Bourbaki 交换代数学 (一)

译自法文

目　录

引　论 7

这部《**交换代数学**》将要讨论的是一些出现在代数数论和 (晚近的) 代数几何理论 (参照 历史注记) 的发展过程中的问题。自十九世纪以来，这两个理论开始逐渐展现出十分显著的相似性；在寻找各自问题的解决办法的过程中，人们逐渐整理总结出若干一般的概念和方法，它们的应用范围并不局限于代数整数环和代数函数环；与以往一样，我们将在最一般的框架下来考察这些概念，这样做有助于理解它们的真实背景和相互关联。因而我们在本部书中所要考察的诸概念原则上可以应用到任何交换环及它们上面的模之上；有必要特别指出的是，通常来说，为了得到更加实质性的结果，我们必须引入一些适当的有限性条件 (这些条件在古典问题中总是成立的)，比如说，假设是有限型的模或者是 Noether 环等等。

前面几章所要讨论的主要概念可以大致归纳成下面几个方面：

I. *局部化和整体化*：比如我们来看一个 Diophantus 方程组：

$$(*) \qquad P_i(x_1, \ldots, x_m) \;=\; 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

诸 P_i 都是以有理整数为系数的多项式，我们想找到它的有理整数解 (x_i)。第一 8
步可以先来寻找它的*有理数解*，这相当于把诸 P_i 的系数简单地看作是 $\mathbb{Z}$ 的*分式域* $\mathbb{Q}$ 中的元素，并且在 $\mathbb{Q}$ 中考虑同样的问题，即寻找它的取值在 $\mathbb{Q}$ 中的解。第二步是对于一个指定的素数 p，寻找那些分母不能被 p 整除的有理数解 (易见整数解都满足这个条件)；这就相当于关注 $\mathbb{Q}$ 的一个子环 $\mathbb{Z}_{(p)}$，由满足上述条件的有理数所组成，称为 $\mathbb{Z}$ 的对应于素数 p 的*局部环*。易见由 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的过程与由 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的过程本质上是一样的：即这两者都是规定分母不能落在一个给定的素理想之中 (前者是理想 (0)，后者是理想 (p))。“局部环”这个词本身就是来自于代数几何，这个概念在此处是以非常自然的方式表现出来的：比如说，在复系数的一元有理函数环 $\mathbb{C}(X)$ 中，素理想 $(X-\alpha)$ 所对应的局部环就是由那些在点 α 处“正常” (也就是说，在该点处没有极点) 的有理分式所组成的环。

所有的 Diophantus 问题，或者更一般的，所有关于 A 模 (A 是交换环) 的问题，都可以分解为两个问题：先是对于 A 的每个素理想 $\mathfrak{p}$，在对应的局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 中寻求问题的解 (“局部化”)，然后，假设对*所有* $\mathfrak{p}$，“局部”问题的解都已知道，我们想知道这能不能给出最初那个问题的解 (“从局部回到整体”)。第 II 章的主要目的就是考察这两个过程，而且我们将看到，“局部化”并不仅仅联系着素理想，它可以适用于更大的范围。

II. *局部环的完备化*：局部环 A 和域具有一个共同的性质，即只有*唯一*的极大理想 $\mathfrak{m}$。可以利用这件事把一个关于 A 模的问题 (在一定程度上) 化归为一个关
于*向量空间*的问题，这次是通过取商环 $A/\mathfrak{m}$，因为后者是一个域。比如再回到前 9
面的 Diophantus 方程组 $(*)$，则这个想法根本就是所谓“模 p 约化”的手法，它把原方程变成了模 p 同余下的方程，这件事自然地出现在数论的早期工作之中。

尽管如此，很明显我们不能期待这样就可以完全解答最初的问题，而且为了获取更精确的信息，我们需要不只考虑模 $\mathfrak{m}$ 同余，还要考虑模 $\mathfrak{m}^n$ 的“高阶”同余，其中整数 $n > 0$ 是任意的。可以认为，随着 n 的逐渐增大，我们越来越“接近”最初的问题 (比如在 $A = \mathbb{Z}$ 的场合，根本的原因是一个整数 $\neq 0$ 不可能被一

个给定素数 p 的*所有*方幂 p^n 所整除；从而只要取 n 足够大，一个整数的信息可以从它的模 p^n 约化中读出来）。把这个想法转换成数学的语言，这相当于在环 A 上引入一个*拓扑* (参照《**一般拓扑学**》, III (3版), § 6)，使得诸 $\mathfrak{m}^n$ 构成 0 的一个基本邻域组。然而如果比如说我们已经对*所有*整数 $k > 0$ 求解了同余式方程组

$$(**) \qquad P_i(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0 \pmod{p^k} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \ ,$$

