1)$。注意到等式 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_{1,\alpha(a)})) = (\mathbf{X}_{1,*})_{I_v}$ 来自于 J_1 的纤维连通性和 3.9.4。对偶的，存在一个由 $\hat{\mathbf{T}}^{I_v}$ 的子群 $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))])$ 到同态

$$\hat{\mathbf{T}}_1^{I_v} = \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[(\mathbf{X}_{1,*})_{I_v}]) \to \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[(\mathbf{X}_*)_{I_v}]) = \hat{\mathbf{T}}^{I_v}$$

的像上的同构。

只消再证明 $\hat{\mathbf{T}}_1^{I_v}$ 在 $\hat{\mathbf{T}}^{I_v}$ 中的像恰好就是由这样一些元素 $\kappa \in \hat{\mathbf{T}}$ 所组成的子群，它使得 $\pi_a^\bullet(I_v)$ 包含在中心化子 $\hat{\mathbf{G}}_\kappa$ 的单位分支 $\hat{\mathbf{H}}$ 的 Weyl 群之中。对任意 $\kappa \in \hat{\mathbf{T}}$，及对任意 $\kappa_1 \in \hat{\mathbf{T}}_1$ 且它的像是 κ，κ_1 在 $\hat{\mathbf{G}}_1$ 中的中心化子 $\hat{\mathbf{H}}_1$ 都是连通的，并且它在 $\hat{\mathbf{G}}$ 中的像就是 $\hat{\mathbf{H}}$。事实上，$\hat{\mathbf{G}}_1$ 具有一个单连通的导出群，如此一来 $\hat{\mathbf{G}}_1$ 的半单元的中心化子是连通的。由此即可推出所要的结果。 □

我们有一个关于 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$ 的更具体的描述，但不太好用。

命题 3.9.7. — 选定了 $\widetilde{X}_{a,\bar{v}}$ 的一个几何点，位于 $\overline{X}_{\bar{v}}$ 的几何点 $\bar{\eta}_v$ 之上，则有一个从 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$ 到下面这个合成同态的核上的同构

$$\pi_0(Z_{\mathbf{G}}) \to \pi_0(\mathbf{T}^{\pi_a^\bullet(I_v)}) \to (\mathbf{X}_*)_{\pi_a^\bullet(I_v)}$$

其中第一个同态来源于自然同态 $Z_{\mathbf{G}} \to \mathbf{T}^{\pi_a^\bullet(I_v)}$，第二个同态是一个由 $\pi_0(\mathbf{T}^{\pi_a^\bullet(I_v)})$ 到 $(\mathbf{X}_*)_{\pi_a^\bullet(I_v)}$ 的挠群上的典范同构。

证明. — 已经知道 $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$ 是同态 $\pi_0(J_{a,v}) \to \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))$ 的余核。根据 2.3.2，我们还知道 $\pi_0(J_{a,v})$ 和 $\pi_0(Z_{\mathbf{G}})$ 在 $(\mathbf{X}_*)_{\pi_a^\bullet(I_v)}$ 中的像是相同的。 □

3.10. 正则轨道的稠密性. — 下述命题的证明概要可4.16节中找到。这个结果可以从它的整体类比推出来，后者的证明会在后面详细讨论。本文只需要使用这个整体性结果。

命题 3.10.1. — 开集$\mathcal{M}_v^{\rm reg}(a)$在$\mathcal{M}_v(a)$中是稠密的。

我们已经知道，闭补集$\mathcal{M}_v(a)-\mathcal{M}_v^{\rm reg}(a)$的维数严格小于$\dim(\mathcal{M}_v^{\rm reg}(a))$，参照3.7.1。

推论 3.10.2. — 仿Springer纤维$\mathcal{M}_v(a)$的不可约分支的集合与群$\mathcal{P}_v(J_a)$的连通分支群之间有一个典范一一映射。

证明. — 事实上，存在一个同构$\mathcal{P}_v(J_a)\ \rightarrow\ \mathcal{M}_v^{\rm reg}(a)$，这是通过让$\mathcal{P}_v(J_a)$作用在Kostant点上而得到的，□

3.11. 初分群的情形. — 设H是G的一个初分群，参照1.8。设$a_H\in\mathfrak{c}_H(\overline{\mathcal{O}}_{\bar v})$，且它的像是$a\in\mathfrak{c}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar v})\cap\mathfrak{c}^{\rm rs}(\overline{F}_{\bar v})$。尽管两个仿Springer纤维$\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$和$\mathcal{M}_v(a)$可能没有直接的关系。但它们的对称是有联系的。

现在有两个$\overline{X}_{\bar v}$群概形$J_a=a^*J$和$J_{H,a_H}=a_H^*J_H$，它们通过一个同态

$$\mu_{a_H}:J_a\rightarrow J_{H,a_H}$$

而联系在一起，这在去心圆盘$\overline{X}_{\bar v}^{\bullet}$上是一个同构。得到这个同态的办法是通过把2.5.1中的同态μ取关于a_H的逆像。

设$\mathcal{R}_{H,\bar v}^G(a_H)$是$\bar k$上的一个仿射代数群，它的$\bar k$值点群是

$$\mathcal{R}_{\bar v}(a_H)(\bar k)=J_{H,a_H}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar v})/J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar v})\quad 。$$

则有下面的正合序列

$$1\rightarrow\mathcal{R}_{H,\bar v}^G(a_H)\rightarrow\mathcal{P}_{\bar v}(J_a)\rightarrow\mathcal{P}_{\bar v}(J_{H,a_H})\rightarrow 1\quad 。\tag{3.11.1}$$

引理 3.11.2. — 我们有

$$\dim(\mathcal{R}_{H,\bar v}^G(a_H))=r_{H,\bar v}^G(a_H)$$

其中$r_{H,\bar v}^G(a_H)=\deg_{\bar v}(a_H^*\mathfrak{R}_G^H)$，$\mathfrak{c}_H$的除子$\mathfrak{R}_G^H$是在1.10.3中定义的。

证明. — 依据正合序列3.11.1，我们有

$$\dim(\mathcal{R}_{H,\bar v}^G(a_H))=\dim(\mathcal{P}_{\bar v}(J_a))-\dim(\mathcal{P}_{\bar v}(J_{H,a_H}))\quad 。$$

由于同态$J_{H,a_H}\rightarrow J_a$在一般纤维上是一个同构，故有等式

$$c_{\bar v}(a_H)=c_{\bar v}(a)$$

其中$c_{\bar v}(a_H)$和$c_{\bar v}(a)$是Bezrukavnikov维数公式中所出现的Galois不变量，参照3.7.5。把这个公式应用到a和a_H上，可以得到

$$\dim(\mathcal{R}_{H,\bar v}^G(a_H))=\deg_{\bar v}(a^*\mathfrak{D}_G)-\deg_{\bar v}(a_H^*\mathfrak{D}_H)\quad 。$$

现在只要再引用1.10.3就可以推出结论。□

现在设 $a_H \in \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$，且它的像是 $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$。使用和上面相同的定义，可以得到一个定义在 k 上的群 $\mathcal{R}_v(a_H)$。此时有下面的公式

$$\mathcal{R}^G_{H,v}(a_H) \otimes_k \bar{k} = \prod_{\bar{v}:k_v \to \bar{k}} \mathcal{R}_{\bar{v}}(a)$$

由此可以推出维数公式

$$\dim \mathcal{R}^G_{H,v}(a_H) = \deg(k_v/k)\deg_v(a_H^* \mathfrak{R}^H_G) \quad 。$$

把 $\mathcal{P}_v(J_a)$ 等同于 $\mathcal{M}_v(a)$ 的开集 $\mathcal{M}_v^{\mathrm{reg}}(a)$，再把 $\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})$ 等同于开集 $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$，然后取同态 μ_{a_H} 在 $\mathcal{M}_v(a) \times \mathcal{M}_v(a_H)$ 中的图像的闭包，则可以得到两个仿 Springer 纤维之间的一个很有意义的照合 (22)。在本文中，我们将不会用到这个照合。

4. Hitchin 纤维化

Hitchin 在他的著名文章 [**34**] 中指出，曲线上的稳定向量丛的参模空间上的余切丛构成一个 Hamilton 完全可积系统。为此他具体地构造了一组函数，它们在 Poisson 括号下是可交换的，其个数是余切丛维数的一半。这些函数定义了一个由该余切丛到某个仿射空间的态射，其一般纤维本质上是一个 Abel 多样体。这个特别漂亮的态射就是 Hitchin 纤维化。

与上面的视角不同，我们把 Hitchin 纤维化中的那些纤维看作是仿 Springer 纤维的整体化形式。特别的，我们将把曲线的典范丛换成一个次数非常大的可逆向量丛。这样一来，我们得到的纤维化就完全丧失了原来的辛几何含义，但仍然与 Hitchin 最初的纤维化有非常类似的表现。

我们在 [**57**] 已经观察到，这种广义的 Hitchin 纤维化在有限域上的点的个数恰好给出了 Lie 代数的迹公式的几何学侧面。这将是我们在这一章考察 Hitchin 纤维化的几何性质时的目标性参照物。数点问题将留到第 8 章讨论。

为了研究 Hitchin 纤维化 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ 上的几何，我们最中意的工具是一个作用在 $\mathcal{M}$ 上的 Picard 叠形 $\mathcal{P} \to \mathcal{A}$。这个作用的定义建立在第 2 章对正则中心化子的构造方法基础上。特别的，可以证明，存在一个 $\mathcal{M}$ 的开集 $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$，参照 4.3.3，使得 $\mathcal{P}$ 在其上的作用是简单传递的，并且这个开集在每个纤维 $\mathcal{M}_a$ 中都是稠密的，参照 4.16.1。借助分合曲线和 Néron 范型的理论，我们可以细致地了解 $\mathcal{P}_a$ 的结构。特别的，由此可以定义出一个开集 $\mathcal{A}^\diamondsuit$，使得 $\mathcal{M}$ 在其上本质上是一个 Abel 概形。

我们还将作一些对后面来说有用的计算，比如维数的计算 4.13，$\mathcal{P}_a$ 的连通分支群的计算，参照 4.10，以及 Higgs 丛的自同构群的计算，参照 4.11。

本章的要点是乘积公式 4.15.1，它建立了 Hitchin 纤维和仿 Springer 纤维之间的关系。这个公式是在 [**57**] 证明的。它在第 8 章讨论数点问题时起着关键的作用，并且它也隐含在第 7 章证明支集定理的过程中。

(22) 译注：照合 =“correspondance”。

我们还要在 G 的 Hitchin 纤维化和它的初分群的 Hitchin 纤维化之间建立一个联系。存在一个典范态射 $\nu : \mathcal{A}_H \to \mathcal{A}$，且若 $a_H \mapsto a$，则有一个典范同态 $\mu : \mathcal{P}_a \to \mathcal{P}_{H,a_H}$ 。相反的，在 Hitchin 纤维 $\mathcal{M}_a$ 和 $\mathcal{M}_{H,a_H}$ 之间没有直接的关系，但可以有一个照合，这是由 μ 所导出的，通过取概闭包。本文将不会使用这个照合，不过它可以作为今后工作的一个切入点。

下面是本章将要使用的一些记号。选定有限域 k 上的一条平滑紧合且几何连通的曲线 X，亏格为 g。设 $\bar{k}$ 是 k 的代数闭包。令 $\overline{X} = X \otimes_k \bar{k}$ 。

设 F 是 X 上的有理函数域。设 $|X|$ 是 X 的闭点集。每个元素 $v \in |X|$ 都定义了一个赋值 $v : F^\times \to \mathbb{Z}$ 。令 F_v 是 F 在这个赋值下的完备化，$\mathcal{O}_v$ 是 F_v 的整数环，k_v 是剩余类域。设 $X_v = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ 是 v 处的形式圆盘，$X_v^\bullet = \mathrm{Spec}(F_v)$ 是去心形式圆盘。

设 $\mathbf{G}$ 是一个 Chevalley 群，其 Coxeter 数 $\mathbf{h}$ 满足 $2\mathbf{h} < p$，其中 p 是 k 的特征。设 G 是一个简约 X 群概形，它是 $\mathbf{G}$ 的拟分裂偏转，由一个 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 回旋子 ρ_G 所定义，参照 1.3。则群概形 G 上已经作了一个摆置 $(T, B, \mathbf{x}_+)$ 。特别的，我们有一个特征式 X 概形 $\mathfrak{c}$，还有 Chevalley 态射 $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$，其中 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，以及一个有限平坦态射 $\pi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{c}$，它在开集 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 上是一个回旋子，结构群是有限平展群概形 W，这个 W 是用 ρ_G 对 $\mathbf{W}$ 进行偏转而得到的。

我们取定 X 上的一个可逆向量丛 D，且让它是另一个可逆向量丛 D' 的平方 $D = D'^{\otimes 2}$ 。通常我们假设 D 的次数比 $2g$ 大，其中 g 是 X 的亏格，这一点与 [**34**] 不同，在那里 D 是典范丛。但我们将明确指出这个假设究竟在哪些地方是必须的。

注意到 $\mathbf{G}_m$ 可以作用在 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{t}$ 上，即借助同筋，进而它也作用在 $\mathfrak{c}$ 上，与上述作用相容。令 $\mathfrak{g}_D = \mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{O}_X} D$，$\mathfrak{t}_D = \mathfrak{t} \otimes_{\mathcal{O}_X} D$ 。这也相当于把 $\mathfrak{g}_D$ 和 $\mathfrak{c}_D$ 定义为使用由可逆向量丛 D 所对应的 $\mathbf{G}_m$ 回旋子对向量丛 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{t}$ 进行偏转而得到的。同样，$\mathfrak{c}_D$ 也是使用同一个 $\mathbf{G}_m$ 回旋子对 $\mathfrak{c}$ 进行偏转而得到的。

4.1. Bun_G 复习. — 考虑叠形 Bun_G，它在一个 k 概形 S 上的取值是 $X \times S$ 上的 G 回旋子的疏群。Bun_G 是一个 Artin 代数叠形 [**53**] 和 [**33**, 命题 1]，它的 k 值点的疏群可以写成一些双陪集的无交并

$$\mathrm{Bun}_G(k) = \bigsqcup_{\xi \in \ker^1(F,G)} [G^\xi(F) \backslash \check{\prod}_{v \in |X|} G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)]$$

集合 $\ker^1(F, G)$ 是由 F 上的局部平凡 G 回旋子所组成的，G^ξ 是 G 在 F 上的一个狭义内偏转，由等价类 $\xi \in \ker^1(F, G)$ 所定义，乘积 $\check{\prod}$ 是指限制积。在这里我们已经对每一个 $\xi \in \ker^1(F, G)$ 都选好了一个 F 上的 G 回旋子，它的同构类是 ξ，并且它在每一个局部域 F_v 上都带着一个平凡化。

对任意 $v \in |X|$，我们都有仿 Grassmann 多样体 $\mathcal{G}_v$，如 3.1 所述，并且有一个态射

$$\zeta : \mathcal{G}_v \longrightarrow \mathrm{Bun}_G$$

它相当于把 $X_v \hat{\times} S$ 上的一个 G 回旋子连同其在 $X_v^\bullet \hat{\times} S$ 上的一个平凡化与 $(X - v) \times S$ 上的平凡 G 回旋子进行黏合。这种形式黏合法的存在性是一个首先是

由 Beauville 和 Laszlo 对向量丛建立的，参照 [**4**]，后来 Heinloth [**33**, 引理 5] 完成了一般的情形。在 k 值点的层面上，该态射是下面这个明显的函子

$$G(F_v)/G(\mathcal{O}_v) \longrightarrow \left[G(F)\backslash\check{\prod}_{v\in|X|} G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)\right]$$

它把 $g_v \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$ 送到这样一个元素，它在 v 处取值为 g_v，而在其它 $v' \neq v$ 处取值为 $G(F_{v'})/G(\mathcal{O}_{v'})$ 中的中性元。

4.2. Hitchin 纤维化的构造方法. — 首先复习一下 Hitchin 参模空间的定义。

定义 4.2.1. — Hitchin 总体空间 [23] 是下面的纤维化疏群 $\mathcal{M}$，它在一个 k 概形 S 处的取值是这样一个疏群 $\mathcal{M}(S)$，由全体二元组 (E,ϕ) 所组成，其中 E 是 $X\times S$ 上的一个 G 回旋子，ϕ 是一个截面

$$\phi \in \mathrm{H}^0(X\times S, \mathrm{ad}(E)\otimes_{\mathcal{O}_X} D)$$

这里 $\mathrm{ad}(E)$ 是 Lie 代数丛，是由 $\mathfrak{g}$（连同其上的伴随作用）经过 G 回旋子 E 的偏转而得到的。

4.2.2. — 这也相当于说 $\mathcal{M}(S)$ 是由 $h_{E,\phi} : X\times S \to [\mathfrak{g}_D/G]$ 组成的疏群。这个叠形是代数叠形 Bun_G 上的一个向量丛，Bun_G 就是 X 上的 G 回旋子的分类空间，这样一来，$\mathcal{M}$ 本身也是一个局部有限型的代数叠形。

4.2.3. — Chevalley 特征态射 $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ 诱导了一个态射

$$[\chi] : [\mathfrak{g}_D/G] \to \mathfrak{c}_D \quad 。$$

由此得到一个态射

$$f : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$$

这里对每个 k 概形 S，$\mathcal{A}(S)$ 是态射 $a : X\times S \to \mathfrak{c}_D$ 的疏群。这也相当于说 $\mathcal{A}$ 是 $\mathfrak{c}_D$ 在 X 上的整体截面的集合。如果愿意，我们也可以给 $\mathfrak{c}_D$ 赋予向量丛的结构（使用 Kostant 截面）。这样一来，$\mathcal{A}$ 上就有了一个有限维 k 向量空间的结构。这样的结构并不是很有用的，除非是为了简化维数的计算。

4.2.4. — 给了 D 的一个平方根 D'，使用 2.2.5 可以得到态射 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ 的一个截面 $\epsilon_{D'} : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$。这个截面本质上就是 Hitchin 在典型群的情形十分具体地构造出来的那个截面。我们将把它称为 Kostant-Hitchin 截面。实际上，Hitchin 使用的是共伴矩阵而不是 Kostant 截面。

4.2.5. — 把 D 写成 $D = \mathcal{O}_X(\sum_{v\in|X|} d_v v)$ 的形状，则集合 $\mathbf{c}_D(k)$ 可以等同于 $\mathbf{c}(F)$ 的一个有限子集。根据 [**57**, 1.3]，若 $a \in \mathbf{c}_D(k)$ 是正则半单且不迷向的，则纤维 $\mathcal{M}_a$ 的 k 值点的个数可以写成一些整体轨道积分之和

$$\sum_{\xi\in\ker^1(F,G)} \;\sum_{\gamma\in\mathfrak{g}^\xi(F)/\sim,\,\chi(\gamma)=a} \mathbf{O}_\gamma(1_D) \tag{4.2.6}$$

它是公式 1.13.2 的一部分。在 [**57**] 中，我们对这个公式的稳定化过程作出了一个几何学诠释，参照 1.13。对这个数点过程和稳定化过程的更系统的讨论将在第 8 章给出。

在本章随后的内容中，我们将对所涉及的几何问题作出更仔细的回顾。

[23] 译注：总体空间 =“espace total”。

4.3. Hitchin 纤维上的对称. — 与仿 Springer 纤维相同，Hitchin 纤维上的自然对称的构造方法也是基于引理 2.1.1。

4.3.1. — 对于 $\mathcal{A}$ 的任意 S 值点 a，均有一个态射 $h_a : X \times S \to [\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]$。令 $J_a = h_a^* J$ 是 $J \to [\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]$ 的逆像，考虑 $X \times S$ 上的 J_a 回旋子组成的 Picard 疏群 $\mathcal{P}_a(S)$。当 a 变动时，这就定义出一个在 $\mathcal{A}$ 上纤维化的 Picard 疏群 $\mathcal{P}$。

4.3.2. — 引理 2.2.1 中的同态 $\chi^* J \to I$ 对于每一个位于 a 之上的 S 值点 (E, ϕ) 都诱导了一个同态

$$J_a \to \mathrm{Aut}_{X \times S}(E, \phi) = h_{E,\phi}^* I \quad 。$$

这样一来，我们可以用任何 J_a 回旋子对 (E, ϕ) 进行偏转。由此定义出 Picard 疏群 $\mathcal{P}_a(S)$ 在疏群 $\mathcal{M}_a(S)$ 上的一个作用。让点 a 变动，则可以得到 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的一个作用，相对于基底 $\mathcal{A}$。

与仿 Springer 纤维的情形相同，我们将考虑 $\mathcal{M}$ 的开集 $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$，其中的点是这样的态射 $h_{E,\phi} : X \times S \to [\mathfrak{g}_D/G]$，它可以穿过开集 $[\mathfrak{g}_D^{\mathrm{reg}}/G]$。

命题 4.3.3. — $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个开集，它在 $\mathcal{A}$ 上的纤维都不是空的。进而，它在 $\mathcal{P}$ 的作用下是一个回旋子。

证明. — 对任意 $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$，2.2.5 中所构作的点 $[\epsilon]^{D'}(a)$ 都落在正则开集之中。这就表明态射 $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}} \to \mathcal{A}$ 的纤维都不是空的。从引理 2.2.1 可以推出，$\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ 是 $\mathcal{P}_a$ 作用下的一个回旋子。 □

4.3.4. — Kostant-Hitchin 截面4.2.4 $\epsilon_{D'} : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 可以穿过开集 $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$，因为 Kostant 截面 $\epsilon : \mathfrak{c} \to \mathfrak{g}$ 可以穿过 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$。这个截面就定义了 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{M}$ 的开集 $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$ 上的一个同构。

命题 4.3.5. — Picard 疏群 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{A}$ 上是平滑的。

证明. — 由于 J_a 是一个平滑交换群概形，故知 J_a 回旋子的形变障碍都落在群 $\mathrm{H}^2(\overline{X}, \mathrm{Lie}(J_a))$ 中。然而这个群是零，因为 $\overline{X}$ 是一个 1 维概形。 □

4.4. 一般线性群的情形. — 我们要分析 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{P}$ 在一个点 $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$ 上的纤维。首先考察一般线性群的情形：设 $G = \mathrm{GL}(r)$。在此情形下，可以借助谱曲线来描述 Hitchin 纤维，参照 Hitchin [**34**] 和 Beauville-Narasimhan-Ramanan [**5**]。其它典型群的情形可参考 [**34**] 和 [**59**]。

4.4.1. — 在 $G = \mathrm{GL}(r)$ 的情形，仿射空间 $\mathcal{A}$ 就是向量空间

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{H}^0(X, D^{\otimes i}) \quad 。$$

每一个点 $a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathcal{A}(\bar{k})$ 都在直线丛 D 的总体空间 Σ_D 里划出一条谱曲线 Y_a。这条曲线可由下面的方程给出

$$t^r - a_1 t^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r = 0 \quad 。$$

$\mathcal{A}$ 上有一个开集 $\mathcal{A}^{\heartsuit}$，它的几何点 $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$ 定义的谱曲线是既约的。根据 [**5**]，若 $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$，则 Hitchin 纤维 $\mathcal{M}_a$ 就是秩为 1 的无挠 $\mathcal{O}_{Y_a}$ 模层的疏群 $\overline{\mathrm{Pic}}(Y_a)$。纤

维 $\mathcal{P}_a$ 就是可逆 $\mathcal{O}_{Y_a}$ 模层的疏群 $\mathrm{Pic}(Y_a)$。 $\mathrm{Pic}(Y_a)$ 在 $\overline{\mathrm{Pic}}(Y_a)$ 上的作用就是通过张量积，且 $\mathrm{Pic}(Y_a)$ 是 $\overline{\mathrm{Pic}}(Y_a)$ 的一个开集。

4.4.2. — 若谱曲线 Y_a 是平滑的，则 $\mathrm{Pic}(Y_a)$ 和 $\overline{\mathrm{Pic}}(Y_a)$ 没有区别，也就是说 $\mathcal{P}_a$ 在 $\mathcal{M}_a$ 上的作用是简单传递的。进而，在这个情形下，$\mathcal{P}_a$ 的结构也是足够简单的。$\mathcal{P}_a$ 的连通分支群同构于 $\mathbb{Z}$（通过次数映射），因为 Y_a 是连通的。$\mathcal{P}_a$ 的单位分支是 Y_a 的 Jacobi 多样体（这是一个 Abel 多样体）在群 $\mathbf{G}_m$ 的平凡作用下的商。

4.4.3. — 设 $\xi : Y_a^\flat \to Y_a$ 是 Y_a 的正规化。逆像函子诱导了一个同态

$$\xi^* : \mathrm{Pic}(Y_a) \to \mathrm{Pic}(Y_a^\flat)$$

它又诱导一个同构

$$\pi_0(\mathrm{Pic}(Y_a)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathrm{Pic}(Y_a^\flat)) = \mathbb{Z}^{\pi_0(Y_a^\flat)} \quad 。$$

ξ^* 的核是一个交换仿射群，维数是

$$\delta_a = \dim \mathrm{H}^0(Y_a, \xi_* \mathcal{O}_{Y_a^\flat}/\mathcal{O}_{Y_a}) \quad 。$$

4.4.4. — 根据构造方法，Y_a 是某个平滑曲面中的一条曲线，特别的，它只有平面奇异点。于是根据 Altman, Iarrobino 和 Kleiman [**1**]，$\mathrm{Pic}(Y_a)$ 是 $\overline{\mathrm{Pic}}(Y_a)$ 的一个稠密开集。

下面我们将把上述讨论推广到一般的简约群上。

4.5. 分合曲线. — 研究 $\mathcal{P}_a$ 的基本工具是 Donagi 所构造的分合曲线。考虑卡氏图表

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \longrightarrow & \mathfrak{t}_D \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathfrak{c}_D \end{array}$$

底行的态射是把二元组 (x, a)（其中 $x \in X$ 且 $a \in \mathcal{A}$）对应到点 $a(x) \in \mathfrak{c}_D$。左边的态射是由 π 经过基变换得来的，从而是一个有限平坦态射，并且带有一个 W 的作用。

在每个点 $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ 处提取纤维，则可以得到 Donagi 的分合覆叠 $\pi_a : \widetilde{X}_a \to \overline{X}$。在下文中，我们将限于考虑这样的参数 a，它使 π_a 成为一个一般位平展覆叠。这些参数构成 $\mathcal{A}$ 的一个开集，可以用下面的方法来描述它。

考虑 $\mathfrak{c}_D^{\mathrm{rs}} \subseteq \mathfrak{c}_D$ 在 $X \times \mathcal{A}$ 中的逆像 U。由于态射 $U \to \mathcal{A}$ 是平滑的，故它的像是 $\mathcal{A}$ 的一个开集，以下将记为 $\mathcal{A}^\heartsuit$。它的 $\bar{k}$ 值点可以描述如下

$$\mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k}) = \{a \in \mathcal{A}(\bar{k}) \,|\, a(\overline{X}) \not\subseteq \mathfrak{D}_{G,D}\} \quad 。$$

若 $\deg(D) > 2g$，则开集 $\mathcal{A}^\heartsuit$ 不是空的。下界 $2g$ 并不是最优的，原始的情形就是次数为 $2g-2$ 的典范丛。证明留到 4.7.1，在那里我们将证明一个更强的结果。

引理 4.5.1. — *对任意几何点 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$，覆叠 $\pi_a : \widetilde{X}_a \to X \otimes_k \bar{k}$ 在一般位都是 W 作用下的回旋子。进而，$\widetilde{X}_a$ 是一条既约曲线。*

证明. — 根据$\mathcal{A}^\heartsuit$的定义，U和纤维$X\times\{a\}$的交集U_a是$\overline{X}$的一个非空开集。根据构造方法，π_a在这个稠密开集上是一个W回旋子。由于π_a是一个有限平坦态射，故知$\pi_{a*}\mathcal{O}_{\widetilde{X}_a}$是一个无挠$\mathcal{O}_{\overline{X}}$模层。若它是一般位既约的，则它是处处既约的。 □

4.5.2. — 对任意$a\in\mathcal{A}^\heartsuit$，均有平展位层[24]的一个单同态

$$J_a\to J_a^1=(\pi_{a,*}(\widetilde{X}_a\times_X T))^W$$

可由2.4.2导出，它的核是一个有限层，支集是有限的，并且可以明白地写出来。这个同态可用来控制J_a和$\mathcal{P}_a$，借助分合曲线。

环面T在$\widetilde{X}_a$上未必是平凡的。有时需要转到一个平展覆叠上以使它成为平凡的。正是因为这个缘故，我们需要引入分合曲线的若干变体。考虑一个连通有限平展Galois覆叠$\rho:\overline{X}_\rho\to\overline{X}$，Galois群为$\Theta_\rho$，并使回旋子$\rho_{\mathrm{Out}}$成为平凡的。于是有一个卡氏图表

(4.5.3)
$$\begin{tikzcd} \overline{X}_\rho\times\mathbf{t} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \overline{X}_\rho\times\mathbf{c} \arrow[d] \\ \mathfrak{t} \arrow[r, "\pi"'] & \mathfrak{c} \end{tikzcd}$$

竖向的箭头都是由ρ通过基变换得来的，从而是有限且平展的。对任意$a\in\mathcal{A}(\bar{k})$，利用纤维积

(4.5.4)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_{\rho,a} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\rho,a}"'] & \overline{X}_\rho\times\mathfrak{t}_D \arrow[d, "\pi_\rho"] \\ \overline{X} \arrow[r, "a"'] & \mathfrak{c}_D \end{tikzcd}$$

可以定义一个覆叠$\pi_{\rho,a}:\widetilde{X}_{\rho,a}\to\overline{X}$。于是有公式

$$J_1^a=\pi_{\rho,a,*}(\mathbf{T})^{\mathbf{W}\rtimes\Theta_\rho}$$

依照2.4.4。

命题 4.5.5. — 假设$\deg(D)>2g$。设Θ是同态$\rho_G^\bullet:\pi_1(\overline{X},\infty)\to\mathrm{Out}(\mathbf{G})$的像。再假设$\Theta$是一个有限群，阶数与特征互素。则对任意$a\in\mathcal{A}^\infty(\bar{k})$，均有

$$\mathrm{H}^0(\overline{X},J_a)=(Z\mathbf{G})^\Theta$$

和

$$\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathrm{Lie}(J_a))=\mathrm{Lie}(Z\mathbf{G})^\Theta\quad。$$

特别的，若在$\overline{X}$上，G的中心不包含分裂环面，则$\mathcal{P}_a$是一个Deligne-Mumford Picard叠形。

证明. — 这里的关键点是曲线$\widetilde{X}_{\rho,a}$是连通的，其证明将在4.6.1给出。现在先承认这一点。则有

$$\mathrm{H}^0(\overline{X},J_a^1)=\mathbf{T}^{\mathbf{W}\rtimes\Theta}$$

[24]译注：平展位层 =“faisceau pour la topologie étale”，是“平展拓扑下的层”的简略说法，放在句子中比较自然。又，“位”字来自“拓扑”的原意，即“位相”。

在 ZG 不包含分裂环面的条件下，这是一个非分歧的有限群。群 $\mathrm{H}^0(\overline{X}, J_a)$ 是它的一个子群。使用 $J \to J^1$ 的具体描述法 2.4.7 以及截面 a 与判别式的所有不可约分支都有交集的事实，可以证明

$$\mathrm{H}^0(\overline{X}, J_a) = (Z\mathbf{G})^{\Theta} \quad 。$$

由于这个描述在下文中不会被使用，我们将把证明细节留给读者。 □

4.5.6. — 不难引入一种定形子 [25] 以达成可表识性。设 $\infty \in X$ 是一个固定点，并设 $\mathcal{A}^\infty$ 是 $\mathcal{A}$ 的这样一个开集，它的点 a 在 ∞ 处是正则半单的。对任意 $a \in \mathcal{A}^\infty$，令 P_a^∞ 是下面的 Picard 叠形，它分类了这样一些 J_a 回旋子，其在 ∞ 处带着一个平凡化。

命题 4.5.7. — 函子 $\mathcal{P}^\infty$ 可以表识为 $\mathcal{A}^\infty$ 上的一个局部有限型平滑群概形。对任意 $a \in \mathcal{A}^\infty$，环面 $J_{a,\infty}$ 在 $\mathcal{P}_a^\infty$ 上有一个作用，是通过改变定形子来定义的，并且可以诱导出商叠形 $[\mathcal{P}_a^\infty / J_{a,\infty}]$ 和 $\mathcal{P}_a$ 之间的一个典范同构。

证明. — 第一部分来自于分合曲线 $\widetilde{X}_{\rho,a}$ 的平展覆叠的 Picard 概形的可表识性。第二部分是显然的。 □

4.6. 连通分合曲线. — 在 $\deg(D) > 2g$ 的前提条件下，可以证明，分合曲线 $\widetilde{X}_a$ 是连通的。然而我们在下文中还需要一个更强的连通性结果。考虑一个连通有限平展 Galois 覆叠 $\rho : \overline{X}_\rho \to \overline{X}$，它使回旋子 ρ_G 成为平凡的。于是可以按照 4.5.4 的方法构造出一个覆叠

$$\pi_{\rho,a} : \widetilde{X}_{\rho,a} \to \overline{X} \quad 。$$

命题 4.6.1. — 假设 $\deg(D) > 2g$。则对任意 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$，曲线 $\widetilde{X}_a$ 和 $\widetilde{X}_{\rho,a}$ 都是连通的。

证明. — 把 $\overline{X}$ 换成 $\overline{X}_\rho$，则只需证明分合曲线 $\widetilde{X}_a$ 在 G 分裂的时候是连通的。在这个情形下，我们可以使用 Debarre 的下述定理 [**17**, 定理 1.4]，它是 Bertini 定理的一个推广。

定理 4.6.2. — 设 M 是一个不可约多样体，$m : M \to \mathbf{P}$ 是由 M 到一些射影空间的乘积 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{n_r}$ 的一个态射。在每个 $\mathbf{P}^{n_i}$ 中，都指定了一个线性子空间 $L_i \subseteq \mathbf{P}^{n_i}$，且对任何子集 $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$，均有

$$\dim(p_I(m(M))) > \sum_{i \in I} \operatorname{codim}(L_i)$$

其中 p_I 是 $\mathbf{P}$ 到 $\prod_{i \in I} \mathbf{P}^{n_i}$ 上的投影。再假设 m 在 $\mathbf{P}$ 的一个开集 V 上是紧合的，并且 $L = L_1 \times \cdots \times L_r$ 包含在 V 之中。则 $m^{-1}(L)$ 是连通的。

把这个结果应用到我们的特殊情形上的方法是这样的。由于 G 是分裂的，$\mathfrak{c}_D$ 作为概形，它是一些直线丛 $D^{\otimes e_i}$ 在 $\overline{X}$ 上的一个纤维积。我们可以把每个直线丛 $D^{\otimes e_i}$ 紧化成一个射影直线丛

$$\overline{D}^{\otimes e_i} = \operatorname{Proj}_{\overline{X}}(\operatorname{Sym}_{\mathcal{O}_X}(D^{\otimes -e_i} \oplus \mathcal{O}_{X_\rho}))$$

[25] 译注：定形子 =“rigidificateur”。

它是一个射影$\bar{k}$曲面。令$Z_i = \overline{D}^{e_i} - D^{e_i}$是无穷远除子。根据前提条件$\deg(D) > 2g$，这个Proj上的可逆向量丛$\mathcal{O}(1)$是极丰沛的，并且诱导了该曲面的一个射影嵌入

$$\overline{D}^{\otimes e_i} \hookrightarrow \mathbf{P}^{n_i} \quad 。$$

$\mathbf{P} = \prod_{i=1}^r \mathbf{P}^{n_i}$的局部闭子概形$\prod_{i=1}^r D^{\otimes e_i}$是$V$的一个闭子概形，这里

$$V = \prod_{i=1}^r \mathbf{P}^{n_i} - \bigcup_{i=1}^r \Big(Z_i \times \prod_{j\neq i} \overline{D}^{\otimes e_j} \Big) \quad 。$$

$\mathfrak{c}_D$也是如此，它是$\prod_{i=1}^r D^{\otimes e_i}$的一个闭子概形。取$\mathfrak{t}_D$是Debarre定理中的不可约多样体$M$，它在$\mathfrak{c}_D$上是有限的，从而$M$的维数是$r+1$，并且合成态射$m : M \to V$是一个紧合态射。

a的分量$a_i \in \mathrm{H}^0(\overline{X}, D^{\otimes e_i})$定义了$\mathbf{P}^{n_i}$的一个超平面$L_i$，因为

$$(a_i, 1) \in \mathrm{H}^0(\mathbf{P}^{n_i}, \mathcal{O}(1)) = \mathrm{H}^0(\overline{X}, D^{\otimes e_i}) \oplus \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}_X)$$

它与曲面$\overline{D}^{\otimes e_i}$的交集没有碰到无穷远除子$Z_i$，换句话说，这个交集包含在开曲面$D^{\otimes e_i}$之中。由于$L_i \cap Z_i = \emptyset$，故知乘积$L = \prod_{i=1}^r L_i$包含在开集$V$之中。

由于$\widetilde{X}_a = m^{-1}(L)$，故只需对每个子集$I \subseteq \{1, \dots, n\}$验证

$$\dim(p_I(m(M))) > \sum_{i\in I} \mathrm{codim}(L_i) \quad 。$$

但很容易验证$p_I(m(M))$的维数就等于$\sharp I + 1$，这就完成了引理的证明。 □

4.7. 连通平滑分合曲线. — **我**们现在考察一个开集$\mathcal{A}^{\diamondsuit}$，它上面的那些纤维$\mathcal{M}_a$都具有充分简单的形状。这个开集是这样定义的。一个点$a \in \mathcal{A}(\bar{k})$属于这个开集当且仅当截面$h_a : \overline{X} \to \mathfrak{c}_D$与除子$\mathfrak{D}_D$横截交叉。这里的$\mathfrak{D}_D$是指$\mathfrak{c}_D$的这样一个除子，它是用可逆向量丛$D$所对应的$\mathbf{G}_m$回旋子$L_D$对除子$\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{c}$进行偏转而得到的。在4.7.3中将可看到，这个条件相当于要求分合曲线是平滑的。

命题 4.7.1. — *若*$\deg(D) > 2g$，*则开集*$\mathcal{A}^{\diamondsuit}$*不是空的。*

证明可以完全模仿Zariski对于Bertini定理的证明。首先证明一个引理。

引理 4.7.2. — *假设*$\deg(D) > 2g$，*其中*g*是*X*的亏格。则对任意*$x \in \overline{X}(\bar{k})$*及其定义理想*$\mathfrak{m}_x$*。映射*

$$\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathfrak{c}) \to \mathfrak{c} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \mathcal{O}_{\overline{X}}/\mathfrak{m}_x^2 \quad 。$$

都是满的。这里是把向量丛$\mathfrak{c}$*看成是一个*r*秩局部自由*$\mathcal{O}_X$*模层。*

证明. — 抬升到有限平展覆叠$\rho : X_\rho \to X$上，$\mathfrak{c}$可以同构于一个直和

$$\rho^*\mathfrak{c} = \bigoplus_{i=1}^r \rho^* D^{\otimes e_i}$$

其中 e_i 的定义见 1.2，特别的，它们都是大于等于 1 的整数。由于 $\mathfrak{c}$ 是 $\rho_*\rho^*\mathfrak{c}$ 的一个直和因子，故只需证明下面的映射是满的

$$\mathrm{H}^0(\overline{X}', \rho^*\mathfrak{c}) \to \rho^*\mathfrak{c} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \mathcal{O}_{\overline{X}}/\mathfrak{m}_x^2 \quad 。$$

并且只需证明对每个直和因子 $\rho^* D^{\otimes e_i}$ 来证明这种满射性。

可以进而假设 X_ρ 是几何连通的。令 g' 是它的亏格。于是有 $2g'-2 = n(2g-2)$，其中 n 是 ρ 的次数。上述满射性可以从下面这个不等式导出

$$\deg(D^{\otimes e_i}) > 2ng = (2g'-2) + 2n \quad 。$$

引理由此得证。 □

证明. — 回到命题 4.7.1 的证明。在 $\mathfrak{D}_{G,D}$ 中，我们有一个平滑开集 $\mathfrak{D}_D - \mathfrak{D}_D^{\mathrm{sing}}$，它的闭补集 $\mathfrak{D}_D^{\mathrm{sing}}$ 在 $\mathfrak{c}_D$ 中的余维数是 2 。

考虑 $(\mathfrak{D}_{G,D} - \mathfrak{D}_{G,D}^{\mathrm{sing}}) \times \mathcal{A}$ 的一个子概形 Z_1，它是由这样的二元组 (c,a) 所组成的，截面 $a(\overline{X})$ 经过了点 c 并且与除子 $\mathfrak{D}_G$ 在这一点的相交重数至少是 2 。根据上述引理

$$\dim(Z_1) \leq \dim(\mathcal{A}) - 1$$

如此一来投影 $Z_1 \to \mathcal{A}$ 不是映满的。

考虑 $\mathfrak{D}_G^{\mathrm{sing}} \times \mathcal{A}$ 的一个子概形 Z_2，它是由这样的二元组 (c,a) 所组成的，截面 $a(\overline{X})$ 经过了点 c。再次使用这个引理，则有一个维数估计

$$\dim(Z_2) \leq \dim(\mathcal{A}) - 1$$

如此一来 Z_1 和 Z_2 的像的并集可以包含在 $\mathcal{A}$ 的一个真闭子概形之中。从而可以找到一个点 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit$，使得截面 $a(\overline{X})$ 与判别式的奇异谷 $\mathfrak{D}_{G,D}^{\mathrm{sing}}$ 没有交集，同时与这个除子的平滑区域横截交叉。 □

引理 4.7.3. — *点 $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ 落在开集 $\mathcal{A}^\diamondsuit(\bar{k})$ 中的充分必要条件是，分合曲线 $\widetilde{X}_a$ 是平滑的。*

证明. — 假设 $a \in \mathcal{A}^\diamondsuit(\bar{k})$，也就是说，它在 $\mathfrak{c}_D$ 中的截面 $a(\overline{X})$ 与除子 $\mathfrak{D}_{G,D}$ 横截交叉。下面证明该截面在覆叠 $X_\rho \times \mathfrak{t}_D$ 上的逆像是平滑的。在除子 $\mathfrak{D}_{G,D}$ 之外，该覆叠是平展的，从而没有什么需要验证的。$a(\overline{X})$ 在 $\mathfrak{c}_D$ 中与除子 $\mathfrak{D}_{G,D}$ 横截交叉这个条件表明，它与 $\mathfrak{D}_{G,D}$ 的奇异谷 $\mathfrak{D}_{G,D}^{\mathrm{sing}}$ 没有交集。一个二元组 $(v,x) \in \mathfrak{t}_D(\bar{k})$ 是由一个点 $v \in X(\bar{k})$ 和 $\mathfrak{t}_D$ 在 v 处的纤维中的一个点 x 所组成的。由于在 v 上群 G 是分裂的，因而可以谈论 $\mathfrak{t}_D$ 在 v 处的纤维中的根超平面这种东西。若 $(v,x) \in \mathfrak{t}_D(\bar{k})$ 位于 $a(\overline{X})$ 和 $\mathfrak{D}_{G,D} - \mathfrak{D}_{G,D}^{\mathrm{sing}}$ 的一个交叉点之上，则 x 落在唯一一个根超平面之中。从而可以归结到半单秩为 1 的群上。在此情形下，直接计算表明，(v,x) 处的形式完备化 $\widetilde{X}_a$ 具有 $\bar{k}[[\epsilon_v]][t]/(t^2 - \epsilon_v^m)$ 的形状，其中 ϵ_v 是一个 $\overline{X}$ 在点 v 处的一个齐化元，m 是 $a(\overline{X})$ 和 $\mathfrak{D}_{G,D}$ 在该点处的相交重数。在横截交叉的情形，$m=1$，这表明 $\widetilde{X}_a$ 在 $(\tilde{v},x)$ 处是平滑的。

现在假设 $a \notin \mathcal{A}^\diamondsuit(\bar{k})$。若 $a(\overline{X})$ 与 $\mathfrak{D}_{G,D}$ 的平滑区域相交在一个重数至少是 2 的点上，则上述计算表明，$\widetilde{X}_a$ 不是平滑的。现在假设 $a(\overline{X})$ 与奇异谷 $\mathfrak{D}_{G,D}^{\mathrm{sing}}$ 相交在一个点 $v \in \overline{X}$ 处。假设 $\widetilde{X}_a$ 在点 $(v,x) \in \mathfrak{t}_D(\bar{k})$（位于 v 之上）处是平滑的。则点 x 至少属

于两个不同的根超平面，如此一来局部单值化群 $\pi_a^\bullet(I_v)$（参照 3.7.3）将包含两个不同的对合。但这是不可能的，因为在 k 的特征不整除 $\mathbf{W}$ 的阶这个前提条件下，局部单值化群 $\pi_a^\bullet(I_v)$ 是一个循环群。 □

推论 4.7.4. — 设 $\overline{X}_{\bar\rho} \to \overline{X}$ 是一个连通有限平展 Galois 覆叠，并使 G 分裂。假设 $\deg(D) > 2g$。则对任意 $a \in \mathcal{A}^\diamondsuit(\bar k)$，曲线 $\widetilde{X}_{\bar\rho,a}$ 都是不可约的。

证明. — 根据 4.6.1，$\widetilde{X}_{\rho,a}$ 是连通的。由于 $\widetilde{X}_a$ 是平滑的，故其平展覆叠 $\widetilde{X}_{\rho,a}$ 也是如此。从而它是不可约的。 □

下面是这个结果的 Galois 式描述法。设 U 是 $\overline{X}$ 的满足下述条件的最大开集，它使覆叠 $\widetilde{X}_a \to \overline{X}$ 在其上成为一个 W 回旋子。设 ∞ 是 U 的一个几何点，$\tilde\infty$ 是 $\widetilde{X}_a$ 的一个几何点，位于 ∞ 之上。与 1.3.6 的情况相同，我们有一个同态

$$\pi_a^\bullet : \pi_1(U, \infty) \to \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$$

位于

$$\rho_A^\bullet : \pi_1(\overline{X}, \infty) \to \mathrm{Out}(\mathbf{G})$$

之上。令 Θ 是同态 $\rho_G^\bullet$ 的像。

推论 4.7.5. — 若 $a \in \mathcal{A}^\diamondsuit(\bar k)$，则 $\pi_a^\bullet$ 的像是 $\mathbf{W} \rtimes \Theta$。

定义 4.7.6. — Abel $\bar k$ 叠形是指一个 Abel $\bar k$ 多样体除以某个可对角化群的平凡作用后的商。

Abel 叠形的典型例子是 $\bar k$ 上一条连通平滑射影曲线上的次数 1 的可逆向量丛的分类叠形。若这条曲线上带有一个有限群的作用，且群的阶与特征互素，则其 Prym 叠形的单位分支也是 Abel 叠形。

命题 4.7.7. — 对任意 $a \in \mathcal{A}^\diamondsuit(\bar k)$，开集 $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ 都是整个 $\mathcal{M}_a$，从而 $\mathcal{M}_a$ 就是一个 $\mathcal{P}_a$ 作用下的回旋子。$\mathcal{P}_a$ 的单位分支是一个 Abel 叠形。

证明. — 第一部分的证明参考 [**57**, 命题 4.2]。

考虑一个连通有限平展 Galois 覆叠 $\overline{X}_\rho \to \overline{X}$，Galois 群为 Θ，并使 ρ_G 成为平凡的。我们已经构造了分合曲线 $\widetilde{X}$ 的一个平展覆叠 $\widetilde{X}_{\rho,a}$，它是一条连通平滑射影曲线，参照 4.6.1。命题的第二部分是由于 $\widetilde{X}_{\rho,a}$ 上的 $\mathbf{T}$ 回旋子叠形的单位分支是一个 Abel 叠形。 □

根据 4.5.5，若 G 的中心不包含在 $\overline{X}$ 上分裂的环面，则 $\mathcal{P}_a$ 的单位分支进而是一个 Deligne-Mumford 叠形。

4.7.8. — 对任意 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar k)$，我们已经知道 $\mathcal{P}_a$ 的惯性群可以等同于 $Z\mathbf{G}^\Theta$。在 4.10.4 中还将看到，当 $a \in \mathcal{A}^\diamondsuit(\bar k)$ 时，连通分支群 $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 可以等同于 $Z\hat{\mathbf{G}}^\Theta$。可以看到，若 G_1 和 G_2 是相互对偶的，并且 $a \in \mathcal{A}_{G_1}^\diamondsuit(\bar k) = \mathcal{A}_{G_2}^\diamondsuit(\bar k)$，则 $\mathcal{P}_{G_1,a}$ 的惯性群同构于 $\mathcal{P}_{G_2,a}$ 的连通分支群，反过来说也对。

4.8. 整体 Néron 范型. — 设 $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$，且 U 是开集 $\mathfrak{c}_D^{\mathrm{rs}}$ 在态射 $a : \overline{X} \to \mathfrak{c}_D^{\mathrm{rs}}$ 下的逆像。

与局部情形3.8类似，为了分析 $\overline{X}$ 上的 J_a 回旋子所组成的Picard叠形 $\mathcal{P}_a$ 的结构，我们可以使用 J_a 的Néron范型 $J_a^\flat$。这是 $\overline{X}$ 上的一个有限型平滑群概形，且带有一个同态 $J_a \to J_a^\flat$，在 U 上是一个同构。下面这个条件是它的本征性质：对于 $\overline{X}$ 上的任意一个有限型平滑群概形 J'，和一个同态 $J_a \to J'$，设它在 U 上是一个同构，则有唯一一个同态 $J' \to J_a^\flat$，使得那个自然的三角是交换的。Néron范型的存在性是Bosch, Lutkebohmer 和 Raynaud 的一个结果，参照 [**10**, 第十章, 命题 6]。有限型 Néron 范型是他们所构造的局部有限型 Néron 范型的一个开子概形。

这个整体Néron范型可以从一族局部Néron范型得到，参照3.8，方法如下。对任意 $v \in \overline{X} \setminus U$，令 $\overline{X}_v$ 是 $\overline{X}$ 在 v 处的完备化，$\overline{X}_v^\bullet = \overline{X}_v \setminus \{v\}$。考虑环面 $J_a|_{\overline{X}_v^\bullet}$ 的Néron范型。把那些点 $v \in \overline{X} \setminus U$ 处的Néron范型与环面 $J_a|_U$ 黏合起来，就可以得到一个 $\overline{X}$ 上的平滑交换群概形 $J_a^\flat$，连同一个群概形的同态 $J_a \to J_a^\flat$。

与3.8.2的情况相同，可以借助分合曲线 $\widetilde{X}_a$ 的正规化 $\widetilde{X}_a^\flat$ 来描述 $J_a^\flat$。W 在 $\widetilde{X}_a$ 上的作用诱导了此群在 $\widetilde{X}_a^\flat$ 上的一个作用。令 $\pi_a^\flat : \widetilde{X}_a^\flat \to \overline{X}$ 是映到 $\overline{X}$ 的自然态射。以下就是局部命题3.8.2的整体推论。

推论 4.8.1. — *$J_a^\flat$ 可以等同于 W 在 $\prod_{\widetilde{X}_a^\flat/\overline{X}}(T \times_{\overline{X}} \widetilde{X}_a^\flat)$ 上的对角线作用的不动点子群。*

考虑 $J_a^\flat$ 回旋子的Picard疏群 $\mathcal{P}_a^\flat$。群概形的同态 $J_a \to J_a^\flat$ 诱导了Picard疏群的一个同态 $\mathcal{P}_a \to \mathcal{P}_a^\flat$。这个同态本质上就是下述一般事实的一个实现：代数闭域上的代数群都可以写成一个Abel多样体经过一个仿射代数群的扩充，参照 [**66**]。下面的证明方法是受了Raynaud的一个方法 [**64**] 的启发而得到的。

命题 4.8.2. — *(1) 同态 $\mathcal{P}_a(\bar{k}) \to \mathcal{P}_a^\flat(\bar{k})$ 是本质映满的。*

(2) $\mathcal{P}_a^\flat$ 的单位分支 $(\mathcal{P}_a^\flat)^0$ 是一个Abel叠形。

(3) $\mathcal{P}_a \to \mathcal{P}_a^\flat$ 的核 $\mathcal{R}_a$ 是一些有限型仿射代数群 $\mathcal{R}_v(a)$ 的乘积，这些 $\mathcal{R}_v(a)$ 的定义出现在引理3.8.1中。它们在有限个点 $v \in |\overline{X}|$ 之外都是平凡的。

证明. — 1. 根据Néron范型的构造方法，同态 $J_a \to J_a^\flat$ 是单的（作为 $\overline{X}$ 上的平展位Abel群层的同态）。考虑正合序列

$$1 \to J_a \to J_a^\flat \to J_a^\flat/J_a \to 1 \tag{4.8.3}$$

商群 $J_a^\flat/J_a$ 的支集落在有限闭集 $\overline{X} \setminus U$ 上，并且由此可以导出上同调的长正合序列。由于 $\mathrm{H}^1(\overline{X}, J_a^\flat/J_a) = 0$，故知同态

$$\mathrm{H}^1(\overline{X}, J_a) \to \mathrm{H}^1(\overline{X}, J_a^\flat)$$

是满的。

2. 设 $\widetilde{X}_a$ 是覆叠 $\mathfrak{t}_D \to \mathfrak{c}_D$ 在态射 $h_a : \overline{X} \to \mathfrak{c}_D$ 下的逆像。再设 $\widetilde{X}_a^\flat$ 是 $\widetilde{X}_a$ 的正规化。根据命题3.8.2，Néron范型 $J_a^\flat$ 只依赖于覆叠 $\widetilde{X}_a^\flat$。精确地说，$J_a^\flat$ 是由 W 在Weil限制 $\prod_{\widetilde{X}_a^\flat/\overline{X}}(T \times_{\overline{X}} \widetilde{X}_a^\flat)$ 上的对角线作用的不动点所组成的。由此可知，在只差一个谐构的意义下，$\mathcal{P}_a^\flat$ 是 $\widetilde{X}_a^\flat$ 上的 T 回旋子疏群的一个因子，而后者又同构

于 r 个 $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}_a^\flat)$ 的乘积。由于 $\widetilde{X}_a^\flat$ 是一个未必连通的平滑射影曲线，故知 $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}_a^\flat)$ 的单位分支是一些 Jacobi 多样体的乘积在一些 $\mathbf{G}_m$ 的乘积的平凡作用下给出的商。

3. 最后一部分也是来自上同调的长正合序列（从短正合序列 (4.8.3) 导出）。事实上，只要把核定义为这样一个范畴，其对象是一个 J_a 回旋子连同它导出的 $J_a^\flat$ 回旋子上的一个平凡化，我们就可以忘记长正合序列中 H^0 项。

□

考虑一个连通有限平展 Galois 覆叠 $\rho:\overline{X}_\rho\to\overline{X}$，Galois 群为 Θ，并使回旋子 ρ_G 成为平凡的。对任意 $a\in\mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$，使用 4.5.4 的方法，均可以得到一个有限平坦覆叠 $\pi_{\rho,a}:\widetilde{X}_{\rho,a}\to\overline{X}$，它是一般位平展 Galois 的，Galois 群为 $\mathbf{W}\rtimes\Theta$。设 $\widetilde{X}_{\rho,a}^\flat$ 是 $\widetilde{X}_{\rho,a}$ 的正规化，它也带有一个 $\mathbf{W}\rtimes\Theta$ 的作用。设 $\pi_{\rho,a}^\flat$ 是它到 $\overline{X}$ 上的投影。则可以给出 $J_a^\flat$ 的一个 Galois 式描述法

$$J_a^\flat=\prod_{\widetilde{X}_{\rho,a}^\flat/\overline{X}}(\mathbf{T}\times\widetilde{X}_{\rho,a}^\flat)^{\mathbf{W}\rtimes\Theta}$$

引理可由此推出。

引理 4.8.4. — 设 $C_{\tilde{a}}$ 是 $\widetilde{X}_{\rho,a}$ 的一个连通分支，$W_{\tilde{a}}$ 是由 $\mathbf{W}\rtimes\Theta$ 中把 $C_{\tilde{a}}$ 映到自身的那些元素所组成的子群。若 $\mathbf{T}^{W_{\tilde{a}}}$ 是有限且非分歧的，则 $\mathcal{P}_a^\flat$ 是一个 Deligne-Mumford Abel 叠形。

4.9. 不变量 δ_a. — 与 $a\in\mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ 相关联的一个重要的数值不变量就是 δ 不变量.

