Weil 猜想（一）

Pierre Deligne

原载：

La conjecture de Weil : I

Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.
Tome 43, n° 2 (1974), p. 273-307.

目　录

[0]译注：术语系统与 EGA, SGA 中译本保持一致。若干数学记号作了调整，与原文不同，请留意。日期：2018.11.8。

本文将证明 Weil 对于 Frobenius 自同态的特征值的猜想，这个猜想的完整叙述将在 (1.6) 中给出。为了把证明尽可能表述得既初等又几何化，我们将首先详尽地回顾此前的一些工作，新的结果只出现在 §3, 6, 7, 8 之中。

本文的续篇将讨论各种改进和应用，并将证明 Lefschetz 大定理 (théorème de Lefschetz difficile)（即：用超平面截面的上同调类做逐次上积可以在上同调环中得到一系列同构的事实）。

本文是基于作者 1973 年七月在 Cambridge 所作的六次报告。感谢 N. Katz 提供的笔记。

§1 Grothendieck 理论：L 函数的上同调诠释

(1.1) 设 X 是一个有限型 $\mathbb{Z}$ 概形，$|X|$ 是它的闭点集。对于 $x \in |X|$，令 $\mathrm{N}(x)$ 是 X 在点 x 处的剩余类域 $\boldsymbol{k}(x)$ 中的元素个数。我们定义 X 的 Hasse-Weil Zeta 函数为

(1.1.1)
$$\zeta_X(s) \;=\; \prod_{x\in|X|} \frac{1}{1-\mathrm{N}(x)^{-s}}$$

（当 $\Re(s)$ 充分大时，该乘积绝对收敛）。若 $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$，则 $\zeta_X(s)$ 就是 Riemann Zeta 函数。

以下我们总假设 X 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的概形。这时对于 $x \in |X|$，我们将把 $\mathrm{N}(x)$ 记为 q_x。若令 $\deg(x) = [\boldsymbol{k}(x) : \mathbb{F}_q]$，则有 $q_x = q^{\deg(x)}$。为方便起见，引入变量 $t = q^{-s}$。我们令

(1.1.2)
$$Z(X,t) \;=\; \prod_{x\in|X|} \frac{1}{1-t^{\deg(x)}} \quad ;$$

当 $|t|$ 充分小时，这个无穷乘积是收敛的，并且我们有

(1.1.3)
$$\zeta_X(s) \;=\; Z(X,q^{-s}) \quad 。$$

(1.2) Dwork (On the rationality of zeta function of an algebraic variety, *Amer. J. Math.*, 82, 1960, p. 631-648) 和 Grothendieck ([1] 及 SGA 5) 都已证明，$Z(X,t)$ 是 t 的有理函数。

Grothendieck 使用的方法是他所建立的 ℓ 进上同调理论（其中 ℓ 是一个素数，且不等于 $\mathbb{F}_q$ 的特征 p）。该理论还给出了 $Z(X,t)$ 的零点和极点的上同调诠释，并且在 X 平滑且紧合的情况下还可以导出 $Z(X,t)$ 的函数方程。Dwork 则使用了 p 进方法。在 X 是射影空间中的平滑超曲面时，他同样给出了 Zeta 函数的零点和极点的 p 进上同调诠释及函数方程。这个方法又启发 Grothendieck 和 Berthelot 建立了结晶上同调理论，后者对于平滑紧合的 X 也可以给出 $Z(X,t)$ 的零点和极点的 p 进上同调诠释及函数方程。Lubkin 利用 Washnitzer 的一个想法对上述理论进行了改进，

但他的理论只适用于 X 是平滑紧合的并可提升到特征 0 上的情形 (A p-adic proof of Weil's conjecture, *Ann. of Math.*, 87, 1968, p. 105-255)。

以下我们将主要使用 Grothendieck 的理论，首先作一个复习。

(1.3) 设 X 是特征 p 的代数闭域 $\boldsymbol{k}$ 上的一个准多样体[1]，这里允许 $p=0$。对于素数 $\ell \neq p$，Grothendieck 定义了 ℓ 进上同调群 $\mathrm{H}^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 和 ℓ 进紧支集上同调群 $\mathrm{H}^i_c(X,\mathbb{Q}_\ell)$。若 X 是紧合的，则两者重合。这些 $\mathrm{H}^i_c(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 都是 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的有限维向量空间，并且在 $i > 2\dim(X)$ 时等于 0。

(1.4) 设 X_0 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个准多样体，$\overline{\mathbb{F}}_q$ 是 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包，X 是由 X_0 通过纯量扩张 $\mathbb{F} \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_q$ 而得到的 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上的准多样体。在 Weil 和 Shimura 的语言里，这相当于说："X 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的准多样体"。设 $F: X \to X$ 是 Frobenius 态射；它把坐标为 x 的点映到坐标为 x^q 的点上。换句话说，对于 X_0 的一个 Zariski 开集 U_0，设它定义出 X 的开集 U，则有 $F^{-1}(U) = U$，并且对任意 $x \in \mathrm{H}^0(U_0,\mathscr{O})$，均有 $F^*x = x^q$。若我们把 X 的闭点集 $|X|$ 等同于 $X_0(\overline{\mathbb{F}}_q)$（即 X_0 的 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 值点的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q), X_0)$），并设 $\varphi \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ 是 Frobenius 置换：$\varphi(x) = x^q$。则 F 在 $|X|$ 上的作用可以等同于 φ 在 $X_0(\overline{\mathbb{F}}_q)$ 上的作用。于是有：

a) X 的在 F 作用下不动的闭点所组成的集合 $|X|^F$ 可以等同于 X_0 的 $\mathbb{F}_q$ 值点的集合 $X_0(\mathbb{F}_q) \subseteq X_0(\overline{\mathbb{F}}_q)$。这其实就来自于下面的事实：对于 $x \in \overline{\mathbb{F}}_q$，我们有 $x \in \mathbb{F}_q \Leftrightarrow x^q = x$。

b) 同样地，X 的在 F 的 n 次迭代作用下不动的闭点所组成的集合 $|X|^{F^n}$ 可以等同于 $X_0(\mathbb{F}_{q^n})$。

c) X_0 的全体闭点的集合 $|X_0|$ 可以等同于 $|X|$ 的在 F（或者 φ）作用下的轨道集合 $|X|_F$。而 $x \in |X_0|$ 的次数 $\deg(x)$ 就是对应轨道中的元素个数。

d) 由 b) 和 c) 可以得到公式

(1.4.1)
$$\#|X|^{F^n} \;=\; \#X_0(\mathbb{F}_{q^n}) \;=\; \sum_{\deg(x)|n} \deg x$$

（对于 $x \in |X_0|$，当 $\deg(x)\big|n$ 时，x 可以定义出 $\deg(x)$ 个坐标落在 $\mathbb{F}_{q^n}$ 中的点，它们在 $\mathbb{F}_q$ 上相互共轭）。

(1.5) 态射 F 是有限的，从而是紧合的。故可诱导出映射

$$F^* \;:\; \mathrm{H}^i_c(X,\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathrm{H}^i_c(X,\mathbb{Q}_\ell) \quad 。$$

Grothendieck 证明了下面的 Lefschetz 不动点公式

$$\#|X|^F \;=\; \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F^*,\, \mathrm{H}^i_c(X,\mathbb{Q}_\ell)) \quad ;$$

这表明右边的 ℓ 进数实际上是一个整数，并且等于左边。注意到为了使这样的一个公式成立，必须要求 $dF = 0$ 是处处成立的，包括无穷远处 (此处并未假设 X 是紧合的)；由 $dF = 0$ 可以推出，F 在每个不动点处的重数都是 1。

[1]译注：对于任何域 $\boldsymbol{k}$，我们都把有限型分离 $\boldsymbol{k}$ 概形称为 $\boldsymbol{k}$ 上的准多样体，并把几何既约的准多样体称为多样体。

对于 F 的各次迭代也有类似的公式：

$$\textbf{(1.5.1)} \qquad \#|X|^{F^n} \;=\; \#X_0(\mathbb{F}_{q^n}) \;=\; \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F^n,\, \mathrm{H}^i_c(X,\mathbb{Q}_\ell)) \quad 。$$

对 (1.1.2) 取对数导数可得：

$$\textbf{(1.5.2)} \quad t\frac{d}{dt}\log Z(X_0,t) \;=\; \frac{t\dfrac{d}{dt}Z(X_0,t)}{Z(X_0,t)} \;=\; \sum_{x\in|X_0|} -\frac{-\deg(x)t^{\deg x}}{1-t^{\deg(x)}}$$

$$= \sum_{x\in|X_0|}\sum_{n>0} \deg(x)t^{n.\deg(x)} \underset{(1.4.1)}{=\!=\!=} \sum_{n>0} \#X_0(\mathbb{F}_{q^n}).t^n \quad 。$$

若 F 是向量空间 V 的一个自同态，则我们有形式幂级数的恒等式

$$\textbf{(1.5.3)} \qquad t\frac{d}{dt}\log(\det(1-tF,V)^{-1}) \;=\; \sum_{n>0}\mathrm{Tr}(F^n,V)t^n$$

（先对 $\dim(V)=1$ 进行验证，再利用两边的式子对于 V（关于短正合序列）都是加性的即可）。把 (1.5.1) 代入 (1.5.2)，并利用 (1.5.3)，则有

$$t\frac{d}{dt}\log Z(X_0,t) \;=\; \sum_i (-1)^i\, t\frac{d}{dt}\log\det(1-tF^*,\, \mathrm{H}^i_c(X,\mathbb{Q}_\ell))^{-1} \quad ,$$

故知

$$\textbf{(1.5.4)} \qquad Z(X_0,t) \;=\; \prod_i \det(1-tF^*,\, \mathrm{H}^i_c(X,\mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}} \quad 。$$

右边是 $\mathbb{Q}_\ell(t)$ 中的一个元素。这个公式表明，若把右边在 $t=0$ 处展开成 Taylor 级数，则它是 $\mathbb{Q}_\ell[[t]]$ 中的一个常数项为 1 的整系数形式幂级数，并且等于左边 (也看作是 t 的形式幂级数)。这就是 Grothendieck 对于 Zeta 函数所给出的上同调诠释。

我们的主要结果是下面的

定理 (1.6) — 设 X_0 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个平滑射影多样体。则对每个 i，特征多项式 $\det(t.1-F^*,\, \mathrm{H}^i(X,\mathbb{Q}_\ell))$ 都是整系数的，并且不依赖于 ℓ $(\neq p)$ 的选择。进而该多项式的所有复数根 α（或 F^* 的特征值在复数域中的所有共轭元）都具有绝对值 $|\alpha|=q^{i/2}$。

首先我们来证明，(1.6) 可由下面这个较弱的结果推出。

引理 (1.7) — 对于每个 i 和每个 $\ell\neq p$，$\mathrm{H}^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 的自同态 F^* 的诸特征值都是代数数，并且它们在复数域中的所有共轭元 α 都具有绝对值 $|\alpha|=q^{i/2}$。

(1.7) ⇒ (1.6) 的证明 — 把 $Z(X_0,t)$ 看作是 $\mathbb{Z}[[t]]$ 中的元素 $Z(X_0,t)=\sum_n a_nt^n$，则它的常数项是 1。根据 (1.5.3)，$Z(X_0,t)$ 在 $\mathbb{Q}_\ell[[t]]$ 中的像是某个有理分式的 Taylor 展开式。这表明对充分大的 N 和 M（$\geqslant$ 分子和分母的次数），Hankel 行列式

$$H_k \;=\; \det\big((a_{i+j+k})_{0\leqslant i,j\leqslant M}\big) \qquad (k>N)$$

都等于 0 。但它们在 $\mathbb{Q}_\ell$ 中为 0 当且仅当它们在 $\mathbb{Q}$ 中为 0 ；从而 $Z(X_0,t)$ 也是 $\mathbb{Q}(t)$ 中某个元素的 Taylor 展开式。换句话说

$$Z(X_0,t) \;\in\; \mathbb{Z}[[t]]\cap\mathbb{Q}_\ell(t) \;\subseteq\; \mathbb{Q}(t) \quad 。$$

设 $Z(X_0,t)=P/Q$，其中 $P,Q\in\mathbb{Z}[t]$ 互素，并且常数项都大于 0 。根据 Fatou 的一个引理，从 $Z(X_0,t)$ 属于 $\mathbb{Z}[[t]]$ 并且常数项是 1 就可以推出 P 和 Q 的常数项都是 1 。令

$$P_i(t) \;=\; \det(1-tF^*,\, \mathrm{H}^i(X,\mathbb{Q}_\ell)) \quad 。$$

则由 (1.7) 的结论知，这些 P_i 是互素的。从而 (1.5.4) 的右端已经不能再约分，因而

$$P(t) \;=\; \prod_{i\,\text{是奇数}} P_i(t) \;, \qquad Q(t) \;=\; \prod_{i\,\text{是偶数}} P_i(t) \quad 。$$

设 K 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 中的这样一个子域，它是由 $\mathbb{Q}$ 和 $R(t)=P(t)Q(t)$ 的全部根所生成的。对于指定的 i， $P_i(t)$ 的根也是 $R(t)$ 的根，并且具有性质— “它们在复数域中的所有共轭元都具有绝对值 $q^{-i/2}$ ”。这个集合在 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 的作用下是稳定的。从而多项式 $P_i(t)$ 是有理系数的。根据 Gauss 引理（或由于 $P_i(t)$ 的根也是 $R(t)$ 的根，从而都是代数整数的倒数），该多项式还是整系数的。上面这种对于 $P_i(t)$ 的根的描述是不依赖于 ℓ 的，从而多项式 $P_i(t)$ 自身也不依赖于 ℓ 。

下面我们将致力于证明 (1.7)。

(1.8) Grothendieck 理论不仅能给出 Zeta 函数的上同调诠释，也能给出 L 函数的上同调诠释。结果如下。

(1.9) 设 X 是域 $\boldsymbol{k}$ 上的一个准多样体。 X 上的可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层的定义可以参考 SGA 5, VI 。这里我们只复习几个要点：

a) 若 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层，则可以把 X 写成有限个局部闭子集 X_i 的无交并集，使得每个 $\mathscr{F}|_{X_i}$ 都是偏常值的。

b) 假设 X 是连通的，$\overline{x}$ 是 X 的一个几何点。于是若 $\mathscr{F}$ 是偏常值的，则 $\pi_1(X,\overline{x})$ 可以作用在茎条 $\mathscr{F}_{\overline{x}}$ 上；“取 $\overline{x}$ 处的茎条”这个函子给出了下面的范畴等价：

$$\Big(\,X\text{ 上的偏常值可构 }\mathbb{Q}_\ell\text{ 层}\,\Big) \;\longmapsto\; \Big(\,\pi_1(X,\overline{x})\text{ 在有限维 }\mathbb{Q}_\ell\text{向量空间上的连续表示}\,\Big)$$

一般来说，后一范畴中的表示并不都来自于 $\pi_1(X,\overline{x})$ 的有限商群的表示。

c) 若 $\boldsymbol{k}=\mathbb{C}$，则 X 上的可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层可以等同于 X^{an} 上的这样一种 $\mathbb{Q}_\ell$ 向量空间层 $\mathscr{F}$ ，即可以把 X 适当地分割成有限个 Zariski 局部闭子集 X_i 的并集，使得在每个 X_i 上均可找到一个有限型自由 $\mathbb{Z}_\ell$ 模的局部系 $\mathscr{F}_i$ ，使得

$$\mathscr{F}|_{X_i} \;=\; \mathscr{F}_i\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell \quad 。$$