我们仍然不能说知道了方程组 $(*)$ 在局部环 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 中的解；而只能说知道了 $(*)$ 在拓扑环 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的完备化 $\widehat{\mathbb{Z}}_{(p)}$ 中的解。

最初的问题，经过这番减弱之后，最终归结为形如 $A/\mathfrak{m}^n$ 的局部环上的问题，这种环和一般的局部环相比更加接近域，因为它们的根是幂零的；在古典代数几何中，这相当于从"微分"的角度来考察给定点的邻域上的问题。

第 III 章将一般地考察这种拓扑学概念在局部环理论上的应用。在第 VI 章中，我们将考察此课题的一个更为特殊的侧面，即"赋值环"的理论，尽管它也适用于考察代数几何中的一些精细问题，但更多的是出现在代数数域的算术理论
10 中，这里我们遇到的是一类特别单纯的局部环（就像 $\mathbb{Z}_{(p)}$），在其中整除关系成为主理想集合上的一个*完全序关系* (参照《**代数学**》, VI, § 1)。

从一个环 A 到它的局部化 $A_{\mathfrak{p}}$ 和到它的完备化 $\widehat{A}$ 这两个操作具有一个共同的性质，即 A 模 $A_{\mathfrak{p}}$ 和 $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ 的*平坦性*，这个性质意味着此类 A 模与任意 A 模的张量积有些类似于向量空间的张量积，也就是说，不像一般情形那么复杂和难以把握。第 I 章的主题就是讨论和这个概念有关的一些性质，它们也适用于非交换环上的模。

III. *整型扩张和理想的分解.* 为了在代数数域中考察整除性的问题，就有必要首先在这种域 K 中引入*整数*的概念，作为 $\mathbb{Q}$ 中的有理整数概念的推广。第 V 章将讨论与这个"代数整数"概念相关的一般理论，我们将看到，它关系着一些很强的有限性条件：这个理论可以应用到*任何*交换环上，而且不仅在算术问题中，也在代数几何中，甚至在复数域 $\mathbb{C}$ 上的"解析空间"的现代理论中，都非常值得关注。

在很长一段时间里，把古典算术理论扩展到代数整数环上的一个主要障碍是，有理整数上的素因子分解定理不能推广到后一类环上。直到理想理论提出以后才克服了这个困难：所要的唯一分解性在理想的层面上得以建立，素理想的概念才是素数概念的自然推广。此外我们也可以把这个结果看作是"从局部到整体"的过程得以实现的一个典型例证：对于一个 $x \in K$ 来说，知道了 K 上的所有"赋值"在 x 处的取值，就可以把 x 确定到只差一个可逆整数。

11 在那些比代数整数环更复杂的环中（比如在多元多项式环中），上述结果不再成立。此时我们仍然能够把一个理想典范地联系到一个素理想的集合上：比如在代数几何中，若我们考虑 K^n （K 是任何域) 的一个由一组多项式方程 $P_\alpha = 0$ 所定义的子多样体，则这个子多样体的*不可约分支*可以一一对应到某个素理想集合中的极小元上，这个素理想的集合则是直接关联到这些 P_α 所生成的理想上。进而可以（限于考虑 Noether 环) 对任意理想给出一个"分解"，略粗于分解为素理想的乘积：事实上，乘积必须被换成交集，素理想的方幂也要换成"准素"

理想，它们联系着附随于该理想的素理想（但不是素理想的方幂的直接推广）。第 IV 章会引入附随于一个理想的素理想的概念，并考察它们的性质；我们也会证明刚刚提到的“准素分解”的存在性及它的某种唯一性；然而现在看来，这些分解仅仅起着一些辅助性的作用，更本质的概念反而是那些附随于一个理想的素理想。

在第 VII 章中，我们将更细致地考察这样一些环，它们在素理想分解的性质上比较接近于代数整数环；我们将在这些环中引入“除子”的概念，它是上述分解的几何学侧面，并且在代数几何中起着重要的作用。

最后，第 VIII 及其后的内容将讨论一些在代数几何中更关心的概念，而不是算术理论所关心的 (因为在那里这些概念是平凡的)，特别是维数的理论。

循着这些概念，我们就可以抵达代数几何的前沿，虽说前沿是不断变动而且
难于追踪的。如果交换代数对于发展代数几何的一般理论来说是一个基本工具的 12
话，那么反过来（正如我们在前面已经隐约看到的那样)，几何语言同样也非常适合于表达交换代数中的很多定理，并且还提供了一定的直观视野，这在抽象的代数学中自然是很缺乏的；随着代数几何的思考范围一步一步地扩大，代数语言和几何语言将更加趋于交汇和融合。