4.9.1. — 对任意 $a\in\mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$，考虑下面的核

$$\mathcal{R}_a:=\ker[\mathcal{P}_a\longrightarrow\mathcal{P}_a^\flat]\tag{4.9.2}$$

它分类了 X 上的这样一些 J_a 回旋子，在其所导出的 $J_a^\flat$ 回旋子上带有一个平凡化。这是一个有限型仿射代数群，并可分解为乘积

$$\mathcal{R}_a=\prod_{v\in\overline{X}\smallsetminus U}\mathcal{R}_v(a)$$

其中 $\mathcal{R}_v(a)$ 是 3.8.1 中所定义的群。现在定义不变量 δ_a 就是 $\mathcal{R}_a$ 的维数。

4.9.3. — 按照 4.5.6 中的办法取定一个定形子后，可以定义一个平滑交换代数群 P_a^0，并且它可以映满单位分支 $\mathcal{P}_a^0$。根据 Chevalley 结构定理，我们有一个典范正合序列

$$1\to R_a\to P_a^0\to A_a\to 1$$

其中 A_a 是一个 Abel 多样体，R_a 是一个连通仿射群。由于同态 $R_a\to\mathcal{P}_a^{\flat,0}$ 必然是平凡的，故我们有一个满同态 $A_a\to\mathcal{P}_a^{\flat,0}$。在 4.8.4 的前提条件下，这实际上是一个平展的谐构。由此得到公式

$$\dim(A_a)=d-\delta_a\quad。$$

在这个情形下，而且仅在这个情形下，可以合理地把 δ_a 称为 $\mathcal{P}_a$ 的仿射部分的维数。

不变量 δ_a 可以写成局部 δ 不变量的和

$$\delta_a := \dim(\mathcal{R}_a) = \sum_{v\in\overline{X}\smallsetminus U} \delta_v(a) \quad 。$$

把 4.8.2 和局部对称群的维数公式 3.8.3 结合起来，就得到一个关于整体 δ 不变量的公式。

推论 4.9.4. — 对任意 $a\in\mathcal{A}(\bar{k})$，上面定义的不变量 δ_a 总等于

$$\delta_a = \dim \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathfrak{t}\otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} (\pi^{\flat}_{a*}\mathcal{O}_{\widetilde{X}^{\flat}_a}/\pi_{a*}\mathcal{O}_{\widetilde{X}_a}))^W \quad 。$$

我们还有另一个公式，它可以把整体 δ 不变量用判别式函数和局部单值化不变量 (出现在 Bezrukavnikov 公式中) 表达出来。

现在判别式 $\mathfrak{D}_G$ 是 $\mathfrak{c}$ 上的一个齐次多项式，次数为 $\sharp\,\Phi$，即根系 Φ 中的根的个数。由此可知，对任意 $a\in\mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$，除子 $a^*\mathfrak{D}_{G,D}$ 都线性等价于 $D^{\otimes(\sharp\Phi)}$，如此一来

$$\deg(a^*\mathfrak{D}_{G,D}) = \sharp\,\Phi\deg(D) \quad 。$$

写出

$$a^*\mathfrak{D}_{G,D} = d_1v_1+\cdots+d_nv_n$$

其中 $v_1,\ldots,v_n$ 是 $\overline{X}$ 中的一些两两不同的点，d_i 是 v_i 的重数。对任意 $i=1,\ldots,n$，令 c_i 是 $J^{\flat}_a$ 在点 v_i 处的环面秩升降。则下述公式可由 3.7.5 立得。

命题 4.9.5. — 我们有等式

$$2\delta_a = \sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i) = \sharp\,\Phi\deg(D) - \sum_{i=1}^{n} c_i \quad 。$$

4.10. 群 $\pi_0(\mathcal{P}_a)$. — 在本节中，我们要描写一下 $\mathcal{P}_a$ 的连通分支群，遵循 Tate-Nakayama 对偶的模式。为此需要先作出一些选择，并且规定一些记号。

选定一点 $\infty\in X(\bar{k})$。考虑 $\mathcal{A}\otimes_k\bar{k}$ 的一个开集 $\mathcal{A}^{\infty}$，由这样的点 $a\in\mathcal{A}(\bar{k})$ 所组成，它使 $a(\infty)\in\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}_D$。这是 $\bar{\mathcal{A}}^{\heartsuit}$ 的一个开子概形。若 ∞ 定义在 k 上，则开集 $\mathcal{A}^{\infty}$ 也定义在 k 上。

选定一个点 $a\in\mathcal{A}^{\infty}(\bar{k})$。令 U 是 $\overline{X}$ 的满足下述条件的最大开集，它使得分合覆叠 $\widetilde{X}_a\to\overline{X}$ 在其上是平展的。根据构造方法，$\infty\in U$。假设 G 是由下面这个连续同态所定义的

$$\rho^{\bullet}_G:\pi_1(X,\infty)\to\mathrm{Out}(\mathbf{G}) \quad 。$$

一旦选定了分合曲线 $\widetilde{X}_a$ 的一个位于 ∞ 之上的几何点 $\tilde{\infty}$，就可以按照 1.4.4 的方法得到一个连续同态 $\pi^{\bullet}_{\tilde{a}}$，它可以嵌入下面的交换图表

(4.10.1)
$$\begin{tikzcd} \pi_1(U,\infty) \arrow[r, "\pi^{\bullet}_{\tilde{a}}"] \arrow[d] & \mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G}) \arrow[d] \\ \pi_1(\overline{X},\infty) \arrow[r, "\rho^{\bullet}_G"'] & \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \end{tikzcd}$$

其中 $\tilde{a}=(a,\tilde{\infty})$。令 $W_{\tilde{a}}$ 是 $\pi_{\tilde{a}}^{\bullet}$ 在 $\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 中的像，$I_{\tilde{a}}$ 是 $\pi_1(U,\infty)\to\pi_1(\overline{X},\infty)$ 的核的像。上述图表的交换性表明 $I_{\tilde{a}}\subseteq\mathbf{W}$。

现在设 J_a^0 是 J_a 的单位分支构成的子群概形。考虑 $\overline{X}$ 上的 J_a^0 回旋子的 Picard 叠形 $\mathcal{P}'_a$。层同态 $J_a^0\to J_a$ 诱导了一个 Picard 叠形的同态 $\mathcal{P}'_a\to\mathcal{P}_a$。

引理 4.10.2. — 同态 $\mathcal{P}'_a\to\mathcal{P}_a$ 是满的，并且核是有限的。它所导出的同态 $\pi_0(\mathcal{P}'_a)\to\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 也是如此。

证明. — 我们有层的短正合序列

$$0\to J_a^0\to J_a\to\pi_0(J_a)\to 0$$

其中 $\pi_0(J_a)$ 是一个层，支集是有限的，并且它在一点 $v\in\overline{X}$ 处的茎条就是 J_a 在该点处的纤维 $J_{a,v}$ 的连通分支群 $\pi_0(J_a)_v$。由此可以导出一个长正合序列

$$\mathrm{H}^0(\overline{X},\pi_0(J_a))\to\mathrm{H}^1(\overline{X},J_a^0)\to\mathrm{H}^1(\overline{X},J_a)\to\mathrm{H}^1(\overline{X},\pi_0(J_a))=0\quad。$$

最后一项等于零是因为 $\pi_0(J_a)$ 的支集落在一个零维概形上。由此可以推出 $\mathcal{P}'_a\to\mathcal{P}_a$ 是满的，并且核等于 $\mathrm{H}^0(\overline{X},\pi_0(J_a))$。这个核的有限性来自 $\pi_0(J_a)$ 的诸茎条的有限性。与 $\pi_0(\mathcal{P}'_a)\to\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 有关的部分可由此立得。 □

和 Abel 群 $\pi_0(\mathcal{P}'_a)$ 和 $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 相比，把与它们相对偶的可对角化群写出来是比较容易做到的。我们有一个可对角化群的含入

$$\pi_0(\mathcal{P}_a)^*\subseteq\pi_0(\mathcal{P}'_a)^*\quad。$$

其中

$$\begin{aligned}\pi_0(\mathcal{P}_a)^* &= \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(\mathcal{P}_a)])\\ \pi_0(\mathcal{P}'_a)^* &= \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(\mathcal{P}'_a)])\quad。\end{aligned}$$

这里的记号 $(\_)^*$ 表示有限型 Abel 群和 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上的有限型可对角化群之间的对偶。

命题 4.10.3. — 对任意 $\tilde{a}=(a,\tilde{\infty}_{\bar{\rho}})$ 如上，均有可对角化群的同构

$$\pi_0(\mathcal{P}'_a)^*=\hat{\mathbf{T}}^{W_{\tilde{a}}}$$

及

$$\pi_0(\mathcal{P}_a)^*=\hat{\mathbf{T}}(I_{\tilde{a}},W_{\tilde{a}})$$

其中 $\hat{\mathbf{T}}(I_{\tilde{a}},W_{\tilde{a}})$ 是 $\hat{\mathbf{T}}^{W_{\tilde{a}}}$ 的一个子群，由这样的元素 κ 所组成，它使得 $W_{\tilde{a}}\subseteq(\mathbf{W}\rtimes\Theta_{\bar{\rho}})_\kappa$ 并且 $I_{\tilde{a}}\subseteq\mathbf{W}_{\mathbf{H}}$，这里的 $\mathbf{W}_{\mathbf{H}}$ 是指 κ 在 $\hat{\mathbf{G}}$ 中的中心化子的单位分支的 Weyl 群。

证明. — 根据 [**57**, 推论 6.7]，存在一个典范同构

$$(\mathbf{X}_*)_{W_{\tilde{a}}}\longrightarrow\pi_0(\mathcal{P}'_a)$$

从 $\mathbf{X}_*=\mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m,\mathbf{T})$ 的 $W_{\tilde{a}}$ 余不变量群映到 $\mathcal{P}'_a$ 的连通分支群。这件事本质上是 Kottwitz 的一个引理 [**42**, 引理 2.2] 的特殊情形。对偶的，存在一个可对角化群的同构

$$\pi_0(\mathcal{P}'_a)^*=\hat{\mathbf{T}}^{W_{\tilde{a}}}$$

其中 $\hat{\mathbf{T}}$ 是 $\mathbf{T}$ 的对偶 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 环面。

令 $U=a^{-1}(\mathfrak{c}_D^{\mathrm{rs}})$。与 4.10.2 的证明中的情况一样，存在一个正合序列

$$\mathrm{H}^0(\overline{X},\pi_0(J_a))\to\pi_0(\mathcal{P}'_a)\to\pi_0(\mathcal{P}_a)\to 0$$

其中 $\mathrm{H}^0(\overline{X},J_a/J_a^0)=\bigoplus_{v\in\overline{X}\smallsetminus U}\pi_0(J_{a,v})$， $\pi_0(J_{a,v})$ 则是指 J_a 在 v 处的纤维的连通分支群。对任意 $v\in\overline{X}\smallsetminus U$，均有一个相应的局部正合序列

$$\pi_0(J_{a,v})\to\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a^0))\to\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a))\to 0$$

与整体正合序列相容。考虑对偶的可对角化群正合序列

$$0\to\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a))^*\to\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a^0))^*\to\pi_0(J_{a,v})^*$$

于是子群

$$\pi_0(\mathcal{P}_a)^*\subseteq\pi_0(\mathcal{P}'_a)^*$$

等于诸子群（对任意 $v\in\overline{X}\smallsetminus U$）

$$\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a))^*\subset\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a^0))^*$$

的逆像的交集。从而命题可由 3.9.2 推出。 □

推论 4.10.4. — 对于 $a\in\mathcal{A}^{\diamondsuit}(\bar{k})$，总有 $\pi_0(\mathcal{P}_a)=Z\hat{\mathbf{G}}^{\Theta}$。

证明. — 令 $\tilde{a}=(a,\tilde{\infty})$，已经知道 $W_{\tilde{a}}=\mathbf{W}\rtimes\Theta$ 且 $I_{\tilde{a}}=\mathbf{W}$，参照 4.7.5。从而由 4.10.3 就可以推出结论。 □

4.10.5. — 设 $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$ 是由这样的点 $a\in\mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$ 所组成集合，它使 $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 成为有限的。根据 4.10.3，这也等价于 $\hat{\mathbf{T}}^{W_{\tilde{a}}}$ 的有限性。我们将在 5.4.7 中证明，$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$ 是 $\mathcal{A}^{\heartsuit}$ 的一个开集 $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ 上的 $\bar{k}$ 值点的集合。

4.11. 自同构. — 设 $(E,\phi)\in\mathcal{M}(\bar{k})$，像为 $a\in\mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$。我们将使用 a 来给出自同构群 $\mathrm{Aut}(E,\phi)$ 的界。设 U 是 $\overline{X}$ 的这样一个开集，它使得 a 在其上是正则半单的。

考虑自同构层 $\underline{\mathrm{Aut}}(E,\phi)$，它在一个 $\overline{X}$ 概形 S 上的取值就是群 $\mathrm{Aut}((E,\phi)|_S)$。这个层可以表识为群概形 $I_{(E,\phi)}=h_{(E,\phi)}^*I$，这是 $\mathfrak{g}$ 上的中心化子 I 在态射 $h_{(E,\phi)}:\overline{X}\to[\mathfrak{g}_D/G]$ 下的逆像。$I_{(E,\phi)}$ 在开集 U 上的限制是一个环面，然而在 $\overline{X}$ 上，群概形 $I_{(E,\phi)}$ 不是平滑的，甚至也不是平坦的。不过我们还是可以考虑 [**10**] 中所说的平滑化过程。根据这个理论，存在唯一一个在 $\overline{X}$ 上平滑的群概形 $I_{(E,\phi)}^{\mathrm{lis}}$，使得对任意平滑 $\overline{X}$ 概形 S，均有

$$\mathrm{Aut}((E,\phi)|_S)=\mathrm{Hom}_X(S,I_{(E,\phi)}^{\mathrm{lis}})\quad。$$

本格态射 [26] $I_{(E,\phi)}^{\mathrm{lis}}\to I_{(E,\phi)}$ 在开集 U 上是一个同构。注意到 $I_{(E,\phi)}^{\mathrm{lis}}$ 的本征性质可以给出等式

$$\mathrm{Aut}(E,\phi)=\mathrm{H}^0(\overline{X},I_{(E,\phi)}^{\mathrm{lis}})\quad。\tag{4.11.1}$$

由于 J_a 是平滑的，故知典范同态 $J_a\to I_{(E,\phi)}$ 诱导了一个同态

$$J_a\to I_{(E,\phi)}^{\mathrm{lis}}$$

[26] 译注：本格 =“tautologique”。

它在U上是一个同构。利用Néron范型的普适性质，我们有一个同态
$$I^{\mathrm{lis}}_{(E,\phi)} \to J^{\flat}_a$$
它在U上是一个同构。

命题 4.11.2. — 对于点$a\in\mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$上的任意$(E,\phi)\in\mathcal{M}(\bar{k})$，均有典范含入
$$\mathrm{H}^0(\overline{X},J_a)\subseteq \mathrm{Aut}(E,\phi)\subseteq \mathrm{H}^0(\overline{X},J^{\flat}_a)\quad 。$$

证明. — 只需验证同态$J_a\to I^{\mathrm{lis}}_{(E,\phi)}$和$I^{\mathrm{lis}}_{(E,\phi)}\to J^{\flat}_a$作为平展位层的同态都是单的。为此只需在每个点$v\in\overline{X}\smallsetminus U$的形式邻域上验证单射性即可。令$\overline{\mathcal{O}}_v$是$\mathcal{O}_{\overline{X}}$在$v$处的形式完备化，$\overline{F}_v$是$\overline{\mathcal{O}}_v$的分式域。则有$J_a(\overline{F}_v)$的子群之间的包含关系
$$J_a(\overline{\mathcal{O}}_v)\subseteq I^{\mathrm{lis}}_{(E,\phi)}(\overline{\mathcal{O}}_v)\subseteq J^{\flat}_a(\overline{\mathcal{O}}_v)$$
。 □

回到4.10中的记号。取定一个二元组$\tilde{a}=(a,\tilde{\infty})$，其中$a\in\mathcal{A}^{\infty}(\bar{k})$，并且$\infty\in\widetilde{X}_a$位于$\infty$之上。我们已经定义了$\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G})$的一个子群$W_{\tilde{a}}$。利用4.8.1和2.4.4，可以得到下面的公式
$$\mathrm{H}^0(\overline{X},J^{\flat}_a)=\mathbf{T}^{W_{\tilde{a}}}\quad 。$$
由此可以导出下面的推论。

推论 4.11.3. — 设$\tilde{a}=(a,\tilde{\infty})$如上。对于点$a\in\mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$上的任意$(E,\phi)\in\mathcal{M}(\bar{k})$，$\mathrm{Aut}(E,\phi)$都可以等同于$\mathbf{T}^{W_{\tilde{a}}}$的一个子群。

近期Frenkel和Witten的工作显示，这个界不是最优的。事实上，可以有一个包含关系
$$\mathrm{Aut}(E,\phi)\subseteq\mathbf{T}(I_{\tilde{a}},W_{\tilde{a}})$$
其中$\mathbf{T}(I_{\tilde{a}},W_{\tilde{a}})$是4.10.3中所定义的$\mathbf{T}^{W_{\tilde{a}}}$的子群（把$\hat{\mathbf{T}}$换成$\mathbf{T}$）。进而，等号会在一些极为特殊的纤维$\mathcal{M}_a$处达到。

4.11.4. — 在开集$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$（参考4.10.5）上，群$\hat{\mathbf{T}}^{W_{\tilde{a}}}$是有限的。$\mathbf{T}^{W_{\tilde{a}}}$也是如此。假设$\mathbf{W}\rtimes\Theta$的阶数与特征互素，则$\mathbf{T}^{W_{\tilde{a}}}$是有限且非分歧的。从而根据上面的推论，$\mathcal{M}$在$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$上的限制是一个Deligne-Mumford叠形。

4.12. 可极化的Tate模层. — 让我们再回到4.5.5的前提条件下，此时$\mathcal{P}$是一个Deligne-Mumford Picard叠形，且在$\mathcal{A}^{\diamondsuit}$上是平滑的。令$\mathcal{P}^0$是$\mathcal{P}$的单位分支Picard子叠形。设$g$是结构态射$\mathcal{P}^0\to\mathcal{A}^{\heartsuit}$，它是平滑的，相对维数是$d$。考虑Tate模层
$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{P}^0)=\mathrm{H}^{2d-1}(g_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$
它是$\mathcal{A}^{\heartsuit}$上的一个$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$层。

对这个层的最初等的描述方法是使用定形子。利用4.5.6的方法，可以在开集$\mathcal{A}^{\infty}$上定义出两个平滑群概形P_{-1}和P_0，都具有连通的纤维，P_{-1}是仿射的，并且有一个正合序列
$$1\to P_{-1}\to P_0\to P^0|_{\mathcal{A}}\to 1\quad 。$$

由此可以得到 Tate $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 模层的一个正合序列

$$0 \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{-1}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_0) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0|_{\mathcal{A}}) \to 0 \quad 。$$

对每个几何点 $a \in \mathcal{A}^\infty(\bar{k})$，令 A_a 是 $P_{0,a}$ 的最大的 Abel 商概形。由于 $P_{-1,a}$ 是仿射的，故知同态 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{0,a}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_a)$ 可以穿过 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{P}^0_a)$。由此可以导出一个正合序列

$$0 \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_a) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{P}^0_a) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_a) \to 0$$

它实际上不依赖于定形子的选择。虽然在 Deligne-Mumford Picard 叠形 $\mathcal{P}^0_a$ 上并没有 Chevalley 典范拆解，我们仍然有 Tate $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 模层的一个典范拆解。

命题 4.12.1. — *存在一个交错形式*

$$\psi : \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{P}^\heartsuit) \times \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{P}^\heartsuit) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1)$$

且在每一个几何点 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ 处，交错形式 ψ_a 在仿射部分 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_a)$ 上都等于零，并且诱导出 Abel 部分 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_a)$ 上的一个圆满配对。

这个命题的证明是建立在 Weil 配对理论之上的，为了方便读者，我们复习一下这个理论。设 S 是一个严格 Hensel 的局部概形，$c : C \to S$ 是一个平坦紧合态射，其纤维都是几何既约的，且维数都是 1。

假设 C 是连通的。考虑它的 Stein 分解 $C \to S' \to S$，其中 $C \to S'$ 是一个紧合态射，其纤维都是连通且非空的，$S' \to S$ 是一个有限态射。由于 c 的特殊纤维是既约的，故知态射 $S' \to S$ 是有限且平展的。由于 C 是连通的，故知 S' 也是如此。由于已假设 S 是严格 Hensel 的，故有 $S' = S$。换句话说，$c : C \to S$ 的纤维都是连通的。

考虑 Artin S 叠形 $\mathrm{Pic}_{C/S}$，它在一个 S 概形 Y 处的取值是 $C \times_S Y$ 上的可逆向量丛的疏群。它在 S 上是平滑的。考虑它的单位分支 $\mathrm{Pic}^0_{C/S}$。对任意点 $L \in \mathrm{Pic}_{X/S}(Y)$ 和任意 $y \in Y$，均可定义一个 Euler-Poincaré 示性数 $\chi_y(L)$，来自于 L 在 C_y 上的限制。若 Y 是连通的，则这个整数不依赖于 y，故可记为 $\chi(L)$。若 $L \in \mathrm{Pic}^0_{C/S}$，则有 $\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_C)$。

对任意两个 $L, L' \in \mathrm{Pic}^0_{C/S}$，我们还可以定义它们的 Weil 配对如下

$$\langle L, L'\rangle_{C/S} = \det(Rc_*(L \otimes L')) \otimes \det(Rc_*L)^{\otimes -1} \otimes \det(Rc_*L')^{\otimes -1} \otimes \det(Rc_*\mathcal{O}_C)$$

这里使用了上同调的行列式。若 t 是 L 的一个自同构，则它是一个常数，则 t 在 $\det(Rc_*L)$ 上的作用是由常数 $t^{\chi(L)}$ 给出的。使用对于任何 $L, L' \in \mathrm{Pic}^0_{X/S}$ 都成立的等式

$$\chi(L \otimes L') = \chi(L) = \chi(L') = \chi(\mathcal{O}_C)$$

可以验证，对任意两个常数 (t, t')，t 在 L 上的作用和 t' 在 L' 上的作用都诱导了 $\langle L, L'\rangle_{C/S}$ 上的恒同。

若 N 是一个在 S 上可逆的整数，L 是一个可逆向量丛，且带有一个同构 $\iota_L : L^{\otimes N} \to \mathcal{O}_C$，则有一个同构

$$\langle L, L'\rangle^{\otimes N}_{C/S} = \mathcal{O}_S \quad 。$$

进而若 L' 上也带着一个同构 $\iota_{L'} : L'^{\otimes N} \to \mathcal{O}_C$，则有另一个同构 $\langle L, L'\rangle_{C/S}^{\otimes N} = \mathcal{O}_S$。这两个同构的差定义出一个 N 次单位根。这个单位根只依赖于 L 和 L' 的同构类，这来源于我们前面对常数作用的讨论。

现在假设 C 是代数闭域 k 上的一条连通射影曲线。则叠形 Pic^0_C 同构于连通交换 k 代数群 Jac_C 在 $\mathbf{G}_m$ 的平凡作用下的商。上面的构造方法定义了一个交错形式

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{Jac}_C) \times \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{Jac}_C) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1)$$

当 C 平滑时，这个形式是非退化的。在结束这个讨论之前，我们还需要考察一下 Weil 配对在正规化下的行为。

引理 4.12.2. — 设 C 是代数闭域 k 上的一条既约射影曲线，$C^\flat$ 是它的正规化，$\xi : C^\flat \to C$ 是正规化态射。设 L, L' 是 C 上的两个可逆向量丛。则有一个 1 维 k 向量空间的典范同构

$$\langle L, L'\rangle_C = \langle \xi^* L, \xi^* L'\rangle_{C^\flat} \quad 。$$

证明. — 我们有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \xi^*\mathcal{O}_{C^\flat} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

其中 $\mathcal{D}$ 是一个有限 $\mathcal{O}_C$ 模层，支集落在 C 的有限个点 $\{c_1, \ldots, c_n\}$ 上。令 $\mathcal{D}_i$ 是 $\mathcal{D}$ 的支集落在 c_i 上的直和因子，d_i 是它的长度。则行列式的乘法性质提供出一个同构

$$\det(c^\flat_* \mathcal{O}_{C^\flat}) = \det(c_*\xi_*\mathcal{O}_{C^\flat}) = \det(c_*\mathcal{O}_C) \otimes \bigotimes_{i=1}^r \wedge^{d_i} \mathcal{D}_i$$

其中 $c : C \to \mathrm{Spec}(k)$ 和 $c^\flat : C^\flat \to \mathrm{Spec}(k)$ 是结构态射。

设 L 是 C 上的一个可逆向量丛。使用投影公式 $\xi_*\xi^*L = (\xi_*\mathcal{O}_{C^\flat}) \otimes L$，可以得到公式

$$\det(c^\flat_*\xi^*L) = \det(c_*L) \otimes \bigotimes_{i=1}^r (L_{c_i}^{\otimes d_i} \otimes \wedge^{d_i}\mathcal{D}_i)$$

其中 L_{c_i} 是 L 在 c_i 处的纤维。把这个公式应用到 $L \otimes L'$, L 和 L' 上，就可以推出引理。 □

现在我们可以开始着手证明命题 4.12.1。

证明. — 对任意点 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit$，$\mathcal{P}_a$ 就是 X 上的 J_a 回旋子的 Picard 叠形。设 $\pi_a : \widetilde{X}_a \to X$ 是 a 所对应的分合覆叠。根据正则中心化子的 Galois 式描述法，我们有下面的群层同态，参照 2.4.2

$$J_a \to \pi_{a,*}(T \times_X \widetilde{X}_a)$$

其中 T 是 G 的给定摆置下的极大环面。选取一个使 G 分裂的覆叠 $X_\rho \to X$，通过基变换可以得到一个有限平展覆叠 $\widetilde{X}_{\rho,a} \to \widetilde{X}_a$。令 $\pi_{\rho,a} : \widetilde{X}_{\rho,a} \to X$ 是合成态射。从而有一个同态

$$J_a \longrightarrow \pi_{\rho,a,*}(T \times \widetilde{X}_{\rho,a})$$

其中 $\mathbf{T}$ 是一个分裂环面。于是 $\mathcal{P}_a$ 的一个 ℓ^n 阶挠点可以诱导出 $\mathrm{Pic}_{\widetilde{X}_{\rho,a}} \otimes \mathbf{X}_*(\mathbf{T})$ 的一个 ℓ^n 阶挠点。在 $\mathbf{X}_*(\mathbf{T}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上选定一个不变的对称形式，使用 $\mathrm{Pic}^0_{\widetilde{X}_{\rho,a}}$ 上的 Weil 配对可以得到一个交错形式

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{P}^0_a) \otimes \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{P}^0_a) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1) \quad 。$$

只消再证明，在每个几何点 a 处，这个辛形式在 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{P}_a)$ 的仿射部分上都等于零，并且在它的 Abel 部分上诱导了一个非退化的配对。这可由引理 4.12.2 推出。 □

4.13. 维数. — **我**们将使用同样的记号 $\mathfrak{c}_D$ 来表示 X 向量概形和对应的局部自由 $\mathcal{O}_X$ 模层. 若 G 是分裂的，则 $\mathcal{O}_X$ 模层 $\mathfrak{c}_D$ 有一个具体的表达式

$$\mathfrak{c}_D = \bigoplus_{i=1}^{r} D^{\otimes e_i}$$

其中 $e_1, \ldots, e_r$ 是 1.2 中所出现的正整数。根据定义，X 向量概形 $\mathfrak{c}_D$ 就是

$$\mathfrak{c}_D = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{c}_D^*))$$

其中 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}[\mathfrak{c}_D^*]$ 是对偶 $\mathcal{O}_X$ 模层 $\mathfrak{c}_D^*$ 的 $\mathcal{O}_X$ 对称代数层。在一般的情形下，经过一个使 G 分裂的有限平展 Galois 基变换 $\rho : X_\rho \to X$，$\mathfrak{c}_D$ 也可以写成上述形式。

引理 4.13.1. — *若 $D > 2g-2$，则 $\mathcal{A}$ 是一个 k 仿射空间，维数是*

$$\dim(\mathcal{A}) = \sharp\,\Phi \deg(D)/2 + r(1 - g + \deg(D))$$

其中 r 是 $\mathbf{G}$ 的秩，$\sharp\,\Phi$ 是它的根的个数。

证明. — 设 $\rho : X_\rho \to X$ 是一个有限平展 Galois 覆叠，并使 G 分裂。则 $\rho^*\mathfrak{c}_D$ 同构于诸 $\rho^* D^{\otimes e_i}$ 的直和。由此可知

$$\deg(\mathfrak{c}_D) = (e_1 + \cdots + e_r)\deg(D) \quad 。$$

于是有等式

$$\dim \mathrm{H}^0(X, \mathfrak{c}_D) + \dim \mathrm{H}^1(X, \mathfrak{c}_D) = (e_1 + \cdots + e_r)\deg(D) + r(1-g)$$

这来自 Riemann-Roch 定理。根据 Kostant，整数 $e_i - 1$ 就是根系 Φ 的指数，如此一来

$$e_1 + \cdots + e_r = r + \sharp\,\Phi/2 \quad 。$$

从而只需证明 $\mathrm{H}^1(X, \mathfrak{c}_D) = 0$。由于 $\deg(D) > 2g-2$ 并且 ρ 是有限平展的，故有

$$\deg(\rho^* D) > \deg(\rho^*\Omega_{X/k}) = \deg(\Omega_{X_\rho/k})$$

这就推出了 $\mathrm{H}^1(X_\rho, \rho^* D^{\otimes e_i})$ 等于零的结论。为了证明 $\mathrm{H}^1(X, \mathfrak{c}_D)$ 也等于零，只需注意到 $\mathrm{H}^1(X, \mathfrak{c}_D)$ 是 $\mathrm{H}^1(X_\rho, \rho^*\mathfrak{c}_D)$ 的一个直和因子。 □

若 $\deg(D)$ 是一个取定的整数，且比 $2g-2$ 大，则 Hitchin 基底 $\mathcal{A}$ 的维数既不依赖于 D，又不依赖于拟分裂偏转。

命题 4.13.2. — *对任意 $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$，均有一个典范同构 $\mathrm{Lie}(J_a) = \mathfrak{c}_D^* \otimes D$。*

在证明过程中，对于 $f : X \to Y$ 和一个 $\mathcal{O}_Y$ 模层 $\mathcal{L}$，我们把逆像 $f^*\mathcal{L}$ 也简记为 $\mathcal{L}$。这个记号的混用将不会带来误解，因为此处出现的概形和模层都是很清楚明了的。

证明. — 根据 2.4.7，同态 $J_a \to J_a^1$ 诱导了 Lie 代数的一个同构 $\mathrm{Lie}(J_a) \to \mathrm{Lie}(J_a^1)$。根据 J^1 的构造方法，$\mathrm{Lie}(J_a^1)$ 可以借助分合覆叠 $\pi_a : \widetilde{X}_a \to \overline{X}$ 来计算

$$\mathrm{Lie}(J_a^1) = ((\pi_a)_*\mathfrak{t})^W \quad 。$$

而分合覆叠是由下面的卡氏图表定义的

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_a \arrow[r] \arrow[d, "\pi_a"'] & \mathfrak{t}_D \arrow[d, "\pi"] \\ \overline{X} \arrow[r, "a"'] & \mathfrak{c}_D \end{tikzcd}$$

由于 π 是有限且平坦的，故知取 $\pi_*\mathfrak{t}$ 与取基变换是可交换的，特别的 $(\pi_a)_*\mathfrak{t} = a^*\pi_*\mathfrak{t}$。从而只需计算 $(\pi_*\mathfrak{t})^W$。

由于 $\mathfrak{c}_D$ 是 $\mathfrak{t}_D$ 在 W 作用下的不变量商，故知切丛 $T_{\mathfrak{t}_D/X}$ 和 $T_{\mathfrak{c}_D/X}$ 的总体空间也有这种关系。由此可以导出

$$(\pi_*\Omega_{\mathfrak{t}_D/X})^W = \Omega_{\mathfrak{c}_D/X} \quad 。$$

此外，由于 $\mathfrak{t}_D$ 是 X 上的一个向量丛，故有 $\Omega_{\mathfrak{t}_D/X} = \mathfrak{t}_{D^{-1}}$。同样，我们有 $\Omega_{\mathfrak{c}_D/X} = \mathfrak{c}_D^*$。最终可以得到 $\mathcal{O}_{\mathfrak{c}_D}$ 模层的等式 $(\pi_*\mathfrak{t}_{D^{-1}})^W = \mathfrak{c}_D^*$，从而有

$$(\pi_*\mathfrak{t})^W = \mathfrak{c}_D^* \otimes D \quad 。$$

取这个等式在截面 $a : \overline{X} \to \mathfrak{c}_D$ 下的逆像，则可以得到等式 $\mathrm{Lie}(J_a) = \mathfrak{c}_D^* \otimes_{\mathcal{O}_X} D$。 □

在 G 分裂的情形，使用这个引理可以把 $\mathrm{Lie}(J_a)$ 用 D 和根系 Φ 的指数表达出来。设 $e_1, \ldots, e_r$ 是这些齐次不变多项式的次数，与 1.1.1 中相同，我们有

$$\mathrm{Lie}(J_a) = D^{-e_1+1} \oplus \cdots \oplus D^{-e_r+1} \quad 。$$

若 G 不是分裂的，则可以取 X 的一个分裂 G 的限平展 Galois 覆叠，使 $\mathrm{Lie}(J_a)$ 同构于直线丛的直和。特别的

$$\deg(\mathrm{Lie}(J_a)) = \sum_{i=1}^{r}(-e_r+1)\deg(D) = -\sharp\Phi\deg(D)/2 \quad 。$$

推论 4.13.3. — 对任意 $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$，都有

$$\dim(\mathcal{P}_a) = \sharp\Phi\deg(D)/2 + r(g-1) \quad 。$$

证明. — 我们有

$$\dim(\mathcal{P}_a) = \dim(\mathrm{H}^1(\overline{X}, \mathrm{Lie}(J_a))) - \dim(\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathrm{Lie}(J_a)))$$

于是要证的等式来源于 Riemann-Roch 公式。 □

4.13.4. — 设 $d = \sharp\,\Phi\deg(D)/2 + r(g-1)$ 是 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的相对维数。与公式 4.13.1 进行比较，可得

$$\dim(\mathcal{P}) = (r + \sharp\,\Phi)\deg(D) \quad 。$$

在 4.16.1 中，我们将证明，$\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ 在 $\mathcal{M}_a$ 中是稠密的，从而 $\mathcal{M}$ 也有同样的维数公式。特别的，$\dim(\mathcal{M}_a) = d$ 且 $\dim(\mathcal{M}) = (r + \sharp\,\Phi)\deg(D)$。

4.14. 形变的计算. — Higgs 丛的形变问题已经由 Biswas 和 Ramanan 在 [**9**] 中考察过了。为了方便读者，我们复述一下他们的计算。

先看平滑群作用下的回旋子的形变计算。设 S 是一个 k 概形，G 是一个平滑 S 群概形。设 $\mathbf{B}G$ 是 G 的分类空间。则普适 G 回旋子 $\mathbf{E}G$ 就是 S 本身，位于 $[S/G]$ 之上。令

$$\pi_{\mathbf{E}G} : \mathbf{E}G \longrightarrow \mathbf{B}G$$

是本格 G 回旋子。考虑余切复形的旋转三角 (27)

$$\pi_{\mathbf{E}G}^* L_{\mathbf{B}G/S} \longrightarrow L_{\mathbf{E}G/S} \longrightarrow L_{\mathbf{E}G/\mathbf{B}G} \longrightarrow \pi_{\mathbf{E}G}^* L_{\mathbf{B}G/S}[1] \quad 。$$

由于 $S = \mathbf{E}G$，故余切复形 $L_{\mathbf{E}G/S}$ 是零，于是 $L_{\mathbf{E}G/\mathbf{B}G}$ 就是向量丛 $\mathfrak{g}^*$，放置在第 0 个位置。从而有一个同构

$$L_{\mathbf{E}G/\mathbf{B}G} \xrightarrow{\sim} \pi_{\mathbf{E}G}^* L_{\mathbf{B}G/S}[1] \quad 。$$

由此可以导出一个同构

$$\mathfrak{g}^*[-1] \xrightarrow{\sim} \pi_{\mathbf{E}G}^* L_{\mathbf{B}G/S}$$

沿 $\pi_{\mathbf{E}G}$ 进行下降，又可以诱导出一个同构

$$(\mathbf{E}G \wedge^G \mathfrak{g}^*)[-1] \xrightarrow{\sim} L_{\mathbf{B}G/S} \quad 。$$

从而 G 的分类空间的余切复形 $L_{\mathbf{B}G/k}$ 就是一个向量丛，用回旋子 $\mathbf{E}G$ 对余伴随表示的向量空间 $\mathfrak{g}^*$ 进行偏转而得到，且放置在第 1 个位置。

如此一来，对任意 S 概形 X，和 X 上的任意 G 回旋子 E，对应于一个态射 $h_E : X \to \mathbf{B}G$，E 的形变障碍掉在下面的群里

$$\mathrm{H}^1(X, \underline{\mathrm{RHom}}(h_E^* L_{\mathbf{B}G/S}, \mathcal{O}_X)) = \mathrm{H}^2(X, E \wedge^G \mathfrak{g})$$

且若这个障碍是零，则它的所有形变构成一个在群

$$\mathrm{H}^0(X, \underline{\mathrm{RHom}}(h_E^* L_{\mathbf{B}G/S}, \mathcal{O}_X)) = \mathrm{H}^1(X, E \wedge^G \mathfrak{g})$$

作用下的主齐性空间，并且无穷小自同构群就是 $\mathrm{H}^0(X, E \wedge^G \mathfrak{g})$。

现在设 V 是 S 上的一个向量丛，带有一个 G 的作用，考虑商叠形 $[V/G]$。G 回旋子 $\pi_V : V \to [V/G]$ 定义了一个态射 $[\nu] : [V/G] \to \mathbf{B}G$，可以嵌入下面的卡氏图表

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\pi_V"'] & \mathbf{E}G \arrow[d, "\pi_{\mathbf{E}G}"] \\ {[V/G]} \arrow[r, "{[\nu]}"'] & \mathbf{B}G \end{tikzcd}$$

(27) 译注：旋转三角 =“triangle distingué”。

考虑余切复形的旋转三角

$$\pi_V^* L_{[V/G]/S} \longrightarrow L_{V/S} \longrightarrow L_{V/[V/G]} \longrightarrow \pi_V^* L_{[V/G]/k}[1] \quad 。$$

其中 $L_{V/S}$ 是常值向量丛，取值为 $\nu^* V^*$，且放置在第 0 个位置，此处 V^* 是 V 的对偶 S 向量丛，$\nu : V \to S$ 是到 S 的投影。$L_{V/[V/G]}$ 可以通过取基变换 $L_{V/[V/G]} = \nu^* L_{\mathbf{E}G/\mathbf{B}G}$ 来计算，从而它就是向量丛 $\nu^*\mathfrak{g}^*$，也放置在第 0 个位置。在每个点 $v \in V$ 上，G 在 v 近旁的作用都定义了一个线性映射

$$\alpha_v : \mathfrak{g} \longrightarrow T_v V = V$$

且其对偶就是旋转三角中的箭头 $L_{V/k} \to L_{V/[V/G]}$ 在 v 处的纤维

$$\alpha_v^* : (L_{V/S})_v = V^* \longrightarrow (L_{V/[V/G]})_v = \mathfrak{g}^* \quad 。$$

这个箭头下降到 $[V/G]$ 上给出一个箭头

$$\alpha_v^* \wedge^G \pi_V : \pi_V \wedge^G V^* \longrightarrow \pi_V \wedge^G \mathfrak{g}^*$$

它的锥同构于 $L_{[V/G]/S}$。

下面将使用这个方法来计算 Hitchin 二元组的形变。回到第 3 章开头所指定的记号。特别的，G 是曲线 X 上的简约群概形，$\mathfrak{g}$ 是它的 Lie 代数，带有 G 的伴随作用和 $\mathbf{G}_m$ 的同筋作用。可逆向量丛 D 定义了一个 $\mathbf{G}_m$ 回旋子 L_D。考虑叠形 $[\mathfrak{g}_D/G]$，即使用 L_D 来偏转 $\mathfrak{g}$ 然后再除以 G。从而它的余切复形 $L_{[\mathfrak{g}_D/G]/X}$ 可以等同于

$$L_{[\mathfrak{g}/G]/X} \wedge^{\mathbf{G}_m} L_D$$

它是下述箭头的锥

$$(\pi_{D,\mathfrak{g}} \wedge^G \mathfrak{g}^*) \otimes D^{-1} \longrightarrow \pi_{D,\mathfrak{g}} \wedge^G \mathfrak{g}^*$$

其中 $\pi_{D,\mathfrak{g}}$ 是商叠形 $[\mathfrak{g}_D/G]$ 上的自然 G 回旋子。

设 (E,ϕ) 是 X 上的一个 Higgs 场，取值在 $\bar{k}$ 中。它对应于一个箭头

$$h_{E,\phi} : \overline{X} \to [\mathfrak{g}_D/G] \quad 。$$

(E,ϕ) 的形变是由下面的复形来控制的

$$\underline{\mathrm{RHom}}(h_{E,\phi}^*(L_D \wedge^{\mathbf{G}_m} L_{[\mathfrak{g}/G]/X}), \mathcal{O}_X)$$

它可以简化为

$$\mathrm{ad}(E,\phi) := [\mathrm{ad}(E) \to \mathrm{ad}(E) \otimes D]$$

其中

- $\mathrm{ad}(E)$ 就是向量丛 $\mathfrak{g} \wedge^G E$；
- $\mathrm{ad}(E)$ 被放置在第 -1 个位置，$\mathrm{ad}(E) \otimes D$ 被放置在第 0 个位置；
- 箭头是由 $x \mapsto [x,\phi]$ 给出的。

下面复习 [**57**] 中的命题 5.3。读者会发现，与原文相比，这里的 $\mathrm{ad}(E,\phi)$ 作了一个移位。我们将给出一个不太相同的证明。

定理 4.14.1. — *设 $(E,\phi) \in \mathcal{M}(\bar{k})$ 是一个位于 $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$ 之上的点。则群 $\mathrm{H}^1(X, \mathrm{ad}(E,\phi))$（它包含着 (E,ϕ) 的形变障碍）在下面两种情形下都等于零*

- $\deg(D) > 2g-2$ ，
- $\deg(D) = 2g-2$ 且 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$。

若这两个条件之一是满足的，则 $\mathcal{M}$ 在点 (E,ϕ) 处是平滑的。

证明. — 在 $\mathfrak{g}$ 上取定一个不变的非退化对称形式。则可以把复形 $\mathrm{ad}(E,\phi)$ 的对偶等同于

$$\mathrm{ad}(E,\phi)^* = [\mathrm{ad}(E)\otimes D^{-1} \to \mathrm{ad}(E)]$$

它的两项分别被放置在第 -1 和第 0 个位置，并且映射 $x\mapsto [x,\phi]$ 连缀起来的。该复形的上同调层 H^{-1} 可以等同于

$$\mathrm{Lie}(I_{E,\phi}^{\mathrm{lis}})\otimes D^{-1}$$

其中 $I_{E,\phi}^{\mathrm{lis}}$ 是 4.11 中所引入的 $\overline{X}$ 上的平滑群概形。根据 Serre 对偶，群 $\mathrm{H}^1(X,\mathrm{ad}(E,\phi))$ 是下面这个群的对偶

$$\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathrm{Lie}(I_{E,\phi}^{\mathrm{lis}})\otimes D^{-1}\otimes\Omega_{X/k})\ 。$$

与 4.11 相同，我们有一个 $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ 模层的单同态

$$\mathrm{Lie}(I_{E,\phi}^{\mathrm{lis}})\to \mathrm{Lie}(J_a^\flat)$$

如此一来，为了证明障碍群是零，只需证明

$$\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathrm{Lie}(J_a^\flat)\otimes D^{-1}\otimes\Omega_{X/k})=0\ 。$$

从而归结为下面的引理。 □

引理 4.14.2. — *对任意 $a\in\mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$，$\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathrm{Lie}(J_a^\flat)\otimes L)=0$，和任意具有严格负次数的直线丛 L。在 $a\in\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$ 且 $\deg(L)\le 0$ 的条件下，同样的结论是成立的。*

证明. — 按照 4.10 选好基点，并且令 Θ 是 $p_1(\overline{X},\infty)$ 在 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 中的像。则有一个连通有限平展 Galois 覆叠 $\rho : \overline{X}_\rho \to \overline{X}$，Galois 群为 $\Theta_\rho = \Theta$，并且使 ρ_G 分裂。于是有一个有限平坦覆叠 $\widetilde{X}_{\bar\rho,a} \to \overline{X}$，参照 4.5.4，它是一般位平展 Galois 的，Galois 群为 $\mathbf{W}\rtimes\Theta_{\bar\rho}$。设 $\widetilde{X}_{\bar\rho,a}^\flat$ 是 $\widetilde{X}_{\bar\rho,a}$ 的正规化，$\pi_{\bar\rho,a}^\flat$ 是投影 $\widetilde{X}_{\bar\rho,a}^\flat\to\overline{X}$。根据 4.8.1，$\mathrm{Lie}(J_a^\flat)$ 可以用 $\widetilde{X}_{\bar\rho,a}^\flat$ 来计算

$$\mathrm{Lie}(J_a^\flat) = (\pi_{\bar\rho,a}^\flat)_*(\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\bar\rho,a}^\flat}\otimes\mathbf{t})^{\mathbf{W}\rtimes\Theta_{\bar\rho}}$$