(1.10) 假设 $\boldsymbol{k}$ 是代数闭的，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一个可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层。则 Grothendieck 定义了 ℓ 进上同调群 $\mathrm{H}^i(X,\mathscr{F})$ 和 $\mathrm{H}^i_c(X,\mathscr{F})$ 。后面这些 $\mathrm{H}^i_c(X,\mathscr{F})$ 都是 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的有限维向量

空间，并且在$i > 2\dim(X)$时等于0。当$\boldsymbol{k} = \mathbb{C}$时，$\mathrm{H}^i(X,\mathscr{F})$和$\mathrm{H}^i_c(X,\mathscr{F})$分别就是$X^{\mathrm{an}}$的以$\mathscr{F}$为系数的通常上同调群（切转：紧支集上同调群）。

(1.11) 设X_0是$\mathbb{F}_q$上的一个准多样体，X是$\overline{\mathbb{F}}_q$上对应的准多样体，$\mathscr{F}_0$是X_0上的一个集合层（在平展拓扑下）。我们用$\mathscr{F}$来记它在X上的逆像。除了Frobenius态射$F : X \to X$之外，我们还有一个典范同构$F^* : F^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$。这个同构可以描述如下：首先把$\mathscr{F}_0$看作是$X_0$上的平展化空间，即把$\mathscr{F}_0$等同于一个代数空间$[\mathscr{F}_0]$和一个平展态射$f : [\mathscr{F}_0] \to X_0$，此时$\mathscr{F}_0$就是由$[\mathscr{F}_0]$的局部截面所组成的层。现在$X$上的平展化空间$[\mathscr{F}]$可以由$[\mathscr{F}_0]$通过纯量扩张而得到。从而我们有下面的交换图表

$$\begin{tikzcd}
[\mathscr{F}] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"'] & [\mathscr{F}] \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "F"'] & X
\end{tikzcd}$$

由此得到一个态射$[\mathscr{F}] \to X \times_{(F,X,f)} [\mathscr{F}] = [F^*\mathscr{F}]$，它实际上是一个同构，因为$f$是平展的。而它的逆就给出了我们所要的同构$F^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$。

这个构造方法可以推广到可构$\mathbb{Q}_\ell$层上。

(1.12) 设X_0是$\mathbb{F}_q$上的一个准多样体，$\mathscr{F}_0$是X_0上的一个可构$\mathbb{Q}_\ell$层，$(X,\mathscr{F})$是由$(X_0,\mathscr{F}_0)$通过纯量扩张$\mathbb{F}_q \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_q$而得到的，则我们有$F : X \to X$和$F^* : F^*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$。

有限态射F和同构F^*定义了一个自同态

$$F^* \;:\; \mathrm{H}^i_c(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i_c(X,F^*\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i_c(X,\mathscr{F}) \quad 。$$

对于$x \in |X|$，F^*也定义了一个态射$F^*_x : \mathscr{F}_{F(x)} \to \mathscr{F}_x$，并且当$x \in |X|^F$时，它是$\mathscr{F}_x$的一个自同态。Grothendieck证明了下面的Lefschetz不动点公式

$$\sum_{x\in|X|^F} \mathrm{Tr}(F^*_x, \mathscr{F}_x) \;=\; \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F^*, \mathrm{H}^i_c(X,\mathscr{F})) \quad 。$$

对于F的各次迭代也可以写出类似的公式：F^*的n次迭代定义了一个态射$F^{*n}_x : \mathscr{F}_{F^n(x)} \to \mathscr{F}_x$，而若$x$是$F^n$的不动点，则$F^{*n}_x$是一个自同态，我们有

(1.12.1)
$$\sum_{x\in|X|^{F^n}} \mathrm{Tr}(F^{*n}_x, \mathscr{F}_x) \;=\; \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F^{*n}, \mathrm{H}^i_c(X,\mathscr{F})) \quad 。$$

(1.13) 设$x_0 \in |X_0|$，Z是与之对应的F在$|X|$中的轨道，$x \in Z$。则在轨道Z中有$\deg(x_0)$个元素(1.4)。我们用$F^*_{x_0}$来记$\mathscr{F}_x$上的自同态$F^{*\deg(x_0)}_x$，并且令

$$\det(1 - tF^*_{x_0}, \mathscr{F}_0) \;=\; \det(1 - tF^*_{x_0}, \mathscr{F}_x) \quad 。$$

则在只差同构的意义下，$(\mathscr{F}_x, F^*_{x_0})$并不依赖于$x$的选择。这就是为什么我们在上面的记号中省略了$x$的缘故。对于$(\mathscr{F}_x, F^*_{x_0})$上的其它函数，我们也采用类似的标记法。

(1.14) 定义 $Z(X_0,\mathscr{F}_0,t)\in\mathbb{Q}_\ell[[t]]$ 是下面的乘积

(1.14.1) $$Z(X_0,\mathscr{F}_0,t) \;=\; \prod_{x_0\in|X_0|}\det(1-t^{\deg(x_0)}F^*_{x_0},\,\mathscr{F}_0)^{-1} \quad 。$$

若 $\mathscr{F}$ 是常值层 $\mathbb{Q}_\ell$，这就回到了 (1.1.2) 的情形。根据 (1.5.3)， $Z(X_0,\mathscr{F}_0,t)$ 的对数导数等于

(1.14.2)

$$t\frac{d}{dt}\log Z(X_0,\mathscr{F}_0,t) \;:=\; \frac{t\dfrac{d}{dt}Z(X_0,\mathscr{F}_0,t)}{Z(X_0,\mathscr{F}_0,t)} \;=\; \sum_{n>0}\sum_{x\in|X|^{F^n}=X_0(\mathbb{F}_{q^n})}\mathrm{Tr}(F_x^{*n},\mathscr{F}_x)t^n \quad 。$$

把 (1.12.1) 代入 (1.14.2)，并使用 (1.5) 中的计算方法，则可以得到 (1.5.4) 的下述推广

(1.14.3) $$Z(X_0,\mathscr{F}_0,t) \;=\; \prod_i \det(1-tF^*,\,\mathrm{H}^i_c(X,\mathscr{F}))^{(-1)^{i+1}} \quad 。$$

这是 $\mathbb{Q}_\ell[[t]]$ 中的一个等式。

(1.15) 有时候使用 Galois 理论的语言比用几何的语言要来得方便。以下是两者之间的转换方法。

若 $\overline{\mathbb{F}}_q^1$ 和 $\overline{\mathbb{F}}_q^2$ 是 $\mathbb{F}_q$ 的两个代数闭包， $(X_0,\mathscr{F}_0)$ 通过纯量扩张定义了 $\overline{\mathbb{F}}_q^1$ 上的 $(X_1,\mathscr{F}_1)$ 和 $\overline{\mathbb{F}}_q^2$ 上的 $(X_2,\mathscr{F}_2)$ 。则任何 $\mathbb{F}_q$ 同构 $\sigma:\overline{\mathbb{F}}_q^1\xrightarrow{\sim}\overline{\mathbb{F}}_q^2$ 都诱导了一个同构

$$\mathrm{H}^*_c(X_1,\mathscr{F}_1) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{H}^*_c(X_2,\mathscr{F}_2) \quad 。$$

特别地，若 $\overline{\mathbb{F}}_q^1=\overline{\mathbb{F}}_q^2$ （记作 $\overline{\mathbb{F}}_q$ ），则可以据此给出 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ 在 $\mathrm{H}^*_c(X,\mathscr{F})$ 上的一个作用（通过结构搬运）。设 $\varphi\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ 是 Frobenius 置换。则可以验证

$$F^* \;=\; \varphi^{-1} \qquad （在\ \mathrm{End}(\mathrm{H}^*_c(X,\mathscr{F}))\ 中）。$$

这就是我们通常把几何 *Frobenius* $F\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ 定义成 φ^{-1} 的原因。因为这给出

(1.15.1) $$F^* \;=\; F \quad 。$$

设 x 是 X_0 的一个几何点，位于 $x_0\in|X_0|$ 之上。通过结构搬运，群 $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}(x)/\boldsymbol{k}(x_0))$ 可以作用在 $\mathscr{F}_0$ 在 x 处的茎条 $(\mathscr{F}_0)_x$ 上，特别地， $\boldsymbol{k}(x_0)$ 处的几何 Frobenius $F_{x_0}\in\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}(x)/\boldsymbol{k}(x_0))$ 可以作用在该茎条上。如果 x 是由 X 的一个闭点（仍记作 x ）所定义的，则有 $\mathscr{F}_x=(\mathscr{F}_0)_x$ ，并且

(1.15.2) $$F^*_{x_0} \;:=\; F_x^{*\deg(x_0)} \;=\; F_{x_0} \qquad （在\ \mathrm{End}(\mathscr{F}_x)\ 中）。$$

在 Galois 理论的记号下， (1.14.3) 也可以写成

$$\prod_{x_0\in|X_0|}\det(1-t^{\deg(x_0)}F_{x_0},\mathscr{F}_0)^{-1} \;=\; \prod_i\det(1-tF,\,\mathrm{H}^i_c(X,\mathscr{F}))^{(-1)^{i+1}} \quad 。$$

§ 2　Grothendieck 理论：Poincaré 对偶

(2.1) 为了说明单位根与定向的关系，我们先使用一种不常见的方式来叙述两种古典理论。

a) *可微分流形* — 设 X 是一个纯 n 维的可微分流形。则 X 上的定向层 $\mathbb{Z}'$ 是一个与常值层 $\mathbb{Z}$ 局部同构的层，它在 X 的每个充分小开集 U 上的可逆截面就对应着 U 的两个定向。X 的一个*定向*是指 $\mathbb{Z}'$ 到常值层 $\mathbb{Z}$ 的一个同构。X 的*基础类*则是一个同态 $\mathrm{Tr}\,:\,\mathrm{H}^n_c(X,\mathbb{Z}')\to\mathbb{Z}$；若 X 是定向的，则该同态可以等同于一个同态 $\mathrm{Tr}:\mathrm{H}^n_c(X,\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}$。Poincaré 对偶性可以借助基础类来表达。

b) *复流形* — 设 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个代数闭包。则平滑的复代数多样体 (考虑它的底层可微分流形) 总是可定向的。而且为了给出定向，只需对 $\mathbb{C}$ 自身进行定向即可。这相当于作出下面的选择：
a) 选出方程 $X^2=-1$ 的一个根，并记之为 $+i$；
b) 选出 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 到 $U^1=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;|z|=1\right\}$ 的一个同构，于是 $+i$ 就是 $1/4$ 的像；
c) 选出 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{C}$ 的单位根群的两个同构 $x\mapsto\exp(\pm 2\pi i x)$ 之一，它可以连续延拓为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 到 U^1 的一个同构。

我们用 $\mathbb{Z}(1)$ 来记下面这个 1 秩自由 $\mathbb{Z}$ 模：它的两个可作为生成元的元素分别典范地对应着 *a), b), c)* 中的那两个元素。最简单的办法就是取 $\mathbb{Z}(1)=\mathrm{Ker}(\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*)$。此时，生成元 $y=\pm 2\pi i$ 对应着 *c)* 中的同构 $x\mapsto\exp(xy)$。

设 $\mathbb{Z}(r)$ 是 $\mathbb{Z}(1)$ 的 r 次张量幂。若 X 是一个纯复 r 维的平滑多样体，则 X 的定向层就是由 $\mathbb{Z}(r)$ 所定义的常值层。

(2.2) 于是对于特征 0 的代数闭域 $\boldsymbol{k}$ 上的准多样体来说，为了对它们进行“定向”，我们就需要选取 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 到 $\boldsymbol{k}$ 的单位根群的一个同构。这些同构的集合构成 $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ 上 (而不是 $\mathbb{Z}^*$ 上) 的一个齐性空间。在 $\boldsymbol{k}$ 的特征任意时，如果我们只对 ℓ 进上同调感兴趣，并假设 ℓ 不等于 $\boldsymbol{k}$ 的特征 p，则可以只考虑 ℓ 方幂阶的单位根。我们令 $\mathbb{Z}/\ell^n(1)$ 是由 $\boldsymbol{k}$ 中阶数整除 ℓ^n 的单位根所组成的群。则当 n 变化时，这些 $\mathbb{Z}/\ell^n(1)$ 构成一个投影系，传递映射为

$$\sigma_{m,n}\;:\;\mathbb{Z}/\ell^m(1)\longrightarrow\mathbb{Z}/\ell^n(1)\;:\;x\longmapsto x^{\ell^{m-n}}$$

我们令 $\mathbb{Z}_\ell(1)=\varprojlim\mathbb{Z}/\ell^n(1)$ 和 $\mathbb{Q}_\ell(1)=\mathbb{Z}_\ell(1)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$，并且用 $\mathbb{Q}_\ell(r)$ 来表示 $\mathbb{Q}_\ell(1)$ 的 r 次张量幂；而当 $r\in\mathbb{Z}$ 是负数时，我们定义 $\mathbb{Q}_\ell(r)=\mathbb{Q}_\ell(-r)^{\vee}$。

作为 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的向量空间，$\mathbb{Q}_\ell(1)$ 同构于 $\mathbb{Q}_\ell$。然而 $\boldsymbol{k}$ 的自同构群在 $\mathbb{Q}_\ell(1)$ 上有非平凡的作用，由它在单位根上的作用所给出的 $\mathbb{Z}_\ell^*$ 值特征标来实现。特别地，若 $\boldsymbol{k}=\overline{\mathbb{F}}_q$，则 Frobenius 置换 $\varphi:x\mapsto x^q$ 的作用就是乘以 q 的运算。

设 X 是 $\boldsymbol{k}$ 上的一个纯 n 维的准多样体。则在 ℓ 进上同调理论中，X 的*定向层*就是常值可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层 $\mathbb{Q}_\ell(n)$。它的*基础类*是一个态射

$$\mathrm{Tr}\;:\;\mathrm{H}^{2n}_c(X,\mathbb{Q}_\ell(n))\longrightarrow\mathbb{Q}_\ell\quad,$$

或者写成

$$\mathrm{Tr}\;:\;\mathrm{H}^{2n}_c(X,\mathbb{Q}_\ell)\longrightarrow\mathbb{Q}_\ell(-n)\quad。$$

定理 (2.3) （Poincaré 对偶）— 若 X 是平滑紧合且纯 n 维的，则双线性形式

$$\mathrm{Tr}(x \cup y) \ : \ \mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \bigotimes \mathrm{H}^{2n-i}(X, \mathbb{Q}_\ell) \ \longrightarrow \ \mathbb{Q}_\ell(-n)$$

是一个圆满配对（即它把 $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 等同于 $\mathrm{H}^{2n-i}(X, \mathbb{Q}_\ell(n))$ 的对偶）。

(2.4) 设 X_0 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个平滑紧合的纯 n 维多样体，X 是由 X_0 通过纯量扩张所给出的 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上的多样体。则态射 (2.3) 与 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ 的作用是相容的。从而若考虑几何 Frobenius F 在 $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的作用，并设 (α_j) 是它的诸特征值，则 $(q^n \alpha_j^{-1})$ 就是 F 在 $\mathrm{H}^{2n-i}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的作用所对应的特征值。