第一章　平坦模[1] 13

除非特别声明，本章出现的所有环都含单位元；所有环同态都把单位元映到单位元。当说到环 A 的一个子环时，我们总要求该子环包含 A 的单位元。

若 A 是一个环，M 是一个 A 左模，U（相应的，V）是 A（相应的，M）的一个加法子群，还记得我们用 UV 或 $U.V$ 来表示 M 的这样一个加法子群，它是由全体乘积 uv 所生成的，其中 $u \in U$，$v \in V$（《**代数学**》, VIII, §6, no 1）。若 $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，则令 $\mathfrak{a}^0 = A$。对任意集合 E，我们都用 1_E（或者直接用 1，只要不会导致误解）来表示 E 到自身的恒同映射。

还记得模的公理化定义里曾要求，若 E 是环 A 上的一个左（相应的，右）模，并且 1 是指 A 的单位元，则对任意 $x \in E$，均有 $1.x = x$（相应的，$x.1 = x$）(《**代数学**》, II (3 版), §4, no 1)。若 E 和 F 是两个 A 左模（相应的，A 右模），还记得我们用 $\mathrm{Hom}_A(E, F)$（或简记为 $\mathrm{Hom}(E, F)$）来表示 E 到 F 的全体同态的加法群 (前引, §1, no 2)。适当混用一下记号，我们也经常用 0 来表示一个只含中性元的模。

[1]除了 §4 之外，本章的主要结果并不依赖于第二套中的其他分卷。译注：？？？

14 §1 图表和正合序列

n° 1 图表

现在比如设 A, B, C, D, E 是五个集合，并设 f 是 A 到 B 的一个映射，g 是 B 到 C 的一个映射，h 是 D 到 E 的一个映射，u 是 B 到 D 的一个映射，v 是 C 到 E 的一个映射。为了更有效地陈述这样一类条件，我们经常使用图表来说话；比如上面所说的情形就被表达成下面的图表 (《集合论》, II, §3, no 4)：

(1)
$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "v"] \\
& D \arrow[r, "h"'] & E
\end{tikzcd}
$$

在这样的一个图表中，一组符号 $A \xrightarrow{f} B$ 可用来概括下面这件事：f 是 A 到 B 的一个映射。如果对于 f 不存在误解的话，我们也省略掉 f，把它简写为 $A \to B$。

如果 A, B, C, D, E 都是群（相应的，交换群）并且 f, g, h, u, v 都是群同态，则我们也简单地把上述图表 (1) 称为一个*群图表*（相应的，*交换群图表*）。

原则上说，一个图表并不是一个数学对象，仅只是一个*图形*，目的是使推理过程变得直观易懂。在实际运用中，我们仅只把图表当成一种*记号简化器*，它可以使我们避免每次都把所有出现的集合和映射都讲一遍；即我们用“考虑图表 (1)”来代替：“设 A, B, C, D, E 是五个集合... v 是 C 到 E 的一个映射”；例如可以看一下 no 4, 命题 2 的陈述。

n° 2 交换图表

比如考虑下面的图表：

(2)
$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[d, "d"'] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}
$$

15 对于这个图表中的任何一条路径，即由一节一节的箭头首尾相接所形成的折线，我们都把它对应到这样一个映射，从第一节的起点所代表的集合映到最后一节的终点所代表的集合上，也就是该路径的所有中途各节所代表的那些映射的合成。对于图表中的任何顶点，比如说 B，我们都约定有一条起止于 B 的路径，并把它对应到恒同映射 1_B。

比如在 (2) 中，有三条路径是以 A 为起点以 C' 为终点的；对应的映射分别是 $c \circ g \circ f$, $g' \circ b \circ f$ 和 $g' \circ f' \circ a$。所谓一个图表是*交换的*，是指对该图表中任意一对起点和终点相同的路径，对应的两个映射都是相等的；特别的，若一个路径

的终点又回到了起点，则对应的映射必须是恒同。

为了使图表 (2) 是交换的，必须且只需它满足下面的关系：

(3) $$f' \circ a = b \circ f, \qquad g' \circ b = c \circ g, \qquad h' \circ c = d \circ h;$$