如此一来

$$\mathrm{Lie}(J_a^\flat)\otimes L = (\pi_a^\flat)_*((\pi_a^\flat)^*L\otimes\mathbf{t})^{\mathbf{W}\rtimes\Theta_{\bar\rho}}\ 。$$

若 $\deg(L)<0$，$(\pi_a^\flat)^*L$ 是一个直线丛，并且在 $\widetilde{X}_{\bar\rho,a}^\flat$ 的每个连通分支上的次数都是 <0 的，从而不可能有非零的整体截面。

若 $\deg(L)=0$，则 $(\pi_a^\flat)^*L$ 有非零整体截面的充分必要条件是，它同构于 $\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\bar\rho,a}^\flat}$。此时我们有

$$\mathrm{H}^0(\widetilde{X}_{\bar\rho,a}^\flat,((\pi_{\bar\rho,a}^\flat)^*L\otimes\mathbf{t})^{\mathbf{W}\rtimes\Theta_{\bar\rho}} = \mathbf{t}^{W_{\tilde a}}$$

其中 $W_{\tilde a}$ 是 4.10 中所定义的 $\mathbf{W}\rtimes\Theta_{\bar\rho}$ 的子群，或 $\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 的子群。在 $a\in\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$ 的前提条件下，$W_{\tilde a}$ 不变量群 $\mathbf{t}^{W_{\tilde a}}$ 等于零，参照 4.10.5。 □

4.15. 乘积公式. — **我**们现在复习 Hitchin 纤维和仿 Springer 纤维之间的关系，这个关系把后者表达为前者的局部形式。

设 $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$。设 U 是 $\mathfrak{c}$ 的正则半单开集 $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ 在态射 $a : \overline{X} \to [\mathfrak{c}/\mathbf{G}_m]$ 下的逆像。黏合上 Kostant 截面就定义出一个态射

$$\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} \mathcal{M}_v(a) \to \mathcal{M}_a \quad 。$$

同样，存在一个群同态 $\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} \mathcal{P}_v(J_a) \longrightarrow \mathcal{P}_a$。它可以诱导出一个态射

$$\zeta : \prod_{v \in \overline{X} \setminus U} \mathcal{M}_v(a) \wedge^{\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} \mathcal{P}_v(J_a)} \mathcal{P}_a \longrightarrow \mathcal{M}_a \quad 。$$

根据 [**57**] 中的定理 4.6，该态射诱导了 $\bar{k}$ 值点范畴上的一个等价。读者会发现这里的记号于上述文献有所不同：$\mathcal{M}_v(a)$ 在那里被记为 $\mathcal{M}^{\bullet}_{v,a}$，而那里的 $\mathcal{M}_{v,a}$ 在这里没有出现。

命题 4.15.1. — 对任意 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$，叠形

$$\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} \mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a) \times \mathcal{P}_a$$

在 $\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} \mathcal{P}_v^{\mathrm{red}}(J_a)$ 的对角线作用下的商是一个紧合 Deligne-Mumford 叠形。进而，态射

$$\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} \mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a) \wedge^{\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} \mathcal{P}_v^{\mathrm{red}}(J_a)} \mathcal{P}_a \to \mathcal{M}_a$$

是一个同胚。

证明. — 同态 $\mathcal{P}_v(J_a) \to \mathcal{P}_a$ 诱导了连通分支群之间的一个同态 $\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a)) \to \pi_0(\mathcal{P}_a)$。由于 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$，$\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 是一个有限群，故知这个同态的核是 $\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a))$ 的一个指数有限的子群。从而可以找到 $\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a))$ 的一个指数有限的自由 Abel 子群 Λ_v，它能够包含这个核。

选取一个提升 $\Lambda_v \to \mathcal{P}_v(J_a)$。由于 a 定义在一个有限域上，通过把 Λ_v 换成一个指数有限的子群，则可以假设 Λ_v 包含在 $\mathcal{P}_v(J_a) \to \mathcal{P}_a$ 的核之中。

群 $\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} \Lambda_v$ 作用在 $\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} \mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a) \times \mathcal{P}_a$ 上，在第一个因子上是自由作用，在第二个因子上是平凡作用。它的商等于

$$\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} (\mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a)/\Lambda_v) \times \mathcal{P}_a$$

根据 Kazhdan 和 Lusztig，每个 $\mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a)/\Lambda_v$ 都是一个射影 $\bar{k}$ 概形，参照 3.4.1。

只消再取 $\prod_{v \in \overline{X} \setminus U} (\mathcal{P}_v(J_a)/\Lambda_v)$ 作用下的商。对任意 v，同态 $\mathcal{R}_v(a) \to \mathcal{P}_v(J_a)/\Lambda_v$ 都是单的，并且核是有限的。现在我们有一个正合序列

$$1 \to \mathcal{R}_a \to \mathcal{P}_a \to \mathcal{P}_a^{\flat} \to 1$$

其中 $\mathcal{P}_a^\flat$ 是一个紧合 Deligne-Mumford 叠形。从而

$$\prod_{v\in\overline{X}\smallsetminus U}(\mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a)/\Lambda_v)\times\mathcal{P}_a$$

在 $\mathcal{R}_a=\prod_v\mathcal{R}_v(a)$ 的对角线作用下的商是 $\mathcal{P}_a^\flat$ 上的一个局部平凡的纤维化，其纤维都同构于

$$\prod_{v\in\overline{X}\smallsetminus U}(\mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a)/\Lambda_v) \quad 。$$

从而这个商是一个紧合 Deligne-Mumford 叠形。

只消再取有限群 $\prod_v\mathcal{P}_v(J_a)/(\mathcal{R}_v(a)\times\Lambda_v)$ 作用下的商。而最终的商也是一个紧合 Deligne-Mumford 叠形。

由于 $\mathcal{M}_a$ 是一个 Deligne-Mumford 叠形，特别的，它是分离的，故知态射

$$\zeta:\prod_{v\in\overline{X}\smallsetminus U}\mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a)\wedge^{\prod_{v\in\overline{X}\smallsetminus U}\mathcal{P}_v^{\mathrm{red}}(J_a)}\mathcal{P}_a\to\mathcal{M}_a$$

是一个紧合态射。由于它在 $\bar{k}$ 值点上诱导了一个等价，从而它是一个同胚。特别的，$\mathcal{M}_a$ 是一个紧合 Deligne-Mumford 叠形。 □

我们期望上述命题可以扩展到 $a\in\mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ 上。

推论 4.15.2. — 对任意 $a\in\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$，$\mathcal{M}_a$ 都同胚于一个射影概形。进而，对任意 $m\in\mathcal{M}_a(\bar{k})$，$m$ 在 $\mathcal{P}_a$ 中的稳定化子都是一个仿射群。

4.16. 稠密性. — 现在我们要陈述并且证明 3.10.1 的整体形式。

命题 4.16.1. — 对任意几何点 $a\in\mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$，纤维 $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ 在纤维 $\mathcal{M}_a$ 中都是稠密的。

证明. — 乘积公式 4.15.1 表明，$\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ 在 $\mathcal{M}_a$ 中的 (闭) 补集的维数严格小于 $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ 的维数。由于 Hitchin 总体空间 $\mathcal{M}$ 在 k 上是平滑的，参考 4.14.1，故知 Hitchin 纤维 $\mathcal{M}_a$ 都是局部完全交叉体。特别的，其不可约分支的维数不会严格小于自身的维数。这就证明了 $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ 在 $\mathcal{M}_a$ 中是稠密的。 □

上面的证明本质上与 Altman, Iarrobino 和 Kleiman 在 [**1**] 中的方法是一样的，在那里，他们证明了，只有平面奇异点的不可约既约射影曲线的 Jacobi 多样体在它的紧化 Jacobi 多样体中是稠密的。

推论 4.16.2. — 仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v(a)$ 的正则部分 $\mathcal{M}_v^{\mathrm{reg}}(a)$ 是稠密的。

遵循 8.6 的方法，首先从局部条件出发构造出一个整体形式。然后借助乘积公式再从整体结果推出局部结果，参照 4.15.1。我们把这个推论的证明细节留给读者，它在后文中并没有被用到。

推论 4.16.3. — 对任意 $a\in\mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$，$\mathcal{M}_a$ 都是均维的，且维数等于

$$\sharp\Phi\deg(D)/2+r(g-1) \quad 。$$

进而，$\mathcal{M}_a$ 的不可约分支集合可以等同于群 $\pi_0(P_a)$。

证明. — 维数公式缘自4.13.3。$\mathcal{M}_a$ 的不可约分支集合与群 $\pi_0(P_a)$ 之间的等同可以借助 Kostant 截面来完成。 □

推论 4.16.4. — 若 $\deg(D) > 2g-2$，则态射 $f^\heartsuit : \mathcal{M}^\heartsuit \to \mathcal{A}^\heartsuit$ 是一个平坦态射，相对维数等于 d。其纤维都是几何既约的。

证明. — 根据 4.14.1，$\mathcal{M}^\heartsuit$ 和 $\mathcal{A}^\heartsuit$ 在 k 上都是平滑的。于是为了证明 f 是平坦的，只需证明纤维的维数满足等式

$$\dim(\mathcal{M}_a) = \dim(\mathcal{M}) - \dim(\mathcal{A}) \quad 。$$

这可以从下面一些等式推出来 $\dim(\mathcal{M}_a) = \dim(P_a)$，$\dim(\mathcal{M}) = \dim(P)$，其中 P 在 $\mathcal{A}$ 上是平滑的，参考 4.3.5，我们有等式

$$\dim(\mathcal{P}^\heartsuit) = \dim(\mathcal{A}^\heartsuit) + \dim(\mathcal{P}_a) \quad 。$$

与 4.16.1 的证明中的情况相同，我们知道纤维 $\mathcal{M}_a$ 是一个局部完全交叉体。由于它有一个稠密的平滑开集 $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$，从而它必然是既约的。 □

4.17. 初分群的情形. — 设 (κ, ρ_κ) 是 G 在 X 上的一个初分线索，参照 1.8.1，H 是对应的初分群。依照 1.9，我们有一个态射 $\nu : \mathfrak{c}_H \to \mathfrak{c}$。用 D 进行偏转，又得到一个态射 $\nu : \mathfrak{c}_{H,D} \to \mathfrak{c}_D$。取它们的 X 值点，可以得到一个态射，仍记为

$$\nu : \mathcal{A}_H \to \mathcal{A} \quad 。$$

从 [**57**, 7.2] 知道，该态射在开集 $\mathcal{A}^\heartsuit$ 上的限制是一个有限非分歧态射。

4.17.1. — 令

$$r_H^G(D) = (|\Phi| - |\Phi_H|)\deg(D)/2 \quad 。$$

从 4.13.1 知道

$$\dim(\mathcal{A}) - \dim(\mathcal{A}_H) = r_H^G(D)$$

如此一来 $\mathcal{A}_H^{G-\heartsuit} = \nu^{-1}(\mathcal{A}^\heartsuit)$ 在 $\mathcal{A}^\heartsuit$ 中的像是一个余 $r_H^G(D)$ 维的闭子概形。

4.17.2. — 在 $\mathcal{A}_H$ 上，群 H 有一个 Hitchin 纤维化

$$f_H : \mathcal{M}_H \to \mathcal{A}_H \quad 。$$

$\mathcal{M}_H$ 上同样有 Picard 叠形 $\mathcal{P}_H \to \mathcal{A}_H$ 的作用。$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}_H$ 之间没有直接的关系，但 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}_H$ 可以很容易地联系起来。设 $a_H \in \mathcal{A}_H(\bar{k})$，且它的像是 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$。2.5.1 中的同态 $\mu : \nu^* J \to J_H$ 诱导了一个同态 $J_a \to J_{H,a_H}$，它在一般位是一个同构。从而得到一个满同态

$$\mathcal{P}_a \to \mathcal{P}_{H,a_H}$$

它的核是

$$\mathcal{R}_{H,a_H}^G = \mathrm{H}^0(\overline{X}, J_{H,a_H}/J_a)$$

这是一个仿射群，维数等于

$$\dim(\mathcal{R}_{H,a_H}^G) = \dim(\mathcal{P}_a) - \dim(\mathcal{P}_{H,a_H}) \quad 。$$

根据公式 4.13.3，又得到

$$\dim(\mathcal{R}_{H,a_H}^G) = (|\Phi| - |\Phi_H|)\deg(D)/2 = r_H^G(D) \quad 。$$

4.17.3. — 设 $J^\flat_{H,a_H}$ 是 J_{H,a_H} 的 Néron 范型。则有同态

$$J_a \to J_{H,a_H} \to J^\flat_{H,a_H}$$

它们在 $\overline{X}$ 的一个非空开集上是同构。由此可知，$J^\flat_{H,a_H}$ 也是 J_a 的 Néron 范型。与 4.9.2 相结合，则有正合序列

$$1 \to \mathcal{R}^G_{H,a_H} \to \mathcal{R}_a \to \mathcal{R}_{H,a_H} \to 1 \quad 。$$

由此可以导出维数公式

$$\delta_a - \delta_{H,a_H} = r^G_H(D)$$

其中 $\delta_a = \dim(\mathcal{R}_a)$ 和 $\delta_{H,a_H} = \dim(\mathcal{R}_{H,a_H})$ 分别是 a 和 a_H 相对于群 G 和 H 的 δ 不变量。

4.18. 结伴群的情形. — 设 G_1 和 G_2 是两个结伴的 X 群概形，参照 1.12.5。故有一个同构 $\mathfrak{c}_{G_1} = \mathfrak{c}_{G_2}$，参照 1.12.6。由此可以导出一个同构 $\mathfrak{c}_{G_1,D} = \mathfrak{c}_{G_2,D}$，进而得到 Hitchin 纤维化的基底之间的一个同构

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \quad 。$$

在 G_1 和 G_2 的 Hitchin 纤维化 $f_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{A}_1$ 和 $f_2 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{A}_2$ 之间没有什么直接的关系，然而在它们所关联的 Picard 叠形 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 之间却有一个关系。

命题 4.18.1. — *存在一个 Picard $\mathcal{A}$ 叠形的同态*

$$\mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$$

它在单位分支上诱导了一个谐构。

证明. — 与 1.12.6 的证明中的情况相同，我们有一个同构 $\mathfrak{t}_1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}_2$，位于同构 $\mathfrak{c}_{G_1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{c}_{G_2}$ 之上。依据 2.4.7，则可以导出 G_1 和 G_2 的正则中心化子的单位分支之间的一个同构 $J^0_{G_1} \xrightarrow{\sim} J^0_{G_2}$。由于 J_{G_1} 和 J_{G_2} 都是有限型群概形，把同构 $J^0_{G_1} \xrightarrow{\sim} J^0_{G_2}$ 与乘以整数 N 的态射进行合成，假设 N 充分可除，则可以得到一个同态 $J^0_{G_1} \to J^0_{G_2}$，它能够扩展为一个同态 $J_{G_1} \to J^0_{G_2}$，且具有有限的核及余核。由此就导出了一个同态 $\mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$，它在单位分支上诱导了谐构。 □

5. 区块化

在本章中，我们将在 Hitchin 基底 $\mathcal{A}$ 上构造出两个区块化，其中之一联系着纤维 $\mathcal{P}_a$ 的连通分支群，另一个则联系着不变量 δ_a，它差不多就是 $\mathcal{P}_a$ 的仿射部分的维数。

这些区块化的存在性来自于这两个不变量的半连续性以及某个可构性结果。

这个可构性结果是建立在分合曲线合族正规化的参模空间的存在性之上的。事实上，利用这种合族正规化不难看出，不变量 δ_a 和 $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 都是局部常值的。

接下来就可以定义出一个联系着不变量 $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 的区块化。为了方便，我们将转到 Hitchin 基底 $\mathcal{A}$ 的一个平展开集 $\tilde{A}$ 上来考虑问题。$\mathcal{P}$ 的诸纤维的连通分支群

层 $\pi_0(\mathcal{P})$ 在 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的诸区块上将成为常值的，而不仅仅是局部常值的。我们可以进而限制到 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的一个开集 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上，此时层 $\pi_0(\mathcal{P})$ 是有限的。

然后我们要考察与 δ 不变量相关联的区块化 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}} = \bigsqcup_\delta \tilde{\mathcal{A}}_\delta^{\mathrm{ani}}$，其中 $a \in \tilde{\mathcal{A}}_\delta^{\mathrm{ani}}$ 的充分必要条件是 $\delta_a = \delta$。本章的关键结果是不等式 5.7.2 $\mathrm{codim}(\tilde{\mathcal{A}}_\delta^{\mathrm{ani}}) \geq \delta$，假设 $\deg(D)$ 相对于 δ 来说是很大的。在特征零的情形，这个不等式的证明可以建立在 Hitchin 纤维化的辛几何含义上，而不需要 $\deg(D)$ 上的条件，参照 [**60**]。麻烦的是，这个证明方法似乎不能搬到素特征的情形上。我们将使用一种局部整体的论法来绕过这个障碍。Goresky, Kottwitz 和 MacPherson 对于局部情形已经进行了类似的余维数计算，参照 [**28**]。整体情形的计算可以归结到局部情形的计算，只要 $\deg(D)$ 相对于 δ 来说是很大的。

似乎不太有指望能去掉上面这个假设。由于目前还没有办法消去这个假设，我们不得不在第 8 章使用一些非常复杂的数点技术。

5.1. 谱曲线的合族正规化. — 本节的目的是为后面的讨论树一个榜样。同时解释一下古典的平面曲线形变理论是怎样出现在这里的。读者可以在 Laumon 的文章 [**51**] 中找到更多的细节。

在 $G = \mathrm{GL}(r)$ 时，对于每个点 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$，我们都可以在直线丛 D 的总体空间中划出一条既约曲线 Y_a，参照 4.4。此时对称群 $\mathcal{P}_a$ 就是可逆 $\mathcal{O}_{Y_a}$ 模层的 Picard 叠形 $\mathrm{Pic}(Y_a)$。对 $\mathrm{Pic}(Y_a)$ 的结构分析可以借助 Y_a 的正规化来完成。设 $\xi : Y_a^\flat \to Y_a$ 是 Y_a 的正规化。函子 $\mathcal{L} \mapsto \xi^*\mathcal{L}$（把一个可逆 $\mathcal{O}_{Y_a}$ 模层对应到其在 ξ 下的逆像）定义了一个同态 $\mathrm{Pic}(Y_a) \to \mathrm{Pic}(Y_a^\flat)$。$Y_a$ 上的层短正合序列

$$1 \to \mathcal{O}_{Y_a}^\times \to \xi_*\mathcal{O}_{Y_a^\flat}^\times \to \xi_*\mathcal{O}_{Y_a^\flat}^\times/\mathcal{O}_{Y_a}^\times \to 1$$

诱导了上同调的长正合序列，它可以提供下面一些信息。ξ^* 的核 (是由这样的可逆 $\mathcal{O}_{Y_a}$ 模层 $\mathcal{L}$ 所组成的范畴，$\xi^*\mathcal{L}$ 上带有一个平凡化) 是一个代数群，它的点的集合是 $\mathrm{H}^0(Y_a, \xi_*\mathcal{O}_{Y_a^\flat}^\times/\mathcal{O}_{Y_a}^\times)$。进而，函子 ξ^* 是本质映满的。

这种情况下我们有两个不变量：

– $Y_a^\flat$ 的连通分支的集合 $\pi_0(Y_a^\flat)$；
– 整数 $\delta_a = \dim \mathrm{H}^0(Y_a, \xi_*\mathcal{O}_{Y_a^\flat}/\mathcal{O}_{Y_a})$，称为 Serre 的 δ 不变量。

在 $Y_a^\flat$ 的诸分支上取次数，则可以得到一个同态

$$\pi_0(\mathrm{Pic}(Y_a)) \to \mathbb{Z}^{\pi_0(Y_a^\flat)}$$

它是一个同构。至于 δ 不变量，它规定着仿射群 $\ker(\xi^*)$ 的维数。

Teissier 在 [**77**] 中引入了一族平面曲线的合族正规化的参模空间。我们首先回顾一下合族正规化的定义。

定义 5.1.1. — 设 $y : Y \to S$ 是一个平坦紧合态射，其纤维都是 1 维且既约的。Y 的一个合族正规化是指一个紧合的双有理态射 $\xi : Y^\flat \to Y$，它在 Y 的一个开集 U 上是一个同构，这个开集在 Y 相对于 S 的每一根纤维上都是稠密的，并且 $y \circ \xi$ 是一个平滑紧合态射。

在一个合族正规化中，不变量 δ 和 $\pi_0(\mathcal{P})$ 保持为局部常值的。

命题 5.1.2. — *在上述定义中的记号下:*

(1) 顺像 $y_*(\xi_*\mathcal{O}_{Y^\flat}/\mathcal{O}_Y)$ 是一个有限型局部自由 $\mathcal{O}_S$ 模层。
(2) 在 S 上有一个局部常值的平展位层 $\pi_0(Y^\flat)$，它在每个几何点 $s \in S$ 处的茎条恰好是 $Y_s^\flat$ 的连通分支集合。

证明. — 设 s 是 S 的一个几何点。把 $\xi_*\mathcal{O}_{Y^\flat}/\mathcal{O}_Y$ 限制到该点上，则其支集落在 $Y_s \smallsetminus U_s$ 上，这是一个零维概形。由此可知 $\mathrm{H}^1(Y_s, \xi_*\mathcal{O}_{Y^\flat}/\mathcal{O}_Y) = 0$，并且

$$\dim \mathrm{H}^0(Y_s, \xi_*\mathcal{O}_{Y^\flat}/\mathcal{O}_Y)$$

是 Y_s 与 $Y_s^\flat$ 的算术亏格的差值。从而这是 s 的一个局部常值函数。只消再使用凝聚层的基变换定理 [**56**, p. 50, 推论 2]。

考虑 Stein 分解 $Y^\flat \to S' \to S$，其中 $S' \to S$ 是一个有限态射，$Y^\flat \to S'$ 是一个射影态射，且具有连通的几何纤维。$Y^\flat \to S$ 上的平滑性条件表明，态射 $S' \to S$ 是有限且平展的。从而层 $\pi_0(Y^\flat/S)$ 本身可以表识为 S'。 □

我们将限于考虑谱曲线的情形。设 $\mathcal{B}$ 是谱曲线 Y_a 的合族正规化的参模空间，它在一个 k 概形 S 处的取值是 $(a, Y_a^\flat, \xi)$ 的疏群 $\mathcal{B}(S)$，其中 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(S)$ 是 $\mathcal{A}^\heartsuit$ 的一个 S 值点，$Y_a^\flat$ 是一个平滑射影 S 曲线，$\xi : Y_a^\flat \to Y_a$ 是 a 处的谱曲线 Y_a 的一个合族正规化。函子 $\mathcal{B}$ 可以表识为一个有限型 k 概形。

遗忘态射 $\mathcal{B} \to \mathcal{A}^\heartsuit$ 在 $\bar{k}$ 值点的层面上诱导了一个一一映射。事实上，对任意 $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\bar{k})$，$Y_a$ 的正规化 $Y_a^\flat$ 是唯一确定的。尽管如此，$\mathcal{B}$ 有比 $\mathcal{A}$ 更多的连通分支。事实上，根据前面的命题，两个不变量 $\pi_0(\widetilde{Y}_a)$ 和 δ_a 都是局部常值的。δ 不变量是上半连续的这个事实就可以诱导出一个与它相关联的区块化。

由于谱曲线落在一个曲面里，所以它只有平面奇异点。5.7.2 类型的等式实际上可以回溯到 Severi 平面曲线族的研究. 这个理论的现代版和严格化可以在下面一些文献中找到，Teissier [**77**]，Diaz, Harris [**22**]，Fantechi, Gottsche, Van Straten [**25**]。

5.2. 分合曲线的合族正规化. — 虽然在一般的典型群上，我们仍然有谱曲线 [**34**], [**59**]。不过更为系统一致的方法是采用带有 W 作用的分合曲线的合族正规化的参模空间。

设 S 是一个 k 概形。$\mathcal{A}^\heartsuit$ 的一个 S 值点 a 定义了一个态射 $a : X \times S \to \mathfrak{c}_D$。取覆叠 $\pi : \mathfrak{t}_D \to \mathfrak{c}_D$ 在此态射下的逆像，可以得到 $X \times S$ 的一个有限平坦覆叠 $\widetilde{X}_a$，它在每根纤维上都是一般位的 W 作用下的回旋子。

考虑一个函子 $\mathcal{B}$，它在 k 概形 S 处的取值是三元组 $(a, \widetilde{X}_a^\flat, \xi)$ 的疏群，其中：

- $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(S)$ 是 $\mathcal{A}^\heartsuit$ 的一个 S 值点。
- $\widetilde{X}_a^\flat$ 是一个平滑紧合 S 曲线，且带有一个 W 的作用。
- $\xi : \widetilde{X}_a^\flat \to \widetilde{X}_a$ 是一个 W 循变的合族正规化，参照 5.1.1。

设 $b=(a,\widetilde{X}_a^\flat,\xi)\in\mathcal{B}(S)$ 是 $\mathcal{B}$ 在连通概形 S 处的一个点。设 $\mathrm{pr}_S: X\times S\to S$ 是到 S 的投影。根据5.1.1，顺像 $(\mathrm{pr}_S)_*(\xi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}_a^\flat}/\mathcal{O}_{X_a^\flat})$ 是一个局部自由 $\mathcal{O}_S$ 模层。在 $\mathbf{W}$ 的阶数与 k 的特征互素的条件下，层

$$((\mathrm{pr}_S)_*(\xi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}_a^\flat}/\mathcal{O}_{X_a^\flat})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathfrak{t})^W$$

也是如此。因为 S 是连通的，所以这个局部自由 $\mathcal{O}_S$ 模层有单一的秩，记为 $\delta(b)$。

对任意 $a\in\mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$，分合曲线 $\widetilde{X}_a$ 都有唯一的正规化 $\widetilde{X}_a^\flat$，它是一条 $\bar{k}$ 上的平滑曲线。由此可知，遗忘态射 $\mathcal{B}\to\mathcal{A}^\heartsuit$ 在代数闭域上的值点这个层面上诱导了一个一一映射。

命题 5.2.1. — 上面所定义的函子 $\mathcal{B}$ 可以表识为一个有限型 k 概形。

证明. — 考虑函子 $\mathcal{B}'$，它在概形 S 处的取值是二元组 $(\widetilde{X}_a^\flat,\gamma)$ 的集合，这里：

– $\widetilde{X}_a^\flat$ 是 S 上的一个平滑紧合曲线，带有一个 W 的作用，和一个态射 $\pi_a^\flat:\widetilde{X}_a^\flat\to X\times S$，它是有限且平坦的，并且在 $X\times S$ 的某个开集 U 上甚至是一个 W 回旋子，这个开集 U 还可以映满 S。
– $\gamma:\widetilde{X}_a^\flat\to\mathfrak{t}_D\times S$ 是一个 W 循变的态射，且使得 $\mathfrak{t}_D$ 的正则半单开集的逆像在每个纤维中是稠密的。

设 $\mathcal{H}$ 是这样一个函子，它在概形 S 处的取值下面这种对象的同构类，一条 S 上的平滑射影曲线 $\widetilde{X}_a^\flat$，且带有一个 W 作用和一个态射 $\pi_a^\flat:\widetilde{X}_a^\flat\to X\times S$ 如上。这个函子可以表识为一个拟射影 k 概形，类似于 Hurwitz 概形的情形。态射 $h:\mathcal{B}'\to\mathcal{H}$ 同样可以表识为 $\mathcal{H}$ 上的一个向量丛的开集，因而 $\mathcal{B}'$ 可以表识为一个拟射影 k 概形。

此外，存在一个态射 $\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$。它把点 $b=(a,\widetilde{X}_a^\flat,\xi)\in\mathcal{B}(S)$ 对应到点 $b'=(\widetilde{X}_a^\flat,\gamma)$，其中 γ 是 $\xi:\widetilde{X}_a^\flat\to\widetilde{X}_a$ 和闭浸入 $\widetilde{X}_a\to\mathfrak{t}_D\times S$ 的合成。为了证明 $\mathcal{B}$ 的可表识性，只需验证下面的事实。 □

引理 5.2.2. — 态射 $\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ 是一个同构。

证明. — 为了证明态射 $\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ 是一个同构，我们设法构造出它的逆。设 $b'=(\widetilde{X}_a^\flat,\gamma)\in\mathcal{B}'(S)$。考虑顺像 $(\pi_a^\flat)_*\mathcal{O}_{X_a^\flat}$ 中的 W 不变部分。这是一个有限 $\mathcal{O}_{X\times S}$ 代数层，它在 S 上的每根纤维上都与 $\mathcal{O}_X$ 是一般位同构的。由于 X 是正规的，这就表明

$$((\pi_a^\flat)_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}_a^\flat})^W=\mathcal{O}_{X\times S}\quad。$$

使用等式 $k[\mathfrak{t}]^{\mathbf{W}}=\mathbf{c}$，参照1.1.1，则 W 循变的态射 $\gamma:\widetilde{X}_a^\flat\to\mathfrak{t}_D$ 诱导了一个态射 $a:X\times S\to\mathfrak{c}_D$。设 $\widetilde{X}_a$ 是 a 所对应的分合曲线。则态射 γ 可以穿过一个态射

$$\xi:\widetilde{X}_a^\flat\to\widetilde{X}_a$$

它在 S 上的每根纤维都是 X_a 的正规化。从而给出了一个点 $b=(a,\widetilde{X}_a^\flat,\xi)\in\mathcal{B}(S)$。这样构造的态射 $\mathcal{B}'\to\mathcal{B}$ 就是态射 $\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ 的逆，引理于是得证。 □

5.3. 平展开集 $\tilde{\mathcal{A}}$ 上的区块化. — 在下文中，我们将不直接讨论 Hitchin 基底 $\mathcal{A}$，而是考虑它的一个平展开集。这个选择改变了把迹公式的稳定化过程 1.13 进行几何化时的原始形式，但它帮我们消除了一些不太重要的困难。

5.3.1. — 设 $\infty \in X(\bar{k})$。考虑 $\tilde{\mathcal{A}} \otimes_k \bar{k}$ 的平展开集 $\tilde{\mathcal{A}}$，它是由这样的二元组 $(a, \tilde{\infty})$ 组成的，其中 $a \in \mathcal{A}$ 使得分合覆叠 $\widetilde{X}_a \to \overline{X}$ 在点 ∞ 上是平展的，$\tilde{\infty}$ 是 $\widetilde{X}_a$ 的一个位于 ∞ 之上的点。于是若 $\infty \in X(k)$，则在 $\mathcal{A}^\infty$ 上有一个自然的 k 结构。

上述构造可以改用图表式的语言来陈述，方法如下。点 $\infty \in X(\bar{k})$ 定义了一个态射 $\tilde{\mathcal{A}} \otimes_k \bar{k} \to \mathfrak{c}_{D,\infty}$，其中 $\mathfrak{c}_{D,\infty}$ 是 $\mathfrak{c}_D$ 在 ∞ 处的纤维，它把 $a \in \mathcal{A}$ 对应到点 $a(\infty)$。令 A^∞ 是 $\mathfrak{c}_{D,\infty}$ 的正则半单开集 $\mathfrak{c}_{D,\infty}^{\mathrm{rs}}$ 的逆像。事实上，存在一个卡氏图表

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{A}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{t}_{D,\infty} \arrow[d] \\
\mathcal{A}^\infty \arrow[r] & \mathfrak{c}_{D,\infty}
\end{tikzcd}
$$

它把 $\tilde{\mathcal{A}}$ 变成一个 A^∞ 上的 W_∞ 回旋子，这里 W_∞ 是有限平展 X 群概形 W 在 ∞ 处的纤维。

引理 5.3.2. — *假设 $\deg(D) > 2g$。则 $\tilde{\mathcal{A}}$ 是平滑且几何不可约的。*

证明. — 在 $\deg(D) > 2g$ 的前提条件下，上述图表中的线性映射 $\mathcal{A} \to \mathbf{c}_{D,\infty}$ 是满的，参照 4.7.2。由此可以导出该图表的上层箭头是一个平滑态射，且具有连通的纤维。由于 $\mathfrak{t}_{D,\infty}$ 是一个向量丛，故知 $\tilde{\mathcal{A}}$ 是平滑且几何不可约的。 □

现在我们定义纤维积：

$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}}$$

其中 $\mathcal{B}$ 是分合曲线的合族正规化的参模空间，参照 5.2.1。该态射在几何点的层面上定义了一个一一映射。$\tilde{\mathcal{B}} \otimes_k \bar{k}$ 的一个连通分支在 $\tilde{\mathcal{A}} \otimes_k \bar{k}$ 中的像是一个可构子集。根据定义，一个可构子集是有限个不可约局部闭子集的并集。设 $\tilde{\mathcal{A}}'$ 其中的一个不可约局部闭子集，$\tilde{\mathcal{B}}'$ 是它的逆像。态射 $\tilde{\mathcal{B}}' \to \tilde{\mathcal{A}}'$ 在几何点的层面上诱导了一个一一映射，特别的，它是拟有限的。应用 Zariski 主定理，则可以找到一个 $\tilde{\mathcal{A}}'$ 的一个稠密开集 $\tilde{\mathcal{A}}''$，使得态射 $\tilde{\mathcal{B}}' \to \tilde{\mathcal{A}}'$ 在其上是有限且紧贴的。进一步的分割并使用 Noether 归纳法，则可以得到一个区块化，由不可约局部闭子集组成

$$\tilde{\mathcal{A}} \otimes_k \bar{k} = \bigsqcup_{\psi \in \Psi} \tilde{\mathcal{A}}_\psi \quad 。 \tag{5.3.3}$$

且若 $\tilde{\mathcal{B}}_\psi$ 是 $\tilde{\mathcal{A}}_\psi$ 在 $\tilde{\mathcal{B}}$ 中的逆像，则态射 $\tilde{\mathcal{B}}_\psi \to \tilde{\mathcal{A}}_\psi$ 是一个有限紧贴态射。

经过进一步的分割，则可以假设每个区块 $\tilde{\mathcal{A}}_\psi$ 的闭包都是另外一些区块的并集。于是可以在区块的集合 Ψ 上定义出一个 (偏) 序关系。由于 $\tilde{\mathcal{A}}$ 是几何不可约的，故知集合 Ψ 中有一个最大元，记为 ψ_G。

5.4. 单值化不变量. — 下面我们在区块化 5.3.3 中的每个区块上都构造一个单值化不变量。

设 G 是 $\mathbf{G}$ 的一个偏转，由同态 $\rho_G^\bullet : \pi_1(X,\infty) \to \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 所定义。设 Θ 是几何基本群 $\pi_1(\overline{X},\infty)$ 在 $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 中的像，它是一个有限阶子群。

5.4.1. — 设 $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}) \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$。设 U 是 $\overline{X}$ 的一个开集，并且是使分合覆叠 $\widetilde{X}_a \to \overline{X}$ 在其上平展的最大开集。特别的，它包含 ∞。根据 1.3.6，我们有一个卡氏图表：

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(U,\infty) & \xrightarrow{\pi_{\tilde{a}}^\bullet} & \mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_1(\overline{X},x) & \xrightarrow[\rho_G^\bullet]{} & \mathrm{Out}(\mathbf{G})
\end{array}$$

设 $W_{\tilde{a}}$ 是 $\pi_{\tilde{a}}^\bullet$ 在 $\mathbf{W} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 中的像， $I_{\tilde{a}}$ 是同态 $\pi_1(U,\infty) \to \pi_1(\overline{X},\infty)$ 的核的像。根据构造方法， $W_{\tilde{a}}$ 包含在有限子群 $\mathbf{W} \rtimes \Theta$ 之中， $I_{\tilde{a}}$ 是 $W_{\tilde{a}}$ 的一个正规子群，包含在 $W_{\tilde{a}} \cap \mathbf{W}$ 之中。

5.4.2. — 现在我们把上述定义用覆叠的语言改写一下。设 $X_\rho \to \overline{X}$ 是一个连通有限平展 Galois 覆叠， Galois 群为 Θ，对应于满同态

$$\rho_G^\bullet : \pi_1(\overline{X},\infty) \to \Theta \quad 。$$

根据构造方法，它带有一个点 ∞_ρ，位于 ∞ 之上。把分合曲线 $\widetilde{X}_a$ 和有限平展覆叠 $X_\rho \to X$ 取纤维积

$$\widetilde{X}_{\rho,a} = \widetilde{X}_a \times_X X_\rho \quad 。$$

则曲线 $\widetilde{X}_{\rho,a}$ 带有一个 $\mathbf{W} \rtimes \Theta$ 的作用。它的正规化 $\widetilde{X}_{\rho,a}^\flat$ 也是如此。设 $C_{\tilde{a}}$ 是 $\widetilde{X}_{\rho,a}^\flat$ 的那个包含 $\tilde{\infty}_\rho = (\tilde{\infty}, \infty_\rho)$ 的连通分支。群 $W_{\tilde{a}}$ 是 $\mathbf{W} \rtimes \Theta$ 的一个子群，由那些把该分支映到自身的元素所组成。则子群 $I_{\tilde{a}}$ 是由 $W_{\tilde{a}}$ 中的那些在 $C_{\tilde{a}}$ 上至少有一个不动点的元素所生成的。由于 $C_{\tilde{a}}$ 投影到 X_ρ 上，并且群 Θ_ρ 在其上的作用是自由的，故知 $I_{\tilde{a}}$ 包含在投影 $W_{\tilde{a}} \to \Theta_\rho$ 的核之中，如此一来 $I_{\tilde{a}} \subseteq W_{\tilde{a}} \cap \mathbf{W}$。

命题 5.4.3. — *映射 $\tilde{a} \mapsto (I_{\tilde{a}}, W_{\tilde{a}})$ 在区块化 5.3.3 的每个区块 $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ 上都是常值的。*

证明. — 根据区块化 5.3.3 的构造方法，态射 $\tilde{\mathcal{B}}_\psi \to \tilde{\mathcal{A}}_\psi$ 是一个有限紧贴态射。在连通概形 $\tilde{\mathcal{B}}_\psi$ 上，分合曲线的正规化 $\tilde{X}_a^\flat \to \tilde{X}_a$ 可以合成一族，而且此命题前面的那些构造方法都可以如此。从而有一条平滑紧合的相对曲线

$$\tilde{X}_{\rho,\psi} \to \tilde{\mathcal{B}}_\psi$$

带有一个 $\mathbf{W} \rtimes \Theta$ 的作用，和一个截面 $\tilde{\infty}_\rho$。与引理 5.1.2 的情况相同，在 $\mathcal{B}_\psi$ 上存在一个局部常值平展位层 $\pi_0(\tilde{X}_{\rho,\psi}/\mathcal{B}_\psi)$，它汇集了 $\tilde{X}_{\rho,\psi}/\mathcal{B}_\psi$ 的诸纤维的不可约分支的集合。群 $\mathbf{W} \rtimes \Theta$ 作用在这个层上，并且在每根茎条上给出的作用都是传递的。$\tilde{\infty}_\rho$ 所导出一个截面表明，这个层是常值的。命题于是得证。 □

5.4.4. — 由上述命题可以得到一个映射

$$\psi \mapsto (I_\psi, W_\psi)$$

定义在区块化5.3.3的区块集合Ψ上，并且与定义在几何点层面上的映射$\tilde{a} \mapsto (I_{\tilde{a}}, W_{\tilde{a}})$是相容的。

引理 5.4.5. — 考虑二元组(I_1, W_1)的集合，其中W_1是$\mathbf{W} \rtimes \Theta_\rho$的一个子群，$I_1$是$W_1$的一个正规子群，以及该集合上的一个(偏)序：$(I_1, W_1) \leq (I_2, W_2)$当且仅当$W_1 \subseteq W_2$且$I_1 \subseteq I_2$。则映射$\psi \mapsto (I_\psi, W_\psi)$是一个递增映射。

证明. — 设$S = \mathrm{Spec}(R)$是一个形式线元，$\eta = \mathrm{Spec}(k(\eta))$是一般点，$s = \mathrm{Spec}(k(s))$是几何闭点。设$\tilde{a} : S \to \tilde{\mathcal{A}}$是一个态射，其中$\tilde{a}(\eta) \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}}$且$\tilde{a}(s) \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}'}$。我们需要证明

$$(I_{\psi'}, W_{\psi'}) \leq (I_\psi, W_\psi) \quad 。$$

考虑$X \times S$的覆叠$\widetilde{X}_{\rho,a}$，它是对覆叠$X_\rho \times \mathbf{t}_D \to \mathfrak{c}_D$取关于$a$的逆像而得到的。考虑$\widetilde{X}_{\rho,a}$的正规化$\widetilde{X}^\flat_{\rho,a}$。经过适当的线元紧贴基变换，可以假设一般纤维$(\widetilde{X}^\flat_{\rho,a})_\eta$是一个$k(\eta)$上的平滑曲线，从而可以用这根一般纤维来计算$(I_\psi, W_\psi)$。与此相反，特殊纤维$(\widetilde{X}^\flat_{\rho,a})_s$一般不是正规的，于是必须取它的正规化$(\widetilde{X}^\flat_{\rho,a})^\flat_s$才能计算$(I_{\psi'}, W_{\psi'})$。

点$\tilde{a}$定义了$(\widetilde{X}^\flat_{\rho,a})_\eta$的一个截面。令$C_{\tilde{a}}$是$(\widetilde{X}^\flat_{\rho,a})_\eta$的包含了此截面的连通分支。则群$W_{\tilde{\psi}}$是$\mathbf{W} \rtimes \Theta$的一个子群，由那些把该分支映到自身的元素所组成。设$C_{\tilde{a}(s)}$是$(\widetilde{X}^\flat_{\rho,a})^\flat_s$的一个连通分支，包含了$\tilde{a}(s)$所定义的点。群$W_{\tilde{\psi}'}$是$\mathbf{W} \rtimes \Theta$的子群，由那些把$C_{\tilde{a}(s)}$映到自身的元素所组成。由于$C_{\tilde{a}(s)}$是$C_{\tilde{a}}$的特殊纤维的正规化里的一个连通分支，我们有包含关系$W_{\psi'} \subseteq W_\psi$。如果$W_{\psi'}$的一个元素在$C_{\tilde{a}(s)}$中有一个不动点，则它必然在$C_{\tilde{a}}$中也有不动点，故得第二个包含关系$I_{\psi'} \subseteq I_\psi$。 □

5.4.6. — 对任意二元组(I_-, W_-)，其中W_-是$\mathbf{W} \rtimes \Theta$的一个子群，$I_-$是$W_-$的一个包含在$\mathbf{W}$中的正规子群，由上述引理可知，满足条件$W_\psi \subseteq W_-$且$I_\psi \subseteq I_-$的那些区块$\tilde{\mathcal{A}}_\psi$的并集是$\tilde{\mathcal{A}}$的一个闭子概形。还可以知道，满足条件$W_\psi = W_-$且$I_\psi = I_-$的那些区块$\tilde{\mathcal{A}}_\psi$的并集是上述闭子概形的一个开集。我们把$\tilde{\mathcal{A}}$的这个局部闭子概形记为$\tilde{\mathcal{A}}_{(I_-, W_-)}$。则有下面的区块化

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigsqcup_{(I_-, W_-)} \tilde{\mathcal{A}}_{(I_-, W_-)}$$

如果$\infty \in X(k)$，则$\tilde{\mathcal{A}}$定义在k上，但是上述区块化未必定义在k上。

5.4.7. — 由引理5.4.5还可以推出，那些满足$\mathbf{t}^{W_\psi} = 0$的区块$\tilde{\mathcal{A}}_\psi$的并集是$\tilde{\mathcal{A}}$的一个开集。根据4.10.3，一个点$\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}) \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$落在这个开集之中的充分必要条件是，$a$落在4.10.5所定义的集合$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$之中。$\tilde{\mathcal{A}}$上的这个区块化诱导了$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$上的一个区块化

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}} = \bigsqcup_{\psi \in \Psi^{\mathrm{ani}}} \tilde{\mathcal{A}}_\psi$$

其中Ψ^{ani}是Ψ的一个子集。若$\infty \in X(k)$，则$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$定义在$k$上，但上述区块化未必定义在$k$上。

引理 5.4.8. — 假设 $\deg(D) > 2g$。设 ψ_G 是 Ψ 中的最大元。则有

$$(I_{\psi_G}, W_{\psi_G}) = (\mathbf{W}, \mathbf{W} \rtimes \Theta) \quad 。$$

证明. — 根据构造方法，$W_\psi \subseteq \mathbf{W} \rtimes \Theta$ 且 $I_\psi \subseteq \mathbf{W}$。从而只需证明这个界是可以达到的。下面证明，只要 a 落在开集 $\mathcal{A}^\diamondsuit$ 中，则在点 $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty})$ 处就可以达到。已经知道这个开集在 $\deg(D) > 2g$ 的前提条件下不是空的，参照 4.7.1。

根据 4.7.5，我们已经知道当 $a \in \mathcal{A}^\diamondsuit$ 时 $W_{\tilde{a}} = \mathbf{W} \rtimes \Theta$。此时子群 $I_{\tilde{a}}$ 是 $\mathbf{W}$ 的一个正规子群。曲线 $\widetilde{X}_{\bar{\rho},a}$ 与 $X_\rho \times \mathbf{t}$ 中所有的墙 h_α（对应于 $\mathbf{g}$ 中的根 α）都是横截交叉的，于是群 $I_{\tilde{a}}$ 是 $\mathbf{W}$ 的一个正规子群，包含每个墙 h_α 所给出的反射 s_α。由此可知 $I_a = \mathbf{W}$。 □

5.5. $\pi_0(\mathcal{P})$ 的描述法. — 在本节中，我们要描述层 $\pi_0(\mathcal{P})$ 在区块化 5.4.6 的每个区块 $\tilde{\mathcal{A}}_{(I_-,W_-)}$ 上的形状。复习一下这个层的定义。由于 Picard 叠形 $\mathcal{P} \to \mathcal{A}^\heartsuit$ 是平滑的 4.3.5，在 $\mathcal{A}^\heartsuit$ 上有唯一一个平展位层 $\pi_0(\mathcal{P})$ 使得它在任何点 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ 处的茎条恰好是 $\mathcal{P}_a$ 的连通分支群 $\pi_0(\mathcal{P}_a)$。这可由 Grothendieck 的一个定理推出来，参照 [**30**, 15.6.4]，也参考 [**57**, 6.2]。

我们也要考虑一个中间性的问题，即给出层 $\pi_0(\mathcal{P}')$ 的描述，这是 Picard 叠形 $\mathcal{P}'$ 的连通分支层，该叠形在点 $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ 处的纤维分类了 $\overline{X}$ 上的 J_a^0 回旋子。满同态 $\mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ 诱导了一个满同态 $\pi_0(\mathcal{P}') \to \pi_0(\mathcal{P})$。令 $\tilde{\mathcal{P}}$ 和 $\tilde{\mathcal{P}}'$ 是 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'$ 在 $\tilde{\mathcal{A}}$ 上的限制。

根据 4.10.3，对任意点 $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$，纤维 $\pi_0(P'_{\tilde{a}})$ 都可以写成下面的样子

$$\pi_0(\mathcal{P}'_a) = (\hat{\mathbf{T}}^{W_{\tilde{a}}})^*$$

这里的记号 $(\_)^*$ 表示有限型 Abel 群和 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上的有限型可对角化群之间的对偶。同样，$\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 可以等同于 $\pi_0(\mathcal{P}'_a)$ 的商，与 4.10.3 中所定义的子群 $\hat{\mathbf{T}}(I_{\tilde{a}}, W_{\tilde{a}})$ 相对偶。下面的命题就可以完全地确定层 $\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}')$ 和 $\pi_0(\tilde{\mathcal{P}})$。

命题 5.5.1. — 对任意 $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}) \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$，命题 4.10.3 中的满同态

$$\mathbf{X}_* \to \pi_0(\mathcal{P}'_a) = (\mathbf{X}_*)_{W_{\tilde{a}}}$$

都可以插入一个从常值层 $\mathbf{X}_*$ 到 $\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}')$ 的典范满同态之中。

证明. — 设 $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}) \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$。使用 $\widetilde{X}_{\rho,a}$ 的几何点 $\tilde{\infty}_\rho = (\tilde{\infty}, \infty_\rho)$ 可以把 J_a 在 ∞ 处的纤维等同于固定的环面 $\mathbf{T}$，参照 2.4.7。根据 [**57**, 6.8]，这个等同定义了一个从常值层 $\mathbf{X}_*$ 到 $\tilde{\mathcal{P}}'$ 同态，从而也定义了一个同态

$$\mathbf{X}_* \times \tilde{\mathcal{A}} \to \pi_0(\mathcal{P}') \quad 。$$

在每根纤维上，它就是 4.10.3 中的满同态。 □

5.5.2. — 借助这个引理，我们可以对 $\pi_0(\mathcal{P}')$ 和 $\pi_0(\mathcal{P})$ 在 $\tilde{\mathcal{A}}$ 上的限制给出一个非常具体的描述。对于 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的一个平展开集 U，区块化 5.4.6 在 U 上诱导了一个区块化

$$U = \bigsqcup_{(I_-,W_-)} U_{(I_-,W_-)} \quad 。$$

对任意二元组 (I_1, W_1)，其中 W_1 是 $\mathbf{W} \rtimes \Theta$ 的子群，I_1 是 W_1 的正规子群，所谓 U 是一个 (I_1, W_1) 型小开集，是指在上述区块化中，$U_{(I_1,W_1)}$ 是那个唯一的非空闭区块。易见不同类型的小开集构成 $\tilde{\mathcal{A}}$ 上的平展拓扑的一个基，因为任何开集都可以被一族小开集所覆盖。从而为了定义一个 $\tilde{\mathcal{A}}$ 上的平展位层，只需指定它在小开集上的截面，以及这些截面之间的传递法则。

考虑层 Π' 和 Π，它们都是常值层 $\mathbf{X}_*$ 的商，定义如下。对于一个 (I_1, W_1) 型小开集 U_1，令

$$\begin{aligned}\Gamma(U, \Pi') &= (\hat{\mathbf{T}}^{W_1})^* = (\mathbf{X}_*)_{W_1}\\ \Gamma(U, \Pi) &= \hat{\mathbf{T}}(I_1, W_1)^*\end{aligned}$$