(2.5) 为简单起见，假设 X 是连通的。则 (2.4) 的证明也可以不借助 Galois 理论，而是转换成下面的几何语言（参看 (1.15)）：

a) 上积运算把 $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathrm{H}^{2n-i}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 映入 $\mathrm{H}^{2n}(X, \mathbb{Q}_\ell)$（1 维空间）中，并且是一个圆满配对。

b) 上积运算与 Frobenius 态射 $F : X \to X$ 所给出的逆像 F^* 是可交换的。

c) 态射 F 是有限的，次数为 q^n，于是 F^* 在 $\mathrm{H}^{2n}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的作用就是乘以 q^n 的运算。

d) 从而 F^* 的特征值具有 (2.4) 的性质。

(2.6) 我们令 $\chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$。若 n 是奇数，则 $\mathrm{H}^n(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的双线性形式 $\mathrm{Tr}(x \cup y)$ 是交错的，从而整数 $n\chi(X)$ 总是偶的。由 (1.5.4) 和 (2.3), (2.4) 易得

$$Z(X_0, t) \ = \ \varepsilon . q^{\frac{-n\chi(X)}{2}} . t^{-\chi(X)} . Z(X_0, q^{-n} t^{-1})$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$。在 n 是偶数的情形，考虑 $\mathrm{H}^n(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的线性算子 F^*，设 N 是其特征值 $q^{n/2}$ 的重数（即对应的广义特征子空间的维数）。则我们有

$$\varepsilon \ = \ \begin{cases} 1 & n \text{ 为奇数，} \\ (-1)^N & n \text{ 为偶数。} \end{cases}$$

这就是 Grothendieck 所给出的 Zeta 函数的函数方程。

(2.7) 我们还需要一些其它形式的对偶定理。在下面的应用中，曲线的情形就够用了。设 $\mathscr{F}$ 是代数闭域 $\boldsymbol{k}$ 上的准多样体 X 上的一个可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层，我们用 $\mathscr{F}(r)$ 来记层 $\mathscr{F} \otimes \mathbb{Q}_\ell(r)$。这个层可以（非典范地）同构于 $\mathscr{F}$。

定理 (2.8) — 假设 X 是纯 n 维平滑的，且 $\mathscr{F}$ 是偏常值的。设 $\mathscr{F}^\vee$ 是 $\mathscr{F}$ 的对偶。则双线性形式

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(x \cup y) \ : \ \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \bigotimes \mathrm{H}_c^{2n-i}(X, \mathscr{F}^\vee(n)) \ &\longrightarrow \ \mathrm{H}_c^{2n}(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}^\vee(n)) \\ &\longrightarrow \ \mathrm{H}_c^{2n}(X, \mathbb{Q}_\ell(n)) \ \longrightarrow \ \mathbb{Q}_\ell \end{aligned}$$

是一个圆满配对。

(2.9) 假设 X 是连通的，并设 x 是 X 的一个闭点。则函子 $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}_x$ 是由偏常值可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层的范畴到 $\pi_1(X, x)$ 的有限维 ℓ 进表示范畴的一个等价。在这个等价

下，$\mathrm{H}^0(X,\mathscr{F})$ 可以等同于 $\mathscr{F}_x$ 在 $\pi_1(X,x)$ 作用下的不变量群：

(2.9.1)
$$\mathrm{H}^0(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_x^{\pi_1(X,x)} \text{。}$$

从而根据 (2.8)，若 X 是连通平滑且 n 维的，则有

$$\mathrm{H}_c^{2n}(X,\mathscr{F}) = \mathrm{H}^0(X,\mathscr{F}^\vee(n))^\vee = \big((\mathscr{F}^\vee{}_x(n))^{\pi_1(X,x)}\big)^\vee$$

对偶关系把不变量（最大不动子空间）转化为余不变量（最大不动商空间）。因而上述公式也可以写成

$$\mathrm{H}_c^{2n}(X,\mathscr{F}) = (\mathscr{F}_x)_{\pi_1(X,x)}(-n)$$

我们只需要使用 $n=1$ 的情形。

添注 (2.10) — 设 X 是代数闭域 $\boldsymbol{k}$ 上的一条连通平滑曲线，x 是 X 的一个闭点，$\mathscr{F}$ 是一个偏常值的可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层。于是有
(i) 若 X 是仿射的，则 $\mathrm{H}_c^0(X,\mathscr{F})=0$。
(ii) $\mathrm{H}_c^2(X,\mathscr{F})=(\mathscr{F}_x)_{\pi_1(X,x)}(-1)$。

(i) 是由于 $\mathscr{F}$ 没有以有限集为支集的截面。

(2.11) 设 X 是代数闭域 $\boldsymbol{k}$ 上的一条平滑射影的连通曲线，U 是 X 的一个开集，其补集是由 X 的一些闭点所组成的有限集 S，j 是含入 $U\hookrightarrow X$，而 $\mathscr{F}$ 是 U 上的一个偏常值可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层。设 $j_*\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}$ 的顺像，这是一个可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层。它在一点 $x\in S$ 处的茎条的秩将小于等于它在一般位置处的茎条的秩；这根茎条是局部单值化群作用下的不变量空间。

定理 (2.12) — 双线性形式

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(x\cup y)\ :\ \mathrm{H}^i(X,j_*\mathscr{F}) \bigotimes \mathrm{H}^{2-i}(X,j_*\mathscr{F}^\vee(1))&\\ \longrightarrow \mathrm{H}^2(X,j_*\mathscr{F}\otimes j_*\mathscr{F}^\vee(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X,j_*(\mathscr{F}\otimes\mathscr{F}^\vee)(1))&\\ \longrightarrow \mathrm{H}^2(X,j_*\mathbb{Q}_\ell(1)) = \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Q}_\ell(1)) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell&\end{aligned}$$

是一个圆满配对。

(2.13) 对任意概形 X，只要 ℓ 在 X 上是可逆的，我们都可以定义出可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层 $\mathbb{Q}_\ell(r)$。这归结为定义 $\mathbb{Z}/\ell^n(1)$，它就是由 ℓ^n 次单位根所给出的平展位层。

(2.14) 关于 §1 和 §2 的文献资料

A) 平展上同调的所有重要结果都是首先对挠层进行证明，然后通过取投影极限而扩展到可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层上的。因此在下文中，对于每一个引用到的定理，我们一般只给出它在挠层情形下的出处。

B) 除了 Lefschetz 不动点公式和 (2.12) 之外，对于本文要用到的所有关于平展上同调的结果，其证明都可以在 SGA 4 中找到。已经提到的一些事实的出处如

下：H^i 的定义见 VII；H_c^i 的定义见 XVII 5.1；有限性定理见 XIV 1, XVII 5.3；上同调维数见 X；Poincaré 对偶见 XVIII。

C) 各种 Frobenius 的关系 ((1.4), (1.11), (1.15)) 在 SGA 5, XV, § 1, § 2 中有详细解释。

D) 在 [1] 中清楚地讨论了 Zeta 函数的上同调诠释 (1.14.3)；也包括平滑射影曲线上的 Lefschetz 不动点公式 (1.12)，不过这个公式的证明必须到 SGA 5 里面找。

E) 形如 (2.12) 的 Poincaré 对偶定理可由 SGA 4, XVIII (3.2.5) 中的一般结果推出（取 $S = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k})$, $X = X$, $K = j_*\mathscr{F}$, $L = \mathbb{Q}_\ell$），只要再完成一个不太困难的局部计算即可。确切的叙述出现在 SGA 5 中。对于我们所需要的情形（$\mathscr{F}$ 只具有浅层分歧）来说，也可以使用超越方法来证明，只要把 X 和 $\mathscr{F}$ 都提升到特征 0 的域上即可。

§ 3　基本上界估计

本节的结果是在 Rankin 讲义 [3] 的启发下得到的。

(3.1) 设 U_0 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一条曲线，并且是 $\mathbf{P}_0^1$ 去掉有限个闭点之后的开补集，U 是由 U_0 所导出的 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上的曲线，u 是 U 的一个闭点，$\mathscr{F}_0$ 是 U_0 上的一个偏常值可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层，$\mathscr{F}$ 是它在 U 上的逆像。

设 $\beta \in \mathbb{Q}$。所谓 $\mathscr{F}_0$ 是权为 β 的，是指对任意 $x_0 \in |U_0|$，$F_{x_0}^*$ 在 $\mathscr{F}_0$ 上的特征值 (1.13) 都是代数数，并且它们在复数域中的所有共轭元都具有绝对值 $q_{x_0}^{\beta/2}$。比如说 $\mathbb{Q}_\ell(r)$ 就是权为 $-2r$ 的。

定理 (3.2) — 假设:

(i) $\mathscr{F}_0$ 上有一个非退化的交错双线性形式

$$\psi\ :\ \mathscr{F}_0 \otimes \mathscr{F}_0 \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(-\beta) \qquad (\beta \in \mathbb{Z})\ 。$$

(ii) $\pi_1(U,u)$ 在 $\mathrm{GL}(\mathscr{F}_u)$ 中的像是辛群 $\mathrm{Sp}(\mathscr{F}_u, \psi_u)$ 的一个开子群。
(iii) 对任意 $x_0 \in |U_0|$，多项式 $\det(1 - tF_{x_0}^*, \mathscr{F}_0)$ 都是有理系数的。

则 $\mathscr{F}$ 是权为 β 的。

我们总可以假设 U 是仿射的，并且 $\mathscr{F} \neq 0$。

引理 (3.3) — 设 $2k$ 是一个偶数，$\bigotimes^{2k} \mathscr{F}_0$ 是 $\mathscr{F}_0$ 的 $2k$ 次张量幂。则对任意 $x_0 \in |U_0|$，对数导数

$$t\frac{d}{dt}\log\left(\det\left(1 - t^{\deg(x_0)}F_{x_0}^*, \bigotimes^{2k}\mathscr{F}_0\right)^{-1}\right)$$

都是有理系数的形式幂级数，且其系数都是非负的。

条件 (iii) 保证了对所有 n 均有 $\mathrm{Tr}(F_{x_0}^{*n},\mathscr{F}_0)\in\mathbb{Q}$。从而

$$\mathrm{Tr}\big(F_{x_0}^{*n},\bigotimes^{2k}\mathscr{F}_0\big)\ =\ \mathrm{Tr}(F_{x_0}^{*n},\mathscr{F}_0)^{2k}$$

都是非负有理数，再使用 (1.5.3) 即可。

引理 (3.4) — 局部因子 $\det\big(1-t^{\deg(x_0)}F_{x_0}^*,\bigotimes^{2k}\mathscr{F}_0\big)^{-1}$ 都是有理系数的形式幂级数，并且系数都是非负的。

形式幂级数 $\log\det\big(1-t^{\deg(x_0)}F_{x_0}^*,\bigotimes^{2k}\mathscr{F}_0\big)^{-1}$ 没有常数项；并且由 (3.3) 知，它的系数都是非负的；从而其指数函数的系数也都是非负的。

引理 (3.5) — 设 $f_i=\sum_n a_{i,n}t^n$ 是一列形式幂级数，且每个幂级数的常数项都是 1，其余系数都是非负实数。假设 f_i-1 的阶随着 i 的增加而趋于无穷大，并且令 $f=\prod_i f_i$。则每个 f_i 的绝对收敛半径都不小于 f 的绝对收敛半径。

事实上，若 $f=\sum_n a_nt^n$，则我们有 $a_{i,n}\leqslant a_n$。

引理 (3.6) — 在 (3.5) 的前提条件下，若 f 和这些 f_i 都是亚纯函数的 Taylor 展开式，则有

$$\inf\big\{|z|\,\big|\,f(z)=\infty\big\}\ \leqslant\ \inf\big\{|z|\,\big|\,f_i(z)=\infty\big\}\quad。$$

事实上，这些数恰好就是绝对收敛半径。

(3.7) 对于 $\{1,\ldots,2k\}$ 的任何一个两两分组 P：$\big(\{i_\alpha,j_\alpha\}\big)_{\alpha=1,\ldots,k}$（其中 $i_\alpha<j_\alpha$），我们定义

$$\psi_P\ :\ \bigotimes^{2k}\mathscr{F}_0\ \longrightarrow\ \mathbb{Q}_\ell(-k\beta)\quad:\quad x_1\otimes\ldots\otimes x_{2k}\ \longmapsto\ \prod_\alpha\psi(x_{i_\alpha},x_{j_\alpha})\quad。$$

设 u 是 U 的一个闭点。则条件 (ii) 保证了 $\bigotimes^{2k}\mathscr{F}_u$ 在 $\pi_1(U,u)$ 下的余不变量也是它在整个辛群下的余不变量（π_1 在 Sp 中是 Zariski 稠密的）。设 $\mathscr{P}$ 是所有这些分组 P 构成的集合。则根据 H. Weyl (*The classical groups*, Princeton University Press, chap. VI, §1)，对适当的 $\mathscr{P}'\subseteq\mathscr{P}$（依赖于 $\dim(\mathscr{F}_u)$），这些 ψ_P $(P\in\mathscr{P}')$ 定义了一个同构

$$\big(\bigotimes^{2k}\mathscr{F}_u\big)_{\pi_1}\ =\ \big(\bigotimes^{2k}\mathscr{F}_u\big)_{\mathrm{Sp}}\ \xrightarrow{\ \sim\ }\ \mathbb{Q}_\ell(-k\beta)^{\mathscr{P}'}\quad。$$

设 N 是 $\mathscr{P}'$ 的元素个数。则由 (2.10) 知，上述公式给出

$$\mathrm{H}_c^2\big(U,\bigotimes^{2k}\mathscr{F}\big)\ \simeq\ \mathbb{Q}_\ell(-k\beta-1)^N\quad。$$

由于 $\mathrm{H}_c^0\big(U,\bigotimes^{2k}\mathscr{F}\big)=0$，故公式 (1.14.3) 可以简化为

$$Z\big(U_0,\bigotimes^{2k}\mathscr{F}_0,\,t\big)\ =\ \frac{\det\big(1-tF^*,\,\mathrm{H}_c^1\big(U,\bigotimes^{2k}\mathscr{F}\big)\big)}{(1-q^{k\beta+1}t)^N}\quad。$$

从而这个Zeta函数是某个有理函数的Taylor展开式，并且只在$t = 1/q^{k\beta+1}$处有极点。我们只需要使用它的极点在$\mathbb{C}$中的绝对值是$1/q^{k\beta+1}$这个事实。这也可以借助简约群的一些方法得出来。若α是$F_{x_0}^*$在$\mathscr{F}_0$上的一个特征值，则α^{2k}就是$F_{x_0}^*$在$\bigotimes^{2k}\mathscr{F}_0$上的一个特征值。我们把$\alpha$在复数域中的任意一个共轭元仍记作$\alpha$。则负幂$1/\alpha^{2k/\deg(x_0)}$是$\det\left(1-t^{\deg(x_0)}F_{x_0}^*, \bigotimes^{2k}\mathscr{F}\right)^{-1}$的一个极点。从而由(3.4)和(3.6)知，

$$\left|1/q^{k\beta+1}\right| \ \leqslant\ \left|1/\alpha^{2k/\deg(x_0)}\right| \ ,$$

此即

$$|\alpha| \ \leqslant\ q_{x_0}^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2k}} \ 。$$