换句话说，必须且只需 (2) 中的三个方块图表都是交换的。事实上，关系式 (3) 意味着 $c \circ g \circ f = g' \circ b \circ f$，因为 $c \circ g = g' \circ b$，并且有 $g' \circ b \circ f = g' \circ f' \circ a$，因为 $b \circ f = f' \circ a$；从而以 A 为起点 C' 为终点的三条路径都给出同一个映射。同样可以验证，以 A 为起点 D' 为终点的四条路径（相应的，以 B 为起点 D' 为终点的三条路径）也都给出同一个映射。关系式 (3) 正意味着以 A（相应的，B, C）为起点 B'（相应的，C', D'）为终点的两条路径会给出同一个映射。(2) 中其他各对顶点之间的路径至多有一条，从而图表 (2) 完全是交换的。

在下文中，对于各种类型的图表，我们都会把类似的检验工作留给读者。

n° 3 正合序列 16

还记得我们有下面的定义 (《代数学》, II (3 版), § 1, no 4)：

定义 1. – 设 A 是一个环，F, G, H 是三个 A 右模（相应的，A 左模），f 是 F 到 G 的一个同态，g 是 G 到 H 的一个同态。所谓二元组 (f, g) 是一个正合序列，是指 $g^{-1}(0) = f(F)$，也就是说，g 的核等于 f 的像。

此时我们也称图表

(4) $$F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$$

是一个*正合序列*。

再考虑由四个模和三个同态所组成的图表：

(5) $$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$$

所谓这个图表*在 F 处是正合的*，是指图表 $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ 是一个正合序列；所谓它*在 G 处是正合的*，是指 $F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ 是一个正合序列。若 (5) 在 F 和 G 处都是正合的，则我们称它是*正合的*，或者说这是一个*正合序列*。同样方法可以定义含有任意多项的正合序列。

还记得我们有下面一些结果 (前引)，这里的 E, F, G 表示 A 右模（相应的，A 左模），所有的箭头都是同态，并且 0 是指只有中性元的模：

a) 说 $0 \to E \xrightarrow{f} F$ 是一个正合序列等价于说 f 是*单的*。

b) 说 $E \xrightarrow{f} F \to 0$ 是一个正合序列等价于说 f 是*满的*。

c) 说 $0 \to E \xrightarrow{f} F \to 0$ 是一个正合序列等价于说 f 是一一的，也就是说 f 是 E 到 F 上的一个*同构*。

d) 若 F 是 E 的一个子模，并且以 i 来记 F 到 E 的典范含入，以 p 来记 E 到 17

E/F 的典范罩满，则图表

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E/F \longrightarrow 0 \tag{6}$$

是一个正合序列。

e) 若 $f: E \to F$ 是一个同态，则图表

$$0 \longrightarrow f^{-1}(0) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{p} F/f(E) \longrightarrow 0 \tag{7}$$

（其中 i 是 $f^{-1}(0)$ 到 E 的典范含入，p 是 F 到 $F/f(E)$ 的典范罩满）是一个正合序列。

f) 为了使图表

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \tag{8}$$

成为一个正合序列，必须且只需，能够找到两个模 S, T 和一些同态 $a: E \to S,\ b: S \to F,\ c: F \to T$ 和 $d: T \to G$，满足 $f = b \circ a,\ g = d \circ c$，并使得下面三个序列

$$E \xrightarrow{a} S \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{b} F \xrightarrow{c} T \longrightarrow 0 \tag{9}$$

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{d} G$$

都是正合的。

最后，还记得若 $f: E \to F$ 是一个 A 模同态，我们令 $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0),\ \mathrm{Im}(f) = f(E),\ \mathrm{Coim}(f) = E/f^{-1}(0)$ 和 $\mathrm{Coker}(f) = F/f(E)$。在这些记号下，在 (9) 中可以取 $S = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ 和 $T = \mathrm{Im}(g)$（典范同构于 $\mathrm{Coker}(f)$）。

n° 4 蛇形图表

命题 1. – 考虑交换群的一个交换图表：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"'] \\
A' \arrow[r, "u'"'] & B' \arrow[r, "v'"'] & C'
\end{tikzcd} \tag{10}$$

18 假设 (10) 的两行都是正合的。则有：

(i) 若 c 是单的，则有

$$\mathrm{Im}(b) \cap \mathrm{Im}(u') = \mathrm{Im}(u' \circ a) = \mathrm{Im}(b \circ u) \ 。 \tag{11}$$

(ii) 若 a 是满的，则有

$$\mathrm{Ker}(b) + \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(v' \circ b) = \mathrm{Ker}(c \circ v) \ 。 \tag{12}$$

先证明 (i)。易见我们有

$$\mathrm{Im}(u' \circ a) \ = \ \mathrm{Im}(b \circ u) \ \subseteq \ \mathrm{Im}(b) \cap \mathrm{Im}(u') \ \ 。$$