设 U_2 是 U_1 的一个 (I_2, W_2) 型平展小开集。由于 $U_{(I_1,W_1)}$ 是 U_1 中的唯一的非空闭区块，故有不等式

$$(I_1, W_1) \leq (I_2, W_2)\quad。$$

于是有不变量子群的下述包含关系

$$\hat{\mathbf{T}}^{W_2} \subseteq \hat{\mathbf{T}}^{W_1}$$

故有传递态射

$$\Gamma(U_1, \Pi') \to \Gamma(U_2, \Pi')\quad。$$

层 Π 中的传递态射的定义则缘自下面的引理。

引理 5.5.3. — *若 $(I_1, W_1) \leq (I_2, W_2)$，则有包含关系*

$$\hat{\mathbf{T}}(I_2, W_2) \subseteq \hat{\mathbf{T}}(I_1, W_1)\quad。$$

证明. — 设 κ 是 $\hat{\mathbf{T}}$ 的一个元素，$\hat{\mathbf{G}}_\kappa$ 是它在 $\hat{\mathbf{G}}$ 中的中心化子，$\hat{\mathbf{H}}$ 是其单位分支。设 $(\mathbf{W} \rtimes \Theta)_\kappa$ 是 κ 在 $\mathbf{W} \rtimes \Theta$ 中的中心化子，$\mathbf{W_H}$ 是 $\hat{\mathbf{H}}$ 的 Weyl 群。若 $\kappa \in \hat{\mathbf{T}}(I_2, W_2)$，则有 $I_2 \subseteq \mathbf{W_H}$ 和 $W_2 \subseteq (\mathbf{W} \rtimes \Theta)_\kappa$。由此可以导出 $I_1 \subseteq \mathbf{W_H}$ 和 $W_1 \subseteq (\mathbf{W} \rtimes \Theta)_\kappa$。 □

下面的结果可由 5.5.1 和 4.10.3 立得。

推论 5.5.4. — *满同态 5.5.1 取商可以给出同构 $\pi_0(\mathcal{P}')|_{\tilde{\mathcal{A}}} = \Pi'$ 和 $\pi_0(\mathcal{P})|_{\tilde{\mathcal{A}}} = \Pi$。*

在 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的开集 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上，参照 5.4.7，它们都是有限 Abel 群层。

5.6. δ 常值的区块化. — 对任意 $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$，我们在 4.9 中都定义了一个整数 $\delta(a)$。由此可以诱导出一个函数 $\tilde{a} \mapsto \delta(a)$，这里 $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}) \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$。

引理 5.6.1. — *函数 $\tilde{a} \mapsto \delta(a)$ 在每个区块 $\tilde{\mathcal{A}}_\psi$ $(\psi \in \Psi)$ 上都是常值的。*

证明. — 经过一次有限紧贴基变换，$\tilde{\mathcal{B}}_\psi \to \tilde{\mathcal{A}}_\psi$，分合曲线在 $\tilde{\mathcal{B}}_\psi$ 上的限制拥有一个合族正规化。令 $\pi_\psi : \widetilde{X}_\psi \to \tilde{\mathcal{B}}_\psi$ 是分合曲线在 $\tilde{\mathcal{B}}_\psi$ 上的限制，$\xi : \widetilde{X}_\psi^\flat \to \widetilde{X}_\psi$ 是它的合族正规化。根据 5.1.2，层

$$\pi_{\psi,*}(\xi_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}_\psi^\flat} / \mathcal{O}_{\widetilde{X}_\psi})$$

是一个有限型局部常值 $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{B}}_\psi}$ 模层。这个模层上带有一个 W 的作用。由于 $\mathbf{W}$ 的阶数与特征互素，故知

$$(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{B}}_\psi}\otimes\mathfrak{t})^W$$

同样是局部常值的。于是由公式 4.9.4 就可以推出结论。 □

5.6.2. — 由此可以导出一个映射

$$\delta:\Psi\to\mathbb{N}$$

使得对任意 $\tilde{a}=(a,\tilde{\infty})\in\tilde{\mathcal{A}}_\psi(\bar{k})$，均有 $\delta_a=\delta(\psi)$。这个函数是递减的，也就是说，若 $\psi\geq\psi'$，则有 $\delta(\psi)\leq\delta(\psi')$。这是缘自平滑交换群概形上的一个熟知的结果。但我们不能直接应用到 $\mathcal{P}$ 上，因为它不是一个群概形，而只是一个 Picard 叠形。不过我们可以转而考虑在 ∞ 处带有一个平凡化的 J_a 回旋子的叠形。$\psi\mapsto\delta(\psi)$ 的递减性可由此推出。

引理 5.6.3. — 设 $P\to S$ 是一个有限型平滑交换群概形。函数 $s\mapsto\tau_s$（把一个几何点 s 对应到 P_s 的 Abel 部分的维数）是一个下半连续函数。反之，函数 $s\mapsto\delta_s$（把一个几何点 s 对应到 P_s 的仿射部分的维数）是一个上半连续函数。

证明. — 可以假设 P 的纤维都是连通的。还可以假设 S 是严格 Hensel 的。选取素数 ℓ 与 S 的剩余特征互素。乘 ℓ 态射的核 $P[\ell]$ 可以表识为一个拟有限且平展的子群概形。对 S 的任意几何点 s， $P_s[\ell]$ 的长度由下面的公式给出

$$\lg(P_s[\ell])=\mu_s\ell+\tau_s\ell^2$$

其中 μ_s 是 P_s 的乘性部分的维数， τ_s 是它的 Abel 部分的维数。若 s_0 是 S 的几何闭点， s_1 是它的几何一般点，则有不等式

$$\lg(P_{s_0}[\ell])\leq\lg(P_{s_1}[\ell])$$

因为 $P[\ell]$ 在 Hensel 基底 S 上是平展的，特殊纤维中的任何点都可以扩展为一个 S 截面。由于不等式

$$\mu_{s_0}\ell+\tau_{s_0}\ell^2\leq\mu_{s_1}\ell+\tau_{s_1}\ell^2$$

对任意 ℓ 与 S 的剩余特征互素的素数都是成立的，故有

$$\tau_{s_0}\leq\tau_{s_1}\quad。$$

另一个不等式可由此推出，因为 $\delta_s+\tau_s=\dim(P_s)$ 不依赖于点 s。 □

引理 5.6.4. — 假设 $\deg(D)>2g$。则有 $\delta(\psi_G)=0$，其中 ψ_G 是 Ψ 中的最大元。

证明. — 可由 4.9.4 立得。 □

5.6.5. — 根据 5.6.2，对任意整数 $\delta\in\mathbb{N}$，所有满足 $\delta(\psi)\geq\delta$ 的区块 $\tilde{\mathcal{A}}_\psi$ 的并集是 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的一个闭集。由此可知，

$$\tilde{\mathcal{A}}_\delta=\bigsqcup_{\delta(\psi)=\delta}\tilde{\mathcal{A}}_\psi$$

是该闭子概形的一个开集。从而它是 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的一个局部闭子概形。这就得到了一个区块化

$$\tilde{\mathcal{A}}=\bigsqcup_{\delta\in\mathbb{N}}\tilde{\mathcal{A}}_\delta$$

称为 δ 常值的区块化。

5.6.6. — 由此可以导出开集 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上的一个区块化

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}} = \bigsqcup_{\delta\in\mathbb{N}} \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}_{\delta}$$

又根据 4.9.3，对任意 $\tilde{a}=(a,\tilde{\infty})\in\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}_{\delta}(\bar{k})$， $\mathcal{P}^0_a$ 的仿射部分的维数都等于 δ。

5.7. 根赋值给出的区块化. — 设 $\bar{v}$ 是 $\overline{X}$ 的一个几何点，$\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ 是 $\overline{X}$ 在 $\bar{v}$ 处的完备化，$\overline{F}_{\bar{v}}$ 是它的分式域。选定一个齐化元 $\varepsilon_{\bar{v}}$，则可以把 $\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ 等同于环 $\bar{k}[[\varepsilon_{\bar{v}}]]$。对于 ρ_G 在 $\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ 上的限制取定一个平凡化，它使 G 分裂，并且给出一个同构 $W=\mathbf{W}$。

我们简要地复习一下 Goresky, Kottwitz 和 MacPherson 在 [**28**] 中提出的由根赋值所给出的 $\mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_{\bar{v}})$ 上的区块化。这些区块比我们这里用合族正规化定义出的区块更精细，自然也比 δ 常值的区块更精细。

设 $a\in\mathfrak{c}^{\heartsuit}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$， $J_a=a^*J$ 是由此导出的 $\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ 上的平滑群概形。J_a 的一般纤维是一个环面，且其单值化群可以用分合覆叠来描述，参照 2.4.7。设 $\overline{F}^{\mathrm{sep}}_{\bar{v}}$ 是 $\overline{F}_{\bar{v}}$ 的可分代数闭包。设 $x\in\mathfrak{t}(\overline{F}^{\mathrm{sep}}_{\bar{v}})$ 是 $\mathfrak{t}$ 的一个 $\overline{F}^{\mathrm{sep}}_{\bar{v}}$ 值点，像为 $a\in\mathfrak{c}(\overline{F}_{\bar{v}})$。该点定义了一个同态

$$\pi^{\bullet}_a : I_{\bar{v}}\to\mathbf{W}$$

其中 $I_{\bar{v}}=\mathrm{Gal}(\overline{F}^{\mathrm{sep}}_{\bar{v}}/\overline{F}_{\bar{v}})$。由于 k 的特征不整除 $\mathbf{W}$ 的阶，$\pi^{\bullet}_a$ 可以穿过 $I_{\bar{v}}$ 的浅层分歧群 $I^{\mathrm{tame}}_{\bar{v}}$。为了与 [**28**] 中的记号相协调，我们取定 $I^{\mathrm{tame}}_{\bar{v}}$ 的一个拓扑生成元，并且令 w_a 是该生成元在 $\pi^{\bullet}_a$ 下的像。

对任意根 $\alpha\in\Phi$，均有一个整数

$$r(\alpha):=\mathrm{val}_{\bar{v}}(\alpha(x))$$

其中 $\mathrm{val}_{\bar{v}}$ 是 $\overline{F}_{\bar{v}}$ 上的赋值 $\mathrm{val}_{\bar{v}}(\varepsilon_{\bar{v}})=1$ 到 $\overline{F}^{\mathrm{sep}}_{\bar{v}}$ 上的唯一延拓。这样就得到了一个函数 $r:\Phi\to\mathbb{Q}_+$。

二元组 (w_a,r) 依赖于 x 的选择，但它在 $\mathbf{W}$ 作用下的轨道不依赖。我们把 (w_a,r) 在 $\mathbf{W}$ 作用下的轨道记为 $[w_a,r]$。

存在明显的等式

$$\sum_{\alpha\in\Phi} r(\alpha)=\deg_{\bar{v}}(a^*\mathfrak{D}_G)=d_{\bar{v}}(a) \quad 。$$

不变量

$$c_{\bar{v}}(a)=\dim(\mathbf{t})-\dim(\mathbf{t}^{w_a})$$

是 J_a 的 Néron 范型的环面秩升降。根据 Bezrukavnikov 公式，我们有

$$\delta_{\bar{v}}(a)=\frac{d_{\bar{v}}(a)-c_{\bar{v}}(a)}{2} \quad 。$$

设 $\mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_{\bar{v}})_{[w,r]}$ 是指定不变量 $[w,r]$ 后的 $a\in\mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_{\bar{v}})$ 构成的子集。根据 [**28**]，这个集合是可容的，也就是说，存在一个整数 N 和 $\mathfrak{c}(\mathcal{O}_{\bar{v}}/\varepsilon^N_{\bar{v}}\mathcal{O}_{\bar{v}})$（看作是 $\bar{k}$ 概形）的一个局部闭子概形 Z，使得 $\mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_{\bar{v}})_{[w,r]}$ 就是 $Z(\bar{k})$ 在映射 $\mathfrak{c}(\mathcal{O}_{\bar{v}})\to\mathfrak{c}(\mathcal{O}_{\bar{v}}/\varepsilon^N_{\bar{v}}\mathcal{O}_{\bar{v}})$ 下的逆像。此时我们称 $\mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_{\bar{v}})_{[w,r]}$ 是 N 级可容的。

他们于是定义区块 $\mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_{\bar{v}})_{[w,r]}$ 的余维数为 Z 在 $\mathfrak{c}(\mathcal{O}_{\bar{v}}/\varepsilon_{\bar{v}}^N\mathcal{O}_{\bar{v}})$（看作是 $\bar{k}$ 概形）中的余维数。这个余维数显然不依赖于级 N 的选择，只要让 N 充分大。令 $\mathrm{codim}[w,r]$ 是这个余维数。根据 [**28**, 8.2.2]，我们有精确公式

$$\mathrm{codim}[w,r] = d(w,r) + \frac{d_{\bar{v}}(a) + c_{\bar{v}}(a)}{2}$$

其中的整数 $d(w,r)$ 就是 $\mathfrak{t}_w(\mathcal{O})_r$ 在 $\mathfrak{t}_w(\mathcal{O})$ 中的余维数，这是上述文献中的记号。我们现在只给出一个较粗略的估计。

命题 5.7.1. — 若 $\delta_a > 0$，则有不等式

$$\mathrm{codim}[w,r] \geq \delta_a + 1 \quad 。$$

证明. — 易见

$$\mathrm{codim}[w,r] = \delta_{\bar{v}}(a) + c_{\bar{v}}(a) + d(w,r)$$

其中 $\delta_{\bar{v}}(a) = (d_{\bar{v}}(a) - c_{\bar{v}}(a))/2$。若 w 不是 W 的单位元，则有 $c_{\bar{v}}(a) \geq 1$。若 $w = 1$，则根据 [**28**, 8.2.2] 的定义，$d(w,r)$ 是 $\mathfrak{t}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})_r$ 在 $\mathfrak{t}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 中的余维数，其中 $\mathfrak{t}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})_r$ 是 $\mathfrak{t}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ 的一个可容子集，由那些具有根赋值 r 的元素所组成。若 $\delta_{\bar{v}}(a) > 0$，则有 $r \neq 0$，如此一来这个子集的余维数就是 > 0 的。从而 $d(w,r) \geq 1$。从而在这两个情形下，均可得到所要的不等式。 □

命题 5.7.2. — 对一个固定的群 G，和任意 $\delta \in \mathbb{N}$，可以找到一个整数 N，依赖于 G 和 δ，使得当 $\deg(D) > N$ 时，δ 常值区块 $\mathcal{A}_\delta$ 的余维数总是大于等于 δ。

证明. — 设 $\delta_\bullet$ 是 δ 的一个自然数分割 $\delta = \delta_1 + \cdots + \delta_n$，考虑 $\mathcal{A}^{\heartsuit} \times X^j$ 的子概形 $Z_{\delta_\bullet}$，它是由这样的多元组 $(a; x_1, \ldots, x_n)$ 所组成，其中 $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$，并且 $x_1, \ldots, x_n \in X(\bar{k})$ 使得局部 δ 不变量 $\delta_{x_i}(a)$ 取值为 δ_i。可以把 $Z_{\delta_\bullet}$ 进一步分成一些区块 $Z_{[w_\bullet, r_\bullet]}$ 的并集，其中 $Z_{[w_\bullet, r_\bullet]}$ 是由这样的 $(a; x_1, \ldots, x_n)$ 组成的，它使得 a 在 $\mathfrak{c}^{\heartsuit}(\overline{\mathcal{O}}_{x_i})$ 中的像落在根赋值区块 $\mathfrak{c}^{\heartsuit}(\overline{\mathcal{O}}_{x_i})_{[w_i, r_i]}$ 之中。假设这个区块是 N_i 级可容的。如果 $\deg(D)$ 相对于 δ 来说是很大的，则线性映射

$$\mathcal{A} \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{c}(\overline{\mathcal{O}}_{x_i}/\varepsilon^{N_i}\overline{\mathcal{O}}_{x_i})$$

是满的。由此可知 $Z_{[w_\bullet, r_\bullet]}$ 在 $\mathcal{A} \times X^n$ 中的余维数至少等于

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta_i + 1) \quad 。$$

由此可知它在 $\mathcal{A}$ 中的像的余维数至少等于 $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$。命题可由此导出。 □

我们觉得这个不等式的成立并不需要 $\deg(D)$ 相对于 δ 来说是很大的这个前提条件。对于 $\mathcal{P}_a$ 在 $\mathcal{M}_a$ 上的无穷小作用的计算表明，这在特征零的情形是对的，参考 [**60**, p. 4]。

6. 不迷向开集上的上同调

在本章中，我们将陈述几何稳定化定理6.4.1和6.4.2。这里的核心问题是用初分式语言来描述顺像的错致上同调层

$$^p\mathrm{H}^n(f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

相对于$\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$作用的某个同型分支。虽然由6.4.2可以推出Langlands和Shelstad的基本引理1.11.1，但是1.11.1的证明实际上构成6.4.2的证明中的一个步骤。

6.1. 不迷向开集. — 让点∞变动，则由5.4.7和5.5.4可知，存在一个$\mathcal{A}^\heartsuit$的开集$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$，$a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$当且仅当连通分支群$\pi_0(\mathcal{P}_a)$是有限的。再由4.11.2可知，对任意$a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$和$(E,\phi) \in \mathcal{M}_a(\bar{k})$，$\mathrm{Aut}(E,\phi)$都是一个既约有限群，这里假设$\mathbf{W} \rtimes \Theta$的阶数与特征互素。

6.1.1. — 在[**24**, II.4]中，Faltings证明了Higgs丛的半稳定约化定理，这个定理说，X上的一个半稳定Higgs丛，若系数取在离散赋值环的分式域里，则可以经过一次可分有限扩张而扩展为环上的一个Higgs丛，进而若特殊纤维上的Higgs丛是稳定的，则这个扩展是唯一的。Higgs丛的稳定和半稳定性的定义可参考[**24**]。这里仅指出，它与G回旋子上的定义基本上是一样的，唯一的区别是这里只考虑E的与Higgs场ϕ相容的抛物型约化。这就足以证明下面的引理。

引理 6.1.2. — 设$a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$且$(E,\varphi) \in \mathcal{M}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$。则$(E,\phi)$是稳定的。

证明. — 由于$a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$，故知$E$没有与$\phi$相容的抛物型约化。 □

现在我们可以应用Faltings在[24]中的结果以得到下面的命题。

命题 6.1.3. — Picard叠形$\mathcal{P}$在$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$上的限制$\mathcal{P}^{\mathrm{ani}}$是$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$上的一个分离有限型的平滑Deligne-Mumford叠形。$\mathcal{M}$的开集$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}} := \mathcal{M} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$是$k$上的一个分离有限型的平滑Deligne-Mumford叠形。

进而，存在一个粗糙参模空间M^{ani}，它使态射$f^{\mathrm{ani}} : \mathcal{M}^{\mathrm{ani}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$可以分解为一个同胚$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}} \to M^{\mathrm{ani}}$跟着一个射影态射$M^{\mathrm{ani}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$。

证明. — 我们已经知道$\mathcal{P}$是一个$\mathcal{A}^\heartsuit$上的平滑Picard叠形，参照4.3.5，并且$\mathcal{M}$在k上是平滑的，参照4.14.1。

根据[**24**, II.4]和6.1.2，$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}$是分离的。换句话说$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}$的对角线态射是广泛闭的。我们知道它是拟有限的，并且具有既约纤维。由此可以推出它是有限且非分歧的。从而$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}$是一个分离Deligne-Mumford叠形。$\mathcal{P}^{\mathrm{ani}}$也是如此，因为$\mathcal{P}^{\mathrm{ani}}$可以等同于$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}$的一个开集。

只消再证明$\mathcal{P}$在$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$上是有限型的，并且$\mathcal{M}$在$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$上是紧合的。利用紧合性的赋值判别法，参照[**24**, II.4]，只需证明它在$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$上是有限型的即可。已知$\mathcal{M}$是局部有限型的。对任意$a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$，均可以选出$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}$的一族有限型开集，使之覆盖纤维$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}_a$。根据乘积公式4.15.1，纤维$\mathcal{M}_a$是Noether的，于是存在$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}$的有限型开集的一个有限族，它可以覆盖$\mathcal{M}_a$。由于$f : \mathcal{M}^{\mathrm{ani}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$是平坦的，这些开集在$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$中的像都是$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$的开集，且包含$a$。设$V_a$是它们的交集。易见开集$f^{-1}(V_a)$

可以被有限型开集的一个有限族所覆盖。最后只需注意到$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$也是Noether的，从而可以找到有限个点$a$ 使得上面选出的V_a可以覆盖$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$。命题可由此导出。

关于粗糙参模空间的那部分结论于是可由[**24**, II.5]和[**61**]导出。 □

6.2. $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$上的$\kappa$分解. — 复习一下记号，$\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}=\mathcal{M}\times_{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$，$\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}=\mathcal{P}\times_{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$，$\tilde{f}^{\mathrm{ani}}:\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}\to\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$。根据6.1.3，这个态射是紧合的，并且$\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}$是一个平滑Deligne-Mumford叠形。根据Deligne纯性定理[**18**]，$f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$是一个纯权复形。根据[**7**, 5.4.5]，在$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$上它同构于错致上同调层的直和

$$\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell\simeq\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n]\quad。$$

其中${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$是一个纯权为$n$的错致层。

6.2.1. — 由于$\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}$在$\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}$上的作用是定义在$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$上的，故知$\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}$也作用在顺像$\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$上。根据同伦引理，参照[**54**, 3.2.3]，$\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}$在错致上同调层${}^p\mathrm{H}^n(f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$上的作用可以穿过有限Abel群层$\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$。根据5.5.1，我们有一个满同态

$$\mathbf{X}_*\times\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}\to\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$$

它把$p_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$等同于常值层$\mathbf{X}_*$的一个非常具体的有限商。特别的，对任意$\kappa\in\hat{\mathbf{T}}$，可以定义一个直和因子${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$，使得$\mathbf{X}_*$在其上的作用可以穿过特征标$\kappa:\mathbf{X}_*\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$，从而得到一个直和分解

$${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa=\bigoplus_{\kappa\in\hat{\mathbf{T}}}{}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$$

只有有限个因子不是零。

6.2.2. — 现在我们有一个区块化$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}=\bigsqcup_{\psi\in\Psi^{\mathrm{ani}}}\tilde{\mathcal{A}}_\psi$，参照5.4.7。根据5.5.3和5.4.5，对任意$\kappa\in\hat{\mathbf{T}}$，所有使得$\kappa\in\hat{\mathbf{T}}(I_\psi,W_\psi)$的区块$\tilde{\mathcal{A}}_\psi$的并集是$\tilde{\mathcal{A}}$的一个闭集。令$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}=\tilde{\mathcal{A}}_\kappa\cap\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$是该闭集落在$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$中的部分。

命题 6.2.3. — *错致层${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$的支集包含在$\tilde{\mathcal{A}}_\kappa^{\mathrm{ani}}$之中。*

证明. — 由$\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$的具体描述5.5.4可知，${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$在开集$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}-\tilde{\mathcal{A}}_\kappa^{\mathrm{ani}}$上的限制等于零。 □

6.3. $\tilde{\mathcal{A}}_H$到$\tilde{\mathcal{A}}$的闭浸入. — 设$(\kappa,\rho_\kappa^\bullet)$是$G$在$\overline{X}$上的一个点标初分线索，也就是说，是一个连续同态$\pi_1(\overline{X},\infty)\to\pi_0(\kappa)$，参照1.8.2。于是可以得到一个$\pi_0(\kappa)$回旋子$\rho_\kappa:\overline{X}_{\rho_\kappa}\to\overline{X}$，连同一个点$\infty_{\rho_\kappa}$，位于$\infty$之上。注意到$\mathfrak{c}_D$可以等同于$\overline{X}_{\rho_\kappa}\times_{\overline{X}}\mathbf{t}_D$在$\mathbf{W}\rtimes\pi_0(\kappa)$作用下的商（在不变量理论的意义下）。我们还可以构造一个同态$\mathbf{W_H}\rtimes\pi_0(\kappa)\to\mathbf{W}\rtimes\pi_0(\kappa)$，参照1.9.1，使得$\overline{X}_{\rho_\kappa}\times_{\overline{X}}\mathbf{t}_D$在$\mathbf{W_H}\rtimes\pi_0(\kappa)$作用下的商（在不变量理论的意义下）就是$\mathfrak{c}_{H,D}$。由此便可导出一个态射$\mathfrak{c}_{H,D}\to\mathfrak{c}_D$和一个态射$\nu:\mathcal{A}_H\to\mathcal{A}$，参照4.17。

6.3.1. — 对于 $a\in\mathcal{A}^\infty(\bar{k})$，按照 4.5.4 的方法取纤维积

$$\widetilde{X}_{\rho_\kappa,a}=\widetilde{X}_a\times_{\overline{X}}\overline{X}_{\rho_\kappa}\quad 。$$

这是 $\overline{X}_{\rho_\kappa}\times_{\overline{X}}\mathbf{t}_D$ 中的一条曲线，它到 $\overline{X}$ 上的投影是一般位平展 Galois 的，Galois 群为 $\mathbf{W}\rtimes\pi_0(\kappa)$。选择一个位于 ∞ 之上的点 $\tilde{\infty}\in\widetilde{X}_a$ 等价于选择一个位于 ∞_{ρ_κ} 之上的点 $\tilde{\infty}_{\rho_\kappa}$，从而可以把它写成 $\tilde{a}=(a,\tilde{\infty}_{\rho_\kappa})\in\tilde{\mathcal{A}}$，其中 $a\in\mathcal{A}^\infty$ 且 $\tilde{\infty}_{\rho_\kappa}$ 如上。

根据态射 $\nu:\mathcal{A}_H\to\mathcal{A}$ 的构造方法，若 $a_H\in\mathcal{A}_H$ 且 $\nu(a_H)=a$，则有一个嵌入 $\widetilde{X}_{\rho_\kappa,a_H}\to\widetilde{X}_{\rho_\kappa,a}$，它把前者实现为后者中的一些不可约分支的并集。可以定义一个态射

$$\tilde{\nu}:\tilde{\mathcal{A}}_H\to\tilde{\mathcal{A}}$$

即使用公式 $(a_H,\tilde{\infty}_{\rho_\kappa})\mapsto(\nu(a_H),\tilde{\infty}_{\rho_\kappa})$。最后，若点 ∞_{ρ_κ} 定义在 k 上，则上述态射也定义在 k 上。

命题 6.3.2. — 态射 $\tilde{\nu}:\tilde{\mathcal{A}}_H\to\tilde{\mathcal{A}}$ 是一个闭浸入。

证明. — 我们知道 [**57**, 10.3] 这是一个有限非分歧态射。故只需验证它在几何点的层面上诱导了一个单映射。

假设点 $\tilde{a}=(a,\tilde{\infty}_{\rho_\kappa})\in\tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$ 落在 $\tilde{\nu}$ 的像里。我们现在证明它来自唯一的一个点 $\tilde{a}_H=(a_H,\tilde{\infty}_{\rho_\kappa})\in\tilde{\mathcal{A}}_H$。为此注意到 a_H 是由曲线 $\widetilde{X}_{\rho_\kappa,a_H}$ 唯一确定的，并且该曲线作为 $\widetilde{X}_{\rho_\kappa,a}$ 的一些不可约分支的并集，在下面两个条件下是最小的：它在 $\mathbf{W_H}\rtimes\pi_0(\kappa)$ 的作用下是稳定的，并且它包含点 $\tilde{\infty}_{\rho_\kappa}$。 □

命题 6.3.3. — 6.2.2 中所定义的 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的闭子概形 $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$ 是一些闭集 $\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_H)$ 的无交并，这些闭集对应于同态 $\rho_\kappa^\bullet:\pi_1(\overline{X},\infty)\to\pi_0(\kappa)$。

证明. — 在 5.4.1 中，我们从一个几何点 $\tilde{a}=(a,\tilde{\infty})\in\mathcal{A}(\bar{k})$ 出发定义了一个图表：

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U,\infty) \arrow[r, "\pi_{\tilde{a}}^\bullet"] \arrow[d] & \mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G}) \arrow[d] \\
\pi_1(\overline{X},x) \arrow[r, "\rho_G^\bullet"'] & \mathrm{Out}(\mathbf{G})
\end{tikzcd}$$

这里 U 是 $\overline{X}$ 的满足下述条件的最大开集，它包含 ∞，并且分合覆叠 $\widetilde{X}_a\to\overline{X}$ 在其上是平展的。我们令 $W_{\tilde{a}}$ 是 $\pi_{\tilde{a}}^\bullet$ 在 $\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 中的像，$I_{\tilde{a}}$ 是同态 $\pi_1(U,\infty)\to\pi_1(\overline{X},x)$ 的核的像。

根据定义，$(a,\tilde{\infty})$ 属于 $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$ 的充分必要条件是，$W_{\tilde{a}}$ 包含在 $(\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G}))_\kappa$ 中并且 $I_{\tilde{a}}$ 包含在 Weyl 群 $\mathbf{W_H}$ 之中，这里的 $\mathbf{W_H}$ 是指 κ 在 $\hat{\mathbf{G}}$ 中的中心化子的单位分支 $\hat{\mathbf{H}}$ 的 Weyl 群。现在我们有一个正合序列

$$1\to\mathbf{W_H}\to(\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G}))_\kappa\to\pi_0(\kappa)\to1 \tag{6.3.4}$$

根据 [**57**, 引理 10.1]，存在一个典范分裂，它把 $(\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G}))_\kappa$ 等同于一个半直积 $\mathbf{W_H}\rtimes\pi_0(\kappa)$。

设 H 是 $\rho_\kappa^\bullet:\pi_1(\overline{X},\infty)\to\pi_0(\kappa)$ 所给出的初分群。设 $\tilde{a}_H\in\tilde{\mathcal{A}}_H(\bar{k})$，设 U 是 $\overline{X}$ 的开集，包含 ∞，且使得分合覆叠 $\widetilde{X}_{a_H}\to\overline{X}$ 在其上是平展的。同态

$$\pi_{\tilde{a}_H}^\bullet:\pi_1(U,\infty)\to\mathbf{W_H}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{H})$$

诱导了一个同态

$$\pi_{\tilde{a}_H}^{\kappa,\bullet}:\pi_1(U,\infty)\to\mathbf{W_H}\rtimes\pi_0(\kappa)$$

位于 $\rho_\kappa^\bullet:\pi_1(\overline{X},\infty)\to\pi_0(\kappa)$ 之上。根据 $\tilde{a}=\tilde{\nu}(\tilde{a}_H)$ 的构造方法，同态 $\pi_{\tilde{a}}^\bullet$ 可以通过取 $\pi_{\tilde{a}_H}^{\kappa,\bullet}$ 和嵌入 $\mathbf{W_H}\rtimes\pi_0(\kappa)\to\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G})$（借助等同关系 $(\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G}))_\kappa=\mathbf{W_H}\rtimes\pi_0(\kappa)$）的合成而得到。从而有 $W_{\tilde{a}}\subseteq(\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G}))_\kappa$ 和 $I_{\tilde{a}}\subseteq\mathbf{W_H}$，也就是说 $\tilde{a}\in\tilde{\mathcal{A}}_\kappa(\bar{k})$。

反之，设 $\tilde{a}\in\tilde{\mathcal{A}}_\kappa(\bar{k})$。由于 $W_{\tilde{a}}\subseteq(\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G}))_\kappa$ 并且 $I_{\tilde{a}}\subseteq\mathbf{W_H}$，故知 $\pi_{\tilde{a}}^\bullet$ 诱导了一个同态

$$\rho_\kappa^\bullet:\pi_1(\overline{X},\infty)\to W_{\tilde{a}}/I_{\tilde{a}}\to\pi_0(\kappa)\quad。$$

设 H 是这个 $\rho_\kappa^\bullet$ 所给出的初分群。只消再构造一个点 $\tilde{a}_H\in\tilde{\mathcal{A}}_H(\bar{k})$ 使得 $\tilde{\nu}(\tilde{a}_H)=\tilde{a}$。这个构造过程和上一命题中的方法完全一样。 □

类似的方法可以用来给出开集 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 的一个自然的描述。

命题 6.3.5. — *开集 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 在 $\tilde{\mathcal{A}}$ 中的补集是一些闭浸入*

$$\tilde{\mathcal{A}}_M\to\tilde{\mathcal{A}}$$

的像的并集，这里 M 跑遍包含极大环面 T 的 Levi 子群。

证明. — 设 $\tilde{a}\in(\tilde{\mathcal{A}}\smallsetminus\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}})(\bar{k})$。根据定义，群 $\mathbf{T}^{W_{\tilde{a}}}$ 不是有限的，从而包含一个环面 $\mathbf{S}$。该环面在 $\mathbf{G}$ 中的中心化子是 $\mathbf{G}$ 的一个 Levi 子群 $\mathbf{M}$。群 $W_{\tilde{a}}$ 是 $\mathbf{S}$ 在 $\mathbf{W}\rtimes\mathrm{Out}(\mathbf{G})$ 中的固定化子[28] 的一个子群。群 $I_{\tilde{a}}$ 包含在 $\mathbf{M}$ 的固定化子和 $\mathbf{W}$ 的交集之中，从而包含在 $\mathbf{W_M}$ 之中。同样的方法也出现在 6.3.3 的证明之中，用以证明 $\tilde{a}$ 来自一个点 $\tilde{a}_M\in\tilde{\mathcal{A}}_M(\bar{k})$。 □

推论 6.3.6. — *$\mathcal{A}^\heartsuit\smallsetminus\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ 在 $\mathcal{A}^\heartsuit$ 中的余维数大于等于 $\deg(D)$。*

证明. — 根据上面对于 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 的补集的描述，以及维数公式 4.13.1，我们有

$$\dim(\mathcal{A})-\dim(\mathcal{A}_M)=(\sharp\Phi-\sharp\Phi_M)\deg(D)/2\geq\deg(D)$$

由此给出结论。 □

6.4. 几何稳定化过程. — 根据 6.2.3，错致层 ${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 的支集包含在 $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa^{\mathrm{ani}}$ 之中。根据 $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa^{\mathrm{ani}}$ 的初分式描述，参照 6.3.3，这个错致层有一个直和分解，它的因子是以点标初分线索 $(\kappa,\rho_{\kappa,\xi}^\bullet)$ 的集合为指标的，ξ 处的直和因子的支集落在闭集 $\tilde{\nu}_\xi(\tilde{\mathcal{A}}_{H_\xi})\cap\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上，其中 H_ξ 是 $(\kappa,\rho_{\kappa,\xi}^\bullet)$ 所给出的初分群，$\tilde{\nu}_\xi$ 是 $\tilde{\mathcal{A}}_{H_\xi}$ 到 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的闭浸入。我们的主要结果是给出每个直和因子的一个描述。

[28] 译注：固定化子 =“fixateur”。

定理 6.4.1. — 存在一个同构，它连接着分次错致层

$$\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa[2r^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(D)](r^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(D))$$

和

$$\bigoplus_n \bigoplus_{(\kappa,\rho^\bullet_{\kappa,\xi})} \tilde{\nu}_{\xi,*}\, {}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}_{H_\xi,*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}$$

其中最后一个直和是以固定κ的点标初分线索$(\kappa,\rho^\bullet_{\kappa,\xi})$的集合为指标的。这里的下指标st是指这样一个直和因子，$\tilde{\mathcal{P}}_{H_\xi}$在其上的作用是平凡的，整数$r^{\mathbf{H}}_{\mathbf{G}}(D)$是$\tilde{\mathcal{A}}_{H_\xi}$在$\tilde{\mathcal{A}}$中的余维数，由下面的公式给出

$$r^G_H(D) = (\sharp\,\Phi - \sharp\,\Phi_{\mathbf{H}})\deg(D)/2 \quad 。$$

虽然上面是一个$\bar{k}$上的陈述，我们的证明却是比较算术的。假设我们有一个定义在X上的点标初分线索$(\kappa,\rho^\bullet_\kappa)$，也就是说$\rho^\bullet_\kappa$ 可以扩展为一个同态

$$\pi_1(X,\infty) = \pi_1(\overline{X},\infty) \rtimes \mathrm{Gal}(\bar{k}.k) \to \pi_0(\kappa) \quad 。$$

则对应的初分群H可以定义在X上。对于群H我们有一个Hitchin纤维化f^H : $\mathcal{M}_H \to \mathcal{A}_H$，以及$\mathcal{A}_H$的一个平展覆叠$\tilde{\mathcal{A}}_H$。则6.3.2中的闭浸入$\tilde{\nu}:\tilde{\mathcal{A}}_H \to \tilde{\mathcal{A}}_G$是定义在$k$上的。

定理 6.4.2. — 存在一个定义在k上的同构，它连接着两个分次错致层的半单化

$$\bigoplus_n \tilde{\nu}^*\, {}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa[2r^G_H(D)](r^G_H(D)) \simeq \bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}_{H,*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}$$

由于等式的两边都是纯权分次错致层，所以它们都是几何半单的，参照[**7**]。由此可知，上述分次错致层在$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}\otimes_k \bar{k}$上是同构的。另一方面，由于$\overline{X}$上的任何初分线索都可以定义在某个$X\otimes_k k'$上，其中$k'$是$k$的一个有限扩张，从而定理6.4.1可由6.4.2推出来。对于后者的证明将持续到8.7节。特别的，我们在这个证明过程中将会得到Langlands-Shelstad猜想1.11.1。

6.5. 最高次的通常上同调. —

在本节中，我们将证明几何稳定化定理6.4.1的一个初等的变体，这里不会出现错致上同调层，而只是最高次的通常上同调层。

设d是态射$\tilde{f}^{\mathrm{ani}}:\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}} \to \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$的相对维数。根据同伦引理，$\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}$在$\mathrm{R}^{2d}\tilde{f}^{\mathrm{ani}}_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$上的作用可以穿过有限层$\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$。后面这个层是常值层$\mathbf{X}_*$的一个商。令$(\mathrm{R}^{2d}\tilde{f}^{\mathrm{ani}}_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}$是使$\mathbf{X}_*$作用平凡的最大的直和因子，$(\mathrm{R}^{2d}\tilde{f}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$是使$\mathbf{X}_*$的作用穿过特征标$\kappa:\mathbf{X}_*\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$的最大的直和因子，下面将固定$\kappa$。

命题 6.5.1. — 存在一个同构，它连接着稳定部分$(\mathrm{R}^{2d}\tilde{f}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}$和常值层$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$。还有一个同构，它连接着$(\mathrm{R}^{2d}\tilde{f}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$和直和

$$\bigoplus_{(\kappa,\rho^\bullet_{\kappa,\xi})} \tilde{\nu}_{\xi,*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

这个直和的指标集是固定κ后的点标初分线索$(\kappa,\rho^\bullet_{\kappa,\xi})$的集合，其中$\tilde{\nu}_\xi$是指$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}_{H_\xi}$到$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$的闭浸入，$H_\xi$是$(\kappa,\rho^\bullet_{\kappa,\xi})$所给出的初分群。

证明. — Hitchin-Kostant 截面定义了一个开浸入 $\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}} \to \tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}$，其闭补集的相对维数 $\leq d-1$，参照 4.16.1。由此得到一个同构

$$\mathrm{R}^{2d} g_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell \to \mathrm{R}^{2d} \tilde{f}^{\mathrm{ani}}_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

与 $\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$ 的作用相容。这里 g 是指态射 $\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}} \to \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$。

迹态射可以把 $\mathrm{R}^{2d} g_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 等同于预层

$$U \mapsto \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\,\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})(U)}$$

的拼续层。从而此命题可以从 5.5.4 所给出的对于层 $\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$ 的具体描述推出来。事实上，$\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$ 是常值层 $\mathbf{X}_*$ 的一个商。可以把 $\mathbf{X}_*$ 换成一个有限商 $\mathbf{X}$。这样一来，$\mathrm{R}^{2d} g_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是常值层 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathbf{X}}$ 的一个商。于是同型分支 $(\mathrm{R}^{2d} g_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}$ 和 $(\mathrm{R}^{2d} g_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 是 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathbf{X}}$ 中所对应的同型分支的商，后面这些都是秩为 1 的常值层。所需的结果可以归结为在每根纤维上逐个进行验证，这是容易的。 □

7. 支集定理

设 S 是一个有限型 k 概形，$f : M \to S$ 是一个紧合态射，且 M 是平滑的。根据纯性定理 [**18**] 和分解定理 [**7**]，复形 $f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是纯权的，并且在 $S \otimes_k \bar{k}$ 上同构于一些几何单错致层 (带着移位) 的直和。它们的支集是 f 的一个重要的拓扑不变量。一般来说，具体地确定出这个不变量是非常困难的。

我们将引入 δ 正则的 Abel 纤维化的概念，参照 7.1.5，对于它们，我们有办法决定出其支集，参照 7.2.1。由于我们不知道如何证明素特征的 Hitchin 纤维化是 δ 正则的，我们将给出 7.2.2 和 7.2.3 用来给出足够的控制，并据此完成定理 6.4.1 和 6.4.2 的证明。除了最后一节之外，本章的讨论都建立在弱 Abel 纤维化这个更广的框架之下。

7.1. Abel 纤维化. —

我们将举出 Hitchin 纤维化的一些明显的性质用来给出代数 Abel 纤维化概念的一个公理化陈述。事实上，一方面我们要引入弱 Abel 纤维化的概念，它集合了一些在任意基变换下稳定的性质，另一方面我们还要引入 δ 正则的 Abel 纤维化的概念，它只在平坦基变换下是保持的。Abel 纤维化的概念则介于两者之间。

7.1.1. — k 概形 S 上的一个弱 Abel 纤维化包含一个紧合态射 $f : M \to S$ 和一个平滑交换群概形 $g : P \to S$，连同一个作用

$$\mathrm{act} : P \times_S M \to M$$

具有下面的三个性质 7.1.2, 7.1.3 和 7.1.4：

7.1.2. — 态射 f 和 g 具有相同的相对维数 d [29]。

7.1.3. — P 在 M 上的作用只有*仿射稳定化子*，也就是说，对任何位于 $s \in S$ 之上的几何点 $m \in M$，m 在 P_s 中的稳定化子都是一个仿射子群。

---
[29] 这个假设不是必须的，不过它简化了标号。

7.1.4. — 设 P^0 是由 P 的诸纤维的单位分支所组成的开子群概形，并且令 g^0 : $P^0 \to S$ 。考虑 Tate 模层

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0) = \mathrm{H}^{2d-1}(g^0_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)(d)$$

它在 S 的每个几何点 s 处的茎条恰好是 Tate $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 模 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0_s)$ 。对 S 的任意几何点 s ，考虑 P^0_s 的 Chevalley 典范拆解

$$1 \to R_s \to P^0_s \to A_s \to 1$$

其中 A_s 是一个 Abel 多样体， R_s 是一个连通交换仿射代数群，它诱导了 Tate 模层的一个拆解，参考 [**29**]

$$0 \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0_s) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s) \to 0 \quad 。$$

所谓 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0)$ 是可极化的，是指对于 S 的平展拓扑来说，局部上存在一个交错双线性形式

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0) \times \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

它在每个几何点 s 处的茎条上都以 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s)$ 为核，也就是说，它在 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s)$ 上等于零，并且在 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s)$ 上诱导了一个圆满配对。

这三个性质 7.1.2, 7.1.3 和 7.1.4 在任意基变换下都是保持的。特别的，弱 Abel 纤维化的一般纤维未必是一个 Abel 多样体。我们现在要引入一个很强的限制，称为 δ 正则性，它可以满足这些性质。

7.1.5. — 对任意几何点 $s \in S$ ，令 $\delta_s = \dim(R_s)$ 是 P_s 的仿射部分的维数。若 $s \in S$ 是任意点，则 P_s 上的 Chevalley 拆解是存在的，并且在经过一次紧贴基变换后是唯一的，从而整数 δ_s 的定义是合理的。函数 δ 定义在 S 的底层拓扑空间上，取值在自然数集合里，并且是半连续的，参照 5.6.2。若假设这个函数是可构的，则 S 上有一个区块化，由局部闭子概形 S_δ 组成，且对任意几何点 $s \in S_\delta$ ，均有 $\delta_s = \delta$ 。

所谓一个平滑交换 S 群概形 P 是 *δ 正则的*，是指对任意 $\delta \in \mathbb{N}$ ，均有

$$\mathrm{codim}_S(S_\delta) \geq \delta \quad 。$$

若 S_δ 是空的，我们约定余维数取值为无穷。

若一个弱 Abel 纤维化的 P 分量具有 δ 正则性，则称它是 *δ 正则的 Abel 纤维化*。

7.1.6. — δ 正则性的概念还有另一种陈述方式。设 Z 是 S 的一个不可约闭子概形。设 δ_Z 是函数 δ 在 Z 上的最小取值。则 P 是 δ 正则的当且仅当对 S 的任意不可约闭子概形 Z ，均有 $\mathrm{codim}(Z) \geq \delta_Z$ 。

事实上，由于数值 δ_Z 在 Z 的一个稠密开集上被取到，故知 Z 包含在区块 S_{δ_Z} 的闭包之中。若 P 是 δ 正则的，则有 $\mathrm{codim}(S_{\delta_Z}) \geq \delta_Z$ ，自然也有 $\mathrm{codim}(Z) \geq \delta_Z$ 。另一方向的蕴涵关系也是显然的。

注意到 δ 正则性在平坦基变换是保持的。另一方面，δ 正则性可以给出

$$\mathrm{codim}(S_1) \geq 1$$

从而 $S_0 \neq \emptyset$。由此可知， P^0 在一般位是一个 Abel 多样体。

7.2. 支集定理的陈述. — 设 S 是一个有限型 k 概形，$f : M \to S$ 是一个紧合态射。假设 M 上的常值层 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是自对偶的，从而是纯权的（比如当 M 是一个平滑 k 概形时）。根据 Deligne 纯性定理，顺像复形 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是纯权的。应用分解定理 [7]，我们知道在 $S \otimes_k \bar{k}$ 上，复形 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 同构于错致上同调层经过自然移位后的直和

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n] \quad 。$$

进而，诸错致层 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 都是半单的。根据 [7]，对于 $S \otimes_k \bar{k}$ 上的任意几何单的错致层 K，均可找到一个不可约的既约闭子概形 $i : Z \hookrightarrow S \otimes_k \bar{k}$，和一个稠密开集 $U \hookrightarrow Z$，以及 U 上的一个不可约的局部系 $\mathcal{K}$，使得

$$K = i_* j_{!*}\mathcal{K}[\dim(Z)] \quad 。$$

闭子概形 Z 是由 K 唯一确定的，称为 K 的支集。一般来说，要确定 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 的分解中出现的那些单错致层的支集是一个非常困难的问题。然而对于 δ 正则的 Abel 纤维化，我们可以解决这个问题。

定理 7.2.1. — 设 S 是一个几何不可约的有限型 k 概形，$f : M \to S$ 是一个射影态射，具有相对纯维数 d，且带有一个平滑群概形 $g : P \to S$ 的作用，构成一个 δ 正则的 Abel 纤维化。假设 M 上的常值层 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是自对偶的，从而是纯权的。

设 K 是一个几何单的错致层，出现在某个错致上同调层 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的分解之中，Z 是它的支集。则可以找到 $S \otimes_k \bar{k}$ 的一个开集 U 使 $U \cap Z$ 不空，和 $U \cap Z$ 上的一个非平凡局部系 L，使得 i_*L（i 是闭浸入 $U \cap Z \to U$）是最高次的通常上同调层 $\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 在 U 上的限制的一个直和因子。

虽然看起来很复杂，这个结果可以有效地解决支集的确定问题，因为最高次的通常上同调层一般来说是已知的，参照 6.5，包括它的局部直和因子。注意到在 K 和 L 之间没有什么共通的东西，除了支集。定理的证明可以建立在下面的命题之上。

命题 7.2.2. — 设 S 是一个几何不可约的有限型 k 概形，$f : M \to S$ 是一个射影态射，具有相对纯维数 d，且带有一个平滑群概形 $g : P \to S$ 的作用，进而 P 是一个 δ 正则的 Abel 纤维化。假设 M 上的常值层 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是自对偶的，从而是纯权的。

设 K 是一个几何单的错致层，出现在某个错致上同调层 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的分解之中，Z 是它的支集。设 δ_Z 是 P 的 δ 函数在 Z 上的最小取值。则有不等式

$$\mathrm{codim}(Z) \leq \delta_Z \quad 。$$

若等号是成立的，则可以找到 $S \otimes_k \bar{k}$ 的一个开集 U 使 $U \cap Z$ 不空，和 $U \cap Z$ 上的一个非平凡局部系 L，使得 i_*L（i 是指闭浸入 $U \cap Z \to U$）是最高次的通常上同调层 $\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 在 U 上的限制的一个直和因子。

易见 7.2.2 可以推出 7.2.1，因为 δ 正则性的条件可以给出反方向的不等式 $\mathrm{codim}(Z) \geq \delta_Z$，参照 7.1.6。

考虑 δ 不等式 7.2.2 的一个变体，其中还包含 P 的诸纤维的连通分支群。设 $\pi_0(P)$ 是 P 的诸纤维的连通分支群层。假设它是某个常值层的商，且该常值层的茎条是有限 Abel 群 $\mathbf{X}$，如同例子 5.5.4 所示。

群概形 P 在错致上同调层 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 上的作用可以穿过 $\pi_0(P)$。从而群 $\mathbf{X}$ 作用在 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 上。对任意特征标 $\kappa : \mathbf{X} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$，设 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 是 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的使 $\mathbf{X}$ 的作用穿过 κ 的最大的直和因子。同样，我们有通常上同调层 $\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的直和因子 $\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$。

事实上，存在一个整数 $N > 0$ 和有界可构复形 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 的一个分解

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\kappa\in\mathbf{X}^*} (f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$$

使得对任意 $\alpha \in \mathbf{X}$，$(\alpha - \kappa(\alpha)\mathrm{id})^N$ 在直和因子 $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 上都等于零，参照 [**54**, 3.2.5]。

若在 7.2.2 的证明过程中把 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 都换成 $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$，则可以得到下面的结果。

命题 7.2.3. — *在 7.2.2 中，可以把错致层 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 换成它的同型分支 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$，并把通常的层 $\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 也换成它的同型分支 $\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$。*

读者会发现，和 7.2.2 的情况一样，这里也没有假设 P 是 δ 正则的。

在本章最后一节中，我们将把 7.2.3 应用到 Hitchin 纤维化上，准确的说，是应用到态射 $\tilde{f}^{\mathrm{ani}} : \tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}} \to \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上。本章的其余部分将致力于证明 δ 不等式 7.2.2。

7.3. Goresky-MacPherson 不等式. — Goresky 和 MacPherson 观察到 Poincaré 对偶可以对分解定理中所出现的单错致层的支集的余维数作出一个限制。这是一个关键的想法，我们的 δ 不等式 7.2.2 就是它的一个变体。我们首先复习一下他们原来的不等式。

定理 7.3.1. — *设 S 是一个几何不可约的有限型 k 概形，$f : M \to S$ 是一个紧合态射，具有相对纯维数 d。假设 M 上的常值层 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是自对偶的，从而是纯权的。*

设 K 是 $S \otimes_k \bar{k}$ 上的一个不可约错致层，出现在某个错致上同调层 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的分解之中，Z 是 K 的支集。则有不等式

$$\mathrm{codim}(Z) \leq d \quad 。$$

若等号是成立的，则可以找到 $S \otimes_k \bar{k}$ 的一个开集 U 使 $U \cap Z$ 不空，和 $U \cap Z$ 上的一个非平凡局部系 L，使得 i_*L（i 是指闭浸入 $U \cap Z \to U$）是最高次的通常上同调层 $\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 在 U 上的限制的一个直和因子。