令k趋于无穷大，则有

$$|\alpha| \ \leqslant\ q_{x_0}^{\beta/2} \ 。$$

另一方面，ψ的存在性表明，$q_{x_0}^{\beta}\alpha^{-1}$也是一个特征值，从而又有不等式

$$\left|q_{x_0}^{\beta}\alpha^{-1}\right| \ \leqslant\ q_{x_0}^{\beta/2} \ ,$$

故得

$$q_{x_0}^{\beta/2} \ \leqslant\ |\alpha| \ ,$$

这就完成了证明。

推论 (3.8) — 设α是F^*在$\mathrm{H}_c^1(U,\mathscr{F})$上的一个特征值。则$\alpha$是代数数，并且它在复数域中的任何共轭元都满足

$$|\alpha| \ \leqslant\ q^{\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}} \ 。$$

对于$\mathscr{F}_0$，公式(1.14.3)可以简化为

$$Z(U_0,\mathscr{F}_0,t) \ =\ \det(1-tF^*, \mathrm{H}_c^1(U,\mathscr{F})) \ 。$$

由条件(iii)知，左边是一个有理系数的形式幂级数，从而右边是一个有理系数的多项式；且$1/\alpha$是它的根。这就表明α是代数数。现在为了完成证明，只需再验证定义了$Z(U_0,\mathscr{F}_0,t)$的那个无穷乘积在$|t| < q^{\frac{-\beta}{2}-1}$上是绝对收敛的（从而不等于0）即可。

设$\mathscr{F}$的秩是N，再令

$$\det(1-tF_{x_0}^*, \mathscr{F}_0) \ =\ \prod_{i=1}^{N}(1-\alpha_{i,x_0}t) \ 。$$

则由(3.2)知，$|\alpha_{i,x_0}| = q_{x_0}^{\frac{\beta}{2}}$。于是$Z$的无穷乘积的收敛性归结为级数

$$\sum_{i,x_0}\left|\alpha_{i,x_0}t^{\deg(x_0)}\right|$$

的收敛性。对于 $|t| = q^{\frac{-\beta}{2}-1-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$，我们有

$$\sum_{i,x_0} \left|\alpha_{i,x_0} t^{\deg(x_0)}\right| \;=\; N \sum_{x_0} q_{x_0}^{-1-\varepsilon} \quad 。$$

在仿射直线上，恰好有 q^n 个点取值在 $\mathbb{F}_{q^n}$ 中，从而至多有 q^n 个闭点具有次数 n 。故我们有

$$\sum_{x_0} q_{x_0}^{-1-\varepsilon} \;\leqslant\; \sum_n q^n . q^{n(-1-\varepsilon)} \;=\; \sum_n q^{-n\varepsilon} < \infty \quad ,$$

这就完成了证明。

推论 (3.9) — 设 j_0 是 U_0 到 $\mathbf{P}_0^1/\mathbb{F}_q$ 的含入， j 是 U 到 $\mathbf{P}^1$ 的相应含入，且 α 是 F^* 在 $\mathrm{H}^1(\mathbf{P}^1, j_*\mathscr{F})$ 上的一个特征值。则 α 是代数数，并且它在复数域中的任何共轭元都满足

$$q^{\frac{\beta+1}{2}-\frac{1}{2}} \;\leqslant\; |\alpha| \;\leqslant\; q^{\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}} \quad 。$$

短正合序列

$$0 \longrightarrow j_!\mathscr{F} \longrightarrow j_*\mathscr{F} \longrightarrow j_*\mathscr{F}\big/j_!\mathscr{F} \longrightarrow 0$$

（ $j_! =$ 零延拓）可以给出一个上同调长正合序列，它的一部分是

$$\mathrm{H}_c^1(U, \mathscr{F}) \;\longrightarrow\; \mathrm{H}^1(\mathbf{P}^1, j_*\mathscr{F}) \;\longrightarrow\; 0 \quad 。$$

从而特征值 α 也是 $\mathrm{H}_c^1(U, \mathscr{F})$ 的特征值，因而满足 (3.8)：

$$|\alpha| \;\leqslant\; q^{\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}} \quad 。$$

Poincaré 对偶 (2.12) 表明 $q^{\beta+1}\alpha^{-1}$ 也是特征值，故有不等式

$$\left|q^{\beta+1}\alpha^{-1}\right| \;\leqslant\; q^{\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}} \quad ,$$

由此得出结论。

§ 4　局部 Lefschetz 理论

(4.1) 我们首先来叙述 $\mathbb{C}$ 上的 Lefschetz 局部理论。

设 $D = \{z|\ |z| < 1\}$ 是单位圆盘， $D^* = D \smallsetminus \{0\}$， $f : X \to D$ 是一个解析空间的态射。假设

a) X 是平滑且纯 $n+1$ 维的；
b) f 是紧合的；
c) 除了特殊纤维 $X_0 = f^{-1}(0)$ 上的一点 x 之外， f 是处处平滑的；
d) x 是 f 的一个非退化的二重点。

设 $t \neq 0$ 是 D 中一点， $X_t = f^{-1}(t)$ 是“那根”一般纤维。则在上述条件下，可以确定出这样一些量：

α) 特殊化态射 $sp: \mathrm{H}^i(X_0,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^i(X_t,\mathbb{Z})$，这是因为 X_0 是 X 的形变缩约子，从而 sp 就是合成映射

$$\mathrm{H}^i(X_0,\mathbb{Z}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^i(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_t,\mathbb{Z}) \ ;$$

β) 单值化变换 $T: \mathrm{H}^i(X_t,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^i(X_t,\mathbb{Z})$，可以这样来描述它，即它是“让 t 绕着 0 转动一周”这个操作在 X_t 的奇异上圈上所产生的影响。这也相当于 $\pi_1(D^*,t)$ 的正生成元在 $\mathrm{H}^i(X_t,\mathbb{Z})$（即局部系 $\mathrm{R}^i f_*\mathbb{Z}|_{D^*}$ 在 t 处的茎条）上的作用。

局部 Lefschetz 理论是说，α) 和 β) 这两条都可以借助某个消逝圈 $\delta \in \mathrm{H}^n(X_t,\mathbb{Z})$ 来描述，而且这个消逝圈在只差正负号的意义下是唯一确定的。结果如下：对于 $i \neq n,\ n+1$，我们总有

$$\mathrm{H}^i(X_0,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(X_t,\mathbb{Z}) \ 。$$

而对于 $i = n,\ n+1$，则有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^n(X_0,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X_t,\mathbb{Z}) \xrightarrow{x\mapsto(x,\delta)} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}(X_0,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}(X_t,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \ 。$$

在 $i \neq n$ 时，单值化 T 是恒同。而在 $i = n$ 时，则有

$$Tx \ = \ x \pm (x,\delta)\delta \ 。$$

这里的正负号、$T\delta$、以及 (δ,δ) 是按照下面的规则来确定的：

$n \bmod 4$	0	1	2	3
$Tx = x \pm (x,\delta)\delta$	$-$	$-$	$+$	$+$
(δ,δ)	2	0	-2	0
$T\delta$	$-\delta$	δ	$-\delta$	δ

单值化变换 T 与 $\mathrm{H}^n(X_t,\mathbb{Z})$ 上的相交形式 $\mathrm{Tr}(x \cup y)$ 是相容的。于是若 n 是奇数，则它是一个辛平延。若 n 是偶数，则它是一个正交对称。

(4.2) 在抽象代数几何中也有与 (4.1) 类似的结果。此时圆盘 D 换成了一个剩余类域是代数闭域的 Hensel 离散赋值环 A 的谱空间。设 S 是这个谱，η 是它的一般点（即 A 的分式域的谱），s 是它的闭点（即剩余类域的谱）。则 t 的角色被换成了某个几何一般点 $\overline{\eta}$（即 A 的分式域的某个代数闭包的谱）。

设 $f: X \to S$ 是一个紧合态射，其中 X 是正则且纯 $n+1$ 维的。假设 f 除了特殊纤维 X_s 上的某个点 x 之外是处处平滑的，并且 x 是该纤维的一个常规二重点。设 ℓ 是一个素数，且不等于 S 的剩余特征 p。若我们用 $X_{\overline{\eta}}$ 来记 f 的几何一般纤维，则同样有一个特殊化态射

(4.2.1) $$sp \ : \ \mathrm{H}^i(X_s,\mathbb{Q}_\ell) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^i(X,\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell) \ 。$$

T 的角色被惯性群 $I = \mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ 所取代，它可以（通过结构搬运）作用在 $\mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)$ 上（参考 (1.15)）：

(4.2.2) $$I \ = \ \mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)) \ 。$$

利用 (4.2.1) 和 (4.2.2) 就可以对 S 上的层 $\mathrm{R}^i f_*\mathbb{Q}_\ell$ 作出完全描述。

(4.3) 若 n 是偶数，则令 $n=2m$，若 n 是奇数，则令 $n=2m+1$。于是 (4.2.1) 和 (4.2.2) 可以通过消逝圈

(4.3.1) $$\delta \in \mathrm{H}^n(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)(m)$$

来描述，并且这个消逝圈在只差正负号的意义下是唯一确定的。结果如下：

对于 $i\neq n,\ n+1$，我们有

(4.3.2) $$\mathrm{H}^i(X_s,\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell) \text{ 。}$$

而对于 $i=n,\ n+1$，则有一个正合序列

(4.3.3) $$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{H}^n(X_s,\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell) &\xrightarrow{x\mapsto \mathrm{Tr}(x\cup\delta)} \mathbb{Q}_\ell(m-n)\\ &\longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}(X_s,\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow 0 \text{ 。}\end{aligned}$$

I（局部单值化群）的作用 (4.2.2) 在 $i\neq n$ 时是平凡的。在 $i=n$ 时则有：

A) n 是奇数 — 我们有一个典范同态

$$t_\ell : I \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) \text{ ，}$$

且 $\sigma\in I$ 的作用就是

$$x \longmapsto x \pm t_\ell(\sigma)(x,\delta)\delta \text{ 。}$$

B) n 是偶数 — 这个情形是我们不会用到的。这里只提一句，即若 $p\neq 2$，则可以找到唯一一个 2 阶特征标

$$\varepsilon : I \longrightarrow \{\pm 1\} \text{ ，}$$

使得

$$\begin{aligned}\sigma x &= x && \text{若 } \varepsilon(\sigma)=1\\ \sigma x &= x\pm(x,\delta)\delta && \text{若 } \varepsilon(\sigma)=-1 \text{ 。}\end{aligned}$$

A) 和 B) 中正负号 $\pm$ 的取法与 (4.1) 相同。

(4.4) 上面这些结果给出了关于 $\mathrm{R}^i f_*\mathbb{Q}_\ell$ 的下述信息。

a) 若 $\delta\neq 0$：

1) 对于 $i\neq n$，层 $\mathrm{R}^i f_*\mathbb{Q}_\ell$ 都是常值的。
2) 若 j 是 η 到 S 的含入。则有

$$\mathrm{R}^n f_*\mathbb{Q}_\ell = j_*j^*\mathrm{R}^n f_*\mathbb{Q}_\ell \text{ 。}$$

b) 若 $\delta=0$（这是一个特殊情形。由于当 n 是偶数时，$(\delta,\delta)=\pm 2$，故知此时 n 只能是奇数）：

1) 对于 $i \neq n+1$，层 $\mathrm{R}^i f_* \mathbb{Q}_\ell$ 都是常值的。

2) 设 $\mathbb{Q}_\ell(m-n)_s$ 是把 $\{s\}$ 上的层 $\mathbb{Q}_\ell(m-n)$ 零延拓到 S 上而得到的层。则我们有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(m-n)_s \longrightarrow \mathrm{R}^{n+1} f_* \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow j_* j^* \mathrm{R}^{n+1} f_* \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow 0 \ ,$$

其中 $j_* j^* \mathrm{R}^{n+1} f_* \mathbb{Q}_\ell$ 是一个常值层。

§ 5　整体 Lefschetz 理论

(5.1) 在 $\mathbb{C}$ 上，Lefschetz 的结果是这样的：设 $\mathbf{P}$ 是一个维数 $\geqslant 1$ 的射影空间，$\mathbf{P}^\vee$ 是其对偶射影空间；它的点与 $\mathbf{P}$ 中的超平面一一对应，我们用 H_t 来记 $t \in \mathbf{P}^\vee$ 所定义的超平面。若 A 是 $\mathbf{P}$ 的一个余 2 维的线性子空间，则包含 A 的那些超平面构成一条直线 $D \subseteq \mathbf{P}^\vee$，即 A 的对偶。这些超平面 $(H_t)_{t\in D}$ 构成一个以 A 为轴的束。

设 $X \subseteq \mathbf{P}$ 是一个连通的 $n+1$ 维平滑射影多样体。设 $\widetilde{X} \subseteq X \times D$ 是由满足 $x \in H_t$ 的二元组 (x,t) 所组成的集合。$\widetilde{X}$ 向第一和第二个因子的投影构成一个图表

(5.1.1)
$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ D & & \end{array}$$

f 在 $t \in D$ 处的纤维就是 X 的超平面截面 $X_t = X \cap H_t$。

固定 X，则只要取充分一般的 A，就可以使下面的条件成立：

A) A 与 X 是横截交叉的，并且 $\widetilde{X}$ 可以通过把 X 沿着 $A \cap X$ 进行暴涨而得到。特别地，$\widetilde{X}$ 是平滑的。

B) 可以找到 D 的一个有限子集 S，以及对每一个 $s \in S$，可以找到一点 $x_s \in X_s$，使得 f 在这些点 x_s 之外是处处平滑的。

C) 这些 x_s 都是 f 的非退化临界点。

从而对每一个 $s \in S$，局部 Lefschetz 理论 (4.1) 都适用于环绕着 s 的一个充分小的圆盘 D_s 以及 $f^{-1}(D_s)$。

(5.2) 我们令 $U = D \smallsetminus S$。设 $u \in U$，并选定一些由 u 出发且互不相交的回路 $(\gamma_s)_{s\in S}$，使得每个 γ_s 恰好绕 s 一周。

图形暂缺

则这些回路可以生成基本群 $\pi_1(U,u)$。该群可以作用在 $\mathrm{H}^i(X_u,\mathbb{Z})$（即局部系 $\mathrm{R}^i f_*\mathbb{Z}|_U$ 在 u 处的茎条）上。根据 (4.1) 中的局部理论，对每一个 $s \in S$，我们都有一个消逝圈 $\delta_s \in \mathrm{H}^n(X_u,\mathbb{Z})$；这些圈是依赖于这组 γ_s 的选择的。当 $i \neq n$ 时，$\pi_1(U,u)$ 在 $\mathrm{H}^i(X_u,\mathbb{Z})$ 上的作用是平凡的。而对于 $i = n$，我们有

(5.2.1)
$$\gamma_s x \ = \ x \pm (x,\delta_s)\delta_s \ 。$$

设 E 是由这些 δ_s 在 $\mathrm{H}^n(X_u,\mathbb{Z})$ 中所生成的子空间（上同调群的消逝部分）。

命题 (5.3) — E 在单值化群 $\pi_1(U,u)$ 的作用下是稳定的。E 的正交补 $E^\perp$（关于相交形式 $\mathrm{Tr}(x\cup y)$）就是由 $\mathrm{H}^n(X_u,\mathbb{Q})$ 在单值化群作用下的不变量所组成的子空间。