反之，设 $x \in \mathrm{Im}(b) \cap \mathrm{Im}(u')$。则可以找到 $y \in B$，使得 $x = b(y)$。由于 $v' \circ u' = 0$，故有 $0 = v'(x) = v'(b(y)) = c(v(y))$，遂得到 $v(y) = 0$，因为 c 是单的。由于 (u, v) 是一个正合序列，故可找到 $z \in A$，使得 $y = u(z)$，遂得到 $x = b(u(z))$。

下面证明 (ii)。由于 $v \circ u = 0$ 且 $v' \circ u' = 0$，故易见

$$\mathrm{Ker}(b) + \mathrm{Im}(u) \ \subseteq \ \mathrm{Ker}(v' \circ b) \ = \ \mathrm{Ker}(c \circ v) \ \ 。$$

反之，设 $x \in \mathrm{Ker}(v' \circ b)$。则 $b(x) \in \mathrm{Ker}(v')$，并可找到 $y' \in A'$，使得 $u'(y') = b(x)$，因为序列 (u', v') 是正合的。由于 a 是满的，故可找到 $y \in A$，使得 $a(y) = y'$，遂得到 $b(x) = u'(a(y)) = b(u(y))$；由此推知 $x - u(y) \in \mathrm{Ker}(b)$，这就完成了证明。

引理 1. – 考虑交换群的一个交换图表：

(13)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle a}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle b} \\ A' & \xrightarrow[u']{} & B' \end{array}$$

则存在唯一一个同态 $u_1 : \mathrm{Ker}(a) \to \mathrm{Ker}(b)$，和唯一一个同态 $u_2 : \mathrm{Coker}(a) \to \mathrm{Coker}(b)$，使得图表

(14)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(a) & \xrightarrow{u_1} & \mathrm{Ker}(b) \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j} \\ A & \xrightarrow[u]{} & B \end{array}$$

和

(15)
$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u'} & B' \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathrm{Coker}(a) & \xrightarrow[u_2]{} & \mathrm{Coker}(b) \end{array}$$

都是交换的，其中 i 和 j 是指典范含入，p 和 q 是指典范罩满。 19

事实上，若 $x \in \mathrm{Ker}(a)$，则有 $a(x) = 0$ 和 $b(u(x)) = u'(a(x)) = 0$，从而 $u(x) \in \mathrm{Ker}(b)$，u_1 的存在性和唯一性由此立得。同样的，我们有 $u'(a(A)) = b(u(A)) \subseteq b(B)$，从而 u' 可以（通过取商）给出一个同态 $u_2 : \mathrm{Coker}(a) \to \mathrm{Coker}(b)$，它是唯一一个能使 (15) 交换的同态。

现在我们从一个交换群的交换图表 (10) 出发；依照引理 1，它对应着一个图表

— — —

其中 i,j,k 是典范含入，p,q,r 是典范罩满，u_1,u_2（相应的，v_1,v_2）是典范地联系着 u,u'（相应的，v,v'）的同态，这是根据引理1。可以立即验证这个图表是交换的。

命题 2. – 假设在交换图表 (10) 中，序列 (u,v) 和 (u',v') 都是正合的。则：

(i) 我们有 $v_1\circ u_1=0$；若 u' 是单的，则序列 (u_1,v_1) 是正合的。

(ii) 我们有 $v_2\circ u_2=0$；若 v 是满的，则序列 (u_2,v_2) 是正合的。

(iii) 假设 u' 是单的，并且 v 是满的。则存在唯一一个具有下述性质的同态 $d:\operatorname{Ker}(c)\to\operatorname{Coker}(a)$：若 $x\in\operatorname{Ker}(c)$, $y\in B$ 和 $t'\in A'$ 满足关系式 $v(y)=k(x)$ 和 $u'(t')=b(y)$，则有 $d(x)=p(t')$。进而序列

$$(*)\qquad \operatorname{Ker}(a)\xrightarrow{u_1}\operatorname{Ker}(b)\xrightarrow{v_1}\operatorname{Ker}(c)\xrightarrow{d}$$
$$\xrightarrow{d}\operatorname{Coker}(a)\xrightarrow{u_2}\operatorname{Coker}(b)\xrightarrow{v_2}\operatorname{Coker}(c)$$