证明. — 设 Z 是 $S \otimes_k \bar{k}$ 的一个不可约闭子概形。定义集合 $\mathrm{occ}(Z)$ 是由这样的整数 n 所组成的，错致上同调层 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中有一个不可约直和因子的支集是 Z。根据 Poincaré 对偶，${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是 ${}^p\mathrm{H}^{2\dim(M)-n}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的对偶，从而集合 $\mathrm{occ}(Z)$ 关于整数 $\dim(M)$ 是对称的。

若 $\mathrm{occ}(Z) \neq \emptyset$，则有一个整数 $n \geq \dim(M)$ 属于 $\mathrm{occ}(Z)$。可以找到 $S \otimes_k \bar{k}$ 的一个开集 U 和 $U \cap Z$ 上的一个不可约局部系 L，使得 $i_*L[\dim(Z)]$ 是 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_U$ 的一个直和因子。这表明 $i_*L[\dim(Z) - n]$ 是复形 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_U$ 的一个直和因子，因为它是纯权的。现在取通常的上同调层，则层 i_*L 成为 $\mathrm{H}^{n-\dim(Z)}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的一个直和因子。由于

态射 $f: M \to S$ 的纤维都是纯 d 维的，故有 $\dim(M) = d + \dim(S)$。另一方面，根据上同调幅度定理，由 $\mathrm{H}^{n-\dim(Z)}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 不等于零可以推出

$$\dim(M) - \dim(Z) \leq n - \dim(Z) \leq 2d \quad 。$$

把这两者结合起来，就可以得到所要的不等式

$$\mathrm{codim}(Z) \leq d$$

以及等号成立时的条件。 □

在弱 Abel 纤维化这个特殊情形，事实上可以把 Goresky-MacPherson 的不等式

$$\mathrm{codim}(Z) \leq d$$

改进为 δ 不等式 7.2.2

$$\mathrm{codim}(Z) \leq \delta_Z \quad 。$$

虽然后面这个结果的证明看上去很困难，但底层的拓扑学想法其实非常单纯。

如果承认某些局部提升的存在性，则 δ 不等式可以归结到 Goresky-MacPherson 不等式。设 s 是 Z 的一个几何点，且满足 $\delta_s = \delta_Z$。令 A_s 是 P_s^0 的最大 Abel 商。假设 s 在 S 中有一个平展邻域 S'，使得在 S' 上 Abel 多样体 A_s 可以扩展为一个 Abel 概形 $A_{S'}$，进而存在一个同态 $A_{S'} \to P_{S'}^0$ 使得在点 s 处的合成 $A_s \to P_s^0 \to A_s$ 是 A_s 的一个谐构。在 S' 上，Abel 概形 $A_{S'}$ 作用在 $M_{S'}$ 上，稳定化子是有限的，因为有条件 7.1.3。取商 $[M_{S'}/A_{S'}]$，再把态射 $M_{S'} \to S'$ 分解为一个平滑紧合态射 $M_{S'} \to [M_{S'}/A_{S'}]$ 跟着一个具有相对纯维数 δ_s 的态射 $[M_{S'}/A_{S'}] \to S'$。于是可以把 Goresky-MacPherson 不等式应用到第二个态射上。

在一般情况下，这样的提升是不存在的。7.2.2 的证明其实就是把上面的几何性方法挪到上同调的层面来进行。

设 Z 是 S 的一个不可约闭子概形。在 7.3.1 的证明中，我们将引入集合 $\mathrm{occ}(Z)$，它是 Z 作为错致上同调层 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的不可约因子的支集的出现次数。当这个集合非空时，定义

$$\mathrm{amp}(Z) = \max(\mathrm{occ}(Z)) - \min(\mathrm{occ}(Z)) \quad 。$$

命题 7.3.2. — 让我们回到 7.2.2 的前提条件下。特别的，$\mathrm{occ}(Z) \neq \emptyset$。则有不等式

$$\mathrm{amp}(Z) \geq 2(d - \delta_Z) \quad 。$$

我们先承认 7.3.2，来证明 7.2.2。Poincaré 对偶表明，集合 $\mathrm{occ}(Z)$ 关于 $\dim(M)$ 是对称的。追加的这个限制 $\mathrm{amp}(Z) \geq 2(d - \delta_Z)$ 给出一个整数 $n \geq \dim(M) + d - \delta_Z$ 属于 $\mathrm{occ}(Z)$。接下来 7.2.2 的证明就和 7.3.1 的证明后段完全一样了。

本章随后的内容就是证明幅度不等式 7.3.2。

7.4. 下积和自由性. — 我们现在要给出下积的构造法，并且陈述一个关于自由性的结果，由此可以推出幅度不等式 7.3.2。

7.4.1. — 回到下面的一般框架。设 S 是一个任意的概形。设 $g : P \to S$ 是一个平滑交换 S 群概形，具有连通的维数为 d 的纤维。考虑 P 在 S 上的同调复形，由下面的公式来定义

$$\Lambda_P = g_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell[2d](d) \quad 。$$

这个复形集中在 ≤ 0 的位置上。在位置 0，则有 $\mathrm{H}^0(\Lambda_P) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$。$\Lambda_P$ 的最重要部分是

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) := \mathrm{H}^{-1}(\Lambda_P)$$

其中 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ 是一个层，它在每个几何点 $s \in S$ 处的茎条正好是 P 在 s 处的纤维的 Tate $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 模 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_s)$。更一般的，基变换定理给我们提供了一个同构

$$\mathrm{H}^{-i}(\Lambda_P)_s = \mathrm{H}_c^{2d-i}(P_s)(d)$$

它连接着 $\mathrm{H}^{-i}(\Lambda_P)$ 在 s 处的茎条和 P 在 s 处的纤维的第 $(2d-i)$ 个紧支集上同调

$$\mathrm{H}_i(P_s) = \mathrm{H}_c^{2d-i}(P_s)(d) \quad 。$$

7.4.2. — 设 $f : M \to S$ 是一个有限型态射，带有一个 P 的作用，相对于基底 S

$$\mathrm{act} : P \times_S M \to M \quad 。$$

由于 P 是平滑的，且在 S 上的相对维数是 d，故知态射 act 也是平滑的，具有相同的相对维数。从而有一个迹态射

$$\mathrm{act}_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell[2d](d) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

定义在 M 上。把这个迹态射用 $f_!$ 下推，可以得到一个态射

$$(g \times_S f)_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell[2d](d) \to f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell \quad 。$$

现在使用 Künneth 同构，则可以得到一个下积态射

$$\Lambda_P \otimes f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell \to f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell \quad 。$$

7.4.3. — 特别的，这个构造方法可以应用到 $f = g$ 上。于是定义了一个复形态射

$$\Lambda_P \otimes \Lambda_P \to \Lambda_P \quad 。$$

由此可以 Λ_P 的上同调层上导出一个分次代数结构

$$\mathrm{H}^{-i}(\Lambda_P) \otimes \mathrm{H}^{-j}(\Lambda_P) \to \mathrm{H}^{-i-j}(\Lambda_P)$$

它是分次交换的。特别的，由此还得到了一个层态射

$$\wedge^i \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \to \mathrm{H}^{-i}(\Lambda_P)$$

它实际上是一个同构。要验证的话，只需在每根纤维上考察 P_s 的同调群和 Pontryagin 乘积。

7.4.4. — 在 P 上乘以一个整数 $N \neq 0$ 的自同态诱导了 P 的 Tate 模 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ 上的乘以 N 的自同态，进而诱导了 $\mathrm{H}^{-i}(\Lambda_P) = \wedge^i \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ 上的乘以 N^i 的自同态。Lieberman 的技巧 [**37**, 2A11] 是用 Λ_P 的这些自同态（关于不同的 N）取线性组合来定义投影算子，以此给出复形的一个典范分解

$$\Lambda_P = \bigoplus_{i \geq 0} \wedge^i \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)[i]$$

并且与乘法结构相容。

7.4.5. — 现在我们要在 7.2.2 的前提条件下来考察 Λ_P 的下积在 $f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上的作用。由于已假定态射 f 是射影的，故有 $f_! = f_*$。此外，由于已假定 M 上的常值层 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是纯权的，故知顺像层 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 也是纯权的，并且可以在 $S\otimes_k \bar{k}$ 上分解为一些不可约错致层（带移位）的直和。

对于 $S\otimes_k \bar{k}$ 的任意不可约闭集 Z，在 7.3.1 的证明中引入了集合 $\mathrm{occ}(Z)$。由于 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是一个有界可构复形，故知集合 $\mathrm{occ}(Z)$ 只对 $S\otimes_k \bar{k}$ 的有限个不可约闭子概形 Z 才是非空的。我们用有限集 $\mathfrak{A}$ 来对其编号，对任意 $\alpha\in\mathfrak{A}$，令 Z_α 是相应的不可约闭集。于是对任意 n，均有典范分解

$$ {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} K_\alpha^n \quad 。$$

其中 K_α^n 是 ${}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的那些以不可约闭子集 Z_α 为支集的不可约错致因子的直和。我们令

$$ K_\alpha = \bigoplus K_\alpha^n[-n] $$

假设对任意 $\alpha\in\mathfrak{A}$，K_α 都不等于零。

7.4.6. — 参照 7.4.4 的证明，我们有一个 Tate 模层的下积 7.4.2

$$ \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell \to f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-1] \quad 。$$

把函子 ${}^p\tau^{\leq n}$ 应用到 $f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上，则有一个态射

$$ \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes {}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-1] \quad 。$$

对任意 n。应用函子 ${}^p\mathrm{H}^n$，又可以得到一个态射

$$ {}^p\mathrm{H}^n(\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes {}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \to {}^p\mathrm{H}^{n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad 。$$

注意到 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes {}^p\tau^{\leq n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\in {}^p\mathrm{D}_c^{\leq n-1}(S,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 从而有箭头

$$ \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes {}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n] $$

它在 n 次错致上同调层的层面上诱导了一个同构

$$ {}^p\mathrm{H}^n(\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes {}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \to {}^p\mathrm{H}^0(\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \quad 。$$

由此可以导出一个箭头

$$ {}^p\mathrm{H}^0(\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \to {}^p\mathrm{H}^{n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad 。$$

又因为 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\in {}^p\mathrm{D}_c^{\leq 0}(S,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$，从而有一个从该对象到它的 ${}^p\mathrm{H}^0$ 上的箭头，并且诱导了典范态射

$$ \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to {}^p\mathrm{H}^{n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad 。$$

7.4.7. — 考虑借助支集的分解

$$ \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes K_\alpha^n \to \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} K_\alpha^{n-1} \quad 。$$

从而对任意 $\alpha\in\mathfrak{A}$，均有一个典范箭头

$$ \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes K_\alpha^n \to K_\alpha^{n-1} \quad 。$$

注意，非典范的箭头
$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes K^n_\alpha \to K^{n-1}_{\alpha'}$$
不一定是零。

7.4.8. — 对任意$\alpha\in\mathfrak{A}$，均可找到Z_α的一个稠密开集V_α，使得错致层K^n_α在V_α上的限制具有$\mathcal{K}^n_\alpha[\dim(V_\alpha)]$的形状，其中$\mathcal{K}^n_\alpha$是一个纯权为$n$的局部系。

适当缩小开集V_α，则可以找到一个有限紧贴基变换$V'_\alpha\to V_\alpha$，使得群概形$P|_{V'_\alpha}$具有一个拆解
$$1\to R_\alpha\to P|_{V'_\alpha}\to A_\alpha\to 1$$
其中A_α是一个Abel V'_α概形，R_α是一个平滑交换仿射V'_α群概形，具有连通的纤维。由此可以导出Tate模层的一个正合序列
$$0\to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_\alpha)\to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P|_{V'_\alpha})\to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_\alpha)\to 0,$$
由于态射$V'_\alpha\to V_\alpha$是一个同胚，可以把$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_\alpha)$和$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_\alpha)$以及上述正合序列都看作是存在于$V_\alpha$之上的对象。由于$A_\alpha$是一个Abel概形，故知Tate模层$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_\alpha)$是一个纯权局部系，权为$-1$。必要时再次缩小$V_\alpha$，则可以假设$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_\alpha)$（它是$R_\alpha$的环面部分的Tate模层）是一个纯权局部系，权为$-2$。这里所说的权是相对于基域$k$的一个充分大的扩张而言的，在那里上述对象都有定义。

必要时再次缩小V_α，还可以假设$V_\alpha\cap Z_{\alpha'}=\emptyset$，除非$Z_\alpha$整个包含在$Z_{\alpha'}$中。

7.4.9. — 设V_α是闭集Z_α的稠密开集，如7.4.8所述。对任意$\alpha\in\mathfrak{A}$，选取$S\otimes_k\bar{k}$的一个Zariski开集U_α，把V_α实现为它的一个闭子概形。令$i_\alpha:V_\alpha\to U_\alpha$是其闭浸入。把7.4.7中的对角线箭头限制到开集$U_\alpha$上，可以得到一个箭头
$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes i_{\alpha*}\mathcal{K}^n_\alpha[\dim(V_\alpha)]\to i_{\alpha*}\mathcal{K}^{n-1}_\alpha[\dim(V_\alpha)]\quad。$$
根据投影公式，则有
$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)\otimes i_{\alpha*}\mathcal{K}^n_\alpha=i_{\alpha*}(i^*_\alpha\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_\alpha)\otimes\mathcal{K}_\alpha)$$
把函子i^*_α应用到
$$i_{\alpha*}(i^*_\alpha\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_\alpha)\otimes L^n_\alpha)\to i_{\alpha*}L^{n-1}_\alpha$$
上，可以得到一个U_α上的态射
$$i^*_\alpha\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_\alpha)\otimes\mathcal{K}^n_\alpha\to\mathcal{K}^{n-1}_\alpha\quad。$$

根据7.4.8，我们有$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_\alpha)$的一个拆解
$$0\to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_\alpha)\to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_\alpha)\to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_\alpha)\to 0$$
其中$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_\alpha)$是一个纯权为$-1$的局部系，$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_\alpha)$是一个纯权为$-2$的局部系。由于$\mathcal{K}^n_\alpha$是纯权为$n$的，并且$\mathcal{K}^{n-1}_\alpha$是纯权为$n-1$的，故知$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_\alpha)$的作用可以穿过$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_\alpha)$
$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_\alpha)\otimes\mathcal{K}^n_\alpha\to\mathcal{K}^{n-1}_\alpha\quad。$$
从而在局部系的直和$\mathcal{K}_\alpha=\bigoplus_n\mathcal{K}^n_\alpha[-n]$上可以赋予一个分次代数局部系$\Lambda_{A_\alpha}$上的分次模结构
$$\Lambda_{A_\alpha}\otimes\mathcal{K}_\alpha\to\mathcal{K}_\alpha\quad。$$

特别的，对于V_α的任意几何点u_α，茎条$\mathcal{K}_{\alpha,u_\alpha}$都是分次代数$\Lambda_{A_\alpha,u_\alpha}$上的一个分次模。

命题 7.4.10. — 回到7.2.2的前提条件，并使用7.4.5, 7.4.8和7.4.9中的记号。对于V_α的任意几何点u_α，$\mathcal{K}_\alpha$的茎条$\mathcal{K}_{\alpha,u_\alpha}$都是分次代数$\Lambda_{A_\alpha,u_\alpha}$上的一个分次自由模。

幅度不等式7.3.2可由这个自由性条件立得。事实上，$\mathrm{amp}(Z_\alpha)$至少等于

$$2\dim(A_\alpha) = 2(d-\delta_\alpha) \quad 。$$

本章其余部分将用来证明这个自由性结果7.4.10。但在着手证明7.4.10之前，先注意到$\mathcal{K}_{\alpha,u_\alpha}$是$\Lambda_{\alpha,u_\alpha}$上的自由模这个性质不依赖于几何点$u_\alpha \in V_\alpha$的选择。我们将证明下面的一个结果，它把这个自由性表述成不依赖于基点的形式。注意到在7.4.10的纯性假设下，局部系$\mathcal{K}_\alpha^n$都是几何半单的。

引理 7.4.11. — 设U是一个连通$\bar{k}$概形。设Λ是一个分次局部系，只有有限个负次数，并且$\Lambda^0 = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$，进而它带有一个分次代数结构$\Lambda\otimes\Lambda\to\Lambda$。设$L$是一个分次局部系，带有一个分次模结构

$$\Lambda\otimes L\to L \quad 。$$

假设可以找到U的一个几何点u，使得L在u处的茎条L_u是Λ在u处的茎条Λ_u上的一个自由模。再假设L作为分次局部系是半单的。则可以找到U上的一个分次局部系E，和一个同构

$$L = \Lambda\otimes E$$

与Λ模结构相容。

证明. — 考虑Λ的增殖理想

$$\Lambda^+ = \bigoplus_{i>0}\Lambda^{-i}[i] \quad 。$$

令E是下述箭头的余核

$$\Lambda^+\otimes L\to L \quad 。$$

由于L是半单的，故知满同态$L\to E$具有一个提升$E\to L$。现在证明它所诱导的态射

$$\Lambda\otimes E\to L$$

是一个同构。由于这是局部系之间的一个箭头，故为了验证它是一个同构，只需验证它在u处的茎条上是一个同构。在向量空间L_u中，E_u是Λ^+L_u的一个向量补空间。从而根据Nakayama引理，态射

$$\Lambda_u\otimes E_u\to L_u$$

是满的。它进而是一一的，因为L_u是一个自由Λ_u模，且有维数等式

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\Lambda_u)\times\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(E_u) = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(L_u)$$

这就证明了引理。 □

7.5. 单点上的自由性. — 现在我们考虑在基底是单点的情况下 7.4.10 的一种类比形式。

命题 7.5.1. — 设 M 是代数闭域 $\bar{k}$ 上的一个射影概形，带有一个 Abel $\bar{k}$ 多样体 A 的作用，且稳定化子都是有限的。则

$$\bigoplus_n \mathrm{H}_c^n(M)[-n]$$

是分次代数 $\Lambda_A = \bigoplus_i \wedge^i \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A)[i]$ 上的一个自由模。

证明. — 由于 A 在 M 的任何点处的稳定化子都是一个有限子群，故知 $N = [M/A]$ 是一个 $\bar{k}$ 上的紧合代数叠形，惯性群都是有限的。由于 M 是射影的，故知态射 $M \to N$ 是一个平滑射影态射。根据 Deligne [**19**]，与超平面的类取上积给出一个同构

$$m_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_i \mathrm{R}^i m_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-i]$$

其中 $\mathrm{R}^i(m_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 都是 N 上的局部系。由于 $M \times_N M = A \times M$，故知逆像层 $m^*\mathrm{R}^i(m_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 在 M 上是常值的，取值为 $\mathrm{H}^i(A)$。使用 [**7**, 4.2.5]，可以得到一个典范同构，它连接着 $\mathrm{R}^i(m_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 和 N 上的 $\mathrm{H}^i(A)$ 值常值层。

上述直和分解给出下面这个谱序列的退化性

$$\mathrm{H}_c^j(N, \mathrm{R}^i m_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \Rightarrow \mathrm{H}_c^{i+j}(M) \quad 。$$

由此可以导出 $\bigoplus_n \mathrm{H}_c^n(M)$ 上的一个 Λ_A 稳定的滤解 (30)，它的第 j 个分次商是

$$\bigoplus_i \mathrm{H}_c^j(N, \mathrm{R}^i m_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \mathrm{H}_c^j(N) \otimes \bigoplus_i \mathrm{H}^i(A) \quad 。$$

这些分次商都是自由 Λ_A 模。由此可知直和 $\bigoplus_n \mathrm{H}_c^n(M)[-n]$ 是一个自由 Λ_A 模。 □

7.5.2. — 设 P 是代数闭域 $\bar{k}$ 上的一个交换连通平滑代数群。根据 Chevalley 定理 [**66**]，P 可以拆解为一个 Abel 多样体经过一个仿射群的扩充

$$1 \to R \to P \to A \to 1 \quad 。$$

只要 P 定义在一个完满域上，这个正合序列就是存在的，特别的，可以取有限域。

由上述正合序列可以导出 Tate 模的一个正合序列

$$0 \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A) \to 0 \quad 。$$

所谓同调提升，是指一个线性映射

$$\lambda : \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$$

它使上述正合序列分裂。一个同调提升可以诱导出代数间的一个同态 $\lambda : \Lambda_A \to \Lambda_P$。Abel 部分的全体同调提升的集合构成一个仿射空间，它是 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 向量空间 $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A), \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R))$ 作用下的回旋子。

---

(30) 译注：滤解 =“filtration”。

命题 7.5.3. — 设 P 是一个定义在有限域 k 上的交换连通平滑代数群。设

$$1 \to R \to P \to A \to 1$$

是典范正合序列，它把 P 实现为一个 Abel 多样体 A 经过一个仿射群 R 的扩充。于是可以找到一个整数 $N > 0$ 和一个同态 $a : A \to P$，使得后者与 $P \to A$ 的合成恰好等于 A 上乘以 N 的自同态。此时我们称 a 是一个拟提升。

进而，设 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(a) : \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ 是 Tate 模的诱导映射，则 $N^{-1}\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(a)$ 是与 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 在 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ 和 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A)$ 上的作用相容的唯一的同调提升。我们称 $N^{-1}\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(a)$ 是典范提升。

证明. — 根据 [**69**, p. 184]，Abel 多样体 A 经 $\mathbf{G}_m$ 的扩充类群可以等同于对偶 Abel 多样体的 k 值点群。Abel 多样体 A 经 $\mathbf{G}_a$ 的扩充类群是有限维 k 向量空间 $\mathrm{H}^1(A, \mathcal{O}_A)$。一个连通平滑交换仿射群在基域的一次有限扩张后可以同构于一些 $\mathbf{G}_m$ 与一些 $\mathbf{G}_a$ 的乘积，于是有限域上的 Abel 多样体 A 经一个平滑交换仿射群 R 的扩充类群是一个有限群。第一部分由此推出。

同调提升 $N^{-1}\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(a)$ 在 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 的作用下是不变的，因为提升 a 是定义在 k 上的。此外，Frobenius 元素 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 在 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A)$ 上作用的特征值具有绝对值 $|k|^{-1/2}$，而在 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R)$ 上作用的特征值则具有绝对值 $|k|^{-1}$。这样一来，$N^{-1}\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(a)$ 只有唯一的与 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 作用相容的同调提升。 □

推论 7.5.4. — 设 $\bar{k}$ 是一个代数闭域，M 是一个有限型 $\bar{k}$ 概形。设 P 是一个交换连通平滑 $\bar{k}$ 群概形，作用在 M 上，且具有仿射的稳定化子。设 A 是 P 的最大 Abel 商。假设 P 定义在一个有限域上，于是有一个拟提升 $a : A \to P$。则它在 Λ_P 模 $\bigoplus_n \mathrm{H}^n_c(M)$ 上导出了一个自由 Λ_A 模的结构。

证明. — 拟提升 $a : A \to P$ 定义了 A 在 M 上的一个作用，稳定化子都是有限的。从而可以归结到命题 7.5.1。 □

下面是一个更一般且更令人满意的结果。证明来自 Deligne [**20**]。这个结果在后面并不会被用到。事实上，引理 7.4.11 在 7.4.10 的证明中起到了与提升无关的作用.

命题 7.5.5. — 设 $\bar{k}$ 是一个代数闭域，M 是一个有限型 $\bar{k}$ 概形。设 P 是一个交换连通平滑 $\bar{k}$ 群概形，作用在 M 上，且具有仿射的稳定化子。设 A 是 P 的最大 Abel 商，并设 $\lambda : \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ 是随便一个同调提升。则 λ 在 Λ_P 模 $\bigoplus_n \mathrm{H}^n_c(M)$ 上导出了是一个自由 Λ_A 模的结构。

证明. — 通过使用 [**7**, 6.1.7] 中的归纳极限方法，可以归结到 M, P 及 P 在 M 上的作用都定义在一个有限域 k 上的情形。把 $\bar{k}$ 写成一些在 $\mathbb{Z}$ 上有限型的环 $(A_i)_{i \in I}$ 的归纳极限。则有限型 $\bar{k}$ 概形的范畴是这些有限型 A_i 概形范畴的一个二级归纳极限，也就是说，对任意 $X/\bar{k}$，均可找到 $i \in I$ 和有限型的 X_i/A_i，使得 $X = X_i \otimes_{A_i} \bar{k}$，参照 [**30**, 8.9.1]，并且对任意 $X_i, Y_i/A_i$，均有，

$$\mathrm{Hom}_{\bar{k}}(X_i \otimes_{A_i} \bar{k}, Y_i \otimes_{A_i} \bar{k}) = \varinjlim_{j \geq i} \mathrm{Hom}_{A_j}(X_i \otimes_{A_i} A_j, Y_i \otimes_{A_i} A_j) \ ,$$

参照[**30**, 8.8.2]。同样的结果对于代数群也对，进而也适用于一个三元组，由一个代数群 G 和一个有限型概形 X 以及一个 G 在 X 上的作用所组成。设 $f : X \to Y$ 是有限型 $\bar{k}$ 概形范畴中的一个态射，来自 A_i 概形范畴中的某个态射 $f_i : X_i \to Y_i$。则为了使 f 具有下列性质：平坦、平滑、仿射、紧合，必须且只需 f_i 在经过一次纯量扩张 $A_i \to A_j$ 后具有同样的性质，参照[**30**, 11.2.6 和 8.10.5]。从而可以找到一个在 $\mathbb{Z}$ 上有限型的环 A_i，包含在 $\bar{k}$ 中，一个有限型 A_i 概形 M_i，一个平滑 A_i 群概形 P_i，是某个 Abel 概形经仿射群概形的扩充，作用在 M_i 上，具有仿射的稳定化子，它们在经过纯量扩张 $A_i \to \bar{k}$ 以后就得到原来的那些对象。同样可以假设 $\mathrm{H}^n(f_{i!}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 都是局部系。从而问题归结到基域是一个有限域的情形。

现在可以假设 M, P 及 P 在 M 上的作用都定义在一个有限域 k 上。设 A 是 P 的 Abel 商，$a : A \to P$ 是拟提升，定义了 Tate 模的一个典范提升 $\lambda_0 : \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(M)$。根据上面的推论 7.5.4，已经知道由 λ_0 所导出的 Λ_P 模 $\bigoplus_n \mathrm{H}^n_c(M)$ 上的 Λ_A 模结构是自由的。

现在证明这个结论对任意同调提升 λ 都成立。全体同调提升的空间，取定基点 λ_0 后，可以等同于 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 向量空间 $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s), \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s))$，在其上 Frobenius 元素 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 作用的特征值具有绝对值 $|k|^{1/2}$。在这个空间上，能在 $\bigoplus_n \mathrm{H}^n_c(M)$ 上导出自由 Λ_{A_s} 模结构的那些点 λ 构成 $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s), \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s))$ 的一个 Zariski 开集。这个开集在 σ 的作用下稳定，并且包含原点 λ_0。它的补集是一个在 σ 作用下稳定的闭集，且不包含 λ_0。由于 σ 作用的特征值具有绝对值 $|k|^{1/2}$，故知 $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s), \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s))$ 的一个在 σ 作用下稳定的闭集必然也在 $\mathbf{G}_m$ 的作用下稳定。该闭集不包含原点 λ_0 则表明它是空的。 □

7.6. Hensel 基底的情形. — 在本节中，我们将考察 Hensel 基底上的下积。并且对收敛到特殊纤维上同调的谱序列进行分析。

7.6.1. — 现在设 S 是一个严格 Hensel 概形，带有一个态射 $\epsilon : S \to \mathrm{Spec}(\bar{k})$，其中 $\bar{k}$ 是 S 的剩余类域。令 s 是 S 的闭点。则茎条 $\Lambda_{P,s}$ 可以等同于 $\epsilon_*\Lambda_P$。由此可以导出（利用函子的伴随性）一个态射

$$\epsilon^*\Lambda_{P,s} \to \Lambda \quad 。$$

把下积 7.4.2 限制到 $\epsilon^*\Lambda_{P,s}$ 上，可以得到一个箭头

$$\Lambda_{P,s} \boxtimes f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell \to f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

它定义了分次代数 $\Lambda_{P,s} = \bigoplus_i \wedge^i \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_s)[i]$ 在复形 $f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上的一个作用。

特别的，存在一个态射

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_s) \boxtimes f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell \to f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-1] \quad 。$$

由此可以导出错致梯结构 [31] 下的诸删节之间的态射：

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_s) \boxtimes {}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to {}^p\tau^{\leq n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

[31] 译注：梯结构 =“t-structure”，删节函子定义了一种“梯级状的结构”。又，“t”来自“tronqué”的首字母。

对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 。这又诱导了 n 次和 $n-1$ 次错致上同调层之间的一个态射

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_s) \boxtimes {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to {}^p\mathrm{H}^{n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

故得 $\Lambda_{P,s}$ 在直和 $\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 上的一个作用。

7.6.2. — 这些箭头与 7.4.6 结尾处的那些构造是相容的。考虑借助支集的分解

$${}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} K_\alpha^n$$

则上述箭头可以表达成一些矩阵，指标是二元组 (α, α')

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_s)^* \otimes \mathrm{Hom}(K_\alpha^n, K_{\alpha'}^{n-1}) \quad 。$$

对角线上的箭头与 7.4.7 中的构造相容，并且非对角线上的显然都是零，因为当 $\alpha \neq \alpha'$ 时 $\mathrm{Hom}(K_\alpha^n, K_{\alpha'}^{n-1})$ 。

7.6.3. — $f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上的滤解 ${}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 定义了一个谱序列

$$E_2^{m,n} = \mathrm{H}^m({}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_s) \Rightarrow \mathrm{H}_c^{m+n}(M_s)$$

它在 $\Lambda_{P,s}$ 的作用下是循变的。这个谱序列收敛，因为复形 $f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是有界的。从而我们在直和

$$\mathrm{H}_c^\bullet(M_s) = \bigoplus_N \mathrm{H}_c^r(M_s)[-r]$$

上得到一个递减滤解 $F^m\mathrm{H}_c^\bullet(M_s)$ 使得

$$F^m\mathrm{H}_c^\bullet(M_s)/F^{m+1}\mathrm{H}_c^\bullet(M_s) = \bigoplus_n E_\infty^{m,n}[-m-n] \quad 。$$

$\Lambda_{P,s}$ 在 $\mathrm{H}_c^\bullet(M_s)$ 上的作用与这个滤解相容。从而诱导了它在滤解 $F^m\mathrm{H}_c^\bullet(M_s)$ 所对应的逐次商上的作用

$$\bigoplus_n E_\infty^{m,n}[-m-n]$$

这个作用可以从它在 $E_2^{m,n}$ 上的作用所导出，后者又来自 $\Lambda_{P,s}$ 在 $\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n]$ 上的分次作用。

7.6.4. — 现在重新回到 7.2.2 的前提条件下。特别的，我们有 $f_! = f_*$ 。再由于纯性假设，故有一个 $S \otimes_k \bar{k}$ 上的非典范同构

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n] \quad 。$$

限制到 S 的一个几何点 s 处的严格 Hensel 化 S_s 时，这个同构仍存在，如此一来，谱序列 7.6.3 在 E_2 处退化，也就是说 $E_\infty^{m,n} = E_2^{m,n}$ 。

7.6.5. — 在错致上同调层上，我们有一个借助支集的典范分解

$${}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} K_\alpha^n \quad 。$$

我们在 7.6.2 中指出，在一个严格 Hensel 的基底上，分次代数 $\Lambda_{P,s}$ 在直和 $\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 上的作用与这个借助支集的分解是相容的。我们更希望有一个同构

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

并且与 7.6.1 中所定义的 $\Lambda_{P,s}$ 的作用是相容的。这时就可以利用上述谱序列的目标上的自由性条件直接完成 7.4.10 的证明。然而，$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 的一个 $\Lambda_{P,s}$ 作用相容的直和分解看起来是不存在的。

不过，我们仍然可以从谱序列的退化性出发，通过区块上的归纳法来证明 7.4.10 。这就是下节的内容。

7.7. 用归纳法证明自由性. — 在本节中，我们将完成自由性结果 7.4.10 的证明，从而也就完成了幅度不等式 7.3.2 和 δ 不等式 7.2.2 的证明。

7.7.1. — 我们证明 7.4.10 的方法是对 Z_α 的维数进行递降归纳。设 $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ 是使得 Z_{α_0} 成为整个 $S \otimes_k \bar{k}$ 的那个最大元。设 V_{α_0} 是 $S \otimes_k \bar{k}$ 的一个稠密开集，并且在 7.4.8 的意义下充分小。对于 $\alpha \neq \alpha_0$，这些其它的区块 Z_α 都与 V_{α_0} 没有交集，错致上同调层 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 在 V_{α_0} 上的限制是一个局部系带一个移位

$$ {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{U_{\alpha_0}} = \mathcal{K}^n_{\alpha_0}[\dim(S)] \quad 。$$

这里的 $\mathcal{K}^n_{\alpha_0}$ 是 U_{α_0} 上的一个纯权半单局部系，权为 n，这是来自 7.2.2 的纯性假设。

与 7.4.8 相同，在开集 V_{α_0} 上，Tate 模层 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ 可以拆成一个正合序列

$$0 \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_{\alpha_0}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{\alpha_0}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\alpha_0}) \to 0$$

其中 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\alpha_0})$ 是一个纯权局部系，权为 -1，$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_{\alpha_0})$ 是一个纯权局部系，权为 -2 。根据 7.4.9 中的解释，Tate 模的作用

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{\alpha_0}) \otimes \mathcal{K}^n_{\alpha_0} \to \mathcal{K}^{n-1}_{\alpha_0}$$

可以穿过 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\alpha_0})$，因为权的原因。

归纳法的第一步是证明，对 V_{α_0} 的任意几何点 u_{α_0}，它在直和

$$\mathrm{H}^\bullet(M_{u_{\alpha_0}}) := \bigoplus_n \mathrm{H}^n(M_{u_{\alpha_0}})[-n] = \bigoplus_n \mathcal{K}^n_{\alpha_0,u_{\alpha_0}}[-n+\dim(S)]$$

上所导出的 $\Lambda_{A_{\alpha_0,u_{\alpha_0}}}$ 模结构都是自由的。

根据 7.4.11，这个命题不依赖于 u_{α_0} 的选择。故可假设这个几何点 u_{α_0} 定义在有限域上。根据 7.5.3，存在一个拟提升 $A_{\alpha_0} \to P_{\alpha_0}$，于是 $\Lambda_{A_{\alpha_0,u_{\alpha_0}}}$ 在 $\mathrm{H}^\bullet(M_{u_{\alpha_0}})$ 上的作用来自于 $A_{\alpha_0,u_{\alpha_0}}$ 在 $M_{u_{\alpha_0}}$ 上的一个几何性作用。现在使用纤维 $M_{u_{\alpha_0}}$ 是射影的这个条件就可以推出 $\mathrm{H}^\bullet(M_{u_{\alpha_0}})$ 是一个自由 $\Lambda_{A_{\alpha_0,u_{\alpha_0}}}$ 模，如同引理 7.5.1 的情形。

7.7.2. — 下面我们要使用纤维 M_{u_α} 的上同调的自由性来推出分次局部系 $\mathcal{K}_\alpha$ 作为 Λ_{A_α} 模层的自由性。难点在于如何控制其它的 $K_{\alpha'}$ 所带来的干扰，这里 $\alpha' \in \mathfrak{A}$ 使得 Z_α 严格包含在 $Z_{\alpha'}$ 中。根据归纳法，可以假设对这样的 α' 来说，$K_{\alpha'}$ 是一个自由 $\Lambda_{A_{\alpha'}}$ 模层。

取一个 V_α 的几何点 u_α，位于一个定义在有限域上的点之上。设 S_{u_α} 是 S 在 u_α 处的严格 Hensel 化 。7.6.1 的构造方法可以应用到 S_{u_α} 上 。从而可以把 Λ_{P,u_α} 作用到 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 在 S_{u_α} 上的限制上。

$$\Lambda_{P,u_\alpha} \boxtimes (f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S_\alpha}) \to (f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S_\alpha}) \quad 。 \tag{7.7.3}$$

与 7.6.1 相同，这诱导了 Λ_{P,u_α} 在错致上同调层直和上的一个分次作用，它的 -1 次部分可以写成

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha}) \otimes {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha} \to {}^p\mathrm{H}^{n-1}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha} \quad 。$$

根据 7.6.2，这个箭头可以写成一个对角矩阵的形状，通过取 ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 和 ${}^p\mathrm{H}^{n-1}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 上的借助支集的典范分解

$${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{K}_\alpha^n \quad 。$$

换句话说，直和分解

$$\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} K_\alpha$$

与分次 Λ_{P,u_α} 结构是相容的。

现在几何点 u_α 可以定义在有限域上，故由 7.5.3 知，存在一个拟提升 $A_{u_\alpha} \to P_{u_\alpha}$，它诱导了一个典范直和分解

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha}) = \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_{u_\alpha}) \oplus \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \quad 。$$

从而由此可以导出一个同态

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \otimes {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha} \to p\mathrm{H}^{n-1}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha}$$

根据前面所述，它又可以分解为下面一些箭头的直和

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \otimes K_{\alpha'}^n|_{S_\alpha} \to K_{\alpha'}^{n-1}|_{S_\alpha}$$

指标 $\alpha' \in \mathfrak{A}$ 是那些使 Z_α 包含在 $Z_{\alpha'}$ 中的元素。

命题 7.7.4. — 对任意 $\alpha' \in \mathfrak{A}$，及任意整数 m，只要 Z_α 严格包含在 $Z_{\alpha'}$ 中，分次 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 向量空间

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}^m(K_{\alpha',u_\alpha}^n)[-n]$$

都是一个自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模。

证明. — 在 $V_{\alpha'}$ 上，我们有一个典范态射，它连接着分次局部系

$$\lambda_{A_{\alpha'}} \otimes \mathcal{K}_{\alpha'} \to \mathcal{K}_{\alpha'}$$

定义见 7.4.9。根据归纳假设，对 $V_{\alpha'}$ 的任意几何点 $u_{\alpha'}$，$\mathcal{K}_{\alpha'}$ 在 $u_{\alpha'}$ 处的茎条都是自由 $\Lambda_{A_{\alpha'},u_{\alpha'}}$ 模。根据分解定理，$\mathcal{K}_{\alpha'}$ 是一个分次半单局部系。应用引理 7.4.11，则可以找到 $V_{\alpha'}$ 上的一个分次局部系 $E_{\alpha'}$，和一个同构

$$\mathcal{K}_{\alpha'} \simeq \Lambda_{A_{\alpha'}} \otimes E_{\alpha'}$$

作为分次 $\Lambda_{A_{\alpha'}}$ 模。

这个分解在交集 $V_{\alpha'} \cap S_\alpha$ 上仍然存在。令 $y_{\alpha'}$ 是 $V_{\alpha'} \cap S_\alpha$ 的一般点，$\bar{y}_{\alpha'}$ 是一个位于 $y_{\alpha'}$ 之上的几何点。则有一个 $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ 表示的同构

$$L_{\alpha',\bar{y}_{\alpha'}} = \Lambda_{A_{\alpha',\bar{y}_{\alpha'}}} \otimes E_{\alpha',\bar{y}_{\alpha'}} \quad 。$$

□

引理 7.7.5. — 在 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ 是可极化的 (参照 7.1.4) 这个前提条件下，对任意同调提升 $\beta : \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})$，把 β 与特殊化映射 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{\bar{y}_{\alpha'}})$ 以及典范投影 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{\bar{y}_{\alpha'}}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$ 取合成而得到的映射

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$$

都是单的。进而，$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})$ 在 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$ 中有一个补空间是 $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ 稳定的。

证明. — 特殊化映射 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{\bar{y}_{\alpha'}})$ 与极化的交错形式是相容的。任何同调提升 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})$ 也都与这个交错形式相容，并且该形式在仿射部分 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_{u_\alpha})$ 上等于零，从而导出的映射 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{\bar{y}_{\alpha'}})$ 也是如此。由此可知，$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$ 是单的，并且 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})$ 在 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$ 中的正交补是 $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ 稳定的。 □

继续 7.7.4 的证明。$\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ 表示的直和分解 7.7.5

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}}) = \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \oplus U$$

诱导了表示的同构 $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$

$$\Lambda_{A_{\bar{y}_{\alpha'}}} = \Lambda_{A_{u_\alpha}} \otimes \Lambda(U)$$

其中 $\Lambda(U) = \bigoplus_i \wedge^i(U)[i]$。这又给出 $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ 表示的一个张量积分解

$$\mathcal{K}_{\alpha',\bar{y}_{\alpha'}} = \Lambda_{A_{u_\alpha}} \otimes \Lambda(U) \otimes E_{\alpha',\bar{y}_{\alpha'}} \quad 。$$

从而得到一个同构

$$\mathcal{K}_{\alpha'}|_{V_{\alpha'} \cap S_\alpha} = \Lambda_{A_{u_\alpha}} \boxtimes E'_{\alpha'}$$

其中 $E'_{\alpha'}$ 是 $V_{\alpha'} \cap S_\alpha$ 上的一个局部系。由于和 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 取外部张量积的运算与 $V_{\alpha'} \cap S_\alpha$ 到 $Z_{\alpha'} \cap S_\alpha$ 的中等延拓 [32] 以及在 u_{α_0} 处取茎条的函子是可交换的，故得命题 7.7.4。 □

现在考虑谱序列 7.6.3

$$E_2^{m,n} = \mathrm{H}^m({}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{u_\alpha}) \Rightarrow H^{m+n}(M_{u_\alpha})$$

根据 7.6.4，它在 E_2 处退化。由此得到

$$\mathrm{H} = \bigoplus_j \mathrm{H}^j(M_{u_\alpha})[-j]$$

上的一个滤解，它的第 m 个分次商等于

$$\mathrm{H}^m\Big(\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{s_0}[-n]\Big)[-m] \quad 。$$

该滤解在 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 的作用下是稳定的。第 m 个分次商上的作用可以由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 在直和

$$\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n]_{S_\alpha}$$

[32] 译注：中等延拓 =“prolongement intermédiaire”。

上的作用所导出，从而来自其在 $K_{\alpha'}|_{S_\alpha}$ 上的作用。从而第 m 个分次商可以分解成分次 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模的一个直和

$$\mathrm{H}^m\Big(\bigoplus_{\alpha'}\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} K^n_{\alpha',u_\alpha}[-n]\Big)[-m] \quad 。$$

对于 $\alpha' \neq \alpha$，已经知道 $\mathrm{H}^m(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} K^n_{\alpha',u_\alpha}[-n])$ 是一个自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模，参照 7.7.4。而对于 $\alpha' = \alpha$，在 $m = -\dim(Z_\alpha)$ 之外均有 $\mathrm{H}^m(K_{\alpha,u_\alpha}) = 0$。这样一来，就得到 H 的滤解，由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 子模组成

$$0 \subseteq H' \subseteq H'' \subseteq H = \bigoplus_j \mathrm{H}^j(M_{u_\alpha})$$

并且 H' 和 H/H'' 都是自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模，同时

$$H''/H' = L_{\alpha,u_\alpha} \quad 。$$

根据 7.5.4，我们还知道 H 也是一个自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模，下面我们要使用环 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 的一个特殊性质推出 L_{α,u_α} 也是一个自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模。

由于 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 是一个局部代数，故知任何投射 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模都是自由的。于是在正合序列

$$0 \to H'' \to H \to H/H'' \to 0$$

中，若 H 和 H/H'' 都是自由的，则 H'' 也是自由的。

再注意到 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 是一个有限维局部 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 代数，具有 1 维的基座。故知 $(\Lambda_{A_{u_\alpha}})^*$（即 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 的对偶 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 向量空间）是一个自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模。考虑对偶正合序列

$$0 \to (H''/H')^* \to (H'')^* \to (H')^* \to 0$$

其中 $(H'')^*$ 和 $(H')^*$ 都是自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模。由此可知，$(H''/H')^*$ 是一个自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模，从而 H''/H' 也是如此。

7.8. Hitchin 纤维化的情形. — **现**在我们要把上面的结果应用到 Hitchin 纤维化上，准确地说，是应用到态射 $\tilde{f}^{\mathrm{ani}} : \tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}} \to \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上，它带有 $\tilde{g}^{\mathrm{ani}} : \tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}} \to \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 的作用。但这里的 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}$ 和 $\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}$ 都不是概形，只是有限型 Deligne-Mumford 叠形，参照 6.1.3。我们知道 $\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}$ 在 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上是平滑的，参照 4.3.5，还知道 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}$ 在 k 上是平滑的，参照 4.14.1。根据 4.15.2，$\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}$ 在 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}$ 上的作用具有仿射的稳定化子。根据 4.16.4，态射 $\tilde{f}^{\mathrm{ani}}$ 是平坦的，相对维数是 d，$\tilde{g}^{\mathrm{ani}}$ 也是如此。根据 5.5.4，层 $\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$ 是常值层 $\mathbf{X}_*$ 的一个有限商。根据 4.12.1，Tate 模层是可极化的。态射 $\tilde{f}^{\mathrm{ani}}$ 是紧合的，但不是射影的，然而根据 6.1.3，$\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}$ 同胚于一个在 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上射影的概形 $\tilde{M}^{\mathrm{ani}}$。

可以有两种方法来使用 7.2.3。第一个方法是把 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}$ 换成 $\tilde{M}^{\mathrm{ani}}$，它在 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上是射影的。$\tilde{M}^{\mathrm{ani}}$ 上的常值层 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是纯权的，因为与 $\tilde{M}^{\mathrm{ani}}$ 同胚的叠形 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}$ 是平滑的。我们还可以把 Deligne-Mumford Picard 叠形 $\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}$ 换成群概形 $\mathcal{P}^{\infty,\mathrm{ani}}$，这是用 4.5.6 中的定形子定义出来的。尽管这里 $\mathcal{P}^{\infty,\mathrm{ani}}$ 的相对维数大于 d，但可以设法调整 7.2.3 以适应现在的情形，这仅仅是一个标号的问题。

我们实际上还有一个更俭省的方法。这是基于下面的观察，即 7.2.3 的证明过程几乎可以整个适用于任何 Deligne-Mumford 叠形，除了引理 7.5.1 这个例外，在那里

我们假设纤维 $\mathcal{M}_a$ 是射影的。然而根据 4.15.2，我们知道 $\mathcal{M}_a$ 同胚于一个射影概形，从而 7.2.3 仍可使用。再注意，除了把 4.15.2 和 7.5.1 一起使用之外，还有一个办法是直接使用乘积公式 4.15.1 来推出 7.5.1 的结论。在 Hitchin 纤维化上我们有一个乘积公式，从而 7.5 实际上可以不需要。

7.8.1. — 我们有一个区块化 5.6.6

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}} = \bigsqcup_{\delta\in\mathbb{N}} \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}_{\delta}$$

它使得对任意 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}_{\delta}(\bar{k})$， $\mathcal{P}_a$ 的仿射部分的维数都等于 δ。我们猜想，对任意 δ，均有

$$\operatorname{codim}(\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}_{\delta}) \geq \delta \quad 。$$

这个猜想的最有力证据是在特征零的情形，[**60**, p. 4] 中简述了一个证明方法。由于特征 p 时还没有办法证明这个猜想，我们只好采取一些手法：

7.8.2. — 假设存在整数 δ 使得 $\operatorname{codim}(\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}_{\delta}) < \delta$，我们令 $\delta^{\mathrm{bad}}_G(D)$ 这些糟糕整数中的最小者。重要的一点是注意到 $\delta^{\mathrm{bad}}_G(D)$（假设它存在）是依赖于 G 和可逆向量丛 D 的。根据 5.7.2，我们知道，当群 G 固定时，整数 $\delta^{\mathrm{bad}}_G(D)$ 随着 $\deg(D)$ 一起趋于无穷。令

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{bad}} = \bigsqcup_{\delta\geq\delta^{\mathrm{bad}}G(D)} \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}_{\delta}$$

且

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{good}} = \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}} \setminus \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{bad}} \quad 。$$

根据构造方法，在 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{good}}$ 上， $\tilde{f}^{\mathrm{ani}}$ 和 $\tilde{g}^{\mathrm{ani}}$ 构成一个 δ 正则的 Abel 纤维化。

定理 7.8.3. — 设 ${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)st$ 是 ${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中具有平凡 $\mathbf{X}_*$ 作用的最大的直和因子。设 K 是 ${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}$ 的一个几何不可约的错致因子， Z 是 K 的支集。假设 $Z \cap \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{good}} \neq \emptyset$。则有 $Z = \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$。

证明. — 由于 $\tilde{\mathcal{P}}$ 在 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{good}}$ 上是 δ 正则的，故有不等式 $\operatorname{codim}(Z) \geq \delta_Z$。把 7.2.3 应用到平凡的 κ 上，一方面得到不等式 $\operatorname{codim}(Z) = \delta_Z$，另一方面还得到 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 的一个开集 U 和 $U \cap Z$ 上的一个局部系 L，使得 i_*L（i 是闭浸入 $Z \cap U \to U$）是 $\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}|_U$ 的一个直和因子。现在根据 6.5.1，我们知道后者是 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上的一个常值层，这样一来 $U \cap Z = U$，从而 $Z = \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$。 □

7.8.4. — 7.2.3 中对应于 κ 分支的部分更加复杂，因为有可能出现 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{good}} \cap \tilde{\mathcal{A}}_\kappa = \emptyset$ 的情况。事实上，$\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$ 是这样一些 $\tilde{\mathcal{A}}_H$ 的并集，其中 H 是点标初分线索 $(\kappa, \rho^\bullet_\kappa)$ 所给出的初分群，使得 $\tilde{\mathcal{A}}_H$ 在 $\tilde{\mathcal{A}}$ 中的余维数是 $\deg(D)$ 的一个倍数。然而，为了使用不等式 7.2.2 和 7.2.3，其实并不需要知道 Abel 纤维化是 δ 正则的，只需要知道对于任何支集 Z 都有不等式 $\operatorname{codim}(Z) \geq \delta_Z$。

把 G 换成一个初分群 H，则有一个整数 $\delta^{\mathrm{bad}}_H(D)$，和一个闭子概形

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{bad}}_H = \bigsqcup_{\delta_H\geq\delta^{\mathrm{bad}}_H(D)} \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}_{\delta_H}$$

及它的开补集 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{good}}_H = \tilde{\mathcal{A}}_H \setminus \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{bad}}_H$。

定理 7.8.5. — 设 ${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 是 ${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中使得 $\mathbf{X}_*$ 作用可以穿过特征标 κ 的最大的直和因子。设 K 是 ${}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 的一个几何不可约的错致因子，Z 是 K 的支集。则可以找到一个点标初分线索 $(\kappa,\rho_\kappa^\bullet)$ 使得 Z 包含在 $\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_H)$ 中，这里 H 是 $(\kappa,\rho_\kappa^\bullet)$ 所给出的初分群，$\tilde{\nu}:\tilde{\mathcal{A}}_H\to\tilde{\mathcal{A}}$ 是其所导出的闭浸入。

若进而假设 $Z\cap\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{good}})\neq\emptyset$，则有 $Z=\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}})$。