由于这些 γ_s 可以生成单值化群，故由 (5.2.1) 立得结论。

定理 (5.4) — 这些消逝圈 $\pm\delta_s$（只差正负号）在 $\pi_1(U,u)$ 的作用下是相互共轭的。

设 $X^\vee\subseteq\mathbf{P}^\vee$ 是 X 的对偶多样体：它是由所有使 H_t 与 X 相切的那些点 $t\in\mathbf{P}^\vee$ 所组成的集合，亦即所有使 X_t 有奇异点或者使 $X\subseteq H_t$ 成立的那些点 $t\in\mathbf{P}^\vee$ 所组成的集合。则 $X^\vee$ 是不可约的。设 $Y\subseteq X\times\mathbf{P}^\vee$ 是由所有满足 $x\in H_t$ 的二元组 (x,t) 所组成的集合。则我们有一个图表

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & \\ \mathbf{P}^\vee & & \end{array}$$

g 在 $t\in\mathbf{P}^\vee$ 处的纤维就是 X 的超平面截面 $X_t=X\cap H_t$，并且 g 在 $X^\vee$ 的逆像之外是平滑的。

如果把 $\mathbf{P}^\vee$ 换成一条直线 $D\subseteq\mathbf{P}^\vee$，并把 Y 换成 $g^{-1}(D)$，则又可以回到 (5.1) 的情形。此时我们有 $S=D\cap X^\vee$。根据 Lefschetz 的某个定理，对充分一般的直线 D，映射

$$\pi_1(D\smallsetminus S,u)\ \longrightarrow\ \pi_1(\mathbf{P}^\vee\smallsetminus X^\vee,u)$$

总是满的。从而只需证明这些 $\pm\delta_s$ 在 $\pi_1(\mathbf{P}^\vee\smallsetminus X^\vee)$ 下是共轭的即可。

设 x 落在 $X^\vee$ 的余 1 维平滑带上，ch 是 $\mathbf{P}^\vee\smallsetminus X^\vee$ 中的一条由 t 到 x 的道路，γ_x 是这样一条回路，它沿着 ch 前进到 $X^\vee$ 的邻近，绕 $X^\vee$ 转一圈，然后再沿着 ch 回到 t。这些回路 γ_x（当 ch 变化时）互相共轭。现在由于 $X^\vee$ 是不可约的，从而 $X^\vee$ 中的任何两个平滑点都可以用 $X^\vee$ 中的一条不经过奇异点的道路连接起来。由此可知，γ_x 的共轭类并不依赖于 x。特别地，上面那些 γ_s 是相互共轭的。再利用 (5.2.1) 就可以知道这些 $\pm\delta_s$ 也是相互共轭的。

推论 (5.5) — $\pi_1(U,u)$ 在 $E/(E\cap E^\perp)$ 上的作用是绝对不可约的。

设 $F\subseteq E\otimes\mathbb{C}$ 是一个在单值化群作用下稳定的子空间。若 $F\not\subseteq(E\cap E^\perp)\otimes\mathbb{C}$，则可以找到 $x\in F$ 和 $s\in S$，使得 $(x,\delta_s)\neq 0$。此时我们有

$$\gamma_s x-x\ =\ \pm(x,\delta_s)\delta_s\ \in\ F\ \ ,$$

于是 $\delta_s\in F$。因而根据 (5.4)，所有 δ_s 都落在 F 中，即有 $F=E$，这就证明了 (5.5)。

(5.6) 这些结果可以按下面的方式移植到抽象代数几何中。

设 $\mathbf{P}$ 是特征 p 的代数闭域 $\boldsymbol{k}$ 上的一个维数 >1 的射影空间，$X\subseteq\mathbf{P}$ 是一个 $n+1$ 维的连通平滑射影多样体。对于 $\mathbf{P}$ 中的一个余 2 维的线性子空间 A，我们可以仿照 (5.1) 来定义 D 和束 $(H_t)_{t\in D}$，以及 X_t 和 $\widetilde{X}$，还有图表 (5.1.1)。所谓 $(X_t)_{t\in D}$ 构成

一个超平面截面的 *Lefschetz* 束，是指它满足下面一些条件：

A) 轴 A 与 X 是横截交叉的。于是空间 $\widetilde{X}$ 是由 X 经过对 $A \cap X$ 进行暴涨而得到的，并且 $\widetilde{X}$ 是平滑的。

B) 可以找到 D 的一个有限子集 S，且对每个 $s \in S$，找到一点 $x_s \in X_s$，使得 f 在这些点 x_s 之外是处处平滑的。

C) x_s 是 X_s 的一个常规二重点。

对每一个 $s \in S$，§4 中的 Lefschetz 局部理论都可以应用到 D 在 s 处的 Hensel 化局部环的谱 D_s 以及 $\widetilde{X}_{D_s} = \widetilde{X} \times_D D_s$ 上。

(5.7) 设 $\mathbf{P}$ 的维数是 N，r 是一个正整数，且 $\iota_{(r)}$ 是 $\mathbf{P}$ 到 $\binom{N+r}{N} - 1$ 维射影空间中的嵌入，由 $\mathbf{P}$ 上的齐次坐标的全体 r 次单项式所定义。则 $\iota_{(r)}(\mathbf{P})$ 的超平面截面就是 $\mathbf{P}$ 中的 r 次超曲面。

若 $p \neq 0$，则有可能出现这样的情况，即 X 的任何超平面截面束都不是 Lefschetz 的。然而若取 $r \geqslant 2$，并把给定的射影嵌入 $\iota_1 : X \to \mathbf{P}$ 换成 $\iota_r = \iota_{(r)} \circ \iota_1$，则在这个新的嵌入下，任何一个充分一般的束都是 Lefschetz 的。换句话说，若 $r \geqslant 2$，则 X 的一个充分一般的 r 次超曲面截面的束总是 Lefschetz 的。

(5.8) 在下面的讨论中，我们要考察 X 的超平面截面的 Lefschetz 束，但排除 $p = 2$ 且 n 为偶数的情形。n 是奇数的情形对于我们后面的应用来说已经够用了。令 $U = D \smallsetminus S$。设 $u \in U$ 且 ℓ 是一个不等于 p 的素数。则由 §4 中的局部结果知，$\mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ 在每个点 $s \in S$ 处都是浅层分歧的。U 的浅层分歧基本群就是拓扑意义下的分歧基本群取投影有限完备化后的一个商群（把浅层分歧覆叠提升到特征 0，再利用 Riemann 存在性定理即可）。代数情形与超越情形是完全平行的，而 Lefschetz 理论的结果也可以通过标准的过程搬过来。在 (5.4) 的证明中，Lefschetz 关于 π_1 的那个定理变成了 Bertini 定理，且我们还需要使用 Abhyankar 引理来控制 $\mathrm{R}^\bullet g_* \mathbb{Q}_\ell$ 沿着 $X^\vee$ 的余 1 维平滑带的分歧。

主要结果如下。

a) 若消逝圈不为 0：

1) 对于 $i \neq n$，层 $\mathrm{R}^i f_* \mathbb{Q}_\ell$ 在 D 上都是常值的。

2) 设 j 是 U 到 D 的含入。我们有

$$\mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell \ = \ j_* j^* \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell \quad 。$$

3) 设 $E \subseteq \mathrm{H}^n(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$ 是由所有消逝圈所生成的子空间。该子空间在 $\pi_1(U,u)$ 的作用下是稳定的，并且

$$E^\perp \ = \ \mathrm{H}^n(X_u, \mathbb{Q}_\ell)^{\pi_1(U,u)} \quad 。$$

$\pi_1(U,u)$ 在 $E/(E \cap E^\perp)$ 上的表示是绝对不可约的，并且 π_1 在 $\mathrm{GL}(E/(E \cap E^\perp))$ 中的像是由这些 $x \mapsto x \pm (x, \delta_s)\delta_s \ \ (s \in S)$（正负号的确定规则与 (4.1) 相同）所生成的（在拓扑意义下）。

b) 若消逝圈为 0（这是一个特殊情形。由于在 n 为偶数时总有 $(\delta, \delta) = \pm 2$，故知此时 n 只能是奇数，即 $n = 2m+1$。再注意到若有一个消逝圈是 0，则其它的消逝圈也都是 0，因为它们是相互共轭的）：

1) 对于 $i \neq n+1$，层 $\mathrm{R}^i f_* \mathbb{Q}_\ell$ 都是常值的。
2) 我们有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Q}_\ell(m-n)_s \longrightarrow \mathrm{R}^{n+1} f_* \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0 \ ,$$

其中 $\mathscr{F}$ 是常值的。
3) $E = 0$。

(5.9) E 的子空间 $E \cap E^\perp$ 是把相交形式 $\mathrm{Tr}(x \cup y)$ 限制到 E 上后所给出的核。从而该形式诱导了一个非退化的双线性形式

$$\psi \ : \ E/(E\cap E^\perp) \bigotimes E/(E\cap E^\perp) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(-n) \ ,$$

这个形式在 n 为奇数时是交错的，而在 n 为偶数时是对称的。并且它与单值化群的作用相容；从而在 n 为奇数时，单值化表示诱导了一个同态

$$\rho \ : \ \pi_1(U,u) \longrightarrow \mathrm{Sp}(E/(E\cap E^\perp), \psi) \ 。$$

定理 (5.10) (Kajdan-Margulis) — ρ 的像是开的。

ρ 的像是 $\mathrm{Sp}(E/(E\cap E^\perp), \psi)$ 的一个紧子群，从而是一个 ℓ 进解析群。因而只需证明它的 Lie 代数 $\mathfrak{L}$ 就等于 $\mathfrak{sp}(E/(E\cap E^\perp), \psi)$ 即可。在超越的情形，相对应的 Lie 代数应该是单值化群的 Zariski 闭包的 Lie 代数。

由 (5.8) 知，$\mathfrak{L}$ 是由平方为 0 的线性变换

$$N_s x \longmapsto (x, \delta_s)\delta_s \qquad (s \in S)$$

所生成的，并且 $E/(E\cap E^\perp)$ 是 $\mathfrak{L}$ 的一个绝对不可约表示。于是这个定理可由下面的引理推出。

引理 (5.11) — 设 V 是特征 0 的域 $\boldsymbol{k}$ 上的一个有限维向量空间，ψ 是 V 上一个非退化的交错形式，并且 $\mathfrak{L}$ 是 $\mathfrak{sp}(V,\psi)$ 的一个 Lie 子代数。假设:
(i) V 是 $\mathfrak{L}$ 的一个不可约表示。
(ii) $\mathfrak{L}$ 可由一族形如 $x \mapsto \psi(x,\delta)\delta$ 的 V 自同态所生成。
则 $\mathfrak{L} = \mathfrak{sp}(V,\psi)$。

我们总可以假设 V 和 $\mathfrak{L}$ 都不等于 0。设 $W \subseteq V$ 是这样一个子集，它是由所有使得 $N(\delta) : x \mapsto \psi(x,\delta)\delta$ 落在 $\mathfrak{L}$ 中的那些 $\delta \in V$ 所组成的。

a) W 在同筋下是稳定的（因为 $\mathfrak{L}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个向量子空间）。

b) 若 $\delta \in W$，则 $\exp(\lambda N(\delta))$ 是 $(V,\psi,\mathfrak{L})$ 的一个自同构，从而把 W 变到自身。于是若 $\delta', \delta'' \in W$，则有 $\exp(\lambda N(\delta')).\delta'' = \delta'' + \lambda\psi(\delta'',\delta')\delta' \in W$；若 $\psi(\delta',\delta'') \neq 0$，则由 δ' 和 δ' 所张成的向量子空间仍包含在 W 中。

c) 由此可知，W 是它的一些极大线性子空间 W_α 的并集，且这些子空间两两正交。每一个 W_α 都在 $N(\delta)$ $(\delta \in W)$ 的作用下是稳定的，从而在 $\mathfrak{L}$ 的作用下也是稳定

的。根据前提条件 (i)，$W_\alpha = V$，并且 $\mathfrak{L}$ 包含了所有的 $N(\delta)$ $(\delta \in V)$。由此就可以推出结论，因为 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(V,\psi)$ 就是由所有 $N(\delta)$ $(\delta \in V)$ 生成的。

注 (5.12) （后面不会用到）— 现在可以很容易地证明 (1.6) 对于 $\mathbf{P}_0^{n+1}/\mathbb{F}_q$（$n$ 是奇数）中的任何 n 维超曲面都是成立的。

设 X_0 是一个这样的超曲面，并且 $\overline{X}_0$ 是它通过纯量扩张 $\mathbb{F}_q \to \overline{\mathbb{F}}_q$ 而得到的 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上的超曲面。则有

$$\mathrm{H}^{2i}(\overline{X}_0, \mathbb{Q}_\ell) \ = \ \mathbb{Q}_\ell(-i) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n) \ ,$$

并且 $\mathrm{H}^{2i}(\overline{X}_0, \mathbb{Q}_\ell(i))$ 是由超平面截面的上同调类 $\eta = c_1(\mathscr{O}(1))$ 与自己的 i 次上积所生成的。从而我们有

$$Z(X_0, t) \ = \ \frac{\det(1 - tF^*,\, \mathrm{H}^n(\overline{X}_0, \mathbb{Q}_\ell))}{\prod_{i=0}^n (1 - q^i t)} \ ,$$

故知 $\det(1 - tF^*,\, \mathrm{H}^n(\overline{X}_0, \mathbb{Q}_\ell))$ 是一个整系数多项式，并且不依赖于 ℓ。

我们让 X_0 在超曲面的某个 Lefschetz 束里变动，并假设这个束定义在 $\mathbb{F}_q$ 上（对于 $X = \mathbf{P}^{n+1}$ 可以参看 (5.7)；这种束的存在性并不是显然的；为了使这里的讨论能够完整，我们还需要借用 (7.1) 中的那一套方法）。则可以验证 E 就是整个 H^n，从而 (3.2) 给出了该束中所有超曲面的 Weil 猜想的证明，当然也包括 X_0。

(5.13) §4 和 §5 的文献材料

A) Lefschetz 的结果 (4.1) 和 (5.1) 到 (5.5) 都包含在他的书 [2] 里。对于局部理论 (4.1)，还可以参考 SGA 7, XIV (3.2)。

B) §4 中诸结果的证明可在 SGA 7, XIII, XIV 和 XV 中找到。

C) (5.7) 的证明在 SGA 7, XVII 中。

D) (5.8) 的证明在 SGA 7, XVIII 中。关于 E 的不可约性定理的证明是在 $E \cap E^\perp = \{0\}$ 的条件下给出的，一般情形下（针对 $E/(E \cap E^\perp)$）的证明是完全相同的。

§6 有理性定理

(6.1) 设 $\mathbf{P}_0$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个维数 $\geqslant 1$ 的射影空间，$X_0 \subseteq \mathbf{P}_0$ 是一个平滑射影多样体，$A_0 \subseteq \mathbf{P}_0$ 是一个余 2 维的线性子空间，$D_0 \subseteq \mathbf{P}_0{}^{\check{}}$ 是它的对偶直线，$\overline{\mathbb{F}}_q$ 是 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包，$\mathbf{P}, X, A, D$ 分别是 $\mathbf{P}_0, X_0, A_0, D_0$ 通过纯量扩张 $\mathbb{F}_q \to \overline{\mathbb{F}}_q$ 而得到的。则 (5.6) 中的图表 (5.1.1) 是来自于 $\mathbb{F}_q$ 上的一个类似的图表：