是正合的。

先证明 (i)。由于 u_1 和 v_1 分别与 u 和 v 在 $\operatorname{Ker}(a)$ 和 $\operatorname{Ker}(b)$ 上的限制具有相同的图像，故有 $v_1\circ u_1=0$。我们有 $\operatorname{Ker}(v_1)=\operatorname{Ker}(b)\cap\operatorname{Ker}(v)=\operatorname{Ker}(b)\cap\operatorname{Im}(u)=\operatorname{Im}(j)\cap\operatorname{Im}(u)$。然而根据命题1, (i)，若 u' 是单的，则有 $\operatorname{Ker}(v_1)=\operatorname{Im}(j\circ u_1)=\operatorname{Im}(u_1)$。

下面证明 (ii)。由于 u_2 和 v_2 分别来自 u 和 v（通过取商），故易见 $v_2\circ u_2=0$。假设 v 是满的；由于 q 和 p 都是满的，故而依照前提条件和命题1, (ii)，我们有

$$\operatorname{Ker}(v_2)\;=\;q(\operatorname{Ker}(v_2\circ q))\;=\;q(\operatorname{Ker}(v')+\operatorname{Im}(b))\;=\;q(\operatorname{Ker}(v'))$$
$$=\;q(\operatorname{Im}(u'))\;=\;\operatorname{Im}(q\circ u')\;=\;\operatorname{Im}(u_2\circ p)\;=\;\operatorname{Im}(u_2)\;。$$

最后证明 (iii)。对于 $x\in\operatorname{Ker}(c)$，可以找到 $y\in B$，使得 $v(y)=k(x)$，因为 v 是满的；进而，我们有 $v'(b(y))=c(k(x))=0$，因此可以找到唯一的 $t'\in A'$，使得 $u'(t')=b(y)$，因为 u' 是单的。下面证明元素 $p(t')\in\operatorname{Coker}(a)$ 是不依赖于元素 $y\in B$（满足 $v(y)=k(x)$）的选择的。事实上，若 $y'\in B$ 是另一个元素，也满足 $v(y')=k(x)$，则有 $y'=y+u(z)$ 其中 $z\in A$；下面我们证明，若 $t''\in A'$ 满足 $u'(t'')=b(y')$，则有 $t''=t'+a(z)$；事实上，我们有 $u'(t'+a(z))=u'(t')+u'(a(z))=b(y)+b(u(z))=b(y+u(z))=b(y')$。由此推知 $p(t'')=p(t')+p(a(z))=p(t')$。从而可以令 $d(x)=p(t')$，这样就定义出一个映射 $d:\operatorname{Ker}(c)\to\operatorname{Coker}(a)$。

现在若 x_1,x_2 是 $\operatorname{Ker}(c)$ 中的元素，并且 $x=x_1+x_2$，则可以取 B 中的元素 y_1 和 y_2，使得 $v(y_1)=k(x_1)$ 且 $v(y_2)=k(x_2)$，然后选择 $y\in B$ 是元素 y_1+y_2；则易见 $d(x)=d(x_1)+d(x_2)$，从而 d 是一个同态。

假设 $x=v_1(x')$，其中 $x'\in\operatorname{Ker}(b)$；则可以取 $y\in B$ 是元素 $j(x')$。由于 $b(j(x'))=0$，故可推知 $d(x)=0$，从而 $d\circ v_1=0$。反之，假设 $d(x)=0$。则在上述记号下，我们有 $t'=a(s)$，其中 $s\in A$。在这种情况下，我们有 $b(y)=u'(t')=u'(a(s))=b(u(s))$，即是说 $b(y-u(s))=0$。从而元素 $y-u(s)$ 具有 $j(n)$ 的形状，其中 $n\in\operatorname{Ker}(b)$，且我们有 $k(x)=v(y)=v(u(s)+j(n))=v(j(n))=k(v_1(n))$；由于 k 是单的，故有 $x=v_1(n)$，这就证明了序列 $(*)$ 在 $\operatorname{Ker}(c)$ 处是正合的。

最后，（在同样的记号下）我们有 $u_2(d(x))=u_2(p(t'))=q(u'(t'))=q(b(y))=$

21 0，从而 $u_2 \circ d = 0$。反之，假设 $\mathrm{Coker}(a)$ 中的一个元素 $w = p(t')$ 满足 $u_2(w) = u_2(p(t')) = 0$（其中 $t' \in A'$）。从而我们有 $q(u'(t')) = 0$，因而 $u'(t') = b(y)$，其中 $y \in B$；由于 $v'(u'(t')) = 0$，我们有 $v'(b(y)) = 0$，从而 $c(v(y)) = 0$，换句话说 $v(y) = k(x)$，其中 $x \in \mathrm{Ker}(c)$，且根据定义 $w = d(x)$，这就证明了序列 $(*)$ 在 $\mathrm{Coker}(a)$ 处是正合的。我们在 (i) 中已经看到它在 $\mathrm{Ker}(b)$ 处是正合的，又在 (ii) 中看到它在 $\mathrm{Coker}(b)$ 处是正合的，这就完成了 (iii) 的证明。