证明. — 已经知道 $Z\subseteq\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$，参照6.3.3，其中

$$\tilde{\mathcal{A}}_\kappa=\bigsqcup_{(\kappa,\rho_{\kappa,\xi}^\bullet)}\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_{H_\xi})$$

如此一来不可约闭集 Z 包含在某个不可约分支 $\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_{H_\xi})$ 之中。若初分线索 $(\kappa,\rho_\kappa^\bullet)$ 使得 $Z\subseteq\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_H)$，我们将把对应的初分群简记为 H。设 Z_H 是 $\tilde{\mathcal{A}}_H$ 中的闭集，使得 $Z=\tilde{\nu}(Z_H)$。

假设 $Z_H\cap\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{good}}\neq\emptyset$，则有不等式

$$\mathrm{codim}(Z_H)\geq\delta_{H,Z_H}$$

其中 δ_H 是 $\tilde{\mathcal{A}}_H$ 上的 Picard 叠形 $\tilde{\mathcal{P}}_H$ 的 δ 函数。根据4.17.3和4.17.1，我们知道对所有 $a_H\in\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$，差值

$$\delta(\tilde{\nu}(a_H))-\delta_H(a_H)$$

都不依赖于 a_H，并且恰好等于 $\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_H)$ 在 $\tilde{\mathcal{A}}$ 中的余维数。从而有

$$\mathrm{codim}(Z)\geq\delta_H(a_H)+\mathrm{codim}(\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_H))=\delta_Z\quad。$$

应用7.2.3，可以得到 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 的一个开集 U 和 $Z\cap U$ 上的一个非平凡局部系 L，使得 i_*L（i 是闭浸入 $i:Z\cap U\to U$）是 $\mathrm{H}^{2d}(\tilde{f}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 的一个直和因子。根据6.5.1，可以知道 $Z\cap U=\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_H)\cap U$，从而最终得到 $Z=\tilde{\nu}(\tilde{\mathcal{A}}_H)$。 □

8. 数点问题

在这最后一章里，我们将借助定理7.8.3和7.8.5来完成几何稳定化定理6.4.2以及 Langlands-Shelstad 猜想1.11.1和 Waldspuger 猜想1.12.7的证明。

证明是基于下面的原则。设 K_1,K_2 是有限型不可约 k 概形 S 上的两个纯权复形。假设 K_1 和 K_2 中所出现的几何单错致层的支集都是整个 S，则为了证明 K_1 和 K_2 在 Grothendieck 群中落在同一个等价类里，只需证明存在 S 的一个稠密开集 U，使得对 k 的任意有限扩张 k' 和任意 $u\in U(k')$，k' 的 Frobenius $\sigma_{k'}$ 在 $K_{1,u}$ 和 $K_{2,u}$ 上的迹总是相等的。Grothendieck 群中的相等意味着上述等式对于任意点 $s\in S(k')$ 都是成立的。支集定理的作用就体现在这里，因为局限在一个开集 U 中的点上来计算纤维的点数比在任意点上计算要容易得多。

因此，对于那些不迷向 Hitchin 纤维，我们将建立一个一般公式，用以表达它的 k 值点的个数 $\sharp\mathcal{M}_a(k)$。更准确地说，我们的公式是针对它的稳定部分 $\sharp\mathcal{M}_a(k)_{\mathrm{st}}$。使用乘积公式4.15.1可以把这个数写成 $\mathcal{P}_a$ 的单位分支的 k 值点

个数 $\sharp\mathcal{P}_a^0(k)$ 和一些仿 Springer 纤维的商空间的点的个数，参照 8.4。对于这些仿 Springer 纤维的商空间，可以通过较为直接的计算给出一个稳定轨道积分，参照 8.2。还可以通过一种 κ 加权的计数法而得到 κ 轨道积分。在每一种情况下，主要涉及的都是一个形如 $[M/P]$ 的 Artin 叠形上的数点问题，其中 M 是一个 k 概形，P 是一个 k 代数群，作用在 M 上。我们将在8.1 讨论这个过程，同时复习一个不动点公式，后者的证明出现在 [**54**] 的附录 A.3 中。

如果 $a \in \mathcal{A}^\diamondsuit(k)$，则这些仿 Springer 纤维的商空间都是平凡的，如此一来 $\sharp\mathcal{M}_a(k)_{\mathrm{st}}$ 就等于 $\sharp\mathcal{P}_a^0(k)$，其中 $\mathcal{P}_a^0$ 本质上是一个 Abel 多样体。由此就可以证明，若两个群 G_1 和 G_2 具有谐构的根架构，则当 $a \in \mathcal{A}^\diamondsuit(k)$ 时，两个数 $\sharp\mathcal{M}_{1,a}(k)_{\mathrm{st}}$ 和 $\sharp\mathcal{M}_{2,a}(k)_{\mathrm{st}}$ 是相等的。借助支集定理 7.8.3 又可以把上述等式扩展到 $a \in (\mathcal{A}^{\mathrm{ani}} - \mathcal{A}^{\mathrm{bad}})(k)$ 上。这样一来，我们就可以得到充分多的整体点用以得到所有的稳定局部轨道积分（当 $\deg(D)$ 趋于无穷时）。这就证明了 Waldspurger 所猜想的非标准的基本引理，参照 8.8。把这种局部整体论证反转过来，则可以把等式 $\sharp\mathcal{M}_{1,a}(k)_{\mathrm{st}} = \sharp\mathcal{M}_{2,a}(k)_{\mathrm{st}}$ 扩展到任何 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(k)$ 上。

Langlands-Shelstad 猜想的证明本质上遵循着相同的策略，只是技术上有更多的难点。如果 $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^\diamondsuit(k)$，则 $\tilde{a}_H$ 的稳定局部轨道积分都是平凡的，但 G 中相应点 a 的局部 κ 轨道积分却未必是这样。尽管如此，通过把 $\tilde{\mathcal{A}}_H^\diamondsuit$ 进一步缩小，可以假设那些非平凡的局部 κ 轨道积分都具有尽可能简单的形状。对于这些简单的局部轨道积分，其计算方法我们是知道的，并可归结到 Labesse 和 Langlands 考虑过的 SL(2) 的情形。这部分计算将在 8.3 中给出。把这个计算和支集定理 7.8.5 结合起来，就可以得到几何稳定化定理中关于开集 $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}} - \tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{bad}}$ 的部分，参照 8.5。再让 $\deg(D)$ 趋于无穷，则可以得到所有的局部轨道积分，并由此证明基本引理，参照 8.6。把局部整体论证反转过来，就可以得到完整的几何稳定化定理 6.4.2 。

8.1. 数点问题的若干一般事实. — 本节将为后面出现的各种数点问题确立一个一般框架。我们同时说明一下在本章中将处处出现的一些记号上的混用。在本节中，与其它各处不同，X 不再表示一条曲线。

8.1.1. — 若 M 是一个有限型 k 概形。根据 Grothendieck-Lefschetz 迹公式，M 的 k 值点的个数可以用 Frobenius 元素 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 的迹的交错和来计算

$$\sharp\, M(k) = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma, \mathrm{H}_c^n(M))$$

这里 $\mathrm{H}_c^n(M)$ 是指 $M \otimes_k \bar{k}$ 的第 n 个紧支集上同调群 $\mathrm{H}_c^n(M \otimes_k \bar{k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。

在后文中，我们需要使用这个迹公式的一种变体。设 M 是一个有限型 k 概形，或者更一般的，是一个有限型 Deligne-Mumford 叠形，带有一个有限型交换 k 代数群 P 的作用。我们想要把 σ 在 M 的带支集上同调（之一部）上的迹和商叠形 $X = [M/P]$ 中的点的个数及 P 的单位分支中的点的个数建立起联系。这是 [**54**] 的附录 A.3 所做的事情，我们现在先复习一下，再略作推广。

8.1.2. — 设 $X = [M/P]$ 如上。我们将用 X 来表示疏群 $X(\bar{k})$，用 M 来表示集合 $M(\bar{k})$，用 P 来表示群 $P(\bar{k})$。根据定义，$X = [M/P]$ 中的对象集合就是 M。设 $m_1, m_2 \in M$，则态射的集合 $\mathrm{Hom}_X(m_1, m_2)$ 就是那些传输子

$$\mathrm{Hom}_X(m_1, m_2) = \{p \in P | pm_1 = m_2\} \quad 。$$

态射的合成法则可由群 P 中的乘法导出。

8.1.3. — Frobenius 元素 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 在 M 和 P 上的作用诱导了它在疏群 $X = [M/P]$ 上的一个作用。根据定义，σ 作用下的不动点疏群 $X(k)$ 是这样一个范畴：

– 对象是二元组 (m,p)，其中 $m \in M$，$p \in P$，并且 $p\sigma(m) = m$；
– $X(k)$ 中的一个态射 $h : (m,p) \to (m',p')$ 是一个元素 $h \in P$，且满足 $hm = m'$ 和 $p' = hp\sigma(h)^{-1}$。

范畴 $X(k)$ 中的对象只有有限个同构类，并且每个对象只有有限个自同构。我们关心和式

$$\sharp X(k) = \sum_{x \in X(k)/\sim} \frac{1}{\sharp \mathrm{Aut}_{X(k)}(x)}$$

其中 x 跑遍 $X(k)$ 中的同构类的一个代表元集合。

8.1.4. — 设 $X = [M/P]$ 如上，并设 $x = (m,p)$ 是 $X(k)$ 的一个对象。根据 $X(k)$ 中的态射的定义，p 的 σ 共轭类只依赖于 x 的同构类。由于 P 是一个有限型 k 群，故知 P 的 σ 共轭类群可以典范等同于 $\mathrm{H}^1(k,P)$。令 $\mathrm{cl}(x) \in \mathrm{H}^1(k,P)$ 是 p 的 σ 共轭类，它只依赖于 x 的同构类。根据 Lang 的一个定理，$\mathrm{H}^1(k,P)$ 可以等同于 $\mathrm{H}^1(k,\pi_0(P))$，其中 $\pi_0(P)$ 是指 $P \otimes_k \bar{k}$ 的连通分支群，从而是一个有限交换群，并带有一个 σ 的作用。这样一来，对任意 σ 不变的特征标 $\kappa : \pi_0(P) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$，及任意对象 $x \in X(k)$，均可定义一个配对

$$\langle \mathrm{cl}(x), \kappa \rangle = \kappa(\mathrm{cl}(x)) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

它只依赖于 x 的同构类。从而可以定义 $X(k)$ 中的点的 κ 加权个数为

$$\sharp X(k)_\kappa = \sum_{x \in X(k)/\sim} \frac{\langle \mathrm{cl}(x), \kappa \rangle}{\sharp \mathrm{Aut}_{X(k)}(x)}$$

其中 x 跑遍 $X(k)$ 中的同构类的一个代表元集合。

8.1.5. — 根据同伦引理，群 P 在上同调群 $\mathrm{H}^n_c(M)$ 上的作用可以穿过它的连通分支群 $\pi_0(P)$。考虑 $\mathrm{H}^n_c(M)$ 中的特征值 κ 的特征子空间 $\mathrm{H}^n_c(M)_\kappa$。由于 κ 是 σ 不变的，故知 σ 可以作用在 $\mathrm{H}^n_c(M)_\kappa$ 上。

我们有 Grothendieck-Lefschetz 迹公式的下述变体，证明见 [**54**] 的附录 A.3。

命题 8.1.6. — *设 M 是一个有限型 k 概形，P 是一个有限型 k 群，作用在 M 上，并设 $X = [M/P]$。于是范畴 $X(k)$ 中的对象只有有限个同构类，并且每个对象只有有限个自同构。对任意 σ 不变的特征标 $\kappa : \pi_0(P) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$，数值 $\sharp X(k)_\kappa$ 有下面的上同调诠释：*

$$\sharp P^0(k) \sharp X(k)_\kappa = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma, \mathrm{H}^n_c(M)_\kappa)$$

其中 P^0 是 P 的单位分支。

证明在 [**54**, A.3.1] 中给出。下面考虑两个例子，它们有助于理解为什么我们要把 P^0 和 $\pi_0(P)$ 分开来对待。

例子 8.1.7. — 假设 $M = \mathrm{Spec}(k)$，P 是一个有限群，且 σ 作用在它上面。设 $X = [M/P]$ 是 P 的分类空间。此时范畴 $X(k)$ 中的对象就是诸元素 $p \in P$，而态射 $p \to p'$ 就是这样的元素 $h \in P$，它使得 $p' = hp\sigma(h)^{-1}$。于是有

$$\sharp X(k) = \frac{\sharp P}{\sharp P} = 1 \quad 。$$

此外，对任意 σ 不变的非平凡特征标 $\kappa : P \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$，均有 $\sharp X(k)_\kappa = 0$。

例子 8.1.8. — 设 $M = \mathrm{Spec}(k)$，$P = \mathbf{G}_m$。设 $X = [M/P]$ 是 $\mathbf{G}_m$ 的分类空间。$X(k)$ 中的对象就是诸元素 $p \in P$，而态射 $p \to p'$ 就是这样的元素 $h \in P$，它使得 $p' = hp\sigma(h)^{-1}$。根据 Lang 的定理，$\bar{k}^\times$ 中的所有元素都是 σ 共轭的，如此一来，$X(k)$ 中的同构类只有一个。$X(k)$ 的每个对象的自同构群都是 $k^\times$，故有 $q-1$ 个元素。从而 $\sharp X(k) = (q-1)^{-1}$。

为了考察仿 Springer 纤维上的数点问题，我们需要使用上述命题的一种变体，其中 M 和 P 都是局部有限型的，并且 $[M/P]$ 满足某种合适的有限性条件。

设 M 是一个局部有限型 k 概形，P 是一个局部有限型交换 k 群，作用在 M 上。为了使商空间 $[M/P]$ 成为有限的，我们再引入下面一些假设。

假设 8.1.9. — (1) 连通分支群 $\pi_0(P)$ 是一个有限型 Abel 群。
(2) M 的每个点在 P 中的稳定化子都是有限型子群。
(3) 可以找到一个无挠的离散子群 $\Lambda \subseteq P$，使得 P/Λ 和 M/Λ 都是有限型的。

对最后一个条件略作说明。由于群 Λ 是无挠的，故知它在 M 上的作用没有不动点，这是因为 M 的任何点在 P 中的稳定化子都是有限型的，特别的，与 Λ 的交集是平凡的。进而，若此条件成立，则它对于任何 σ 不变的指数有限子群 $\Lambda' \subseteq \Lambda$ 也是成立的。

8.1.10. — 我们还需要说明，怎样构造出 P 的无挠离散子群 Λ，使得 P/Λ 是有限型的。群 P 有一个典范拆解

$$1 \to P^{\mathrm{tf}} \to P \to \pi_0(P)^{\mathrm{lib}} \to 0$$

其中 $\pi_0(P)^{\mathrm{lib}}$ 是 $\pi_0(P)$ 的最大自由商群，P^{tf} 是 P 的最大有限型子群。由于 $\pi_0(P)^{\mathrm{lib}}$ 是一个自由 Abel 群，故有一个提升

$$\gamma : \pi_0(P)^{\mathrm{lib}} \to P$$

不需要是 σ 循变的。由于 P^{tf} 是一个有限型 k 群，故当 N 充分可除时，γ 在 $\Lambda = N\pi_0(P)^{\mathrm{lib}}$ 上的限制是 σ 循变的。这样就得到一个无挠的离散子群 P。前提条件 (3) 等价于说 M 除以这个无挠的离散子群后是一个有限型 k 概形。

8.1.11. — 考虑商叠形 $X = [M/P]$。它在 σ 作用下的不动点疏群 $X(k)$ 是这样的，其对象是二元组 $x = (m,p)$，其中 $m \in M, p \in P$ 并且 $p\sigma(m) = m$。其态射 $h : (m,p) \to (m',p')$ 是这样的元素 $h \in P$，它使得 $hm = m'$ 且 $p' = hp\sigma(h)^{-1}$。设 P_σ 是 P 中的 σ 共轭类群。p 的 σ 共轭类定义了一个元素 $\mathrm{cl}(x) \in P_\sigma$，它只依赖于 x 的同构类。由于 m 定义在 k 的一个有限扩张上，故知 $\mathrm{cl}(x)$ 落在下面的子群中

$$\mathrm{cl}(x) \in \mathrm{H}^1(k,P)$$

它是 P_σ 的挠部分。

引理 8.1.12. — 任何特征标$\kappa : \mathrm{H}^1(k,P) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$都可以延拓为一个有限阶特征标$\tilde{\kappa}: P_\sigma \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$。

证明. — 设P^0是P的单位分支群。根据Lang的定理，P^0的所有元素都σ共轭于中性元。由此可知，P_σ到$\pi_0(P)$的σ共轭类群上的映射$P_\sigma \to \pi_0(P)_\sigma$是一个同构。从而特征标$\tilde{\kappa} : P_\sigma \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$就是有限型可对角化$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$群$(\pi_0(P)_\sigma)^* = \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(P)_\sigma])$的$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$值点。而特征标$\kappa : \mathrm{H}^1(k,P) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$构成$(\pi_0(P)_\sigma)^*$的连通分支群$\pi_0((\pi_0(P)_\sigma)^*)$。于是任何元素$\kappa \in \pi_0((\pi_0(P)_\sigma)^*)$都可以提升为一个挠元$\tilde{\kappa} \in (\pi_0(P)_\sigma)^*$。 □

商叠形$X = [M/P]$显然等价于$[(M/\Lambda)/(P/\Lambda)]$，其中$M/\Lambda$和$P/\Lambda$都是有限型的。特别的，$X(k)$中的同构类集合是有限的，并且每个对象的自同构群也都是有限的。从而对任意特征标$\kappa : \mathrm{H}^1(k,P) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$，均可写出下面的有限和

$$\sharp\, X(k)_\kappa = \sum_{x \in X(k)/\sim} \frac{\langle \mathrm{cl}(x), \kappa \rangle}{\sharp\, \mathrm{Aut}(x)} \quad 。$$

设$\tilde{\kappa} : P \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$是一个$\sigma$不变的有限阶特征标，并且是$\kappa$的代表元。则可以选取一个离散子群$\Lambda \subseteq P$，使得8.1.9的条件(3)成立，并使得$\kappa$在$\Lambda$上的限制是平凡的。仍以$\tilde{\kappa}$来记它在$P/\Lambda$上所导出的特征标。令$\mathrm{H}^n_c(M/\Lambda)_{\tilde{\kappa}}$是$\mathrm{H}^n_c(M/\Lambda)$中对应于特征值$\tilde{\kappa}$的特征子空间。下面的命题可由8.1.6立得。

命题 8.1.13. — 我们有公式

$$\sharp\, P^0(k) \sharp\, X(k)_\kappa = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma, \mathrm{H}^n_c(M/\Lambda)_{\tilde{\kappa}}) \quad 。$$

进而，若$\Lambda' \subseteq \Lambda$是一个$\sigma$不变的最大秩子群，则对每个整数$n$，均有一个典范同构

$$\mathrm{H}^n_c(M/\Lambda')_{\tilde{\kappa}} \to \mathrm{H}^n_c(M/\Lambda)_{\tilde{\kappa}} \quad 。$$

证明. — 由于Λ是P的一个无挠子群，故它与单位分支P^0的交集是平凡的。这就表明，同态$P^0 \to P/\Lambda$诱导了一个从P^0到P/Λ的单位分支上的同构。把这与8.1.6相比较，就可以得到所要的公式。 □

这个命题主要用来比较和控制k的各个有限扩张k'上的和式$\sharp\, X(k')_\kappa$的变化情况。设$m = \deg(k'/k)$。对于$X(k')$中的任何同构类x'，均有P中的一个σ^m共轭类。由于$\kappa : P \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$是$\sigma$不变的，故它也是$\sigma^m$不变的，从而可以定义配对$\langle \mathrm{cl}(x), \kappa \rangle \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$。于是有公式

$$\sharp\, P^0(k') \sharp\, X(k')_\kappa = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma^m, \mathrm{H}^n_c(M/\Lambda)_{\tilde{\kappa}}) \quad 。$$

推论 8.1.14. — 设$X = [M/P]$和$X' = [M'/P']$如上。设$\kappa : P \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$和$\kappa' : P' \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$是两个$\sigma$不变的有限阶特征标。假设存在一个整数$m$，使得对任何次数$m' \geq m$的扩张$k'/k$，均有

$$\sharp\, P^0(k') \sharp\, X(k')_\kappa = \sharp\, P'^0(k') \sharp\, X'(k')_{\kappa'} \quad 。$$

则有下面的等式
$$\sharp P^0(k)\sharp X(k)_\kappa = \sharp P'^0(k)\sharp X'(k)_{\kappa'} \quad 。$$

现在我们要研究两个相似的例子，它们都属于那种最简单的仿 Springer 纤维。这两种情况都可以直接计算出 $\sharp X(k)_\kappa$。

例子 8.1.15. — 设 A 是一个 k 上的 1 维分裂环面，$\mathbf{X}_*(A)$ 是它的余特征标群。考虑一个扩充
$$1 \to A \to P \to \mathbf{X}_*(A) \to 1 \quad 。$$
层 $\underline{\mathrm{RHom}}(\mathbf{X}_*(A), A)$ 集中于第 0 个位置，并且
$$\mathrm{Hom}(\mathbf{X}_*(A), A) = \mathbf{G}_m \quad 。$$
由于 $\mathrm{H}^1(k, \mathbf{G}_m) = 0$，故知上述正合序列是分裂的，特别的，存在一个同构
$$P \simeq A \times \mathbf{X}_*(A) \quad 。$$
在这两个情形下，都有一个 $\bar{k}$ 上的同构 $P = \mathbf{G}_m \times \mathbb{Z}$。

考虑由 $\mathbf{P}^1$ 组成的一个无限长的链，这是从无交并集 $\bigsqcup_i \mathbf{P}^1_i$ 出发（其中 $\mathbf{P}^1_i$ 是指第 i 个 $\mathbf{P}^1$）把 $\mathbf{P}^1_i$ 的无穷远点 ∞_i 与 $\mathbf{P}^1_{i+1}$ 的零 0_{i+1} 黏合起来而得到的。群 $\mathbf{G}_m \times \mathbb{Z}$ 作用在 $\bigsqcup_i \mathbf{P}^1_i$ 上，并与黏合方式相容，从而它作用在这个链上。

考虑这样一种 k 概形 M，连同一个 P 的作用，基变换到 $\bar{k}$ 上以后，M 同构于上述 $\mathbf{P}^1$ 的无限长链，且带有 $\mathbf{G}_m \times \mathbb{Z}$ 的作用。特别的，我们有一个区块化 $M = M_1 \sqcup M_0$，其中 M_1 是一个 P 作用下的回旋子，M_0 是一个离散群 $\mathbf{X}_*(A)$ 作用下的回旋子。疏群 $X = [M/P]$ 本质上只有两个对象 x_1 和 x_0，并且 $\mathrm{Aut}(x_1) = A$，$\mathrm{Aut}(x_0)$ 是平凡的。我们还有两个上同调类
$$\mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_0 \in \mathrm{H}^1(k, P) = \mathrm{H}^1(k, \mathbf{X}_*(A)) \quad 。$$
这些上同调类只能有下面三种可能性。

(1) 若 $A = \mathbf{G}_m$，则有 $\mathbf{X}_*(A) = \mathbb{Z}$。在此情形下，$\mathrm{H}^1(k, \mathbf{X}_*(A))$ 成为零。于是有公式
$$\sharp X(k) = 1 + \frac{1}{q-1} = \frac{q}{q-1}$$
且可以改写成下面的形式
$$\sharp A(k)\sharp X(k) = q \quad 。$$

(2) 假设 A 是 k 上的一个 1 维不分裂环面，从而它有 $q+1$ 个取值在 k 中的点。此时 $\mathbf{X}_*(A)$ 就是群 $\mathbb{Z}$，并且 σ 的作用就是 $m \mapsto -m$。群 $\mathrm{H}^1(k, \mathbf{X}_*(A))$ 有两个元素，可以把它们用下面的方法具体写出来。一个 k 上的 $\mathbf{X}_*(A)$ 回旋子 E 就是一个 $\mathbb{Z}$ 作用下的主齐性空间 E，连同一个映射 $\sigma : E \to E$，与 σ 在 $\mathbb{Z}$ 上的上述作用相容。对任意 $e \in E$，差值 $\sigma(e) - e$ 是一个整数，且其奇偶性不依赖于 e 的选择。若 $\sigma(e) - e$ 是偶的，则 $\mathrm{cl}(E)$ 是 $\mathrm{H}^1(k, \mathbf{X}_*(A))$ 中的单位元。若 $\sigma(e) - e$ 是奇的，则 $\mathrm{cl}(E)$ 是 $\mathrm{H}^1(k, \mathbf{X}_*(A))$ 中的非单位元。

现在假设 $\mathrm{cl}_0 = 0$。则在无限长链中恰有一个 $\mathbf{P}^1_i$ 在 σ 作用下保持稳定。由于 A 是不分裂环面，故知 σ 必然把 0_i 和 ∞_i 作了对换。由此可知 $\mathrm{cl}_1 \neq 0$。

若 $\kappa : \mathrm{H}^1(k, \mathbf{X}_*(A)) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ 是那个非平凡特征标，则有公式

$$\sharp X(k)_\kappa = 1 - \frac{1}{q+1} = \frac{q}{q+1}$$

且可以把它改写成下面的形式

$$\sharp A(k) \sharp X(k)_\kappa = q \quad 。$$

(3) 仍然假设 A 是不分裂环面，现在考虑 $\mathrm{cl}_0 \neq 0$ 的情形。此时存在 $\mathbf{P}^1_i$ 和 $\mathbf{P}^1_{i+1}$ 在 σ 的作用下相互对换，从而在无限长链 M 中，其公共点 $\infty_i = 0_{i+1}$ 是 σ 不变的。由此可知 $\mathrm{cl}_1 = 0$ 。于是有公式

$$\sharp A(k) \sharp X(k)_\kappa = -q$$

其中 $\kappa : \mathrm{H}^1(k, \mathbf{X}_*(A)) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ 是非平凡特征标。

如果假设 M_0 至少有一个 k 值点，则有 $\mathrm{cl}_0 = 0$，如此一来第三种情况被排除了。从而这时公式

$$\sharp A(k) \sharp X(k)_\kappa = q$$

总是成立的。

8.2. 仿 Springer 纤维上的数点问题. — 在本节中，我们将考察仿 Springer 纤维上的数点问题，本质上遵循 [**26**, §15] 的方法，同时利用上节的语言所提供的便利。与上节相同，记号 $x \in X$ 表示 $x \in X(\bar{k})$ 。如果需要考虑不同于 $\bar{k}$ 的系数，我们将明确指出。

设 $v \in |X|$ 是 X 的一个闭点。设 F_v 是有理函数域 F 在 v 进拓扑下的完备化，$\mathcal{O}_v$ 是 F_v 中的整数环，k_v 是其剩余类域。令 $X_v = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ 和 $X_v^\bullet = \mathrm{Spec}(F_v)$ 。设 $\overline{F}_v$ 是 $\overline{F} = F \otimes_k \bar{k}$ 的 v 进完备化，$\overline{\mathcal{O}}_v$ 是 $\overline{F}_v$ 的整数环。

8.2.1. — 设 $a \in \mathfrak{c}^\heartsuit(\mathcal{O}_v)$ 是 $\mathfrak{c}$ 的一个 X_v 值点，且其一般纤维是正则半单的。既约化的仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a)$ 是一个局部有限型 k 概形，且其 $\bar{k}$ 值点的集合是

$$\mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a) = \{g \in G(\overline{F}_v)/G(\overline{\mathcal{O}}_v) | \mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\overline{\mathcal{O}}_v)\}$$

其中 $\gamma_0 = \epsilon(a)$ 是点 a 处的 Kostant 截面。由于幂零元在下面的讨论中不起任何作用，我们将把 $\mathcal{M}_v^{\mathrm{red}}(a)$ 简写为 $\mathcal{M}_v(a)$ 。

8.2.2. — 设 $J_a = a^*J$ 是正则中心化子的逆像。设 J'_a 是一个平滑 X_v 群概形，具有连通的纤维，并带有一个同态 $J'_a \to J_a$，它在一般纤维上诱导了一个同构。特别的，你可以取 J'_a 是由 J_a 的单位分支给出的群概形 J_a^0，然而从应用的角度出发，考虑一般的 J'_a 会更有益。

8.2.3. — 考虑局部有限型 k 群概形 $\mathcal{P}_v^{\mathrm{red}}(J'_a)$，其 $\bar{k}$ 值点的集合取为

$$\mathcal{P}_v^{\mathrm{red}}(J'_a)(\bar{k}) = J_a(\overline{F}_v)/J'_a(\overline{\mathcal{O}}_v) \quad 。$$

我们将把 $\mathcal{P}_v^{\mathrm{red}}(J'_a)$ 简写为 $\mathcal{P}_v(J'_a)$，因为幂零元在下文中不起作用。同态 $J'_a \to J_a$ 诱导了一个同态

$$\mathcal{P}_v(J'_a) \to \mathcal{P}_v(J_a)$$

它又诱导了一个 $\mathcal{P}_v(J'_a)$ 在 $\mathcal{M}_v(a)$ 上的作用。根据3.4.1，这个作用满足条件8.1.9，如此一来，我们可以考察商叠形 $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]$ 的 k 值点的个数及其 κ 加权个数。

根据 8.1.13，我们知道这些数都是有限的，并且有一个上同调诠释。在本节中，我们更关心如何把这些数表达成稳定轨道积分和 κ 轨道积分的形式。

首先比较数点问题 8.1 中出现的 κ 与 κ 轨道积分的定义 1.7 中出现的 κ。

引理 8.2.4. — 假设 J'_a 的特殊纤维是连通的。则有一个典范同构

$$\mathrm{H}^1(F_v, J_a) = \mathrm{H}^1(k, \mathcal{P}_v(J'_a)) \quad 。$$

证明. — 根据 Steinberg 的一个定理，$\mathrm{H}^1(\overline{F}_v, J_a) = 0$。由此可知

$$\mathrm{H}^1(F_v, J_a) = \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), J_a(\overline{F}_v)) \quad 。$$

根据 Lang 的一个定理，又有 $\mathrm{H}^1(k, J'_a(\overline{\mathcal{O}}_v)) = 0$，因为 J'_a 是一个平滑群概形，且具有连通的纤维。引理可由此推出。 □

命题 8.2.5. — 假设 J'_a 的特殊纤维是连通的。设 $\kappa : \mathrm{H}^1(F_v, J_a) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ 是一个特征标，它可以导出一个特征标 $\kappa : \mathrm{H}^1(k, \mathcal{P}_v(J'_a)) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$。则 $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]$ 的 k 值点的 κ 加权个数可以表示为下面的形状

$$\sharp\, [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}t_v) \quad 。$$

其中 $1_{\mathfrak{g}_v}$ 是 $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ 的特征函数，$\mathrm{d}t_v$ 是 $J_a(F_v)$ 上的任何一个 Haar 测度。

证明. — 复习一下下面的范畴

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k) \quad 。$$

该范畴中的对象是二元组 $x = (m, p)$，由一个元素 $m \in \mathcal{M}_v(a)$ 和一个元素 $p \in \mathcal{P}_v(J'_a)$ 所组成，且满足等式 $p\sigma(m) = m$。该范畴中的一个由 (m, p) 到 (m', p') 态射是这样一个元素 $h \in \mathcal{P}_v(J'_a)$，它使得 $m' = hm$ 且 $p' = hp\sigma(h)^{-1}$。

令 $\mathcal{P}_v(J'_a)_\sigma$ 是 $\mathcal{P}_v(J'_a)$ 的 σ 共轭类群，$\mathrm{H}^1(k, \mathcal{P}_v(J'_a))$ 是由连续上圈所组成的子群。对每一个对象 $x = (m, p)$ 如上，定义 $\mathrm{cl}(x) \in \mathcal{P}_v(J'_a)_\sigma$ 是 p 的 σ 共轭类，它实际上落在下面的子群中

$$\mathrm{cl}(x) \in \mathrm{H}^1(k, \mathcal{P}_v(J'_a)) = \mathrm{H}^1(F_v, J_a) \quad 。$$

设 γ_0 是 a 经由 Kostant 截面而落在 $\mathfrak{g}$ 中的像。则有一个典范同构 $J_a = I_{\gamma_0}$，参照 1.4.3，如此则 $\mathrm{cl}(x)$ 也可以被看成是 $\mathrm{H}^1(F_v, I_{\gamma_0})$ 的一个元素。

引理 8.2.6. — 对于 $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$ 的任意对象 x，上同调类 $\mathrm{cl}(x)$ 都落在下述同态的核之中

$$\mathrm{H}^1(F_v, I_{\gamma_0}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G) \quad 。$$

证明. — 设 $x = (p, m)$ 如上。设 $g \in G(\overline{F}_v)$ 是 $m \in G(\overline{F}_v)/G(\overline{\mathcal{O}}_v)$ 的一个代表元，$j \in I_{\gamma_0}(\overline{F}_v)$ 是 p 的一个代表元。等式 $p\sigma(m) = m$ 表明

$$g^{-1}j\sigma(g) \in G(\overline{\mathcal{O}}_v)$$

从而该元素必定 σ 共轭于 $G(\overline{F}_v)$ 中的中性元。这样一来 $\mathrm{cl}(x) \in \mathrm{H}^1(F_v, I_{\gamma_0})$ 在 $\mathrm{H}^1(F_v, G)$ 中的像是平凡的。 □

继续证明8.2.5。对于$\mathrm{H}^1(F_v, I_{\gamma_0}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G)$的核中的任意元素$\xi$，考虑$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$的一个子范畴

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]_\xi(k)$$

由满足$\mathrm{cl}(x) = \xi$的对象所组成。现在我们要把$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]_\xi(k)$中的同构类的个数表达成一个轨道积分。

在σ共轭类ξ中取定一个$j_\xi \in I_{\gamma_0}(\overline{F}_v)$。设$(m, p)$是$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]_\xi(k)$中的一个对象。由于$p$在$\mathcal{P}_v(J'_a)$中可以$\sigma$共轭于$j_\xi$，故可找到$h \in \mathcal{P}_v(J'_a)$使得$j_\xi = h^{-1}p\sigma(h)$。于是$(m, p)$同构于$(h^{-1}m, j_\xi)$。因而范畴$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]_\xi(k)$等价于它的这样一个完全子范畴，由形如$(m, j_\xi)$的对象所组成。态射$(m, j_\xi) \to (m', j_\xi)$是一个元素$h \in \mathcal{P}_v(J'_a)(k)$，且满足$hm = m'$。由于$J'_a$的纤维都是连通的，故有

$$\mathcal{P}_v(J'_a)(k) = J_a(F_v)/J'_a(\mathcal{O}_v) \quad 。$$

设(m, j_ξ)如上。选好m的一个代表元$g \in G(\overline{F}_v)$。于是有$g^{-1}j_\xi\sigma(g) \in G(\overline{\mathcal{O}}_v)$。由于$G(\overline{\mathcal{O}}_v)$的所有元素都$\sigma$共轭于中性元，可以选择$g$使得$m = gG(\overline{\mathcal{O}}_v)$并且

$$g^{-1}j_\xi\sigma(g) = 1 \quad 。$$

设$g, g' \in G(\overline{F}_v)$是两个满足上述方程的元素，并且落在同一个类$m \in G(\overline{F}_v)/G(\overline{\mathcal{O}}_v)$中。则有$g' = gk$，其中$k \in G(\mathcal{O}_v)$，从而$g$在$G(\overline{F}_v)/G(\mathcal{O}_v)$中的像是由$(m, j_\xi)$所确定的。

这样一来，范畴$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]_\xi(k)$等价于下面的范畴$O_\xi$，其对象是这样的元素$g \in G(\overline{F}_v)/G(\mathcal{O}_v)$，满足下面两个方程

(1) $g^{-1}j_\xi\sigma(g) = 1$
(2) $\mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\overline{\mathcal{O}}_v)$

其态射$g \to g_1$是这样的元素$h \in J_a(F_v)/J'_a(\mathcal{O}_v)$，满足$g = hg_1$。这里为了让$h$是左作用，需要使用典范同构$J_a = I_{\gamma_0}$。

由于ξ在$\mathrm{H}^1(F_v, G)$中的像是平凡的，故可找到$g_\xi \in G(\overline{F}_v)$使得$g_\xi^{-1}j_\xi\sigma(g_\xi) = 1$。选定一个这样的$G_\xi$，且令

$$\gamma_\xi = \mathrm{ad}(g_\xi)^{-1}\gamma_0 \quad 。$$

方程$g_\xi^{-1}j_\xi\sigma(g_\xi) = 1$表明$\gamma_\xi \in G(F_v)$。$\gamma_\xi$的$G(F_v)$共轭类不依赖于$j_\xi$和$g_\xi$的选择，而只依赖于上同调类$\xi \in \mathrm{H}^1(F_v, I_{\gamma_0})$。

若令$g' = g_\xi^{-1}g$，则范畴O_ξ可以用下面的方法描述。其对象是元素$g' \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$，且满足

$$\mathrm{ad}(g')^{-1}(\gamma_\xi) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v) \quad 。$$

其态射$g' \to g'_1$是元素$h \in J_a(F_v)/J'_a(\mathcal{O}_v)$，且满足$g' = hg'_1$。这里为了使$h$是左作用，需要使用典范同构$J_a = I_{\gamma_\xi}$，其中$I_{\gamma_\xi}$是$\gamma_\xi$的中心化子。

从而O_ξ中的同构类就是这样一些双陪集

$$g' \in I_{\gamma_\xi}(F_v) \backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$$

它满足 $\mathrm{ad}(g')^{-1}\gamma_\xi \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$。$g'$ 的自同构群就是群

$$(I_{\gamma_\xi}(F_v)\cap g'G(\mathcal{O}_v)g'^{-1})/J'_a(\mathcal{O}_v)$$

其元素个数可以写成下面这个关于体积的公式

$$\frac{\mathrm{vol}(I_{\gamma_\xi}(F_v)\cap g'G(\mathcal{O}_v)g'^{-1},\mathrm{d}t_v)}{\mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v),\mathrm{d}t_v)}\quad 。$$

从而有

$$\sharp\, O_\xi = \sum \frac{\mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v),\mathrm{d}t_v)}{\mathrm{vol}(J_a(F_v)\cap g'G(\mathcal{O}_v)g'^{-1},\mathrm{d}t_v)}$$

求和范围是这样的双陪集

$$g'\in I_{\gamma_\xi}(F_v)\backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$$

它满足 $\mathrm{ad}(g')^{-1}\gamma_\xi \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$。从而可以得到公式

$$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)]_\xi(k) = \sharp\, O_\xi = \mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v),\mathrm{d}t)\mathbf{O}_{\gamma_\xi}(1_{\mathfrak{g}_v},\mathrm{d}t_v)\quad 。$$

把它们在 $\mathrm{H}^1(F,I_{\gamma_0})\to \mathrm{H}^1(F,G)$ 的核上取和，则得到公式

$$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v),\mathrm{d}t_v)\mathbf{O}^\kappa_a(1_{\mathfrak{g}_v},\mathrm{d}t_v)$$

这就是所要的。 □

我们还需要对于特殊纤维不连通的群概形 J'_a（特别的，对于 J_a 本身）写出类似的表达式。此时直接计算商空间 $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)]$ 的 k 值点是很困难的。更有效率的办法是把它与连通的情形进行对比。我们将只给出 J_a 上的结果，一般情形也是对的。

设 $\kappa:\mathrm{H}^1(k,\mathcal{P}_v(J_a))\to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$。使用同态

$$\mathrm{H}^1(k,P_v(J_a^0))\to \mathrm{H}^1(k,\mathcal{P}_v(J_a))\ ,$$

可以得到 $\mathrm{H}^1(k,\mathcal{P}_v(J_a^0))$ 的一个特征标，进而得到 $\mathrm{H}^1(F_v,J_a)$ 的一个特征标，仍旧记为 κ。

命题 8.2.7. — 考虑 $\mathrm{H}^1(k,\mathcal{P}_v(J_a))$ 的一个特征标 κ 以及它在 $\mathrm{H}^1(F_v,J_a)$ 所导出的特征标 $\kappa:\mathrm{H}^1(F_v,J_a)\to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$。则 $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)]$ 的 k 值点的 κ 加权个数可以表达为下面的形状

$$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa = \mathrm{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v),\mathrm{d}t_v)\mathbf{O}^\kappa_a(1_{\mathfrak{g}_v},\mathrm{d}t_v)\quad 。$$

其中 $1_{\mathfrak{g}_v}$ 是 $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ 的特征函数，$\mathrm{d}t_v$ 是 $J_a(F_v)$ 上的任何一个 Haar 测度。

进而，若 $\kappa:\mathrm{H}^1(F_v,J_a)\to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ 是一个特征标，但不是来自 $\mathrm{H}^1(k,\mathcal{P}_v(J_a))$ 的一个特征标，则 κ 轨道积分 $\mathbf{O}^\kappa_a(1_{\mathfrak{g}_v},\mathrm{d}t_v)$ 是零。

证明. — 主要问题是比较 $\mathcal{P}_v(J_a)$ 和已知情形 $\mathcal{P}_v(J_a^0)$。只需证明在第一个情形下有等式

$$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa = \sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa$$

并且在第二个情形下 $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa$ 是空的。证明完全基于 8.1.7 的一般原则，只是细节上复杂得多。

我们有一个正合序列

$$1 \to \pi_0(J_{a,v}) \to \mathcal{P}_v(J_a^0) \to \mathcal{P}_v(J_a) \to 1$$

其中 $\pi_0(J_{a,v})$ 是 J_a 在 v 处的纤维的连通分支群。由此可以导出一个长正合序列

$$1 \to \pi_0(J_{a,v})^\sigma \to \mathcal{P}_v(J_a^0)^\sigma \to \mathcal{P}_v(J_a)^\sigma \tag{8.2.8}$$

$$\to \pi_0(J_{a,v})_\sigma \to \mathcal{P}_v(J_a^0)_\sigma \to \mathcal{P}_v(J_a)_\sigma \to 1 \tag{8.2.9}$$

其中的上指标 σ 是指 σ 不变量群，下指标 σ 是指 σ 余不变量群。

考虑函子

$$\pi : [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k) \to [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k) \quad 。$$

对于一个对象 $x' = (m, p')$，其中 $m \in \mathcal{M}_v(a)$ 且 $p' \in \mathcal{P}_v(J_a^0)$ 并满足 $p'\sigma(m) = m$，该函子把它送到对象 $x = (m, p)$，其中 p 是 p' 在 $\mathcal{P}_v(J_a)$ 中的像。选好 $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)$ 中同构类的一个代表元集合 $\{x_\psi \,|\, \psi \in \Psi\}$。

由于同态 $\mathcal{P}_v(J_a^0) \to \mathcal{P}_v(J_a)$ 是映满的，故知 $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$ 的这个子范畴可以等价于 $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$ 本身，从而为了计算 $\sharp[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa$，可以局限在这个子范畴上。

对任意 $\psi \in \Psi$，考虑 $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$ 的一个完全子范畴

$$[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_\psi}$$

它是由这样的对象 $x'_\psi = (m_\psi, p'_\psi)$ 组成的，其中 $p'_\psi \mapsto p_\psi$。若 $\psi \neq \psi'$，则两个对象 $x'_\psi \in [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_\psi}$ 和 $x'_{\psi'} \in [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_{\psi'}}$ 不会是同构的。进而对任意 $x' \in [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$，均可找到 $\psi \in \Psi$ 和 $x'_\psi \in [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_\psi}$，使得 x' 和 x'_ψ 是同构的。这样一来，诸范畴

$$\bigsqcup_\psi [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_\psi}$$

的无交并就构成 $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$ 的一个完全子范畴，并且与之等价。从而为了数清 $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$ 中的对象，可以先数清每个 $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_\psi}$ 中的对象，然后对 $\psi \in \Psi$ 求和。

取定一个 x_ψ，并且把它简记为 $x = (m, p)$。范畴

$$[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_x$$

的描述并不困难。选定一个对象 $x_1 = (m, p_1)$ 满足 $p_1 \mapsto p$，则可以把该范畴中的对象集等同于群 $\pi_0(J_{a,v})$，它是 $\mathcal{P}_v(J_a^0) \to \mathcal{P}_v(J_a)$ 的核。该范畴中的态射则是由下面这个群中的元素所给出的

$$H_1 = \{h_1 \in \mathcal{P}_v(J_a^0) \,|\, hm = m \quad 和 \quad h_1\sigma(h_1)^{-1} \in \pi_0(J_{a,v})\} \quad 。$$

范畴 $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)]_x$ 等价于集合 $\pi_0(J_{a,v})$ 在 H_1 作用下的商范畴，这里 H_1 的作用是通过同态 $\alpha : H_1 \to \pi_0(J_{a,v})$，后者的定义是 $\alpha(h_1) = h_1\sigma(h_1)^{-1}$。此范畴中的同构类集合可以等同于 α 的余核 $\mathrm{cok}(\alpha)$，每个对象的自同构群则可以等同于核 $\ker(\alpha)$。特别的，这就表明 H_1 是一个有限群。

设 κ 是 $\mathrm{H}^1(k, \mathcal{P}_v(J_a^0))$ 的一个特征标。这个群可以典范等同于 $\mathcal{P}_v(J_a^0)_\sigma$ 的挠部分。考虑 κ 在 $\pi_0(J_{a,v})_\sigma$ 上的限制，并把它所导出的特征标 $\pi_0(J_{a,v}) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ 仍记为 κ。这

个特征标在 $\alpha : H_1 \to \pi_0(J_{a,v})_\sigma$ 的像上显然是平凡的，从而定义了余核上的一个特征标 $\kappa : \mathrm{cok}(\alpha) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$。于是在完全子范畴 $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)]_x$ 的同构类集合上的求和

$$\sum_{x'} \frac{\langle \mathrm{cl}(x'), \kappa\rangle}{\sharp \mathrm{Aut}(x')}$$

将等于

$$\sum_{z\in \mathrm{cok}(\alpha)} \frac{\langle z, \kappa\rangle}{\sharp \ker(\alpha)} \langle \mathrm{cl}(x_1), \kappa\rangle \quad 。$$

若 κ 在 $\pi_0(J_{a,v})$ 上的限制是非平凡的，则这个和式等于零，这就给出了下面的结果

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa = 0 \quad 。$$

现在假设 κ 在 $\pi_0(J_{a,v})$ 上的限制是平凡的。在此情形下，κ 可以穿过 $\mathrm{H}^1(k, \mathcal{P}_v(J_a))$，且上述和式等于

$$\frac{\sharp \mathrm{cok}(\alpha)}{\sharp \ker(\alpha)} \langle \mathrm{cl}(x), \kappa\rangle \quad 。$$

只消再计算一下 $\sharp \mathrm{cok}(\alpha)/\sharp \ker(\alpha)$。正合序列

$$1 \to \ker(\alpha) \to H_1 \to \pi_0(J_{a,v}) \to \mathrm{coker}(\alpha) \to 1$$

给出等式

$$\frac{\sharp \mathrm{cok}(\alpha)}{\sharp \ker(\alpha)} = \frac{\sharp \pi_0(J_{a,v})}{\sharp H_1} \quad 。$$

设 $h_1 \in H_1$ 且 h 是它在 $\mathcal{P}_v(J_a)$ 中的像。于是有 $h\sigma(h)^{-1} = 1$，从而 $h \in \mathcal{P}_v(J_a)^\sigma$。设 $\mathrm{stab}(m)$ 是 $\mathcal{P}_v(J_a)$ 中使 m 不动的元素所组成的子群。于是有下面的正合序列

$$1 \to \pi_0(J_{a,v}) \to H_1 \to \mathcal{P}_v(J_a)^\sigma \cap \mathrm{stab}(m) \to 1$$

其中 $\mathcal{P}_v(J_a)^\sigma \cap \mathrm{stab}(m)$ 恰好就是 $\mathrm{Aur}(x)$ 在范畴 $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a)]$ 中的自同构群。从而有等式

$$\frac{\sharp \pi_0(J_{a,v})}{\sharp H_1} = \frac{1}{\sharp \mathrm{Aut}(x)}$$

它又给出等式

$$\sharp [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa = \sharp [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa$$

这正是我们所要的。 □

把 8.1 中的一般结果应用到现在这个情形，则可以得到稳定轨道积分和 κ 轨道积分的上同调诠释。按照 8.1.9 取出 $\mathcal{P}_v(J_a^0)$ 的一个 σ 稳定的无挠子群 Λ。这个子群的存在性是缘自 8.1.9 之后的讨论以及 Kazhdan-Lusztig 的结果，参照 3.4.1。于是得到 8.1.13 和 8.2.5 的下述推论。

推论 8.2.10. — 设 κ 是 $\mathrm{H}^1(F_v, J_a)$ 的一个特征标。设 $J_a^{\flat,0}$ 是 J_a 的 Néron 范型的单位分支。则对任意 Λ 如上，均有等式

$$\sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma, \mathrm{H}^n([\mathcal{M}_v(a)/\Lambda])_\kappa) = \mathrm{vol}(J_a^{\flat,0}(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v) \mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}t_v) \quad 。$$

证明. — 把8.1.13和8.2.5结合起来，可以得到公式

$$\sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma, \mathrm{H}^n([\mathcal{M}_v(a)/\Lambda])_\kappa)$$

$$= (\sharp\, \mathcal{P}_v^0(J_a^0)(k)) \mathrm{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v) \mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}t_v) \quad 。$$

其中 $\sharp\,\mathcal{P}_v^0(J_a^0)(k)$ 是 $\mathcal{P}_v(J_a^0)$ 的单位分支的 k 值点个数。若 $J_a^{\flat,0}$ 是 Néron 范型的单位分支，则有一个同态 $J_a^0 \to J_a^{\flat,0}$，它诱导了一个正合序列

$$1 \to J_a^{\flat,0}(\overline{\mathcal{O}}_v)/J_a^0(\overline{\mathcal{O}}_v) \to \mathcal{P}_v(J_a^0) \to \mathcal{P}_v(J_a^{\flat,0}) \to 1$$

于是可以把 $\mathcal{P}_v(J_a^0)$ 的单位分支 $\mathcal{P}_v^0(J_a^0)$ 等同于这样一个连通仿射 k 群，其 $\bar{k}$ 值点是集合 $J_a^{\flat,0}(\overline{\mathcal{O}}_v)/J_a^0(\overline{\mathcal{O}}_v)$。由于 J_a^0 和 $J_a^{\flat,0}$ 都是具有连通纤维的群概形，因而可以得到一个正合序列

$$1 \to J_a^0(\mathcal{O}_v) \to J_a^{\flat,0}(\mathcal{O}_v) \to \mathcal{P}_v^0(J_a^0)(k) \to 1$$

故有等式

$$(\sharp\, \mathcal{P}_v^0(J_a^0)(k)) \mathrm{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v) = \mathrm{vol}(J_a^{\flat,0}(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)$$