(6.1.1)
$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_0 & \xrightarrow{\pi_0} & X_0 \\ {\scriptstyle f_0}\big\downarrow & & \\ D_0 & & \end{array}$$

假设 X 是连通的，并且维数是偶数 $n+1=2m+2$，再假设由 D 所定义的 X 的诸超平面截面 $(X_t)_{t\in D}$ 是一个 *Lefschetz* 束。则使 X_t 有奇异点的那些 $t\in D$ 所组成的集合 S 可以定义在 $\mathbb{F}_q$ 上，即它是来自于某个 $S_0\subseteq U_0$。我们令 $U_0=D_0\smallsetminus S_0$ 和 $U=D\smallsetminus S$。

设 $u\in U$。则上同调的消逝部分 $E\subseteq \mathrm{H}^n(X_u,\mathbb{Q}_\ell)$ 在 $\pi_1(U,u)$ 的作用下是稳定的，从而（在 U 上）定义了 $\mathrm{R}^n f_*\mathbb{Q}_\ell$ 的一个子局部系 $\mathscr{E}$。局部系 $\mathrm{R}^i f_*\mathbb{Q}_\ell$ 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的，因为它就是 D_0 上的可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层 $\mathrm{R}^i f_{0*}\mathbb{Q}_\ell$ 的逆像，另外，U 上的这个 $\mathscr{E}$ 也是某个子局部系

$$\mathscr{E}_0 \ \subseteq\ \mathrm{R}^n f_{0*}\mathbb{Q}_\ell|_{U_0}$$

的逆像。

上积是一个交错形式

$$\psi\ :\ \mathrm{R}^n f_{0*}\mathbb{Q}_\ell \bigotimes \mathrm{R}^n f_{0*}\mathbb{Q}_\ell \ \longrightarrow\ \mathbb{Q}_\ell(-n)\quad 。$$

我们用 $\mathscr{E}_0^\perp$ 来记 $\mathscr{E}_0$ 在 ψ 下的正交补（在 $\mathrm{R}^n f_{0*}\mathbb{Q}_\ell|_{U_0}$ 中），则 ψ 诱导了一个圆满配对

$$\psi\ :\ \mathscr{E}_0/(\mathscr{E}_0\cap\mathscr{E}_0^\perp)\bigotimes \mathscr{E}_0/(\mathscr{E}_0\cap\mathscr{E}_0^\perp)\ \longrightarrow\ \mathbb{Q}_\ell(-n)\quad 。$$

定理 (6.2) — 对任意 $x_0\in|U_0|$，多项式 $\det(1-tF_{x_0}^*,\,\mathscr{E}_0/(\mathscr{E}_0\cap\mathscr{E}_0^\perp))$ 都是有理系数的。

推论 (6.3) — 设 j_0 是 U_0 到 D_0 的含入，并设 j 是 U 到 D 的相应含入。则 F^* 在 $\mathrm{H}^1(D,j_*\mathscr{E}/(\mathscr{E}\cap\mathscr{E}^\perp))$ 上的作用的诸特征值都是代数数，并且它们在复数域中的所有共轭元 α 都满足

$$q^{\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}}\ \leqslant\ |\alpha|\ \leqslant\ q^{\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}}\quad 。$$

根据 (5.10) 和 (6.2)，$(U_0,\mathscr{E}_0/(\mathscr{E}_0\cap\mathscr{E}_0^\perp),\psi)$ 满足 (3.2) 中的条件（取 $\beta=n$），于是再利用 (3.9) 即可。

引理 (6.4) — 设 $\mathscr{G}_0$ 是 U_0 上的一个偏常值的可构 $\mathbb{Q}_\ell$ 层，并设它在 U 上的逆像 $\mathscr{G}$ 是一个常值层。则可以找到 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 中的一组单位 α_i，使得对任意 $x_0\in|U_0|$，均有

$$\det(1-tF_{x_0}^*,\mathscr{G}_0)\ =\ \prod_i(1-\alpha_i^{\deg(x_0)}t)\quad 。$$

这个引理是说，$\mathscr{G}_0$ 可以表示为 $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ 上的某个层的逆像，而后面这个层就是 $\mathscr{G}_0$ 在 $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ 上的顺像。这个顺像可以等同于 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ 的一个 ℓ 进表示 G_0，现在取

$$\det(1-tF,G_0)\ =\ \prod_i(1-\alpha_i t)$$

即可。

引理 (6.4) 可以应用到 $\mathrm{R}^i f_{0*}\mathbb{Q}_\ell$ $(i\neq n)$ 和 $\mathrm{R}^n f_{0*}\mathbb{Q}_\ell/\mathscr{E}_0$ 以及 $\mathscr{E}_0\cap\mathscr{E}_0^\perp$ 上。

对于 $x_0 \in |U_0|$，纤维 $X_{0,x_0} = f_0^{-1}(x_0)$ 是有限域 $\boldsymbol{k}(x_0)$ 上的一个多样体。若 x 是 U 中的一个位于 x_0 之上的点，则 X_x 就是 X_{0,x_0} 通过把系数 $\boldsymbol{k}(x_0)$ 扩张到代数闭包 $\boldsymbol{k}(x) = \overline{\mathbb{F}}_q$ 上而得到的多样体，并且 $\mathrm{H}^i(X_x, \mathbb{Q}_\ell)$ 就是 $\mathrm{R}^i f_* \mathbb{Q}_\ell$ 在 x 处的茎条。从而把公式 (1.5.4) 应用到 $\boldsymbol{k}(x_0)$ 多样体 X_{0,x_0} 上就可以得到

$$Z(X_{0,x_0}, t) \;=\; \prod_i \det\left(1 - tF_{x_0}^*,\, \mathrm{R}^i f_{0*}\mathbb{Q}_\ell\right)^{(-1)^{i+1}} \quad ,$$

并且 $Z(X_{0,x_0}, t)$ 就是

$$Z^f \;=\; \det\left(1 - tF_{x_0}^*,\, \mathrm{R}^n f_{0*}\mathbb{Q}_\ell/\mathscr{E}_0\right).\det\left(1 - tF_{x_0}^*,\, \mathscr{E}_0 \cap \mathscr{E}_0^\perp\right).\prod_{i \neq n} \det\left(1 - tF_{x_0}^*,\, \mathrm{R}^i f_{0*}\mathbb{Q}_\ell\right)^{(-1)^{i+1}}$$

与

$$Z^m \;=\; \det\left(1 - tF_{x_0}^*,\, \mathscr{E}_0/(\mathscr{E}_0 \cap \mathscr{E}_0^\perp)\right)$$

的乘积。

我们令 $\mathscr{F}_0 = \mathscr{E}_0/(\mathscr{E}_0 \cap \mathscr{E}_0^\perp)$，$\mathscr{F} = \mathscr{E}/(\mathscr{E} \cap \mathscr{E}^\perp)$，并把 (6.4) 应用到 Z^f 的各个因子上。于是可以找到 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 中的两组 ℓ 进单位 $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ 和 $(\beta_j)_{1 \leqslant j \leqslant M}$，使得对任意 $x_0 \in |U_0|$，均有

$$Z(X_{0,x_0}, t) \;=\; \frac{\prod_i (1 - \alpha_i^{\deg(x_0)} t)}{\prod_j (1 - \beta_j^{\deg(x_0)} t)} \,.\, \det(1 - tF_{x_0}^*,\, \mathscr{F}_0) \quad ,$$

特别地，等号右边落在 $\mathbb{Q}(t)$ 中。若某个 α_i 与某个 β_j 重合，则可以把它们从分子和分母中同时消去，从而我们总可以假设，对任意 i 和任意 j，均有 $\alpha_i \neq \beta_j$。

(6.5) 现在只需证明多项式 $\prod\limits_i (1 - \alpha_i t)$ 和 $\prod\limits_j (1 - \beta_j t)$ 都是有理系数的即可，也就是说，这族 α_i（切转：这族 β_j）是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的。我们需要使用下面几个命题。

命题 (6.6) — 设 $(\gamma_i)_{1 \leqslant i \leqslant P}$ 和 $(\delta_j)_{1 \leqslant j \leqslant Q}$ 是 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 中的两族 ℓ 进单位。假设 $\gamma_i \neq \delta_j$。若 K 是由一些不等于 1 的整数所组成的充分大的有限集合，并且 L 是 $|U_0|$ 中的一个充分大的零密度子集，则只要 $x_0 \in |U_0|$ 满足 $k \nmid \deg(x_0)$（对任意 $k \in K$）和 $x_0 \notin L$，下式

$$\textbf{(6.6.1)} \qquad \det(1 - tF_{x_0}^*,\, \mathscr{F}_0) \cdot \frac{\prod_i (1 - \gamma_i^{\deg(x_0)} t)}{\prod_j (1 - \delta_j^{\deg(x_0)} t)}$$

在约分以后的分母就还是 $\prod\limits_j (1 - \delta_j^{\deg(x_0)} t)$。

证明在 (6.10-13) 中给出。根据下面的 (6.7)，命题 (6.6) 实际上给出了用关于 $x_0 \in |U_0|$ 的有理分式族 (6.6.1) 来描述这一族 δ_j 的一个内蕴方法。

引理 (6.7) — 设 K 是由一些不等于 1 的整数所组成的有限集合，并且 $(\delta_j)_{1 \leqslant j \leqslant Q}$ 和 $(\varepsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant Q}$ 是某个域中的两族元素。若对所有充分大且不被每个 $k \in K$ 所整除的整数 n，族 δ_j^n 都与族 ε_j^n 重合（不计顺序），则族 δ_j 与族 ε_j 是重合的（不计顺序）。

对 Q 进行归纳。满足 $\delta_Q^n = \varepsilon_j^n$ 的整数 n 的集合是一个理想 (n_j)。现在我们来证明，可以找到 j_0，使得 $\delta_Q = \varepsilon_{j_0}$。假若不然，则这些 n_j 都不等于 1，于是能找到一个充分大的 n，它不被任何 n_j 和任何 $k \in K$ 所整除。故有 $\delta_Q^n \neq \varepsilon_j^n$，这与前提条件矛盾。从而可以找到 j_0，使得 $\delta_Q = \varepsilon_{j_0}$。现在对 $(\delta_j)_{j \neq Q}$ 和 $(\varepsilon_j)_{j \neq j_0}$ 使用归纳假设就可以推出结论。

命题 (6.8) — 设 $(\gamma_i)_{1 \leqslant i \leqslant P}$ 和 $(\delta_j)_{1 \leqslant j \leqslant Q}$ 是 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 中的两族 ℓ 进单位，$R(t) = \prod_i (1 - \gamma_i t)$ 且 $S(t) = \prod_j (1 - \delta_j t)$。假设对任意 $x_0 \in |U_0|$，$\prod_j (1 - \delta_j^{\deg(x_0)} t)$ 都整除

$$\prod_i (1 - \gamma_i^{\deg(x_0)} t).\det(1 - tF_{x_0}^*, \mathscr{F}_0) \quad 。$$

则 $S(t)$ 整除 $R(t)$。

在 (γ_i) 和 (δ_j) 中逐步去掉相同的元素使之满足 (6.6) 中的前提条件。然后利用 (6.6)。于是由前提条件知，(6.6.1) 中的那些有理分式都是多项式。从而没有一个 δ 能够剩下来，这就表明 $S(t)$ 整除 $R(t)$。

这个命题给出了用多项式族

$$\prod_i (1 - \gamma_i^{\deg(x_0)} t).\det(1 - tF_{x_0}^*, \mathscr{F}_0)$$

来描述 $R(t)$ 的一个内蕴方法。即它就是满足 (6.8) 的前提条件的那些多项式 $S(t) = \prod_j (1 - \delta_j t)$ 的最小公倍式。

(6.9) 现在我们先承认 (6.6)，来证明 (6.5)，从而也证明了 (6.2)。我们在 (6.6) 中令 $(\gamma_i) = (\alpha_i)$ 和 $(\delta_j) = (\beta_j)$。这就得到族 β_j 的一个用有理分式族 $Z(X_{0,x_0}, t)$ $(x_0 \in |U_0|)$ 所给出的内蕴描述。由于这些 $Z(X_{0,x_0}, t)$ 都落在 $\mathbb{Q}(t)$ 中，故知族 β_j 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的。

于是多项式 $\prod_i (1 - \alpha_i^{\deg(x_0)} t).\det(1 - F_{x_0}^* t, \mathscr{F}_0)$ 都属于 $\mathbb{Q}[t]$。并且命题 (6.8) 表明，这族多项式可以给出族 α_i 的一个内蕴描述。从而族 α_i 也是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的。

(6.10) 准备 — 设 $u \in U$ 并且 $\mathscr{F}_u$ 是 $\mathscr{F}$ 在 u 处的茎条。则算术基本群 $\pi_1(U_0, u)$ 是 $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$（生成元为 φ）枕着几何基本群 $\pi_1(U, u)$ 的一个扩充，它在 $\mathscr{F}_u$ 上的作用都是辛相似：

$$\rho \;:\; \pi_1(U_0, u) \longrightarrow \mathrm{CSp}(\mathscr{F}_u, \psi) \quad 。$$

我们用 $\mu(g)$ 来表示辛相似 g 的乘子。设

$$H \;\subseteq\; \widehat{\mathbb{Z}} \times \mathrm{CSp}(\mathscr{F}_u, \psi)$$

是由方程

$$q^{-n} \;=\; \mu(g)$$

所定义的子群（由于q是一个ℓ进单位，从而对任意$n \in \widehat{\mathbb{Z}}$，$q^n \in \mathbb{Q}_\ell^*$都有定义）。$\psi$取值在$\mathbb{Q}_\ell(-n)$中的事实可以表达为：$\pi_1$到$\widehat{\mathbb{Z}} \times \mathrm{CSp}$的映射（由到$\widehat{\mathbb{Z}}$的典范投影与$\rho$所组成）可以穿过

$$\rho_1 \ : \ \pi_1(U_0, u) \ \longrightarrow \ H \quad 。$$

引理 (6.11) — ρ_1的像H_1在H中是开的。

事实上，$\pi_1(U_0, u)$通过投影可以映满$\widehat{\mathbb{Z}}$，并且$\pi_1(U, u) = \mathrm{Ker}\big(\pi_1(U_0, u) \to \widehat{\mathbb{Z}}\big)$在$\mathrm{Sp}(\mathscr{F}_u, \psi) = \mathrm{Ker}\big(H \to \widehat{\mathbb{Z}}\big)$中的像是开的 (5.10)。

引理 (6.12) — 对任何ℓ进单位$\delta \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$，满足条件“$\delta^n$是$g$的特征值”的那些$(n, g) \in H_1$所组成的集合$Z$都是一个零测度的闭集。

易见Z是闭的。对每一个$n \in \widehat{\mathbb{Z}}$，设$\mathrm{CSp}_n$是由那些满足$\mu(g) = q^{-n}$的$g \in \mathrm{CSp}(\mathscr{F}_u, \psi)$所组成的集合，并设$Z_n$是由那些满足“$\delta^n$是$g$的特征值”的$g \in \mathrm{CSp}_n$所组成的集合。于是$\mathrm{CSp}_n$是$\mathrm{Sp}$作用下的一个齐性空间，并且可以验证，$Z_n$是一个真代数子集，从而测度为$0$。因而根据 (6.11)，$H_1 \cap (\{n\} \times Z_n)$在$n$的逆像（$\subseteq H_1$）中的测度为$0$，最后对投影$H_1 \to \widehat{\mathbb{Z}}$使用 Fubini 定理即可。