注解 – 如果图表 (10) 中的那些群都是一个环 A 上的模（比如说右模），并且其中的同态都是 A 模同态，则可以立即验证命题 2, (iii) 中所定义的同态 d 也是一个 A 模同态：若 $x \in \mathrm{Ker}(c)$ 且 $\alpha \in A$，并且 $y \in B$ 满足 $v(y) = k(x)$，则只需注意到 $v(y\alpha) = k(x\alpha)$。

推论 1. – 假设图表 (10) 是交换的，并且它的各行都是正合的。则有：
(i) 若 u', a 和 c 都是单的，则 b 是单的。
(ii) 若 v, a 和 c 都是满的，则 b 是满的。

陈言 (i) 是命题 2 的陈言 (i) 的一个推论：事实上，我们有 $\mathrm{Ker}(a) = 0$ 和 $\mathrm{Ker}(c) = 0$，从而 $\mathrm{Ker}(b) = 0$。
陈言 (ii) 是命题 2 的陈言 (ii) 的一个推论：事实上，我们有 $\mathrm{Coker}(a) = 0$ 和 $\mathrm{Coker}(c) = 0$，从而 $\mathrm{Coker}(b) = 0$。

推论 2. – 假设图表 (10) 是交换的，并且它的各行都是正合的。在这些条件下：
(i) 若 b 是单的，并且 a 和 v 都是满的，则 c 是单的。
(ii) 若 b 是满的，并且 c 和 u' 都是单的，则 a 是满的。

为了证明 (i)，考虑图表

$$\begin{tikzcd}
u(A) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "a'"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"'] \\
u'(A') \arrow[r, "w'"'] & B' \arrow[r, "v'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

其中 a' 与 b 在 $u(A)$ 上的限制具有相同的图像，w 和 w' 是典范含入；易见这个图表是交换的，并且它的各行都是正合的。进而，w' 是单的，并且根据前提条件 v 是 22
满的；从而根据命题 2, (iii)，我们有一个正合序列。

$$0 = \mathrm{Ker}(b) \longrightarrow \mathrm{Ker}(c) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(a') = 0$$

因为 b 是单的，并且 a' 是满的；故得 $\mathrm{Ker}(c) = 0$。
为了证明 (ii)，考虑图表

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "b"'] & v(B) \arrow[d, "c'"'] \\
A' \arrow[r, "u'"'] & B' \arrow[r, "w'"'] & v'(B')
\end{tikzcd}$$

这一回映射 c' 与 c 在 $v(B)$ 上的限制具有相同的图像，并且 w 和 w' 分别与 v 和 v' 有相同的图像；这个图表是交换的，并且它的各行都是正合的。进而，w 是满的，并且根据前提条件 u' 是单的；从而根据命题 2, (iii)，我们有一个正合序列

$$0 \;=\; \mathrm{Ker}(c') \;\xrightarrow{d}\; \mathrm{Coker}(a) \;\longrightarrow\; \mathrm{Coker}(b) \;=\; 0$$

因为 b 是满的，并且 c' 是单的；故得 $\mathrm{Coker}(a) = 0$。

§ 2 平坦模[2]

n° 1 张量积复习

设 A 是一个环，E 是一个 A 右模，M 是一个 A 左模。我们在《代数学》, II (3 版), § 3, no 1 中定义了张量积 $E\otimes_A M$，它是一个 $\mathbb{Z}$ 模。若 E'（相应的，M'）是一个 A 右模（相应的，A 左模），并且 $u : E \to E'$（相应的，$v : M \to M'$）是一个同态，则我们也定义了 (前引, no 2) 一个 $\mathbb{Z}$ 同态

$$u \otimes v \ : \ E \otimes_A M \ \longrightarrow \ E' \otimes_A M' \ 。$$

引理 1. – 设 $M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} M'' \to 0$ 是 A 左模的一个正合序列，并设 E 是一个 A 右模。则序列

− − −

是交换群的一个正合序列。

这正是《代数学》, II (3 版), § 3, no 6, 命题 5 的推论。 23

由此得知，对任意 A 左模同态 $u : M \to N$，$E \otimes_A (\mathrm{Coker}\, u)$ 都可以典范等同于 $\mathrm{Coker}(1_E \otimes u)$，这是根据引理 1（应用到正合序列

$$M \ \xrightarrow{u} \ N \ \longrightarrow \ \mathrm{Coker}\, u \ \longrightarrow \ 0$$