其中 $\mathrm{d}t_v$ 是 $J(F_v)$ 上的任何一个 Haar 测度。推论可以由此导出。 □

8.3. 一个特别简单的情形. — 设 v 是 X 的一个闭点，k_v 是 v 的剩余类域。选好一个位于 v 之上的几何点 $\bar{v}$。设 $X_v = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ 是 X 在 v 处的完备化，$X_v^\bullet = \mathrm{Spec}(F_v)$，其中 F_v 是 $\mathcal{O}_v$ 的分式域。选取一个齐化元 ϵ_v。在本节中，我们用 G 来表示 G 在 X_v 上的限制，并且用 $G^\bullet$ 来表示 G 在 $X_v^\bullet$ 上的限制。

8.3.1. — 设 $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)$ 且其在 $\mathfrak{c}(F_v)$ 中的像是正则半单的。设 $d_v(a) = \deg_v(a^*\mathfrak{D}_G) \in \mathbb{N}$。我们现在假设

$$d_v(a) = 2 \ \text{ 且 } \ c_v(a) = 0 \quad 。$$

根据 Bezrukavnikov 公式，参照 3.7.5，仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v(a)$ 的维数等于 1。我们现在证明，在 $\bar{k}$ 上，这个仿 Springer 纤维就是射影直线的无限长链的一个无交并。

8.3.2. — 设 $\gamma_0 = \epsilon(a) \in \mathfrak{g}(F_v)$ 是 Kostant 截面在 a 处的值。其中心化子 $T^\bullet = I_{\gamma_0}$ 是 $G^\bullet$ 的一个极大子环面。前提条件 $c_v(a) = 0$ 表明 $T^\bullet$ 是一个非分歧子环面，也就是说，它可以扩展为 G 的一个极大子环面 T。设 Φ 是 $\overline{T} = T \otimes_{\mathcal{O}_v} \overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ 的根集合。于是我们有 Goresky, Kottwitz 和 MacPherson 的根赋值函数，参照 [**28**]

$$r_a : \Phi \to \mathbb{N}$$

其定义是 $r_a(\alpha) = \mathrm{val}(\alpha(\gamma_0))$，这里已经把 F_v 上的赋值延拓到了 $\overline{F}_{\bar{v}}$ 上。于是有

$$d_v(a) = \sum_{\alpha \in \Phi} r_\alpha(\gamma_0) \quad 。$$

从而可以找到唯一一对根 $\pm\alpha$，使得 $r_{\pm\alpha}(\gamma_0) = 1$，且对任意根 $\alpha' \notin \{\pm\alpha\}$，均有 $r_{\alpha'}(\gamma_0) = 0$ 。

8.3.3. — Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k_v)$ 作用在 Φ 上，且使函数 $r_a(\alpha)$ 保持不变，从而它把二元组 $\{\pm\alpha\}$ 映回自身。设 $\overline{G}_{\pm\alpha}$ 是 $\overline{G} = G \otimes_{\mathcal{O}_v} \overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ 的一个子群，由 $\overline{T}$ 和根子群 U_α 和 $U_{-\alpha}$ 生成。Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k_v)$ 在 $\overline{T}$ 上的作用使 $\{\pm\alpha\}$ 保持稳定，故知 $\overline{G}_{\pm\alpha}$ 可以下降为 $G_{\mathcal{O}_v}$ 的一个简约的子群概形 $G_{\pm\alpha}$。$G_{\pm\alpha}$ 的中心 $Z_{\pm\alpha}$（可以等同于 $\alpha : T \to \mathbf{G}_m$ 的核）也定义在 $\mathcal{O}_v$ 上。设 $A_{\pm\alpha} = T/Z_{\pm\alpha}$；这是 X_v 上的一个 1 维环面。

命题 8.3.4. — 我们有一个典范同态 $J_a \to T$，在 $\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ 值点的层面上，它的像就是关于极大理想 $T(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \to T(\bar{k})$ 的约化以及根映射 $\alpha : T(\bar{k}) \to \mathbf{G}_m(\bar{k})$ 的合成同态的核。

由此可以导出 $\mathcal{P}_v(J_a)$ 的一个描述如下。

推论 8.3.5. — 存在一个Abel群的正合序列，与Frobenius自同态 σ 的作用相容

$$1 \to A_{\pm\alpha}(\bar{k}) \to \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)(\bar{k}) \to \mathbf{X}_*(T) \to 1$$

其中 $\mathbf{X}_*(T)$ 是环面 T 在 $\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ 上的余特征标群。

证明. — 由正合序列

$$1 \to J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \to T(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \to A_{\pm\alpha}(\bar{k}) \to 1$$

可以导出正合序列

$$1 \to A_{\pm\alpha}(\bar{k}) \to J_a(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \to T(\overline{F}_v)/T(\overline{\mathcal{O}}_v) \to 1 \quad 。$$

此外我们还有一个同构

$$T(\overline{F}_v)/T(\overline{\mathcal{O}}_v) = \mathbf{X}_*(T)$$

它来自同态 $\mathbf{X}_*(T) \to T(\overline{F}_v)$，定义为 $\lambda \mapsto \epsilon_v^\lambda$，故有推论。 □

引理 8.3.6. — 仿Springer纤维的 $\bar{k}$ 值点

$$\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)(\bar{k}) = \{g \in G(\overline{F}_{\bar{v}})/G(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) | \mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0) \in \mathfrak{g}(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})\}$$

可以唯一地写成下面的形状

$$g = \epsilon_v^\lambda U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$$

其中 $\lambda \in \mathbf{X}_*(T)$ 且 $x \in \bar{k}$。

证明. — 利用Iwasawa分解，对任意元素 $g \in G(\overline{F}_{\bar{v}})/G(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$，均有唯一的 $\lambda \in \mathbf{X}_*(T)$ 和唯一的 $u \in U(\overline{F}_{\bar{v}})/U(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$，使得

$$g = \epsilon_v^\lambda u \quad 。$$

由于 $T_{\bar{v}}$ 与 γ_0 可交换，故知嵌入

$$\mathcal{M}_{\bar{v}}(a) \to \mathcal{G}_{\bar{v}} = G(\overline{F}_{\bar{v}})/G(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$$

是 $T_{\bar{v}}$ 循变的。$T_{\bar{v}}$ 在 $\mathcal{M}_v(a)$ 上的作用可以穿过

$$T_{\bar{v}} \to T(\overline{F}_{\bar{v}}) \to \mathcal{P}_v(J_a) = T(\overline{F}_{\bar{v}})/J_a(\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$$

从而它可以穿过1维环面

$$T_{\bar{v}} \to A_{\pm\alpha,\bar{v}} \quad 。$$

若把 $g \in \mathcal{M}_v(a)(\bar{k})$ 写成 $g = \epsilon_v^\lambda u$ 的形状，u 形如 $u = U_\alpha(y)$，并且 $y \in \overline{F}_{\bar{v}}/\overline{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ 是唯一确定的。SL_2 上的一个计算（参照[**26**, 引理6.2]）表明，在前提条件 $r_{\pm\alpha}(a) = 1$ 下，y 可以唯一地写成 $y = x\epsilon_v^{-1}$ 的形状，其中 $x \in \bar{k}$，从而反过来，元素 g 具有形状 $g = \epsilon_v^\lambda U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$，并且属于 $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)(\bar{k})$。 □

引理 8.3.7. — 1维环面$A_{\pm\alpha,\bar{v}}$在$\mathcal{M}_{\bar{v}}$中的不动点就是ϵ_v^λ。如果固定$\lambda\in\mathbf{X}_*(T)$，则$A_{\pm\alpha,\bar{v}}$在

$$O_\lambda=\{\epsilon_v^\lambda U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})\in\mathcal{M}_v(a)(\bar{k})|x\in\bar{k}^\times\}$$

上的作用是简单传递的。进而该轨道的闭包的边界是由ϵ_v^λ和$\epsilon_v^{\lambda-\check{\alpha}}$组成的，其中$\check{\alpha}$是与根$\alpha$相对应的余根。

证明. — 直接计算表明，诸ϵ_v^λ在$A_{\pm\alpha,\bar{v}}$的作用下都是不动的，并且$A_{\pm\alpha,\bar{v}}$在O_λ上的作用是简单传递的。这就表明$A_{\pm\alpha,\bar{v}}$的不动点集合恰好是$\{\epsilon_v^\lambda|\lambda\in\mathbf{X}_*(T)\}$。当$x\to 0$时，$\epsilon_v^\lambda U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$趋于$\epsilon_v^\lambda$，如此一来$\epsilon_v^\lambda$将落在$O_\lambda$的闭包里。

只消再证明当$x\to\infty$时，$\epsilon_v^\lambda U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$趋于$\epsilon_v^{\lambda-\check{\alpha}}$。这也相当于要证明$U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$趋于$\epsilon_v^{-\check{\alpha}}$。这里所涉及的问题是一个在仿Grassmann多样体上熟知的结果，可由$G(\overline{F}_{\bar{v}})$中的Steinberg关系导出，参照[**76**, 第3章, 引理19]

$$y^{-\check{\alpha}}w_\alpha=U_{-\alpha}(y)U_\alpha(-y^{-1})U_\alpha(y)$$

它对于任意$y\in\overline{F}_{\bar{v}}$和任意根$\alpha$以及根反射$s_\alpha\in W$在$G(\bar{k})$中的代表元$w_\alpha$都是成立的。现在取$y=-x^{-1}\epsilon_v$，其中$x\in\bar{k}^\times$，则可以得到$G(\overline{F}_{\bar{v}})/G(\mathcal{O}_{\bar{v}})$中的下述关系式

$$U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})=\epsilon_v^{-\check{\alpha}}U_{-\alpha}(-x^{-1}\epsilon_v^{-1})\quad。$$

令x趋于∞，就可以看到$U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$趋于$\epsilon_v^{-\check{\alpha}}$。 □

命题 8.3.8. — 设$\kappa\in\hat{T}^\sigma$是一个挠元，且满足

$$\kappa(\check{\alpha})\neq 1\quad。$$

于是有公式

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa=\sharp A_{\pm\alpha}(k_v)^{-1}q^{\deg(v)}\quad。$$

证明. — 仿Springer纤维$\mathcal{M}_v(a)$可以通过把一条定义在k_v上的仿Springer纤维取系数限制k_v/k而得到。$\mathcal{P}_v(J_a)$和商空间$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)]$也是如此。从而可以假设$k_v=k$。

令$A=A_{\pm\alpha,v}$，这是一个k上的1维环面。考虑$\mathbf{X}_*(T)$的一个σ不变的子群，由$\check{\alpha}$所生成，并考虑正合序列

$$1\to A\to\mathcal{P}_v(J_a)\to\mathbf{X}_*(T)\to 1$$

在同态$\mathbb{Z}\check{\alpha}\to\mathbf{X}_*(T)$下的逆像。于是得到一个代数群$P$，定义在$k$上，并且放在一个正合序列中

$$1\to A\to P\to\mathbb{Z}\check{\alpha}\to 1$$

同时有一个单同态$P\to\mathcal{P}_v(J_a)$，它在单位分支A上诱导了恒同。

在仿Springer纤维$\mathcal{M}_v(a)$中，总有一个k值点m，是由Kostant截面给出的。根据上面对于$\mathcal{M}_v(a)\otimes_k\bar{k}$的描述，$\mathcal{M}_v(a)\otimes_k\bar{k}$在该点处的连通分支$M$是射影直线的无限长链，带有一个$P\otimes_k\bar{k}$的作用，它在$M^{\mathrm{reg}}$上是简单传递的。由于这个连通分支包含$k$值点$m$，故知它定义在$k$上。从$M$出发经过$P$到$\mathcal{P}_v(J_a)$的诱导过程又可以得到$\mathcal{M}_v(J_a)$

$$\mathcal{M}_v(a)=M\wedge^P\mathcal{P}_v(J_a)\quad。$$

特别的，我们有一个范畴等价
$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)] = [M/P] \quad 。$$
从而问题归结为一个在例子 8.1.15 中已经处理过的数点问题。 □

8.4. 不迷向 Hitchin 纤维上的数点问题. — 首先复习一下 [**57**] 第 9 节中对于 $a \in \mathcal{M}_a^{\mathrm{ani}}(k)$ 时 Hitchin 纤维 $\mathcal{M}_a$ 上的数点问题的讨论。在该文中，我们只考虑了 $\mathcal{M}_a$ 在 $\mathcal{P}_a$ 作用下的商。实际上直接考虑一般的商是更有用的。

8.4.1. — 设 J'_a 是一个有限型平滑交换 X 群概形，连同一个同态 $J'_a \to J_a$，它在 X 的一个非空开集 U 上是一个同构。给出 J'_a 等价于对所有点 $v \in |X \smallsetminus U|$ 均给出紧开子群 $J'_a(\mathcal{O}_v) \subseteq J_a(\mathcal{O}_v)$。设 $\mathcal{P}'_a = \mathcal{P}(J'_a)$ 是 X 上的 J'_a 回旋子的分类空间。于是有一个同态 $\mathcal{P}'_a \to \mathcal{P}_a$，它诱导了 $\mathcal{P}'_a$ 在 $\mathcal{M}_a$ 上的一个作用。如果 J'_a 的紧开子群 $J'_a(\mathcal{O}_v)$ 充分小，则 $\mathrm{H}^0(\overline{X}, J'_a)$ 是平凡的，如此一来 $\mathcal{P}'_a$ 可以表识为一个在 k 上局部有限型的代数群。为了便于数点，我们假设 J'_a 的纤维都是连通的。考虑商范畴 $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a]$。

数点的方法是基于乘积公式，参照 4.15.1 和 [**57**, 定理 4.6]。

命题 8.4.2. — 设 $U = a^{-1}(\mathfrak{c}_D^{\mathrm{rs}})$ 是 $\mathfrak{c}_D$ 的正则半单区域的逆像。则有一个范畴等价
$$[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a] = \prod_{v \in X \smallsetminus U} [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]$$
与 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 的作用相容。特别的，存在一个连接着 k 值点范畴的等价
$$[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k) = \prod_{v \in |X \smallsetminus U|} [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k) \quad 。$$

设 $(\mathcal{P}'_a)^0$ 是 $\mathcal{P}'_a$ 的单位分支。由于 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(k)$，故知连通分支群 $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 是一个有限群，且带有一个 Frobenius 元素 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 的作用。

命题 8.4.3. — 假设 J'_a 的纤维都是连通的。则对 $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ 的任意 σ 不变的特征标
$$\kappa : \pi_0(\mathcal{P}_a)_\sigma \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times,$$
均有
$$\sharp\, [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k)_\kappa = \prod_{v \in |X \smallsetminus U|} \sharp\, [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa \quad 。$$

证明. — 对于 X 的任意落在开集 $U = a^{-a}(\mathfrak{c}_D^{\mathrm{rs}})$ 的补集之中的闭点 v，合成同态
$$\mathcal{P}_v(J'_a) \to \mathcal{P}'_a \to \pi_0(\mathcal{P}'_a)$$
都可以穿过 $\pi_0(\mathcal{P}_v(J'_a))$。从而同态 $\kappa : \pi_0(\mathcal{P}'_a)_\sigma \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ 定义了一个同态 $\kappa : \pi_0(\mathcal{P}_v(J'_a))_\sigma \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$。

在8.4.2中，若一个点$y \in [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k)$对应于一组点$y_v \in [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$，其中$v \in |X \smallsetminus U|$，则有公式

$$\langle \mathrm{cl}(y), \kappa\rangle = \prod_{v\in|X\smallsetminus U|} \langle \mathrm{cl}(y_v), \kappa\rangle \quad 。$$

从而有下面的分解式

$$\sharp\,[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k)_\kappa = \prod_{v\in|X\smallsetminus U|} \sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$$

故得命题。 □

把这个命题与8.1.6结合，则可以推出下面的结果。

推论 8.4.4. — 对任意特征标$\kappa : \pi_0(\mathcal{P}_a)_\sigma \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$，均有

$$\sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma, \mathrm{H}^n(\mathcal{M}_a)_\kappa) = \sharp\,(\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v\in|X\smallsetminus U|} \sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$$

其中$\mathrm{H}^n(\mathcal{M}_a)_\kappa$是$\mathrm{H}^n(\mathcal{M}_a)$的特征子空间，对应于群$\pi_0(\mathcal{P}_a)$的作用穿过特征标$\kappa$的部分。

8.4.5. — 为了把$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$表达成局部轨道积分，我们将作出下面一些选择：

– 在每个点$v \in |X \smallsetminus U|$处，选取可逆向量从$D'|_{X_v}$的一个平凡化，
– 在每个点$v \in |X \smallsetminus U|$处，选取环面$J_a(F_v)$上的一个Haar测度$\mathrm{d}t_v$。

利用这些选择，我们可以

– 把a在X_v上的限制等同于一个元素$a_v \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$，
– 把群概形J_a和J_{a_v}作一个等同，这就在$J_{a_v}(F_v)$上赋予了一个Haar测度$\mathrm{d}t_v$，
– 把仿Springer纤维$\mathcal{M}_v(a)$连同$\mathcal{P}_v(J_a)$ 的作用等同于仿Springer纤维$\mathcal{M}_v(a_v)$连同$\mathcal{P}_v(J_{a_v})$的作用。

借助这些选择，我们就可以把$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$表达成$\kappa$轨道积分，参照8.2.5

$$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)\mathbf{O}^\kappa_{a_v}(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}t_v) \quad 。$$

则可以得到公式

$$\sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma, \mathrm{H}^n(\mathcal{M}_a)_\kappa) = (\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v\in|X\smallsetminus U|} \mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)\mathbf{O}^\kappa_{a_v}(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}t_v) \quad 。$$

8.5. $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}} - \tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{bad}}$ 上的稳定化过程. — 现在可以着手在开集$\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{good}} = \tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}} - \tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{bad}}$上证明定理6.4.2。我们回到6.4.2的前提条件。特别的，我们有一个闭浸入

$$\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}} \to \tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{bad}}$$

定义在k上。如7.8.2所述，$\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}$有一个闭子概形$\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{bad}}$。

证明. — 根据支集定理 7.8.5，在 $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}}$ 上，纯权错致层

$$K_\kappa^n = \tilde{\nu}^* \, {}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\text{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa \quad 和 \quad K_{H,\text{st}}^n = {}^p\mathrm{H}^{n+2r_H^G(D)}(\tilde{f}_{H,*}^{\text{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\text{st}}(-r_H^G(D))$$

是它们在 $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}}$ 的任何非空开集 $\tilde{\mathcal{U}}$ 上的限制所给出的中等延拓。从而为了证明 K^n 和 K_H^n 在 $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}} \otimes_k \bar{k}$ 上是同构的，以及它们的半单化在 $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}}$ 上是同构的，只需在 $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}}$ 的任何一个稠密开集 $\tilde{\mathcal{U}}$ 进行证明即可。下面我们要构造一个好的开集 $\tilde{\mathcal{U}}$。

在 $\mathfrak{c}_{H,D}$ 上，我们有一个除子间的等式，参照 1.10.3

$$\nu^*\mathfrak{D}_{G,D} = \mathfrak{D}_{H,D} + 2\mathfrak{R}_{H,D}^G \quad 。$$

进而，已经知道 $\mathfrak{D}_{H,D}$ 和 $\mathfrak{R}_{H,D}^G$ 都是 $\mathfrak{c}_{H,D}$ 上的既约除子，并且互素，如此一来并集

$$\mathfrak{D}_{H,D} + \mathfrak{R}_{H,D}^G$$

也是一个既约除子。

引理 8.5.1. — 假设 $\deg(D) > 2g$。则 $a_H \in \mathcal{A}_H(\bar{k})$ 中使得 $a_H(\overline{X})$ 与 $\mathfrak{D}_{H,D}+\mathfrak{R}_{H,D}^G$ 横截交叉的那些点构成 $\mathcal{A}_H$ 的一个非空开集 $\mathcal{U}$。

证明. — 证明方法与 4.7.1 完全相同。 □

8.5.2. — 考虑 $\mathcal{U}$ 在 $\tilde{\mathcal{A}}$ 中的逆像 $\tilde{\mathcal{U}}$。缩小这个开集，可以假设 $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}^{\text{good}}$。再次缩小这个开集，还可以假设对任意 $n \in \mathbb{Z}$，限制层

$$L_\kappa^n = K_\kappa^n|_{\tilde{\mathcal{U}}} \quad 和 \quad L_{H,\text{st}}^n = K_{H,\text{st}}^n|_{\tilde{\mathcal{U}}}$$

都是 $\tilde{\mathcal{U}}$ 上的纯权局部系，权为 n。

8.5.3. — 实际上，只需证明对 k 的任意有限扩张 k' 以及任意 k' 值点 $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{U}}(k')$，只要它的像是 $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}(k')$，均有迹等式

$$\sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma_{k'}, (L_\kappa^n)_{\tilde{a}}) = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma_{k'}, (L_{H,\text{st}}^n)_{\tilde{a}_H}) \quad 。 \tag{8.5.4}$$

事实上，我们有等式

$$\sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma_{k'}^j, (L_\kappa^n)_{\tilde{a}}) = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma_{k'}^j, (L_{H,\text{st}}^n)_{\tilde{a}_H}) \quad 。$$

这里对任意整数 $j > 0$，我们把 $\tilde{a}_H$ 看作是一个取值在 k' 的 j 次扩张中的点。进而，由于 $\sigma_{k'}$ 在 $(L_\kappa^n)_{\tilde{a}}$ 和 $(L_{H,\text{st}}^n)_{\tilde{a}_H}$ 中的特征值都具有绝对值 $q^{n\deg(k'/k)/2}$，故知这些等式表明，对 k 的任意有限扩张 k'，和任意 $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{U}}(k')$，像是 $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$，以及任意 n，均有

$$\mathrm{tr}(\sigma_{k'}, (L_\kappa^n)_{\tilde{a}}) = \mathrm{tr}(\sigma_{k'}, (L_{H,\text{st}}^n)_{\tilde{a}_H}) \quad 。$$

根据 Čebotarev 定理，这就表明 L_κ^n 和 $L_{H,\text{st}}^n$ 在取半单化以后是同构的。

8.5.5. — 现在证明公式 (8.5.4)。对任意点 $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{U}}(k')$，可以直接计算公式两边的项然后进行比较。把 k 换成 k'，并把 X 换成 $X \otimes_k k'$，则可以假设 $\tilde{a}_H$ 是 $\tilde{\mathcal{U}}$ 的一个 k 值点。

8.5.6. — 设 $a_H \in \mathcal{A}_H(k)$ 是 $\tilde{a}_H$ 的像，a 是 a_H 在 $\mathcal{A}(k)$ 中的像。根据 2.5.1，存在一个典范同态

$$J_a \to J_{H,a_H}$$

它在开集 $U = a^{-1}(\mathfrak{c}_D^{\mathrm{rs}})$ 上是一个同构。选取一个平滑交换群概形 J'_a，具有连通的纤维，连同一个同态 $J'_a \to J_a$，它在一般位是一个同构。设 $\mathcal{P}'_a$ 是 X 上的 J'_a 回旋子的分类叠形。必要时缩小 J'_a，可以假设 $\mathrm{H}^0(\overline{X}, J'_a)$ 是平凡的，此时 $\mathcal{P}'_a$ 是一个有限型代数群。我们有自然同态 $\mathcal{P}'_a \to \mathcal{P}_a$ 和 $\mathcal{P}'_a \to \mathcal{P}_{H,a_H}$，它们诱导了 $\mathcal{P}'_a$ 在 $\mathcal{M}_a$ 和 $\mathcal{M}_{H,a_H}$ 上的作用。我们可以通过商空间 $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a]$ 和 $[\mathcal{M}_{H,a_H}/\mathcal{P}'_a]$ 来计算公式 (8.5.4) 中的两项。根据 8.4.4，(8.5.4) 的左边等于

$$(\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v\in|X\smallsetminus U|} \sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$$

右边则等于

$$q^{r_H^G(D)}(\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v\in|X\smallsetminus U|} \sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k) \quad 。$$

由于

$$r_H^G(D) = \sum_v \deg(v) r_{H,v}^G(a_H)$$

其中 $r_{H,v}^G(a_H)$ 是除子 $a_H^*\mathfrak{R}_{H,D}^G$ 在 v 处的次数，故只需证明下面的引理，它是 Langlands-Shelstad 基本引理 1.11.1 的一个特别简单的情况。这个特殊情况本质上已经包含在 Labesse 和 Langlands 关于 SL(2) 的文章 [**48**] 之中，并且在 Goresky，Kottwitz 和 MacPherson 的文章 [**26**] 中又从几何角度进行了讨论。 □

引理 8.5.7. — *设 $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H(k)$。设 v 是 X 的一个闭点，在其上 $a_H(\overline{X}_v)$ 与除子 $\mathfrak{D}_{H,D} + \mathfrak{R}_{H,D}^G$ 要么没有交集要么横截交叉。则有等式*

$$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = q^{\deg(v) r_{H,v}^G(a_H)} \sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$$

进而，这是一个非零的有理数。

证明. — 设 $\bar{v}$ 是一个位于 v 之上的几何点。由于 $a_H(\overline{X}_v)$ 与 $\mathfrak{D}_{H,D} + \mathfrak{R}_{H,D}^G$ 横截交叉，从而在整数 $d_{H,\bar{v}}(a_H), d_{\bar{v}}(a)$ 和 $r_{H,v}^G(a_H)$ 之间会有三种可能性产生：

(1) 若 $a_H(\bar{v}) \notin \mathfrak{D}_{H,D} \cup \mathfrak{R}_{H,D}^G$，则有

$$d_{H,\bar{v}}(a_H) = 0, \quad d_{\bar{v}}(a) = 0 \quad 和 \quad r_{H,v}^G(a_H) = 0,$$

(2) 若 $a_H(\bar{v}) \in \mathfrak{D}_{H,D}$，则有 $a_H(\bar{v}) \notin \mathfrak{R}_{H,D}^G$，于是有

$$d_{H,\bar{v}}(a_H) = 1, \quad d_{\bar{v}}(a) = 1 \quad 和 \quad r_{H,v}^G(a_H) = 0,$$

(3) 若 $a_H(\bar{v}) \in \mathfrak{R}_{H,D}^G$，则有 $a_H(\bar{v}) \notin \mathfrak{D}_{H,D}$，于是有

$$d_{H,\bar{v}}(a_H) = 0, \quad d_{\bar{v}}(a) = 2 \quad 和 \quad r_{H,v}^G(a_H) = 1 \quad 。$$

8.5.8. — 在前两个情形中，Bezrukavnikov 公式 3.7.5 表明 $\delta_{H,\bar{v}}(a_H) = \delta_{\bar{v}}(a) = 0$，如此一来仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$ 和 $\mathcal{M}_v(a)$ 两个都是零维的。由此可知，$\mathcal{P}_v(J_a)$ 在 $\mathcal{M}_v(a)$ 上的作用是简单传递的，且 $\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})$ 在 $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$ 上的作用是简单传递的，参照 3.7.2。按照 8.4.5 选取 D' 在 X_v 上的一个平凡化，则可以写出轨道积分。特别的 a_H 和 a 定义出了元素 $a_{H,v} \in \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$ 和 $a_v \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)$。把它与 8.2.7 相结合，则可以导出公式

$$1 = [\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})](k) = \mathrm{vol}(J^0_{H,a_H}(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)\mathbf{SO}_{a_{H,v}}(1_{\mathfrak{h}_v}, \mathrm{d}t_v)$$

把它和公式 8.2.5 相比较

$$\sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k) = \mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)\mathbf{SO}_{a_{H,v}}(1_{\mathfrak{h}_v}, \mathrm{d}t_v)$$

则可以得到

$$\sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k) = \frac{\mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)}{\mathrm{vol}(J^0_{H,a_H}(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)} \quad 。$$

注意到 $\mathcal{M}_v(a)$ 上面还带有一个 k 值点，是由 Kostant 截面提供的，于是还有

$$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa = 1 \quad 。$$

同样的方法还表明

$$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \frac{\mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)}{\mathrm{vol}(J^0_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)} \quad 。$$

只需再注意到，在前两种情况下同态 $J_a \to J_{H,a_H}$ 诱导了单位分支间的一个同构 $J^0_a \to J^0_{H,a_H}$，故有等式

$$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$$

这就是我们所要的。

8.5.9. — 现在考虑第三种情况，此时 $a_H(X_v)$ 与 $\mathfrak{R}^G_{H,D}$ 横截交叉，并且与 $\mathfrak{c}_{H,D}$ 没有交集。这种情况下 $d_{H,\bar{v}}(a_H)$ 是零，如此一来

$$\delta_{H,\bar{v}}(a_H) = 0 \;\text{ 且 }\; c_{H,\bar{v}}(a_H) = 0 \quad 。$$

由于 $\delta_{H,\bar{v}}(a_H) = 0$，故知仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$ 是零维的。根据 3.7.2，$\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})$ 在 $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$ 上的作用是简单传递的，从而仍有

$$\sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})](k) = 1 \quad 。$$

同样的方法表明

$$\sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k) = \frac{\mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)}{\mathrm{vol}(J^0_{H,a_H}(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}t_v)} \quad 。$$

由于 $a_H(X_v)$ 与 $\mathfrak{c}_{H,D}$ 没有交集，故知 J_{H,a_H} 是一个环面，特别的，$J_{H,a_H} = J^0_{H,a_H}$。

由于不变量 $c_{\bar{v}}(a)$ 只依赖于 $J_a|_{X_v}$ 的一般纤维，故有

$$c_{\bar{v}}(a) = c_{H,\bar{v}}(a_H) = 0 \quad 。$$

这表明仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$ 的维数等于

$$\delta_{\bar{v}}(a) = \frac{d_{\bar{v}}(a) - c_{\bar{v}}(a)}{2} = 1 \quad 。$$

从而恰好就是8.3的情况。应用公式8.3.8（注意前提条件$\kappa(\check{\alpha})\neq 1$总是满足的），则可以得到公式
$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa=\sharp\, A_{\pm\alpha}(k_v)q^{\deg(v)}$$
其中$A_{\pm\alpha}$是k_v上的一个1维环面，其定义是
$$A_{\pm\alpha}(\bar{k})=J_{H,a_H}(\mathcal{O}_{\bar{v}})/J_a(\mathcal{O}_{\bar{v}})\quad。$$
应用公式8.2.7，可以得到
$$\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v},\mathrm{d}t_v)=\frac{q^{\deg(v)}}{\sharp\, A_{\pm\alpha}(k_v)\mathrm{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v),\mathrm{d}t_v)}\quad。$$
还可以验证公式
$$\sharp\, A_{\pm\alpha}(k_v)\mathrm{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v),\mathrm{d}t_v)=\mathrm{vol}(J_{H,a_H}^0(\mathcal{O}_v),\mathrm{d}t_v)$$
它表明
$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa=\frac{q^{\deg(v)}\mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v,\mathrm{d}t_v))}{\mathrm{vol}(J_{H,a_H}^0(\mathcal{O}_v),\mathrm{d}t_v)}\quad。$$
从而可以得到等式
$$\sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa=q^{\deg(v)}\sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$$
这就是我们所要的。

这就完成了8.5.7的证明。 □

8.6. Langlands-Shelstad 基本引理. — 现在我们着手证明Langlands-Shelstad基本引理1.11.1。

证明. — 设$X_v=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$其中$\mathcal{O}_v=k[[\epsilon_v]]$，$X_v^\bullet=\mathrm{Spec}(F_v)$其中$F_v=k((\epsilon_v))$。设$G_v$是一个$X_v$上的简约群，它是$\mathbf{G}$的拟分裂偏转，由$X_v$上的一个$\mathrm{Out}(\mathbf{G})$回旋子$\rho_{G,v}$所给出。设$(\kappa,\rho_{\kappa,v})$是一个椭圆型初分线索，参照1.8。设$H_v$是相应的初分群。设$a_H\in\mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$，它的像是$a\in\mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)\cap\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$。

8.6.1. — 若G_v的中心包含一个分裂环面C，则C也包含在H_v的中心里。若把G_v换成G_v/C，并把H_v换成H_v/C，则κ轨道积分和稳定轨道积分不会改变，从而可以假设G_v的中心不包含分裂环面。

若H_v的中心里有一个分裂环面C，则C自然地包含在环面I_{γ_0}之中，其中$\gamma_0=\epsilon(a)$。C在G_v中的中心化子M_v是G_v的一个Levi子群。通过下降，可以把G_v中的κ轨道积分换成M_v中的κ轨道积分。此时M_v的中心包含一个分裂环面，从而归结到上面已经讨论过的情形。经过有限次的归约，则可以假设G_v和H_v的中心都不包含分裂环面。

8.6.2. — 设$\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$和$\mathcal{M}_v(a)$是相对应的仿Springer纤维。根据3.5，存在一个整数$N>0$，使得对k的任意有限扩张k'及任意$a'_H\in\mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v\otimes_k k')$，只要
$$a_H\equiv a'_H \bmod \epsilon_v^N$$
就有

- a'_H的像满足$a'\in\mathfrak{c}(\mathcal{O}_v\otimes_k k')\cap\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v\otimes_k k')$；

– 仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)\otimes_k k'$ 和 $\mathcal{M}_{H,v}(a'_H)$ 连同 $\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})\otimes_k k'$ 和 $\mathcal{P}_v(J_{H,a'_H})$ 的作用，是同构的；
– 仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v(a)\otimes_k k'$ 和 $\mathcal{M}_v(a')$ 连同 $\mathcal{P}_v(J_a)$ 和 $\mathcal{P}_v(J_{a'})$ 的作用，是同构的。

设 $\delta_H(a_H)$ 是仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$ 的维数。

8.6.3. — 存在一个在 k 上几何连通的平滑射影曲线 X，带有下面一些附加信息：

– 两个不同的 k 值点，记为 v 和 ∞，
– 一个同构，它连接着 X 在 v 处的完备化和上面的概形 X_v，
– X 上的一个 $\pi_0(\kappa)$ 回旋子 ρ_κ，连同一个 ∞ 上的平凡化 α_∞，以及一个同构 α_v，它连接着它在 X_v 上完备化与 $\rho_{\kappa,v}$。

设 G 和 H 是对应的 X 群概形，参照 1.8。借助 α_v，G 和 H 在 X_v 上的限制可以典范同构于 G_v 和 H_v。G_v 和 H_v 的中心都不包含分裂环面，G 和 H 也是如此。借助 α_∞，我们有一个同态

$$\rho_\kappa^\bullet:\pi_1(X,\infty)=\pi_1(\overline{X},\infty)\rtimes\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)\to\pi_0(\kappa)$$

它在 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 因子上是平凡的。因而子群 $\pi_1(\overline{X},\infty)$ 在 $\pi_0(\kappa)$ 中的像与 $\pi_1(X,\infty)$ 的相同。由此可知，在 $\overline{X}$ 上，G 和 H 的中心都不包含分裂环面。

8.6.4. — 现在取 X 上的一个可逆向量丛 D，满足以下诸条件

– 存在一个 X 上的可逆向量丛 D' 使得 $D=D'^{\otimes 2}$，
– D' 有一个整体截面在 v 处不为零，
– $\deg(D)>rN+2g$，其中 r 是 G 的秩且 g 是 X 的亏格，
– $\delta_H(a_H)$ 小于 7.8.2 中所定义的整数 $\delta_H^{\mathrm{bad}}(D)$。

根据 5.7.2，当 $\deg(D)\to\infty$ 时，整数 δ_H^{bad} 趋于 ∞，如此一来，当 $\deg(D)$ 充分大时，最后一个条件也可以得到满足。

8.6.5. — 考虑由曲线 X 和可逆向量丛 D 以及群 G 和 H 所给出的 Hitchin 纤维化

$$f:\mathcal{M}\to\mathcal{A}\quad 和\quad f_H:\mathcal{M}_H\to\mathcal{A}_H\quad。$$

G 和 H 的中心都不包含 $\overline{X}$ 上的分裂环面以及 $\deg(D)>2g$ 的条件表明，不迷向开集 $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ 和 $\mathcal{A}_H^{\mathrm{ani}}$ 都不是空的。

8.6.6. — 在 $\deg(D)>rN+2g$ 的前提条件下，整体截面到 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v/\epsilon_v^N)$ 的限制

$$\mathrm{H}^0(X,\mathfrak{c}_{H,D})\to\mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v/\epsilon_v^N)$$

是一个线性满映射。设 Z 是 $\mathrm{H}^0(X,\mathfrak{c}_{H,D})$ 的一个仿射子空间，由那些和 a_H 在 $\mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v/\epsilon_v^N)$ 中具有相同的像的元素所组成。这是 $\mathcal{A}_H$ 的一个余 rN 维的闭子概形。利用 4.7.1 中的方法可以证明，若取 Z' 是 Z 的一个开集，由这样的点 $a'_H\in Z'(\bar{k})$ 所组成，它使得曲线 $a'_H(\overline{X}\smallsetminus\{v\})$ 与除子 $\mathfrak{D}_{H,D}+\mathfrak{R}_{H,D}^G$ 是横截交叉的，则 Z' 是一个非空开集。由于 $\mathcal{A}_H^{\mathrm{ani}}$ 在 $\mathcal{A}_H$ 中的补集是一个余维数大于等于 $\deg(D)$ 的闭集，参照 6.3.5，$Z'\cap\mathcal{A}_H^{\mathrm{ani}}\neq\emptyset$。把 Z' 换成 $Z'\cap\mathcal{A}_H^{\mathrm{ani}}$，则可以假设 $Z'\subseteq\mathcal{A}_H^{\mathrm{ani}}$。对任意 $a'_H\in Z'(\bar{k})$，均有不变量等式 $\delta_H(a')=\delta_H(a_H)$，从而有 $Z'\subseteq\mathcal{A}_H^{\mathrm{good}}$，这里使用了稳定化定理，参照 8.5。

设 $\tilde{Z}'$ 是 Z' 在 $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{good}}$ 中的逆像。由于 $\tilde{Z}'$ 是一个正维数的概形，故可找到一个整数 m，使得对任何次数大于等于 m 的扩张 k'/k，均有 $\tilde{Z}'(k') \neq \emptyset$。设 $\tilde{a}'_H \in Z'(k')$ 位于 $a'_H \in Z(k')$ 之上。再设 $\tilde{a}'$ 是 $\tilde{a}'_H$ 在 $\tilde{\mathcal{A}}$ 中的像，a' 是 a'_H 在 $\mathcal{A}$ 中的像。

8.6.7. — 把在开集 $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{good}}$ 上已经证明了的稳定化定理 6.4.2 与公式 8.4.4 结合起来，可以得到等式

$$\sharp\,(\mathcal{P}'_{a'})^0(k') \prod_{v'\in|(X\smallsetminus U)\otimes_k k'|} \sharp\,[\mathcal{M}_{H,v'}(a'_H)/\mathcal{P}_{v'}(J'_{a'})](k')_\kappa$$
$$= q^{r(a'_H)\deg(k'/k)}\sharp\,(\mathcal{P}'_{a'})^0(k') \prod_{v'\in|(X\smallsetminus U)\otimes_k k'|} \sharp\,[\mathcal{M}_{v'}(a'_H)/\mathcal{P}_{v'}(J'_{a'})](k')$$

这里选择了一个平滑交换群概形 $J'_{a'}$，具有连通的纤维，并连同一个同态

$$J'_{a'} \to J_{a'} \to J_{H,a'_H}$$

参照 8.4.1。出于方便，可以在 X_v 上取 $J'_{a'} = J^0_{a'}$。

8.6.8. — 由于 $\tilde{a}'_H \in \tilde{\mathcal{U}}(k')$，我们可以把 8.5.7 应用到每个点 $v' \neq v$ 上。把这些点处的等式一一消去，就可以得到一个 v 处的等式

$$\sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a'_H)/\mathcal{P}_v(J^0_{a'})](k')_\kappa = q^{r_v(a'_H)\deg(k'/k)}\sharp\,[\mathcal{M}_v(a'_H)/\mathcal{P}_v(J^0_{a'})](k') \quad 。$$

由于已知仿 Springer 纤维 $\mathcal{M}_v(a)\otimes_k k'$ 连同 $\mathcal{P}_v(J_a)\otimes_k k'$ 的作用可以同构于 $\mathcal{M}_v(a')$ 连同 $\mathcal{P}_v(J_{a'})$ 的作用，而且类似的结果对于群 H 也成立，故可导出等式

$$\sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J^0_a)](k')_\kappa = q^{r^G_{H,v}(a_H)\deg(k'/k)}\sharp\,[\mathcal{M}_v(a_H)/\mathcal{P}_v(J^0_a)](k') \quad 。$$

它对于 k 的任何次数大于 m 的扩张 k' 都是对的。应用 8.1.14，可以得到等式

$$\sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J^0_a)](k)_\kappa = q^{r^G_{H,v}(a_H)}\sharp\,[\mathcal{M}_v(a_H)/\mathcal{P}_v(J^0_a)](k) \quad 。$$

应用公式 8.2.5，又可以得到等式

$$\mathbf{O}^\kappa_a(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}t_v) = q^{r^G_{H,v}(a_H)}\mathbf{SO}_{a_H}(1_{\mathfrak{h}_v}, \mathrm{d}t_v)$$

这就是我们所要的。

这就完成了 Langlands-Sheldstad 猜想 1.11.1 的证明。 □

8.7. $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ 上的几何稳定化过程. — 把局部整体论证反转过来，就可以完成 6.4.2 的证明。

证明. — 沿用 8.5 的记号。如 8.5 所述，只需证明迹等式 8.5.4

$$\sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma_{k'}, (L^n_\kappa)_{\tilde{a}}) = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}(\sigma_{k'}, (L^n_{H,\mathrm{st}})_{\tilde{a}_H}) \quad 。 \tag{8.7.1}$$

对所有 $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}_H(k)$ 及其像 $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}(k)$ 都成立。根据 8.4.4，8.5.4 的左边等于

$$(\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v\in|X\smallsetminus U|} \sharp\,[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$$

右边则等于

$$q^{r_H^G(D)}(\mathcal{P}'_a)^0(k)\prod_{v\in|X\smallsetminus U|}\sharp\,[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)\quad。$$

把 1.11.1 与 8.2.5 结合起来，则有等式

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = q^{r_{H,v}^G(D)}[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$$

故得 8.7.1。 □

8.8. Waldspurger 猜想. — **现**在设 G_1 和 G_2 是两个结伴的 X 群概形，参照 1.12.5。假设 G_1 和 G_2 的中心都不包含在 $\overline{X}=X\otimes_k\bar{k}$ 上分裂的环面。

8.8.1. — 设 $f_1:\mathcal{M}_1\to\mathcal{A}_1$，并且 $f_2:\mathcal{M}_2\to\mathcal{A}_2$ 是对应的 Hitchin 纤维化。如 4.18 所述，我们有

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2\quad。$$

设 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 分别是 G_1 和 G_2 所对应的 Picard $\mathcal{A}$ 叠形。根据 4.18.1，存在一个同态 $\mathcal{P}_1\to\mathcal{P}_2$，它在单位分支上诱导了一个谐构。

定理 8.8.2. — *存在一个同构，它连接着 $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ 上的分次错致层*

$$K_1=\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_{1,*}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}\quad 和\quad K_2=\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_{2,*}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}$$

的半单化，这里的下指标 st 是指对应于 $\mathcal{P}_i$ 的平凡作用的同型分支。

这个定理的证明本质上遵循着证明 6.4.2 时的同样步骤。特别的，在证明途中就可以得到 Waldspurger 1.12.7 所猜想的非标准基本引理。这里我们不需要转到平展覆叠 $\tilde{A}^{\mathrm{ani}}$ 上去。

8.8.3. — 首先证明在开集 $\mathcal{A}^\diamondsuit$ 上有这样一个同构。在这个开集上，态射 f_1 和 f_2 都是平滑紧合的，如此一来 K_1 和 K_2 在 $\mathcal{A}^\diamondsuit$ 上的限制都是分次局部系。于是为了证明它们的半单化之间存在一个同构，根据 Čebotarev 定理，只需证明迹等式

$$\mathrm{tr}(\sigma_{k'},K_{1,a})=\mathrm{tr}(\sigma_{k'},K_{2,a})\tag{8.8.4}$$

对于 k 的任意有限扩张 k' 和任意点 $a\in\mathcal{A}^\diamondsuit(k')$ 均成立。把 X 换成 $X\otimes_k k'$，还可以假设 $k=k'$。

8.8.5. — 设 $a\in\mathcal{A}^\diamondsuit(k)$。根据 4.7.7，我们知道：

- $\mathcal{P}_{i,a}$ 在 $\mathcal{M}_{i,a}$ 上的作用是简单传递的，
- $\mathcal{P}_{i,a}^0$ 谐构于一个 Abel 多样体 $P_{i,a}^0$。

根据不动点公式 8.1.6 和 8.1.7，我们有

$$\mathrm{tr}(\sigma,K_{i,a})=\sharp P_i^0(k)\quad。$$

由于 P_1^0 和 P_2^0 是两个在 k 上谐构的 Abel 多样体，它们有相同个数的 k 值点，故有迹等式 8.8.4。从而存在一个同构，它连接着 K_1 和 K_2 在 $\mathcal{A}^\diamondsuit$ 上的限制的半单化。

8.8.6. — 根据支集定理7.8.3，存在一个同构，它连接着K_1和K_2在

$$\mathcal{A}^{\mathrm{good}} = \mathcal{A}^{\mathrm{ani}} - \mathcal{A}^{\mathrm{bad}}$$

上的限制的半单化。

8.8.7. — 照搬8.6中的方法，就可以导出Waldspurger 1.12.7所猜想的非标准基本引理。

8.8.8. — 把局部整体论证反转过来 (参照8.7)，就可以导出迹等式8.8.4 对任意$a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(k')$及$k$的任意有限扩张$k'$都成立。由此可以导出定理8.8.2。

8.8.9. — 假定猜想7.8.1是对的，则定理7.2.1表明，Hitchin纤维化的错致上同调层的稳定部分就是它在开集$\mathcal{A}^{\diamondsuit}$上的限制 (是一些局部系) 所给出的中等延拓。

谢词. — Sans l'aide et l'encouragement des mathématiciens ci-dessous nommés, ce programme n'aurait probablement pas abouti et n'aurait probablement même pas eu lieu. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance. R. Kottwitz et G. Laumon qui m'ont appris la théorie de l'endoscopie et la géométrie algébrique，n'ont jamais cessé de m'aider avec beaucoup de générosité M. de Cataldo, P. Deligne, V. Drinfeld, G. Laumon ont relu attentivement certaines parties du manuscrit. Leurs commentaires m'ont permis de corriger quelques erreurs et améliorer certains arguments. L'argument de dualité de Poincaré et de comptage de dimension que m's expliqué Goresky a joué un rôle catalyseur de cet article. Il est évident que la lecture de l'article de Hitchin [34] a joué un rôle dans la conception de ce programme. Il en a été de même des articles de Faltings [24], de Donagi et Gaitsgory [23] et de Rapoport [63]. Les conversations que j'ai eues avec M. Harris sur le lemme non standard ont renforcé ma conviction sur la conjecture du support. M. Raynaud a eu la gentillesse de répondre à certaines de mes questions techniques. Je voudrais remercier J. Arthur, J.-P. Labesse, L. Lafforgue, R. Langlands, C. Moeglin, H. Saito et J.-L. Waldspurger de m'avoir encouragé dans cette longue marche à la poursuite du lemme. Je dis un merci chaleureux aux mathématiciens qui ont participé activement aux séminaires sur l'endoscopie et le lemme fondamental que j'ai contribué à organiser à Paris-Nord et à Bures au printemps 2003 et à Princeton aux automnes 2006 et 2007 parmi lesquels P.-H. Chaudouard, J.-F. Dat, L. Fargues, A. Genestier, A. Ichino, V. Lafforgue, S. Morel, Nguyen Chu Gia Vuong, Ngo Dac Tuan, S.W. Shin, D. Whitehouse et Zhiwei Yun. Je remercie J. Heinloth pour d'utiles indications bibliographiques.

J'exprime ma profonde gratitude au travail méticuleux des rapporteurs anonymes et de Deligne qui ont découvert des faiblesses rédactionnelles et mathématiques dans la version antérieure de ce texte et ont ainsi beaucoup contribué à la présente. J'exprime aussi ma gratitude à Cécile Gourgue qui m'a aidé à corriger des fautes de français.

J'exprime ma gratitude à l'I.H.É.S. à Bures-sur-Yvette pour un séjour très agréable en 2003 pendant lequel ce projet a été conçu. Il a été mené à son terme durant mes séjours en automne 2006 et pendant l'année universitaire 2007-2008 à l'Institute for Advanced Study à Princeton qui m'a offert des conditions de travail idéales. Pendant mes séjours à Princeton, j'ai bénéficié des soutiens financiers de l'AMIAS en 2006, de la fondation Charles Simonyi et ainsi que de la NSF à travers le contrat DMS-0635607 en 2007-2008.

参考文献

[1] Altman A., Iarrobino A., Kleiman S. : Irreducibility of the compactified Jacobian. in *Real and complex singularities* (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), 1–12.

[2] Arthur J., An introduction to the trace formula. in *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, 1–263, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[3] Artin M. Algebraic approximation of structures over complete local rings. *Inst. Hautes études Sci. Publ. Math.* 36 (1969) 23–58.

[4] Beauville A., Laszlo Y. : Un lemme de descente. *C. R. de l'Acad. des Sci. de Paris* 320 (1995) 335-340.

[5] Beauville A., Narasimhan M., Ramanan S. : Spectral curves and generalized theta divisor. *J. Reine Angew. Math.* 398 (1989) 169-179.

[6] Bernstein V., Drinfeld A., Opers, preprint.

[7] Beilinson A., Bernstein J., Deligne P. : Faisceaux pervers. *Astérisque* 100 (1982).

[8] Bezrukavnikov R. : The dimension of the fixed points set on affine flag manifolds. *Mathematical Research Letters* 3 (1996) 185–189.

[9] Biswas I., Ramanan S. : Infinitesimal study of Hitchin pairs. *J. London Math. Soc.* 49 (1994) 219-231.

[10] Bosch S., Lutkebohmert W., Raynaud M. : *Neron models.* Ergeb. der Math. 21. Springer Verlag 1990.

[11] Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4,5 et 6. Masson, Paris 1981.

[12] Carter R., *Finite Group of Lie Type*, Wiley Classics Library.

[13] Chai C.-L., and Yu J.-K., Congruences of Néron models for tori and the Artin conductor, *Ann. Math.* (2), 154 (2001), 347 - 382.

[14] Clozel L., The fundamental lemma for stable base change. Duke Math. J. 61 (1990), no. 1, 255–302.

[15] Cluckers, R., Loeser, F. Fonctions constructibles exponentielles, transformation de Fourier motivique et principe de transfert . *Comptes Rrendus de l'Acad. des Sciences de Paris* 341, 741-746 (2005)

[16] Dat, J.-F., Lemme fondamental et endoscopie, une approche géométrique, *Séminaire Bourbaki* 940 novembre 2004.

[17] Debarre O., Théorèmes de connexité pour les produits d'espaces projectifs et les grassmanniennes, *Am. J. Math.*, 118 (1996), 1347 - 1367.

[18] Deligne P. : La conjecture de Weil II. *Publ. Math. de l'I.H.E.S.* 52 (1980) 137–252.