(6.13) 现在我们来证明 (6.6)。对于每一对i, j，满足$\gamma_i^n = \delta_j^n$的整数n的集合都是某个固定整数n_{ij}的倍数集（不排除$n_{ij} = 0$的情形）。根据前提条件，$n_{ij} \neq 1$。

根据 (6.12) 和 Čebotarev 密度定理，满足“$\beta_j^{\deg(x_0)}$是$F_{x_0}^*$在$\mathscr{F}_0$上的特征值”的那些点$x_0 \in |U_0|$所组成的集合具有零密度。现在只要取K是这些n_{ij}的集合，再取L是上述x_0的集合即可。

§ 7 完成 (1.7) 的证明

引理 (7.1) — 设X_0是$\mathbb{F}_q$上的一个偶维数d的几何不可约平滑射影多样体。设X是由X_0通过纯量扩张而得到的$\overline{\mathbb{F}}_q$上的多样体，并且α是F^*在$\mathrm{H}^d(X, \mathbb{Q}_\ell)$上的一个特征值。则$\alpha$是代数数，并且它在复数域中的任何共轭元（仍记作$\alpha$）均满足

(7.1.1) $$q^{\frac{d}{2} - \frac{1}{2}} \ \leqslant \ |\alpha| \ \leqslant \ q^{\frac{d}{2} + \frac{1}{2}}$$

对d进行归纳（只取偶数）。$d = 0$的情形是平凡的，甚至用不到X_0是几何不可约的这个条件；现在假设$d \geqslant 2$，并且令$d = n + 1 = 2m + 2$。

若$\mathbb{F}_{q^r}$是$\mathbb{F}_q$的r次扩张，并且$X_0'/\mathbb{F}_{q^r}$是由$X_0/\mathbb{F}_q$通过纯量扩张而得到的，则 (7.1) 中的结论在$X_0/\mathbb{F}_q$上成立和在$X_0'/\mathbb{F}_{q^r}$上成立是等价的，因为当q变成q^r时，F^*的特征值相应地变成了它的r次方。

根据 (5.7)，在某个适当的射影嵌入$i : X \to \mathbf{P}$下，X具有一个由超平面截面所组成的 Lefschetz 束。上一注解允许我们假设i和这个束都是定义在$\mathbb{F}_q$上的（只需把$\mathbb{F}_q$换成适当的有限扩张）。

于是可以假设存在一个 $\mathbb{F}_q$ 上的射影嵌入 $X_0 \to \mathbf{P}_0$，和 $\mathbf{P}_0$ 的一个余 2 维的线性子空间 A_0，并且 A_0 定义了一个 Lefschetz 束。仍然使用 (6.1) 和 (6.3) 中的记号。再做一次纯量扩张就可以进而假设：

a) S 中的点都是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的。

b) 这些点 x_s $(s \in S)$ 处的消逝圈都是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的（由于只有 $\pm\delta$ 是内蕴的，从而它们只在某个二次扩张上才有定义）。

c) U_0 上有一个有理点 u_0。我们取 U 中的对应点 u 作为基点。

d) $X_{0,u_0} = f_0^{-1}(u_0)$ 具有一个定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的平滑超平面截面 Y_0。令 $Y = Y_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$。

因为 $\widetilde{X}$ 可由 X 经过对余 2 维平滑子体 $A \cap X$ 进行暴涨而得到，故有

$$\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow \mathrm{H}^i(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

（事实上，$\mathrm{H}^i(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \bigoplus \mathrm{H}^{i-2}(A \cap X, \mathbb{Q}_\ell)(-1)$）。从而只需证明 (7.1.1) 对于 F^* 在 $\mathrm{H}^i(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的特征值 α 成立即可。

写出 f 的 Leray 谱序列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(D, \mathrm{R}^q f_* \mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) \quad 。$$

于是只需证明 (7.1.1) 对于 F^* 在这些 $E_2^{p,q}$ $(p + q = d = n + 1)$ 上的特征值 α 成立即可。它们分别是：

A) $E_2^{2,n-1}$。根据 (5.8)，$\mathrm{R}^{n-1} f_* \mathbb{Q}_\ell$ 是常值的。从而由 (2.10) 知，

$$E_2^{2,n-1} = \mathrm{H}^{n-1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)(-1) \quad 。$$

根据 Lefschetz 小定理（它是 SGA 4, XIV (3.2) 和 Poincaré 对偶 SGA 4, XVIII 的推论），我们有

$$\mathrm{H}^{n-1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)(-1) \hookrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(Y, \mathbb{Q}_\ell)(-1) \quad ,$$

从而可以利用对于 Y_0 的归纳假设。

B) $E_2^{0,n+1}$。若消逝圈不等于 0，则 $\mathrm{R}^{n+1} f_* \mathbb{Q}_\ell$ 是常值的，并且

$$E_2^{0,n+1} = \mathrm{H}^{n+1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell) \quad 。$$

由于 Gysin 态射

$$\mathrm{H}^{n-1}(Y, \mathbb{Q}_\ell)(-1) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$$

是满的（这个情形与 A) 是对偶的），从而可以使用关于 Y_0 的归纳假设。

若消逝圈等于 0，则正合序列 (5.8) b) 给出一个正合序列

$$\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Q}_\ell(m-n) \longrightarrow E_2^{0,n+1} \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell) \quad 。$$

F 在 $\mathbb{Q}_\ell(m-n)$ 上的特征值是 $q^{d/2}$，而 H^{n+1} 可以和上面一样处理。

C) $E_2^{1,n}$。如果承认 Lefschetz 大定理，则可以推出 $\mathscr{E} \cap \mathscr{E}^\perp$ 是 0，从而 $\mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ 是 $j_*\mathscr{E}$ 和某个常值层的直和。由于 $\mathbf{P}^1$ 上的常值层的 H^1 等于 0，故而只需利用 (6.3) 即可。

由于 Lefschetz 大定理还没有得到证明，我们必须多绕一点路。若消逝圈等于 0，则 $\mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ 是常值的 ((5.8) b))，故有 $E_2^{1,n} = 0$。从而我们总可以假设消逝圈不为 0。在 $\mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell = j_* j^* \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ (5.8) 上可以用子层 $j_*\mathscr{E}$ 和 $j_*(\mathscr{E} \cap \mathscr{E}^\perp)$ 定义一个滤解。于是若这些消逝圈 δ 并没有全都落入 $\mathscr{E} \cap \mathscr{E}^\perp$ 中，则有正合序列

(7.1.2) $$0 \longrightarrow j_*\mathscr{E} \longrightarrow \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \text{常值层} \longrightarrow 0$$

(7.1.3) $$0 \longrightarrow \text{常值层 } j_*(\mathscr{E} \cap \mathscr{E}^\perp) \longrightarrow j_*\mathscr{E} \longrightarrow j_*(\mathscr{E}/(\mathscr{E} \cap \mathscr{E}^\perp)) \longrightarrow 0$$

若不幸这些 δ 都落入了 $\mathscr{E} \cap \mathscr{E}^\perp$ 之中，则我们有 $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{E}^\perp$，从而有正合序列

(7.1.4) $$0 \longrightarrow \text{常值层 } j_*\mathscr{E}^\perp \longrightarrow \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \text{某个层 } \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

(7.1.5) $$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \text{常值层 } j_* j^* \mathscr{F} \longrightarrow \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Q}_\ell(m-n)_s \longrightarrow 0$$

在第一种情形下，上同调长正合序列给出

(7.1.2′) $$\mathrm{H}^1(D, j_*\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(D, \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow 0$$

(7.1.3′) $$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(D, j_*\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(D, j_*(\mathscr{E}/(\mathscr{E} \cap \mathscr{E}^\perp)))$$

于是可以应用 (6.3)。

在第二种情形，则有

(7.1.4′) $$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(D, \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathrm{H}^1(D, \mathscr{F})$$

(7.1.5′) $$\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Q}_\ell(m-n) \longrightarrow \mathrm{H}^1(D, \mathscr{F}) \longrightarrow 0$$

于是再注意到 F 在 $\mathbb{Q}_\ell(m-n)$ 上的作用就是乘以 $q^{d/2}$ 的运算即可。

引理 (7.2) — 设 X_0 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个 d 维几何不可约平滑射影多样体。设 X 是由 X_0 通过纯量扩张而得到的 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上的多样体，α 是 F^* 在 $\mathrm{H}^d(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的一个特征值。则 α 是代数数，并且它在复数域中的任何共轭元（仍记作 α）都满足

$$|\alpha| = q^{d/2} \quad 。$$

先证明 (7.2) ⇒ (1.7)。对于在 $\mathbb{F}_q$ 上平滑且射影的 X_0 和整数 i，只需证明下面这件事：

$W(X_{0,i})$：设 X 是由 X_0 通过纯量扩张 $\mathbb{F}_q \to \overline{\mathbb{F}}_q$ 而得到的多样体。若 α 是 F^* 在 $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的一个特征值，则 α 是代数数，并且它在复数域中的任何共轭元（仍记为 α）都满足 $|\alpha| = q^{i/2}$。

a) 若 $\mathbb{F}_{q^n}$ 是 $\mathbb{F}_q$ 的 n 次扩张，并且 $X_0'/\mathbb{F}_{q^n}$ 是由 $X_0/\mathbb{F}_q$ 通过纯量扩张而得到的多样体，则 $W(X_0,i)$ 等价于 $W(X_0',i)$：因为纯量扩张只是把 α 变成了 α^n 并把 q 变成了 q^n。

b) 若 X_0 是纯 n 维的，则 $W(X_0,i)$ 等价于 $W(X_0,2n-i)$：这可由 Poincaré 对偶定理推出。

c) 若 X_0 是一些多样体 X_0^α 的和，则 $W(X_0,i)$ 等价于这些 $W(X_0^\alpha,i)$ 同时成立。

d) 若 X_0 是纯 n 维的，Y_0 是 X_0 的一个平滑的超平面截面，并且 $i<n$，则有 $W(Y_0,i)\Rightarrow W(X_0,i)$：这可由 Lefschetz 小定理推出。

于是为了证明 $W(X_0,i)$，可以把问题依次归结到下面的情形：
— 根据 c)，可以假设 X_0 是纯 n 维的；
— 根据 b)，可以假设 $0\leqslant i\leqslant n$；
— 根据 a) 和 d)，可以进而假设 $i=n$；
— 根据 a) 和 c)，可以再假设 X_0 是几何不可约的。

最后的情形可由 (7.2) 推出。

(7.3) 现在我们来证明 (7.2)。对任意整数 k，α^k 都是 F^* 在 $\mathrm{H}^{kd}(X^k,\mathbb{Q}_\ell)$ 上的特征值（Künneth 公式）。取 k 为偶数，则 X^k 满足 (7.1) 的条件，从而

$$q^{\frac{kd}{2}-\frac{1}{2}} \;\leqslant\; \left|\alpha^k\right| \;\leqslant\; q^{\frac{kd}{2}+\frac{1}{2}} \quad ,$$

由此可知

$$q^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2k}} \;\leqslant\; |\alpha| \;\leqslant\; q^{\frac{d}{2}+\frac{1}{2k}} \quad 。$$

令 k 趋于无穷大，就得到了 (7.2)。

§8　初步应用

定理 (8.1) — 设 $X_0\subseteq \mathbf{P}_0^{n+r}$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个平滑全截体，具有维数 n 和多重次数 $(d_1,\ldots,d_r)$。设 b' 是具有相同维数和相同多重次数的复平滑全截体的第 n 个 Betti 数。在 n 是奇数时令 $b=b'$，而在 n 是偶数时令 $b=b'-1$。则有

$$\left|\#X_0(\mathbb{F}_q)-\#\mathbf{P}_0^n(\mathbb{F}_q)\right| \;\leqslant\; b.q^{n/2} \quad 。$$

设 $X/\overline{\mathbb{F}}_q$ 是由 X_0 所导出的多样体，并设 $\mathbb{Q}_\ell.\eta^i$ 是由某个超平面截面的上同调类的 i 次上积所生成的 $\mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 中的 1 维子空间（直线）。则 F^* 在这条直线上的作用是乘以 q^i 的运算。X 的上同调就是这些 $\mathbb{Q}_\ell.\eta^i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 和 $\mathrm{H}^n(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 的本原部分（b 维）的直和。从而由 (1.5) 知，可以找到 b 个代数数 α_j，分别对应于 F^* 在这个本原部分上的诸特征值，且满足

$$\#X_0(\mathbb{F}_q) \;=\; \sum_{i=0}^{n} q^i + (-1)^n\sum_j \alpha_j \quad 。$$

根据 (1.7)，$|\alpha_j| = q^{n/2}$，从而

$$\Big|\#X_0(\mathbb{F}_q) - \#\mathbf{P}_0(\mathbb{F}_q)\Big| \;=\; \Big|\#X_0(\mathbb{F}_q) - \sum_{i=0}^{n} q^i\Big| \;=\; \Big|\sum_j \alpha_j\Big| \;\leqslant\; \sum_j |\alpha_j| \;=\; b.q^{n/2} \quad 。$$

定理 (8.2) — 设 N 是一个正整数，$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N)^* \to \mathbb{C}^*$ 是一个特征标，k 是一个 $\geqslant 2$ 的整数，f 是 $\Gamma_0(N)$ 的一个权为 k 且特征标为 ε 的全纯模形式，即：f 是 Poincaré 上半平面 X 上的一个全纯函数，满足以下条件：对任意 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，若 $c \equiv 0\ (N)$，则有

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \;=\; \varepsilon(a)^{-1}(cz+d)^k f(z) \quad 。$$

假设 f 是**尖性**且**本原**的（Atkin-Lehner 和 Miyake 称此为“新”形式），特别地，它是诸 Hecke 算子 T_p $(p \nmid N)$ 的特征向量。令 $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n q^n$，其中 $q = e^{2\pi i z}$（且 $a_1 = 1$）。则对于不整除 N 的素数 p 来说

$$|a_p| \;\leqslant\; 2.p^{\frac{k-1}{2}} \quad 。$$

换句话说，方程

$$T^2 - a_p T + \varepsilon(p).p^{k-1}$$

的根都具有绝对值 $p^{\frac{k-1}{2}}$。

事实上，这些根都是 Frobenius 在 $\mathbb{F}_q$ 上的某个 $k-1$ 维平滑射影多样体的 H^{k-1} 上的特征值。

在某些限制条件下，上述结果已出现在作者的 Bourbaki 报告中 (Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, exposé 355, février 1969, *Lecture Notes in Mathematics* , 179)。一般情形的证明也不会有更多的困难。

注 (8.3) — J.-P. Serre 和作者还证明，(8.2) 对于 $k = 1$ 的情形也是成立的，但是证明方法截然不同。

下面将要叙述的一个应用是由 E. Bombieri 给出的。

定理 (8.4) — 设 Q 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个 n 变量的 d 次多项式，Q_d 是 Q 的 d 次齐次分量，$\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^*$ 是 $\mathbb{F}_q$ 的一个非平凡的加法特征标。假设:
(i) d 与 p 是互素的;
(ii) Q_d 在 $\mathbf{P}_0^{n-1}/\mathbb{F}_q$ 中所定义的超曲面 H_0 是平滑的。