[19] Deligne P. : Décomposition dans la catégorie dérivée, in *Motives*, Proc. of Symp. in Pure Math. vol. 55.1(1994) 115–128.

[20] Deligne P. Communication privée, 2007.

[21] Demazure M., and Grothendieck A., Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 3. LNM, vols. 151, 152, 153, Springer.

[22] S. Diaz, J. Harris, Ideals associated to deformations of singular plane curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* 309, 433-468. (1988).

[23] Donagi R., Gaitsgory D. : The gerb of Higgs bundles. *Transform. Groups* 7 (2002) 109–153.

[24] Faltings G. : Stable G-bundles and projective connections. *J. Alg. Geom.* 2 (1993) 507–568.

[25] Fantechi B., Göttsche L., Van Straten D. : Euler number of the compactified Jacobian and multiplicity of rational curves. *J. Alg. Geom.* 8 (1999), 115-133.

[26] Goresky M., Kottwitz R., MacPherson R. : Homology of affine Springer fiber in the unramified case. *Duke Math. J.* 121 (2004) 509–561.

[27] Goresky M., Kottwitz R., MacPherson R. : Purity of equivalued affine Springer fibers. *Represent. Theory* 10 (2006), 130–146.

[28] Goresky M., Kottwitz R., MacPherson R. : Codimension of root valuation strata. preprint 2006.

[29] Grothendieck A. : Groupes de monodromie en Géométrie algébrique (SGA 7 I), LNM 288, Springer Verlag.

[30] Grothendieck A., Dieudonné J. : Éléments de géométrie algébrique IV. étude locale des schémas et de morphismes de schémas, *Pub. Math. de l' I.H.E.S.* 20, 24, 28 et 32.

[31] Hales, T. : The fundamental lemma for Sp(4). *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997) no. 1, 301–308.

[32] Hales, T. : A statement of the fundamental lemma. in *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, 643–658, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[33] Heinloth J., Uniformization of G-bundles. A paraître dans Math. Ann.

[34] Hitchin N. : Stable bundles and integrable systems. *Duke Math. J.* 54 (1987) 91–114.

[35] Kazhdan D. : On lifting. in *Lie group representations,* II (College Park, Md., 1982/1983), 209–249, Lecture Notes in Math., 1041, Springer, Berlin, 1984.

[36] Kazhdan D., Lusztig G. : Fixed point varieties on affine flag manifolds. *Israel J. Math.* 62 (1988), no. 2, 129–168.

[37] Kleiman S., Algebraic cycles and Weil conjectures, in *Dix exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[38] Kostant B. : Lie group representations on polynomial rings. *Amer. J. of Math.* 85 (1963) 327–404.

[39] Kottwitz R. Orbital integrals on GL_3. *Amer. J. Math.* 102 (1980), no. 2, 327–384.

[40] Kottwitz R. : Unstable orbital integrals on $\mathrm{SL}(3)$. *Duke Math. J.* 48 (1981), no. 3, 649–664

[41] Kottwitz R. Stable trace formula : cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.* 51 (1984) 611-650.

[42] Kottwitz R. Isocristal with additionnal structures. *Composotion Math.* 56 (1985) 201–220.

[43] Kottwitz R. Base change for unit elements of Hecke algebras. *Compositio Math.* 60 (1986), no. 2, 237–250.

[44] Kottwitz R. : Stable trace formula : elliptic singular terms. *Math. Ann.* 275 (1986) 365-399.

[45] Kottwitz R. : Shimura varieties and λ-adic representations, in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Vol. I 161–209, Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[46] Kotttwiz R. Transfert factors for Lie algebra. *Represent. Theory* 3 (1999) 127-138.

[47] Labesse, J.-P. Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable. *Duke Math. J.* 61 (1990), no. 2, 519–530.

[48] Labesse, J.-P. et Langlands, R., L-indistinguishability for SL(2). *Can. J. Math.* **31** (1979) 726–785.

[49] Langlands R. *Base change for* GL(2) . Annals of Mathematics Studies, 96. Princeton University Press 1980.

[50] Langlands R. : *Les débuts d'une formule des traces stables*. Publications de l'Université Paris 7, 13 (1983).

[51] Laumon G. : Fibres de Springer et Jacobiennes compactifiées in*Algebraic geometry and number theory*, 515–563, Progr. Math., 253, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006..

[52] Laumon, G. : Sur le lemme fondamental pour les groupes unitaires, prépublication `arxiv.org/abs/math/0212245`.

[53] Laumon G., Moret-Bailly L. : *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik 39. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[54] Laumon, G. et Ngô B.C. : Le lemme fondamental pour les groupes unitaires, à paraître aux *Annals of Math.* 168 (2008), 477 - 573.

[55] Levy P., Involutions of reductive Lie algebras in positive characteristic, *Adv. Math.*, 210 (2007), 505 - 559.

[56] Mumford, D. *Abelian varieties*. Oxford University Press.

[57] Ngô B.C. : Fibration de Hitchin et endoscopie. *Inv. Math.* 164 (2006) 399–453.

[58] Ngô B.C. : Fibration de Hitchin et structure endoscopique de la formule des traces. *International Congress of Mathematicians* Vol. II, 1213–1225, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[59] Ngô B.C. : Geometry of the Hitchin fibration. Livre en préparation.

[60] Ngô B.C. : Decomposition theorem and abelian fibration. Article d'exposition pour le projet du livre disponible à l'adresse http ://fa.institut.math.jussieu.fr/node/44.

[61] Nitsure : Moduli space of semistable pairs on a curve. *Proc. London Math. Soc.* (3) 62 (1991), no. 2, 275–300.

[62] Ono T., On Tamagawa numbers. In *Algebraic groups and discontinuous subgroups*. Proc. of Symp. in Pure Math. **9** (1966), A.M.S.

[63] Rapoport M. : A guide to the reduction of Shimura varieties in *Automorphic forms*. I. Astérisque No. 298 (2005), 271–318.

[64] Raynaud M. : Communication privée, 2004.

[65] Rogawski, J., *Automorphic representations of unitary groups in three variables*. Annals of Math. Studies 123, 1–259, Princeton University Press, Princeton 1990.

[66] Rosenlicht M. : Some basic theorems on algebraic groups. *Amer. J. Math.* 78 (1956), 401–443.

[67] Saito H., *Automorphic Forms and Algebraic Extensions of Number Fields (Department of Mathematics, Kyoto University)*, Lectures in Mathematics, vol. 8, Kinokuniya Book-Store Co., Ltd., Tokyo, 1975.

[68] M. Schöder. Inauguraldissertation, Mannheim 1993.

[69] J.-P. Serre. *Groupes algébriques et corps de classes* Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VII. Hermann, Paris 1959.

[70] J.-P. Serre. *Corps locaux*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII. Hermann, Paris 1962.

[71] D. Shelstad. Orbital integrals and a family of groups attached to a real reductive group, *Ann. Scient. de l'Ecole Normale Supérieure*, 12 (1979).

[72] Spaltenstein. On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups. *Topology* 16 (1977), no. 2, 203–204.

[73] Springer, T. Some arithmetical results on semi-simple Lie algebras. *Pub. Math. de l'I.H.E.S.*, 33 (1966), 115-141.

[74] Springer T. : Reductive groups *in Automorphic forms, representations, and L-functions.* Proc. Symp. in Pure Math. 33-1 AMS 1997.

[75] T. Springer, R. Steinberg. : Conjugacy classes *in Seminar on algebraic groups and related finite groups. Lectures Notes in Math. 131* Springer Verlag 1970.

[76] Steinberg R. : *Lectures on Chevalley groups.*

[77] Teissier B., Résolution simultanée - I. Famille de courbes, in *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, M. Demazure, H. Pinkham, B. Teissier eds, Springer LNM 777 (1980).

[78] Veldkamp F., The center of the universal enveloping algebra of a Lie algebra in characteristic p, *Ann. Sci. École Norm. Supér.* (4), 5 (1972), 217 – 240.

[79] Waldspurger, J.-L., Sur les intégrale d'orbite tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental. *Can. J. Math.* **43** (1991) 852–896.

[80] Waldspurger, J.-L. , Le lemme fondamental implique le transfert. *Compositio Math.*, **105** (1997) 153–236.

[81] Waldspurger J.-L. Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés *Astérisque* 269.

[82] Waldspurger J.-L. Endoscopie et changement de caractéristique, prépublication.

[83] Waldspurger J.-L. : L'endoscopie tordue n'est pas si tordue : intégrales orbitales, prépublication 2006.

[84] Weissauer R., A special case of fundamental lemma I-IV, preprint Mannheim 1993.

[85] Whitehouse D. : The twisted weighted fundamental lemma for the transfer of automorphic forms from GSp(4) . Formes automorphes. II. Le cas du groupe GSp(4) 。Astérisque No. 302 (2005), 291–436.

设 X 和 Y 是有限域 $k=\mathbb{F}_q$ 上的两个有限型概形，$f: X\to Y$ 是一个紧合态射。进而假设 X 是一个平滑 k 概形。于是，根据 Deligne [**18**]，顺像 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是一个纯权复形。根据 [**7**]，il décompose géométriquement comme une 直和de 几何不可约错致层avec décalage. Il existe au-dessus de $Y\otimes_k \bar{k}$ 是一个同构

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{(K,n)} K[-n]^{m_{K,n}}$$

其中la 直和est étendue sur l'ensemble des 等价类des couples (K,n) constitué d'un 不可约错致层 K sur $Y\otimes_k \bar{k}$ et d'一个整数 n et où

$$m_{K,n} := \dim \mathrm{Hom}(K, {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$$

是一个自然数nul sauf pour 有限个couples (K,n)。所谓一个不可约错致层 K présent dans $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$，是指存在一个整数 n tel que $m_{K,n}\neq 0$。La Poincaré 对偶implique une symétrie pour ces entiers $m_{K,n}$。

命题 1. — 对于 Y 上的任意几何不可约错致层 K，均有

$$m_{K,n+\dim(X)} = m_{DK,-n+\dim(X)}$$

其中 DK 是 K 的 Verdier 对偶。

Goresky 和 MacPherson ont observé que cette symétrie impose une contrainte sur la 余维数des supports des 几何不可约错致层 K présents dans $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$。

定理 2. — 设 X 和 Y 是两个在域 k 上有限型的概形，X 在 k 上是平滑的。设 $f: X\to Y$ 是一个紧合态射。假设态射 f 具有相对维数 d。设 K 是 $Y\otimes_k \bar{k}$ 上的一个不可约错致层，并且出现在 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 中。设 Z 是 K 的支集。则有不等式

$$\mathrm{codim}(Z)\leq d \quad 。$$

证明. — 假设au contraire que $\mathrm{codim}(Z) > d$。根据la Poincaré 对偶et quitte à échanger K et DK qui ont le même support, 可以假设qu'存在一个整数 n

$$n\geq \dim(X)$$

tel que $m_{K,n}\neq 0$。根据 [**7**], 存在一个开集 Z' de Z，un 局部系 K' sur S tel que $K = j_{!*}K'[\dim(Z)]$，其中 j 是开集 Z' 到 Z 的含入。设 y 是 Z' 的一个几何点。La fibre de K en y est alors un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 向量空间，放置在第

$$-\dim(Z) = -\dim(Y)+\mathrm{codim}(Z)$$

个位置。由于la fibre de $K[-n]$ en y 是un 直和因子 $\mathrm{R}\Gamma(X_y,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$，这表明

$$\mathrm{H}^{n-\dim(Y)+\mathrm{codim}(Z)}(X_y)\neq 0 \quad 。$$

现在我们有不等式

$$n-\dim(Y)+\mathrm{codim}(Z) > 2d$$

parce que $n\geq \dim(X)$ et $\mathrm{codim}(Z) > d$。Cette non annulation est en 矛盾avec 前提条件que la fibre X_y 是小于等于 d 维的。 □

定理 3. — Mettons-nous sous 诸前提条件du théorème précédent. 进而假设les fibres de f 都是几何不可约的s de dimension $d>0$。设 K 是一个不可约错致层sur $Y\otimes_k \bar{k}$ présent dans $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$。设 Z 是 K 的支集。Alors 则有严格不等式

$$\mathrm{codim}(Z)<d \quad 。$$

证明. — Sous 前提条件que les fibres de f 都是不可约的，le 上同调层de 最大次数 $2d$ est le 局部系

$$\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-d) \quad 。$$

考虑la 分解de $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sur $Y\otimes_k\bar{k}$

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell=\bigoplus_{(L,n)} L[-n]^{m_{L,n}}$$

其中 L 跑遍l'ensemble des 同构类de 不可约错致层sur $Y\otimes_k\bar{k}$ et n l'ensemble des entiers. 若 $m_{L,n}\neq 0$，alors 则有 $\mathrm{H}^i(L[-n])=0$ 对任意 $i>2d$ et même $\mathrm{H}^{2d}(L[-n])=0$ 若 L 不同构于 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\dim(Y)]$。Le même argument que dans 前面的定理表明对任意不可约错致层 K sur $Y\otimes_k\bar{k}$ qui 不同构于 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\dim(Y)]$ alors le support Z de K doit vérifier 严格不等式 $\mathrm{codim}(Z)<d$。Bien entendu, 若 K 同构于 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-\dim(Y)]$，son support est 整个 Y et 不等式est trivialement satisfaite. □

引理 8.8.10. — 设 S 是一个有限型 k 概形。设 $f:M\to S$ 是一个平坦态射de 既约的几何纤维de dimension d。设 $\mathrm{Irr}(M/S)$ 层des 不可约分支des fibres de M/S défini dans **??**。于是，存在一个典范同构

$$\overline{\mathbb{Q}_\ell}^{\mathrm{Irr}(M/S)}(-d)\xrightarrow{\sim}\mathrm{R}^{2d}f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell(d)$$

其中 $(-d)$ 是指un Tate 偏转。

证明. — Comme dans **??**, 因为 f 是一个平坦态射à 既约的几何纤维，所以存在un 开子概形 U de M 且其la trace sur 每个几何纤维de f est la partie lisse de cette fibre. 于是有 $\pi_0(U/S)=\mathrm{Irr}(M/S)$。进而，态射 $M\smallsetminus U\to S$ 的相对维数严格小于 d。设 $h:U\to S$ 是 f 在 U 上的限制。La flèche dans la 正合序列d'excision

$$\mathrm{R}^{2d}h_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell\longrightarrow\mathrm{R}^{2d}f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

est alors 一个同构。从而只需构造一个同构

$$\overline{\mathbb{Q}_\ell}^{\pi_0(U/S)}(-d)\longrightarrow\mathrm{R}^{2d}h_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell \quad 。$$

设 u 是一个局部截面de U au-dessus d'un 平展开集 S' de S。根据 Grothendieck 的一个定理 [**30**, 15.6.4]，存在一个开集存在唯一一个 Zariski 开集 U_u de $U'=U\times_S S'$ tel que 对任意 $s\in S$，la fibre $U_{u,s}$ est la 连通分支de U_s contenant le point $u(s)$。我们用 $h_u:U_u\to S'$ 来记 h 在 U_u 上的限制。L'含入 $U_u\subseteq U'$ 诱导了一个flèche entre 上同调层à support de 最大次数

$$\mathrm{R}^{2d}h_{u!}\overline{\mathbb{Q}}_\ell\longrightarrow\mathrm{R}^{2d}h_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S'} \quad 。$$

此外，则有一个迹态射
$$\mathrm{R}^{2d}h_{u!}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-d)$$
这是一个同构，因为U_u/S'的纤维都是几何连通的。由此可以导出一个态射
$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-d) \longrightarrow \mathrm{R}^{2d}h_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{Y'} \quad 。$$
易见该态射不依赖于局部截面u，而只依赖于它的等价类，也就是说，它在$\pi_0(U/S)$中的像。由此可以导出一个典范态射
$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\pi_0(U/S)}(-d) \longrightarrow \mathrm{R}^{2d}h_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell \quad 。$$
为了验证这是一个同构，只需对每根纤维逐个进行验证，此时是显然的。 □

引理 8.8.11. — *设$\mathcal{F}$是S上的一个ℓ进层。设$S = \bigsqcup_{\sigma\in\Sigma} S_\sigma$是$S$上的一个区块化，其中的区块都是不可约的，并且$\mathcal{F}$在每个区块上的限制都是局部常值的。设$i: Z \to S$是$S$的一个不可约闭子概形，$L$是一个$Z$上的局部系。假设$i_*L$是$\mathcal{F}$的一个子商。则$S$是某个区块$S_\sigma$的闭包。*

证明. — i_*L在每个区块S_σ上的限制，étant un 子商du 局部系$\mathcal{F}|_{S_\sigma}$，也是一个局部系。从而对任意$\sigma\in\Sigma$，要么$S_\sigma\subseteq Z$，要么$S_\sigma\cap Z=\emptyset$。由于Z是不可约的，故有唯一一个$\sigma\in\Sigma$，使得$Z\cap S_\sigma$是Z的一个稠密开集。从而S_σ是Z的一个稠密开集。 □

8.8.12. — 考虑une variante plus compliquée du 定理7.2.1 où on ne suppose plus les fibres de P都是connexes. 设P是一个有限型平滑S交换群概形。存在一个子群概形ouvert P^0 de P 且其la fibre P^0_s au-dessus de 每个点s de S est la 单位分支de P_s。把P换成P^0，可以定义la notion de δ正则性et celle de Tate模$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0)$ polarisable.

8.8.13. — 存在一个有限Abel群层$\pi_0(P)$ pour la 平展拓扑de S qui interpole les groupes de 连通分支$\pi_0(P_s)$ des fibres de P，参照[**57**, 6.2]。

P在M上的作用诱导了群层$\pi_0(P)$在集合层$\mathrm{Irr}(M/S)$上的一个作用。Donnons-nous un 同态
$$\Pi_0 \to \pi_0(P)$$
其中Π_0 est le 常值层de valeur d'un certain Abel群fini Π_0。Localement pour la 平展拓扑de S，存在de tels 同态s qui ne sont pas triviaux.

于是有一个作用du 有限群Π_0 sur 层d'ensembles $\mathrm{Irr}(M/S)$。考虑ℓ进层$\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{Irr}(M/S)}$ qui associe à tout 平展开集S' de S l'向量空间$\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{Irr}(M/S)(U')}$ et qui lui aussi est muni d'一个作用du 有限群Π_0。从而对任意特征标$\kappa:\Pi_0\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$，均可定义直和因子
$$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{Irr}(M/S)})_\kappa$$
其中Π_0 agit à travers le 特征标κ。L'ensemble des 几何点s de S tels que $\kappa:\Pi_0\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$可以穿过$\Pi_0\to\pi_0(P_s)$ forme un 闭子概形de S que nous allons noter S_κ。易见层$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{Irr}(M/S)})_\kappa$的支集落在$S_\kappa$上。

8.8.14. — 根据同伦引理，层P agit sur les 错致上同调层$K^n = {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ à travers le quotient $\pi_0(P)$。Par conséquent, le 有限群Π_0作用在错致层K^n上qui 诱导了一个分解en 直和

$$K^n = \bigoplus_{\kappa\in\Pi_0^*} K^n_\kappa$$

其中$\Pi_0^* = \mathrm{Hom}(\Pi_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$。

Voici une généralisation de 7.2.1。

定理 8.8.15. — 设M和S是两个平滑k概形，$f: M \to S$是一个平坦紧合态射，几何纤维都是既约且d维的。设P是一个有限型平滑S交换群概形，相对维数是d，它作用在M上，且具有仿射的稳定化子。假设Tate模$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0)$是可极化的。

设$\Pi_0 \to \pi_0(P)$是一个同态d'un 有限群Π_0 dans 层$\pi_0(P)$ des 连通分支des fibres de P。设$\kappa \in \Pi_0^*$是一个特征标de Π_0。设S_κ le fermé de S des points $s \in S$ tel que $\kappa : \Pi_0 \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$可以穿过$\pi_0(P_s)$。考虑une 区块化

$$S \otimes_k \bar{k} = \bigsqcup_{\sigma\in\Sigma} S_\sigma$$

使得对任意$\sigma \in \Sigma$，S_σ是不可约的et 使得la restriction du 层$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{Irr}(M/S)})_\kappa$ à 每个区块S_σ是局部常值的。Le fermé S_κ est alors nécessairement une réunion des 区块S_σ pour σ dans un 子集de Σ。设K是一个几何单的错致层présent dans K^n_κ 且其支集是一个不可约闭子概形Z de $S \otimes_k \bar{k}$。假设$\delta_Z \geq \mathrm{codim}(Z)$。Alors Z est l'adhérence de l'une des 区块S_σ qui sont contenues dans S_κ。

Signalons un corollaire immédiat de ce théorème.

推论 8.8.16. — 若我们进而假设P是δ正则的alors tous les supports des 几何单的错致层s présents dans K^n_κ 都是des adhérences de 区块s S_σ contenues dans S_κ。

8.8.17. — De nouveau, l'analogue de 8.8.15 pour le 上同调层ordinaire de degré maximal de $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ à la place des 错致层de cohomolofie K^n rśulte immédiatement des lemmes 8.8.10和8.8.11。

8.8.18. — 一般来说，le problème de trouver une 区块化de S 使得la restriction du 层$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{Irr}(M/S)})_\kappa$ à 每个区块est 局部常值的，est accessibile 因为il s'agit d'étudier la variation en 函数de s de la représentation du 有限群$\pi_0(P_s)$ sur 有限维向量空间$\mathrm{Irr}(M_s)$ qui sont complètement explicites. Sur 不迷向开集de la Hitchin纤维化la situation est encore plus favorable comme nous allons voir.

假设qu'存在一个开集M^{reg} de M qui 在f的每个纤维中是稠密的et tel que P在M^{reg}上的作用是简单传递的。假设aussi qu'存在une section $S \to M^{\mathrm{reg}}$。于是有des 同构s

$$\mathrm{Irr}(M/S) = \pi_0(M^{\mathrm{reg}}/S) = \pi_0(P)$$

des 集合层munis d'action de $\pi_0(P)$。Ici $\pi_0(P)$ agit sur lui-même par 平移.

若 S 是一个Hensel线元，闭点为 s_0，la flèche de spécialisaiton $\mathrm{Irr}(M_{s_0}) \to \mathrm{Irr}(M_s)$ 是映满的，因为 M 在 S 上是紧合的。Cette surjectivité de la flèche de 特殊化est donc aussi vérifié pour les Abel群层 $\pi_0(P)$。Localement pour le 平展拓扑de S，存在donc un 满同态 $\Pi_0 \to \pi_0(P)$ d'un 常值群 Π_0 sur $\pi_0(P)$。简单起见，nous allons supposer l'existence de l'满同态 $\Pi_0 \to \pi_0(P)$ sur S。

引理 8.8.19. — 假设 $\mathrm{Irr}(M/S) = \pi_0(M^{\mathrm{reg}}/S) = \pi_0(P)$ et qu'存在un 满同态 $\Pi_0 \to \pi_0(P)$ 如上。设 $\kappa : \Pi_0 \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ 是一个特征标de Π_0。设 S_κ le fermé de S des points $s \in S$ tel que κ 可以穿过 $\Pi_0 \to \pi_0(P_s)$ et $i_\kappa : S_\kappa \to S$ l'闭浸入。于是有一个同构

$$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{Irr}(M/S)})_\kappa = i_{\kappa,*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \ 。$$

证明. — 我们有一个分解du 常值层 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\Pi_0}$ en 直和

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\Pi_0} = \bigoplus_{\kappa \in \Pi_0^*} (\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$$

其中 Π_0 作用在 $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 上via le 特征标 κ。满同态 $\Pi_0 \to \pi_0(P)$ 诱导了alors un 满同态de ℓ进层

$$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa \to (\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathrm{Irr}(M/S)})_\kappa$$

且其la fibre est nulle en dehors de S_κ et non nulle sur S_κ。引理可由此推出。 □

En combinant le 推论8.8.16 et le 引理8.8.19, 可以得到一个description complète des supports des 单错致层s sous des hypothèses favorables.

推论 8.8.20. — 设 M 和 S 都是平滑 k 概形，$f : M \to S$ 是一个平坦紧合态射，几何纤维都是既约且 d 维的。设 P 是一个有限型平滑 S 交换群概形，相对维数是 d，它作用在 M 上，且具有仿射的稳定化子。假设以下诸条件是成立的:

(1) Tate模 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0)$ 是可极化的，
(2) $\mathrm{Irr}(M/S) = \pi_0(M^{\mathrm{reg}}/S) = \pi_0(P)$，
(3) 存在un 满同态d'un 常值层 Π_0 sur 层 $\pi_0(P)$。

于是，对任意 $\kappa \in \Pi_0^*$，设 K 是一个几何单的错致层 K présent dans ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ de support Z vérifiant $\mathrm{codim}(Z) \geq \delta_Z$。Alors Z 等于une des 不可约分支de S_κ。若进而假设 P 是 δ 正则的，alors le support de n'importe quel 几何单的错致层présent dans ${}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 等于une des 不可约分支de S_κ。

现在我们来introduire la notion de l'amplitude de 每个support qui joue un rôle clé dans 8.8.15的证明。我们将garder les notations de 8.8.15。对任意 $\kappa \in \Pi_0^*$，对任意整数 n，le 错致上同调层 K_κ^n 是一个几何半单的？？？。En regroupant ses 单因子ayant le même support, 可以得到一个典范分解

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K_\kappa^n = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa} K_\alpha^n \tag{8.8.21}$$

其中$\mathfrak{A}_\kappa$是$S\otimes_k\bar{k}$的一组有限个不可约闭子概形Z_α，且K_α^n est la 直和des 单因子de K_κ^n de support Z_α。En supposant que 对任意$\alpha\in\mathfrak{A}_\kappa$， K_α^n不为零pour au moins 一个整数n，集合$\mathfrak{A}_\kappa$是唯一确定的。对任意$\alpha\in\mathfrak{A}_\kappa$， K_α^n是一个直和因子canonique de K_κ^n。

8.8.22. — On va maintenant introduire la notion d'amplitude de $\alpha\in\mathfrak{A}_\kappa$。对任意$\alpha$，我们令

$$\mathrm{occ}(\alpha)=\{n\in\mathbb{Z}\,|\,K_\alpha^n\neq 0\}\ 。$$

我们再用$n_+(\alpha)$来记occ(α)的最大元？？？且用$n_-(\alpha)$来记它的最小元？？？。可以定义l'amplitude de α par 公式

$$\mathrm{amp}(\alpha)=n_+(\alpha)-n_-(\alpha)\ 。$$

Voici une estimation cruciale de l'amplitude 且其on reporte la démonstration à **??**。

命题 8.8.23. — *沿用7.2的记号。假设*$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0)$ est polarisable，*参照* **??**。

对任意$\kappa\in\Pi_0^*$，*对任意*$\alpha\in\mathfrak{A}_\kappa$，*设*$\delta_\alpha$*是*la valeur minimale de l'invariant $\delta: S(\bar{k})\to\mathbb{N}$ sur le *不可约闭子概形*Z_α。Alors *则有不等式*

$$\mathrm{amp}(\alpha)\geq 2(d-\delta_\alpha)$$

其中d*是*$g:P\to S$*的相对维数。*

在本节中，我们将证明支集定理8.8.15 en admettant 不等式7.3.2。证明是基于la Poincaré对偶et un argument de comptage de dimension du à Goresky 和 MacPherson. Le lecteur consultera l'annexe，参照**??** pour voir comment cet argument marche dans un contexte plus général.

证明. — 由于M和S在k上都是平滑的， Poincaré-Verdier对偶给出了复形同构

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell=\underline{\mathrm{RHom}}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell,\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-2d](-d))$$

其中d是f的相对维数。En prenant les 错致上同调层，可以得到一个同构

$$K^n=K^{2\dim(M)-n,\vee}(\dim(M))$$

其中$^\vee$是指S上的ℓ进层复形范畴中的Verdier对偶，它把错致层的子范畴映回自身。对任意$\kappa\in\Pi_0^*$，都可以导出一个κ分支之间的同构

$$K_\kappa^n=K_\kappa^{2\dim(M)-n,\vee}(\dim(M))\ 。$$

由于这个同构respecte la 分解par le support 8.8.21, 对任意$\alpha\in\mathfrak{A}_\kappa$，l'ensemble d'entiers occ(α) est symétrique par rapport à $\dim(M)$。进而，en admettant l'estimation de l'amplitude 7.3.2

$$\mathrm{amp}(\alpha)\geq 2(d-\delta_\alpha)$$

on constate qu'存在一个整数$n\in\mathrm{occ}(\alpha)$ tel que

$$n\geq\dim(M)+d-\delta_\alpha\ 。$$

从而可以找到一个非零单错致层K de support Z_α，使得K是一个直和因子de K_κ^n avec $n\geq\dim(M)+d-\delta_\alpha$。Localement pour la 平展拓扑de S，存在des 提升s

$\pi_0(P) \to P$ de l'满同态 $P \to \pi_0(P)$。En déduit 一个作用de Π_0 sur sur 复形 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$。由于 $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 是一个有界可构复形，存在une 分解en 直和

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\kappa \in \Pi_0^*} (f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$$

tel qu'存在一个整数 N tel que 对任意 $\lambda \in \Pi_0$，$(\lambda - \kappa(\lambda)\mathrm{id})^N$ agit trivialement sur $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ après 基变换à un 平展覆盖de S。Cette 分解est indépendante du choix du 提升 $\pi_0(P) \to P$ de sorte qu'则有en fait une 典范分解au-dessus de S。进而，则有la compatibilité évidente

$$^p\mathrm{H}^n((f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa) = K^n_\kappa \quad 。$$

Ainsi $K[-n]$ 是一个直和因子du complexe $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$。设 U_α 是一个稠密开集de Z_α，其中 K est 具有形状 $L[\dim(Z_\alpha)]$，其中 L 是一个不可约的局部系sur U_α。设 V_α 是一个开集de S qui contient U_α comme un fermé. 我们令 $i_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$。Quitte à remplacer S par V_α，从而可以假设 $U_\alpha = Z_\alpha$。

设 u_α 是 U_α 的一个几何点。由于 $L[-n]$ 是一个直和因子de $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$，la fibre en u_α de $L[-n]$ 是一个直和因子de la fibre en u_α de $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$。La fibre en u_α de $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 是复形 $\mathrm{R}\Gamma(M_{u_\alpha}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ 根据 基变换定理pour un 紧合态射alors que la fibre de $L[-n]$ en u_α 是一个非零 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 向量空间，放置在第 $n - \dim(Z_\alpha)$ 个位置。由此可知

$$\mathrm{H}^{n-\dim(Z_\alpha)}(M_{u_\alpha}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \neq 0 \quad 。$$

现在整数

$$n - \dim(Z_\alpha) = n - \dim(S) + \mathrm{codim}(Z_\alpha)$$

大于等于

$$\dim(M) + d - \delta_\alpha - \dim(S) + \mathrm{codim}(Z_\alpha) \quad 。$$

根据前提条件，则有不等式

$$\mathrm{codim}(Z_\alpha) \geq \delta_\alpha \quad 。$$

把它与明显的等式 $\dim(M) - \dim(A) = d$ 结合起来，就可以导出不等式

$$n - \dim(Z_\alpha) \geq 2d \quad 。$$

由于纤维 M_{u_α} 的维数等于 d，la non-annulation $\mathrm{H}^{n-\dim(Z)}(M_{u_\alpha}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \neq 0$ implique que $n - \dim(Z_\alpha) = 2d$。En tronquant par l'opérateur $\tau^{\geq 2d}$，可以获知 $i_{\alpha *}L[-n + \dim(U_\alpha)]$ 是一个直和因子de $\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa[-2d]$ 从而 $i_{\alpha *}L$ 是一个直和因子de $\mathrm{H}^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$。定理résulte donc de 8.8.11。 □

命题 8.8.24. — *设 S 是一个在有限域 k 上有限型的概形。设 $f : X \to S$ 是一个紧合态射de source un 平滑 k 概形 X。设 $g : P \to S$ 是一个有限型平滑交换群概形ayant les fibres connexes de dimension d。假设稳定化子dans P de n'importe quel point de M 是仿射的。假设 Tate 模 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ 是可极化的，参照 ??。*

考虑la 典范分解par les supports

$$K^n = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} K^n_\alpha$$

其中$\mathfrak{A}$是一个有限集合de 闭子概形s 不可约s Z_α de $S\otimes_k \bar{k}$，且K_α^n est la 直和des facteurs 几何单的s ayant pour support le 子概形不可约Z_α。若U_α是一个稠密开集de Z_α comme dans 7.4.8, 特别的tel que K_α^n在U_α上的限制是一个局部系L_α^n décalé de $\dim(Z_\alpha)$，并且la restriction P_α de P à U_α admet un 拆解après un 基变换fini radiciel

$$1\to R_\alpha\to P_\alpha\to A_\alpha\to 1 \quad 。$$

于是，对任意几何点u_α de U_α，l'向量空间gradué $L_{\alpha,u_\alpha}=\bigoplus_n L^n_{\alpha,u_\alpha}$是一个自由模sur l'分次代数$\Lambda_{A_\alpha,u_\alpha}$。

证明. — Démontrons la 命题par une 递降归纳法sur Z_α的维数。设$\alpha_0\in\mathfrak{A}$是最大元？？？tel que Z_{α_0}是整个$S\otimes_k\bar{k}$。设U_{α_0}是一个稠密开集de $S\otimes_k\bar{k}$充分小au sens de 7.4.8。于是有

$$^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{U_{\alpha_0}}=L^n_{\alpha_0}[\dim(S)]$$

其中$L^n_{\alpha_0}$是一个局部系半单的sur U_{α_0}。Cette 直和est munie d'一个作用canonique de Λ_{A_α} 根据**??**。

设u_{α_0}是一个几何点quelconque de U_{α_0}。于是有一个同构

$$\bigoplus_n L^n_{\alpha_0,u_{\alpha_0}}=\bigoplus_n \mathrm{H}^n_c(M_{u_{\alpha_0}})$$

compatible avec l'action de $\Lambda_{P_{u_{\alpha_0}}}$。Par la raison de poids comme dans 7.4.8, l'action de $\Lambda_{P_{u_{\alpha_0}}}$ 可以穿过$\Lambda_{A_{u_{\alpha_0}}}$。En prenant un 几何点$u_{\alpha_0}$ au-dessus d'un point à valeur dans un 有限域, on dispose alors d'un 典范提升$\lambda_0:\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_{\alpha_0}})\to\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_{\alpha_0}})$。根据7.5.4, avec ce 提升$\bigoplus_n\mathrm{H}^n_c(M_{u_{\alpha_0}})$是一个$\Lambda_{A_{u_{\alpha_0}}}$模libre. 这个性质est alors vraie pour n'importe quel 几何点de U_{α_0} et pour n'importe quel 提升。

一般的情形est démontré essentiellement par la même méthode. On utilise la propriété de liberté de la 上同调de la fibre M_{u_α} pour déduire la liberté du 分次局部系L_α comme Λ_{A_α}模。La difficulté est de contrôler le bruit causé par les $K_{\alpha'}$ avec $\dim(Z_{\alpha'})>\dim(Z_\alpha)$。注意到par récurrence, 可以假设pour ces α'，$L_{\alpha'}$是一个自由模sur $\Lambda_{A_{\alpha'}}$。Prenons un 几何点u_α de U_α au-dessus d'un point à valeur dans un 有限域。设S_{u_α} l'严格Hensel化de S en u_α。La construction de 7.6 s'applique à S_{u_α}。On dispose donc d'一个作用de Λ_{P,u_α} sur $f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$在$S_{u_\alpha}$上的限制

$$\Lambda_{P,u_\alpha}\boxtimes(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S_\alpha})\to(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S_\alpha}) \quad 。\tag{8.8.25}$$

Comme dans 7.6, celle-ci 诱导了一个作用graduée de de Λ_{P,u_α} sur la 直和de 错致上同调层且其la partie de degré -1 s'écrit

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})\otimes {}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha}\to {}^p\mathrm{H}^{n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha} \quad 。$$

这个箭头se 直和分解suivant la 典范分解de ${}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et ${}^p\mathrm{H}^{n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ par le support

$$\bigoplus_{\alpha'\in\mathfrak{A}}\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})\otimes K^n_{\alpha'}|_{S_\alpha}\to\bigoplus_{\alpha'\in\mathfrak{A}}K^{n-1}_{\alpha'}|_{S_\alpha} \quad 。\tag{8.8.26}$$

若$\alpha'\neq\alpha''$，la flèche induite

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})\otimes K^n_{\alpha'}|_{S_\alpha}\to K^{n-1}_{\alpha''}|_{S_\alpha}$$

est nulle 因为 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})\otimes K^n_{\alpha'}|_{S_\alpha}$ 是一个扩充successive de 单错致层s de support $Z_{\alpha'}\cap S_\alpha$ alors que $K^{n-1}_{\alpha''}|_{S_\alpha}$ 是一个扩充successive de 单错致层s de support $Z_{\alpha''}\cap S_\alpha$。Ainsi, la flèche 8.8.26 是一个直和des flèches

(8.8.27) $$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})\otimes K^n_{\alpha'}|_{S_\alpha}\to K^{n-1}_{\alpha'}|_{S_\alpha}$$

la somme étant étendue tous les $\alpha'\in\mathfrak{A}$。L'action graduée de Λ_{P,u_α} sur $\bigoplus_{\alpha'\in\mathfrak{A}}K_{\alpha'}|_{S_\alpha}$ se décompose donc en une 直和de des actions graduées de Λ_{P,u_α} sur 每个 $K_{\alpha'}|_{S_\alpha}$。

Le 几何点 u_α est au-dessus d'un point u^0_α à valeur dans un 有限域。根据 7.5.3, 则有一个典范直和分解

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})=\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_{u_\alpha})\oplus\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})$$

grâce à l'action de $\mathrm{Gal}(u_\alpha/u^0_\alpha)$。由此可以导出donc 一个作用de $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})$ sur $f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S_\alpha}$

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})\boxtimes(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S_\alpha})\to f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S_\alpha}[-1],$$

puis 一个作用sur la 直和des 错致上同调层

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})\otimes{}^p\mathrm{H}^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha}\to{}^p\mathrm{H}^{n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha}$$

laquelle se décompose en une 直和des flèches

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})\otimes K^n_{\alpha'}|_{S_\alpha}\to K^{n-1}_{\alpha'}|_{S_\alpha}$$

pour $\alpha'\in\mathfrak{A}$。

命题 8.8.28. — 对任意 $\alpha'\neq\alpha$，对任意整数 m，le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 向量空间gradué $\mathrm{H}^m(K_{\alpha',u_\alpha})$ 是一个 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模libre.

证明. — 若 $\dim(Z_{\alpha'})\leq\dim(Z_\alpha)$ avec $\alpha'\neq\alpha$，则 $K_{\alpha'}|_{S_\alpha}$ 是零，如此一来il n'y a rien à démontrer. 从而可以假设 $\dim(Z_{\alpha'})>\dim(Z_\alpha)$。在 $U_{\alpha'}$ 上，则有一个典范箭头entre 分次局部系s

$$\Lambda_{A_{\alpha'}}\otimes L_{\alpha'}\to L_{\alpha'}$$

définie dans **??**。根据归纳假设，对任意几何点 $u_{\alpha'}$ de $U_{\alpha'}$ défini sur un 有限域，la fibre de $L_{\alpha'}$ en $u_{\alpha'}$ 是自由 $\Lambda_{A_{\alpha',u_{\alpha'}}}$ 模。根据分解定理，$L_{\alpha'}$ 是一个半单的分次局部系。应用引理 7.4.11，我们知道qu'存在un 分次局部系 $E_{\alpha'}$ sur $U_{\alpha'}$ et 一个同构

$$L_{\alpha'}\simeq\Lambda_{A_{\alpha'}}\otimes E_{\alpha'}$$

作为 $\Lambda_{A_{\alpha'}}$ 分次模。

Sur l'intersection $U_{\alpha'}\cap S_\alpha$ 则有encore cette factorisation. 我们用 $y_{\alpha'}$ 来记le 一般点de $U_{\alpha'}\cap S_\alpha$ et $\bar y_{\alpha'}$ 是一个几何点au-dessus de $y_{\alpha'}$。于是有一个同构de représentations de $\mathrm{Gal}(\bar y_{\alpha'}/y_{\alpha'})$

$$L_{\alpha',\bar y_{\alpha'}}=\Lambda_{A_{\alpha',\bar y_{\alpha'}}}\otimes E_{\alpha',\bar y_{\alpha'}}\quad。$$

La flèche de 特殊化

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})\to\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{\bar y_{\alpha'}})$$

是单的et identifie $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})$ et le 向量子空间de $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{\bar{y}_{\alpha'}})$ des vecteurs $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ 不变的s. 我们需要de 前提条件 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ est polarisable dans le lemme intermédiaire suivant.

引理 8.8.29. — 对任意同调提升

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha}) \ ,$$

l'application

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$$

qui s'en déduit 是单的。进而，存在un complément de $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})$ dans $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$ qui est $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ 稳定的。

证明. — La flèche de 特殊化 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{\bar{y}_{\alpha'}})$ est compatible avec la form alternée de polarisation. N'importe quel 同调提升 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha})$ est compatible avec la 交错形式如此一来映射 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{\bar{y}_{\alpha'}})$ qui s'en déduit 也是如此。由此可知 $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \to \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$ 是单的，并且正交补de $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})$ dans $\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$ 是一个complément $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ 稳定的。 □

继续8.8.28的证明。La 分解en 直和8.8.29

$$\mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{\bar{y}_{\alpha'}}) = \mathrm{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \oplus \mathrm{U}$$

de représentations de $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ 。induit 一个同构de représentations de $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$

$$\Lambda_{A_{\bar{y}_{\alpha'}}} = \Lambda_{A_{u_\alpha}} \otimes \Lambda(U)$$

其中 $\Lambda(U) = \bigoplus_i \wedge^i(U)[i]$ 。Ceci implique une factorisation en 张量积de représentations de $\mathrm{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$

$$L_{\alpha',\bar{y}_{\alpha'}} = \Lambda_{A_{u_\alpha}} \otimes \Lambda(U) \otimes E_{\alpha',\bar{y}_{\alpha'}} \quad 。$$

Il existe donc 一个同构

$$L_{\alpha'}|_{U_{\alpha'}\cap S_\alpha} = \Lambda_{A_{u_\alpha}} \boxtimes E'_{\alpha'}$$

其中 $E'_{\alpha'}$ 是 $U_{\alpha'} \cap S_\alpha$ 上的一个局部系。由于le 外部张量积avec $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ commute avec le 中等延拓de $U_{\alpha'} \cap S_\alpha$ à $Z_{\alpha'} \cap S_\alpha$ et avec le foncteur fibre en u_{α_0}，la 命题8.8.28 s'en déduit. □

现在考虑谱序列7.6.3

$$E_2^{m,n} = \mathrm{H}^m({}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{u_\alpha}) \Rightarrow \mathrm{H}^{m+n}(M_{u_\alpha})$$

qui dégénère en E_2 根据7.6.4。这样就得到一个滤解de

$$H = \bigoplus_j \mathrm{H}^j(M_{u_\alpha})$$

且其第 m 个gradué est

$$\bigoplus_n \mathrm{H}^m({}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{s_0}) \ 。$$

Cette 滤解est stable sous l'action de $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 。Son action sur 第 m 个gradué se déduit de l'action de $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ sur la 直和

$$\bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha}$$

从而de celle sur les $K_{\alpha'}|_{S_\alpha}$ 。Ce 第 m 个gradué $\bigoplus_n \mathrm{H}^m({}^p\mathrm{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{s_0})$ se décompose donc en une 直和de $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 分次模

$$\bigoplus_{\alpha'} \mathrm{H}^m(K_{\alpha',u_\alpha})$$

如果 $\alpha' \neq \alpha$，则已经知道 $\mathrm{H}^m(K_{\alpha',u_\alpha})$ 是一个自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模，参照8.8.28。如果 $\alpha' = \alpha$，则有 $\mathrm{H}^m(K_{\alpha,u_\alpha}) = 0$ sauf pour $m = -\dim(Z_\alpha)$ 。这样就得到一个滤解de H par des sous $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模s

$$0 \subseteq H' \subseteq H'' \subseteq H = \bigoplus_j \mathrm{H}^j(M_{u_\alpha})$$

tels que H' 和 H/H'' 都是自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模s et tel que

$$H''/H' = L_{\alpha,u_\alpha} \quad 。$$

根据7.5.4，我们知道 H 也是一个自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模。由此可以导出，L_{α,u_α} 也是一个自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模par une propriété particulière de 环 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 。由于 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 是一个局部代数，故知任何投射 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模都是自由的。于是在正合序列

$$0 \to H'' \to H \to H/H'' \to 0$$

中，若 H 和 H/H'' 都是自由的，则 H'' 也是自由的。

Notons aussi que $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 是一个 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 代数de locale dimension finie ayant un socle de dimension un. 由此可以导出que le dual $(\Lambda_{A_{u_\alpha}})^*$ de $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 作为 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 向量空间是一个自由 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模。考虑对偶正合序列

$$0 \to (H''/H')^* \to (H'')^* \to (H')^* \to 0$$

其中 $(H'')^*$ et $(H')^*$ 都是des $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模s libres. 由此可知 $(H''/H')^*$ 是一个 $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ 模libre 如此一来 H''/H' 也是如此。 □

注解 8.8.30. — La discussion de ce paragraphe s'étend mot pour mot au cas 其中 P a éventuellement des fibres non connexes. 设 $g : P \to S$ 是一个有限型平滑 S 群概形，作用在一个紧合 S 概形 $f : M \to S$ 上。假设 M 在基域 k 上是平滑的。设 $\pi_0(P)$ 是 P 的诸纤维的连通分支层。Comme dans 8.8.14，假设存在一个有限群 Π_0 是一个满同态 $\Pi_0 \to \pi_0(P)$ 。于是有一个典范直和分解

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\kappa \in \Pi_0^*} (f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$$

使得对任意 $x \in \Pi_0$，$(x - \kappa(x))^N$ agit trivialement sur $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ pour un certain entier N 。对任意 $\kappa \in \Pi_0^*$，存在un 有限集合 $\mathfrak{A}_\kappa$ de 闭子概形s Z_α de $S \otimes_k \bar{k}$ tel qu'则有des 分解s en 直和canonique

$$K_\kappa^n = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa} K_\alpha^n$$

其中 $K^n_\kappa = {}^p\mathrm{H}^n((f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa)$ et K^n_κ est la 直和des 单因子de K^n_κ de support Z_α。引理7.4.8 s'applique à Z_α；特别的，存在un 稠密开集U_α de Z_α au-dessus du quel K^n_α是一个局部系L^n_α avec un décalage et la 单位分支P^0_α de $P|_{U_\alpha}$ admet un Abel商A_α après un 基变换radiciel qui fibre par fibre est le 拆解de Chevalley. La 命题8.8.24 s'applique à L^n_α也就是说$\bigoplus_n L^n_\alpha$是一个自由模sur l'algèbre d'homologie de A_α。

7.3.2 是一个直接推论de 8.8.24 et de la remarque 8.8.30。

证明. — 设$\kappa \in \Pi_0^*$且$\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa$。设$Z_\alpha$是一个不可约闭子概形de $S \otimes_k \bar{k}$ correspondant. Comme dans 7.4.8, 存在un 稠密开集de U_α de Z_α tel que K^n_α在U_α上的限制是一个局部系L^n_α avec un décalage et P^0在U_α上的限制admet un Abel商A_α après un 紧贴基变换tel que fibre par fibre on trouve le 拆解de Chevalley. 根据8.8.24 et en tenant compte de la remarque 8.8.30, $\bigoplus_n L^n_\alpha$是一个自由模sur l'algèbre Λ_{A_α} des homologies de A_α。由于这是一个非零模，son amplitude 大于等于celle de Λ_{A_α}等于$2(d-\delta_\alpha)$。由此可以导出不等式

$$\mathrm{amp}(\alpha) \geq 2(d-\delta_\alpha)$$

这就是我们所要的。 □

注解 8.8.31. — Notons les résultats de ce paragraphe restent inchangés si au lieu de k概形s P et M 则有des Deligne-Mumford叠形。

8.8.32. — 设$(\kappa, \rho^\bullet_\kappa)$是一个点标初分线索de G sur $\overline{X}$，参照1.8.2。于是有un $\pi_0(\kappa)$回旋子$\rho_\kappa : \overline{X}_{\rho_\kappa} \to \overline{X}$ avec un point ∞_{ρ_κ} au-dessus de ∞。由此可以导出un point ∞_G du $\mathrm{Out}(\mathbf{G})$回旋子ρ_G et un point ∞_H du $\mathrm{Out}(\mathbf{H})$回旋子ρ_H。

Avec la 点标初分线索，可以定义un 典范态射

$$\tilde{\nu} : \tilde{\mathcal{A}}_H \to \tilde{\mathcal{A}}$$

de la façon suivante. 设$a_H \in \mathcal{A}^\infty_H(\bar{k})$ d'image $a \in \mathcal{A}^\infty(\bar{k})$。还记得分合曲线$\widetilde{X}_{a_H}$和$\widetilde{X}_a$ ne sont pas directement reliées mais 则有一个态射entre leurs 平展覆叠s

$$\widetilde{X}_{\rho_\kappa, a_H} \to \widetilde{X}_{\rho_\kappa, a}\quad。$$

事实上，则有下面的图表

(8.8.33)
$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X}_{\rho_\kappa,a} \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\
\widetilde{X}_{\rho_\kappa,a_H} \arrow[ur, dotted] \arrow[rr] \arrow[dr] & & X_{\rho_\kappa} \times \mathbf{t}_D \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
 & \overline{X} \arrow[rr, "a_H"] \arrow[dr, "a"'] & & \mathfrak{c}_{H,D} \arrow[dl, "\nu"] \\
 & & \mathfrak{c}_D &
\end{tikzcd}$$

avec deux parallélogrammes cartésiens. 由此可知态射 ν détermine 态射en pointillé qu'on voulait construire.

Un $\bar{k}$ 值点 $\tilde{a}_H = (a_H, \tilde{\infty})$ de $\tilde{\mathcal{A}}_H$ consiste en un point $a_H \in \mathcal{A}_H^\infty(\bar{k})$ plus un point $\tilde{\infty}$ dans $\widetilde{X}_{a_H}$ au-dessus de ∞。La donnée du point ∞_{ρ_κ} de ρ_κ détermine alors un point $\tilde{\infty}_{\rho_\kappa} = (\tilde{\infty}, \infty_{\rho_\kappa})$ de $\widetilde{X}_{\rho_\kappa, a_H}$。Il revient au même se donner un point de $\tilde{\mathcal{A}}_H$ que de se donner un couple $(a_H, \tilde{\infty}_{\rho_\kappa})$ avec $a_H \in \mathcal{A}_H^\infty(\bar{k})$ et $\tilde{\infty}_{\rho_\kappa} \in \widetilde{X}_{\rho_\kappa, a_H}(\bar{k})$ au-dessus de ∞。

‘‘

‘‘

‘‘

,

Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton NJ 08540, USA. Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France. • *E-mail :* `ngo@ias.edu` et `Bao-Chau.Ngo@math.u-psud.fr`