则有

$$\Big|\sum_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{F}_q} \psi(Q(x_1,\ldots,x_n))\Big| \;\leqslant\; (d-1)^n q^{n/2} \quad 。$$

把 Q 换成它的一个常数倍，则可以假设

(8.4.1) $$\psi(x) \;=\; \exp\left(2\pi i \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(x)/p\right) \quad 。$$

设 X_0 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维仿射空间 $\mathbf{A}_0$ 的一个平展覆叠，由方程 $T^p - T = Q$ 所定义，并设 σ 是 X_0 到 $\mathbf{A}_0$ 的投影：

$$\sigma \ : \ X_0 \longrightarrow \mathbf{A}_0$$

$$X_0 \ = \ \mathrm{Spec}\big(\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n, T]/(T^p - T - Q)\big) \ 。$$

则覆叠 $X_0 \to \mathbf{A}_0$ 是 Galois 的， Galois 群为 $\mathbb{Z}/p$，并且 $i \in \mathbb{Z}/p = \mathbb{F}_p$ 的作用就是 $T \mapsto T + i$。

设 $x \in \mathbf{A}_0(\mathbb{F}_q)$，现在我们来计算 $X_0/\mathbf{A}_0$ 在 x 处的纤维上的 Frobenius 自同态。令 $q = p^f$，并设 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 是 $\mathbb{F}_q$ 的一个代数闭包。则对于 x 上的点 $(x, T) \in X_0(\overline{\mathbb{F}}_p)$，我们有 $F((x, T)) = (x, T^q)$，并且

$$T^q \ = \ T + \sum_{i=1}^{f} \big(T^{p^i} - T^{p^{i-1}}\big) \ = \ T + \sum_i Q(x_0)^{p^{i-1}} \ = \ T + \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(Q(x)) \ 。$$

这也就是 Galois 群中的元素 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(Q(x))$ 所给出的作用。

设 E 是由 p 次单位根生成的域，λ 是 E 的一个与 p 互素的超距位点。我们使用 λ 进上同调。对于 $j \in \mathbb{Z}/p$，令 $\mathscr{F}_{j,0}$ 是由 X_0 和 $\psi(-jx) : \mathbb{Z}/p \to E^* \to E_\lambda^*$ 所定义的 $\mathbf{A}_0$ 上的 1 秩 E_λ 局部系，即我们有 $\iota : X_0 \to \mathscr{F}_{j,0}$ 和 $\iota(i * x) = \psi(-ji)\iota(x)$。我们用抹掉 $_0$ 的记号来记 $\mathbf{A}_0$, X_0, $\mathscr{F}_{j,0}$ 在纯量扩张 $\mathbb{F}_q \to \overline{\mathbb{F}}_q$ 下所得到的诸对象。则关于 $\mathscr{F}_{j,0}$ 的迹公式 (1.12.1) 可以写成

(8.4.2)
$$\sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}_q} \psi(Q(x_1, \dots, x_n)) \ = \ \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F^*, \mathrm{H}_c^i(\mathbf{A}, \mathscr{F}_1)) \ 。$$

我们有 $\sigma_* E_\lambda = \bigoplus_j \mathscr{F}_j$，从而

(8.4.3)
$$\mathrm{H}_c^*(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} E_\lambda \ = \ \bigoplus_j \mathrm{H}_c^*(\mathbf{A}, \mathscr{F}_j) \ 。$$

对于 $j = 0$， $\mathscr{F}_j$ 就是常值层 E_λ；这个直和因子对应于 $\mathbf{A}$ 的上同调到 X 的上同调里的含入 (取逆像)。

引理 (8.5) — (i) 对于 $j \neq 0$， $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{A}, \mathscr{F}_j)$ 在 $i \neq n$ 时等于 0；而在 $i = n$ 时，它的维数是 $(d-1)^n$。

(ii) 对于 $j \neq 0$，上积

$$\mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}, \mathscr{F}_j) \bigotimes \mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}, \mathscr{F}_{-j}) \ \longrightarrow \ \mathrm{H}_c^{2n}(\mathbf{A}, E_\lambda) \ \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \ E_\lambda(-n)$$

是一个圆满配对。

(iii) X_0 是某个平滑射影多样体 Z_0 的开子集。

首先由 (8.5) 推出 (8.4)。设 $j_0 : X_0 \hookrightarrow Z_0$，并设 $j : X \hookrightarrow Z$ 是它通过纯量扩张 $\mathbb{F}_q \to \overline{\mathbb{F}}_q$ 而得到的。则由 (8.4.2), (i) 以及对 Z_0 成立的 (1.7) 知，只需证明下述映射

$$\mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}, \mathscr{F}_1) \ \xrightarrow{\sigma^*} \ \mathrm{H}_c^n(X, \mathscr{F}_1) \ = \ \mathrm{H}_c^n(X, E_\lambda) \ \xrightarrow{j_!} \ \mathrm{H}^n(Z, E_\lambda)$$

是单的即可。但我们有 $\mathrm{Tr}(a\cup b)=\frac{1}{p}\mathrm{Tr}(j_!\sigma^*a\cup j_!\sigma^*b)$，从而由 (ii) 就可以推出这件事。

(8.6) 现在我们来证明 (8.5) 中的 (iii)，设 $\mathbf{P}_0$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的射影空间，它是由 $\mathbf{A}_0$ 添加一个无穷远超平面 $\mathbf{P}_0^\infty$ 而得到的，$H_0\subseteq\mathbf{P}_0^\infty$ 是由方程 $Q_d=0$ 所定义的，Y_0 是 $\mathbf{P}_0$ 在 X_0 中的正规化，则 Y_0 是 $\mathbf{P}_0$ 的一个覆叠

(8.6.1)
$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sigma"'] & Y_0 \arrow[d] & & \\ \mathbf{A}_0 \arrow[r, hook] & \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_0^\infty \arrow[l, hook'] & H_0 \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

现在考察 $Y_0/\mathbf{P}_0$ 在无穷远附近（在平展拓扑下）的局部性质。

引理 (8.7) — *Y_0 在 H_0 的逆像之外都是平滑的。*

有理函数 Q 在 $\mathbf{P}_0$ 上的除子是有限部分 $\mathrm{div}(Q)_f$ 和 $(-d)$ 个无穷远超平面之和。也就是说：

(8.7.1)
$$\mathrm{div}(Q) \;=\; \mathrm{div}(Q)_f-d\mathbf{P}_0^\infty$$
$$\mathrm{div}(Q)_f\cap\mathbf{P}_0^\infty \;=\; H_0 \quad 。$$

在有限远处，$Y_0=X_0$ 在 $\mathbf{A}_0$ 上是平展的，从而是平滑的。在无穷远处 H_0 的逆像之外，可以找到一个局部坐标系 $(z_1\ldots,z_n)$ 使得 $Q=z_1^{-d}$（这里要用到 $(d,p)=1$）。在这个坐标系下，Y_0 成为一条曲线和一个平滑空间（对应于坐标 $z_2,\ldots,z_n$）的乘积。于是在正规化下，它是平滑的。

引理 (8.8) — *在 H_0 的点上的平展邻域里，Y_0 在某个（固定的）正规奇异曲面上是平滑的。*

此时可以选择局部坐标使得 $Q=z_1^{-d}z_2$。事实上，由于 H_0 是平滑的，故知 $\mathrm{div}(Q)_f$ 在无穷远处是平滑的，并且与 $\mathbf{P}_0^\infty$ 横截相交。这个形式不依赖于点的选择，并且只包含两个坐标，从而得出结论。

(8.9) 我们知道可以按照下述方法（这归功于 Zariski）来解消曲面上的奇异点：即交替进行正规化以及（既约）奇异谷的暴涨。这些操作都与平展位局部化和乘以平滑空间的运算可交换，从而 Zariski 的方法也使我们可以对 Y_0（在平展位局部的意义下，它在某个曲面上是平滑的）进行解消奇异点的操作。完成后就给出了我们需要的 Z_0。

若 T 是曲面 S 中的一条曲线，且包含了 S 的奇异谷，设 T' 是 T 在 S 的 Zariski 解消 S' 中的逆像，我们可以从 S' 出发沿着 $(T')_{\mathrm{red}}$ 的（既约）奇异谷多次进行暴涨，最终得到这样一个曲面 S''，它使 T 在 S'' 中的既约逆像 $(T'')_{\mathrm{red}}$ 是一个既约法相交叉除子。这些操作仍然与平展位局部化和乘以平滑空间的运算可交换。如果再注意到 $(Y_0,\text{无穷远})$ 局部的在某个 (S,T) 上是平滑的，于是可以进而找到一个 Z_0 使得 $Z_0\smallsetminus X_0$ 是一个既约法相交叉除子。

(8.10) 现在我们来证明 (8.5) 的 (i), (ii)。这是一些几何性的陈述；于是可以在 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上考虑问题。设 S' 是 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上的这样一个仿射空间，它是所有 n 变量的 $\leqslant d$ 次多项式的参数化空间，再设 S 是 S' 的开子集，对应于所有这样的多项式，它的 d 次齐次部分的判别式不等于 0 。我们用 $Q_S \in \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S[x_1, \ldots, x_n])$ 来记 S 上的普适多项式，并设 X_S 是 $\mathbf{A}_S = \mathbf{A} \times S$ 的由方程 $T^p - T = Q_S$ 所定义的 Galois 覆叠，则其 Galois 群为 $\mathbb{Z}/p$ 。设 $\mathbf{P}_S = \mathbf{P} \times S$ 是 $\mathbf{A}_S$ 在 S 上的射影紧化且 Y_S 是 $\mathbf{P}_S$ 在 X_S 中的正规化。则在 S 上存在一个与 (8.6.1) 类似的图表。

(8.7) 和 (8.8) 中给出的 Q 的局部坐标表达式在现在的条件下仍然有效，而且带了参数，因为在 Y_S 的局部（平展拓扑下）， Y_S/S 同构于 S（平滑）和一个纤维的乘积。(8.9) 中所描述的典范解消法可以使我们获得一个 X_S/S 的相对紧化 Z_S/S，并使 $Z_S \smallsetminus X_S$ 成为 S 上的一个相对法相交叉除子。

$$\begin{array}{ccc} X_S & \xhookrightarrow{u} & Z_S \\ \big\downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbf{A}_S & \xrightarrow{a} & S \end{array}$$

（f 是平滑紧合的，u 是一个开浸入，$Z_S \smallsetminus X_S$ 是一个相对法相交叉除子）。

设 $\mathscr{F}_{j,S}$ 是由 $X_S/\mathbf{A}_S$ 按照 (8.4) 的方法所导出的 $\mathbf{A}_S$ 上的 E_λ 层。则有 $\sigma_* E_\lambda = \bigoplus \mathscr{F}_{j,S}$，从而

$$\mathrm{R}^\bullet(fu)_!(E_\lambda) \;=\; \bigoplus_j \mathrm{R}^\bullet a_! \mathscr{F}_{j,S} \quad 。$$

Z_S 的性质保证了这些 $\mathrm{R}^i(fu)_! E_\lambda = \mathrm{R}^i f_*(u_! E_\lambda)$ 都是 S 上的偏常值层。因而这些 $\mathrm{R}^\bullet a_! \mathscr{F}_{j,S}$ 也同样是偏常值的。由于 S 连通，故只需对某一个特殊的 Q 来证明 (8.5) 的 (i), (ii) 即可。取 $Q = \sum\limits_i x_i^d$。该多项式满足平滑条件，因为 $(d,p) = 1$ 。对于这个多项式，各个变量在 (8.4) 的指数和中是分离的。这对应于下述事实：$\mathscr{F}_j$ 就是 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^n$ 的诸 1 维因子 $\mathbf{A}^1$ 上的层 $\mathscr{F}_j^1$ 在 $\mathbf{A}$ 上的逆像的张量积。利用 Kü- -nneth 公式

$$\mathrm{H}^\bullet(\mathbf{A}, \mathscr{F}_j) \;=\; \bigotimes \mathrm{H}^\bullet(\mathbf{A}^1, \mathscr{F}_j^1) \quad 。$$

从而问题归结为对于 $n = 1$ 和 $Q = x^d$ 来证明 (8.5) 的 (i), (ii)。

(8.11) 现在考虑这个特例。$\mathbf{A}$ 的覆叠 X 是不可约的，故对于 $i = 0, 2$，总有

$$\mathrm{H}_c^i(\mathbf{A}, E_\lambda) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{H}_c^i(X, E_\lambda) \quad 。$$

从而对于 $i \neq 1$ 和 $j \neq 0$，总有

$$\mathrm{H}_c^i(\mathbf{A}, \mathscr{F}_j) \;=\; 0 \quad 。$$

于是 (ii) 可由 (2.8) 或 (2.12) 以及 $u_! \mathscr{F}_j = u_* \mathscr{F}_j$ 的事实推出。为了证明 (i)，只需验证

$$\chi_c(\mathbf{A}, \mathscr{F}_j) \;=\; 1 - d \quad 。$$

利用 Euler-Poincaré 公式（参看 M. Raynaud 在 1965 年 2 月的 Bourbaki 报告 286），上式等价于下面的引理

引理 (8.12) — $\mathscr{F}_j$ 在无穷远点处的 $Swan$ 导子等于 d。

这又等价于

引理 (8.13) — 设 $\boldsymbol{k}$ 是一个特征 p 的有限域，$y \in \boldsymbol{k}[[x]]$ 是一个赋值为 d 的元素，d 与 p 互素，L 是 $K = \boldsymbol{k}((x))$ 的一个扩张，由方程 $T^p - T = y^{-1}$ 的根所生成，χ 是 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的一个取值在 $\mathbb{Z}/p$ 中的特征标，定义如下

$$\chi(\sigma) = \sigma T - T \text{ 。}$$

则，χ 的导子是 $d+1$。

通过对剩余类域进行扩张，问题可以归结到 $\boldsymbol{k}$ 是代数闭域的情形，此时可以利用：J. P. Serre, Sur les corps locaux à corps résidue algébriquement clos, *Bull. Soc. Math. France*, 89 (1961), p. 105-154, n° 4.4。

参考文献

[1] Grothendieck, A., *Formule de Lefschetz et rationelité des fonctions L*, Seminaire Bourbaki, **279**, décembre 1964 (Benjamin).

[2] Lefschetz, S., *L'analysis situs et la géométrie algébrique* (Gauthier-Villars), 1924, reproduit dans : *Selected papers* (Chelsea Publ. Co.).

[3] Rankin, R. A., *Contribution to the theory of Ramanujan's function* $\tau(n)$ *and similar arithmetical functions*, II, Proc. Camb. Soc., **35** (1939), 351-372.

[4] Weil, A., *Numbers of solutions of équations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), p. 497-508.

[SGA] *Seminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* (IHES) :

[SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (dirigé par Artin, M., Grothendieck, A. et Verdier, J.-L.), Lecture Notes in Math., **269**, **270**, **305**.

[SGA 5] *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, diffusé par l'IHES.

[SGA 7] *Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique*,

1re partie : dirigé par Grothendieck, A., Lecture Notes in Math., **288**.

2^{e} partie : par Deligne, P. et Katz, N., Lecture Notes in Math., **340**.

1973年9月20日