上）。

记号与引理 1 相同，我们知道 (前引)，即使 v 是内射的，也就是说序列 $0 \to M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} M'' \to 0$ 是正合的，也未必能推出 $1_E \otimes v$ 是单的，从而一般不能把 $E \otimes_A M'$ 等同于 $E \otimes_A M$ 的一个子群。不过还记得 (《代数学》, II (3 版), § 3, no 7, 命题 7 的推论 5) 我们有下面的结果：

引理 2. – 若 $v : M' \to M$ 是单的，并且 $v(M')$ 是 M 的直和因子，则同态 $1_E \otimes v$ 是单的，并且它的像是 $E \otimes_A M$ 的直和因子。

n° 2 M 调平坦模

定义 1. – 设 A 是一个环，E 是一个 A 右模，M 是一个 A 左模。所谓 E 对于 M 来说是平坦的（或者 M 调平坦的），是指对任意 A 左模 M' 和任意单同态 $v : M' \to M$，同态 $1_E \otimes v : E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$ 都是单的。

同样的，对任意 A 右模 N，可以定义 N 调平坦左模的概念。说一个 A 右模 E 对于一个 A 左模 M 来说是平坦的，等价于说，把 E 看作是 A° 左模（还记得 A° 是指 A 的反转环）时它对于 A° 右模 M 来说是平坦的。

[2]对于已经熟悉同调代数的读者来说，§ 4 中提供了另外一些关于平坦模的本征描述。

引理 3. – 为了使一个 A 右模 E 是 M 调平坦的，只需对于 M 的任意有限型子模 M'，典范同态 $1_E \otimes j : E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$ （j 是典范含入 $M' \to M$）都是单的。

24 事实上，假设这个条件是成立的，并设 N 是 M 的任意一个子模。假设元素 $z = \sum_i x_i \otimes y_i \in E \otimes_A N$ $(x_i \in E, y_i \in N)$ 在 $E \otimes_A M$ 中的典范像等于零，并设 M' 是由诸 y_i 所生成的 N 的有限型子模；由于根据前提条件合成映射 $E \otimes_A M' \to E \otimes_A N \to E \otimes_A M$ 是单的，故知和式 $z' = \sum_i x_i \otimes y_i$ 在看作是 $E \otimes_A M'$ 中的元素时等于零。而由于 z 是 z' 的像，故也有 $z = 0$，遂得到引理。

引理 4. – 设 E 是一个 A 右模，M 是一个 A 左模，并且 E 是 M 调平坦的。于是若 N 是 M 的一个子模或者一个商模，则 E 是 N 调平坦的。

N 是子模的情形是容易的，因为若 N' 是 N 的一个子模，则合成同态

— — —

是单的，从而 $E \otimes_A N' \to E \otimes_A N$ 也是如此。以下假设 N 是 M 的一个商模，也就是说，存在一个正合序列 $0 \to R \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$。设 N' 是 N 的一个子模，$M' = p^{-1}(N')$。令 i' 是 R 到 M' 的这样一个映射，它与 i 有相同的图像，p' 是罩满 $M' \to N'$，它与 p 在 M' 上的限制有相同的图像，r 是 R 到 R 的恒同映射，m 是典范含入 $M' \to M$，n 是典范含入 $N' \to N$。图表

— — —

是交换的，并且它的各行都是正合的。

为了写起来简单，对任意 A 左模 Q，令 $T(Q) = E \otimes_A Q$，同时对任意 A 左模同态 v，令 $T(v) = 1_E \otimes v$。图表

— — —

25 是交换的，并且它的各行都是正合的，这是依据 no 1, 引理 1。进而，因为 E 是 M 调平坦的，所以同态 $T(m)$ 是单的。由于 $T(r)$ 和 $T(p')$ 都是满的，故由 §1, no 4, 命题 2 的推论 2 知，$T(n)$ 是单的，这就证明了引理。

引理 5. – 设 $(M_\iota)_{\iota \in I}$ 是一族 A 左模，$M = \bigoplus_{\iota \in I} M_\iota$ 是它们的直和，E 是一个 A 右模。若对任意 $\iota \in I$，E 对于 M_ι 来说都是平坦的，则 E 对于 M 来说是平坦的。

a) 首先假设 $I = \{1, 2\}$，并设 M' 是 $M = M_1 \oplus M_2$ 的一个子模，并把 M_1 和 M_2 典范等同于 M 的子模。我们以 M'_1 来记交集 $M' \cap M_1$，以 M'_2 来记 M' 在 M_2 中的像，通过 M 到 M_2 上的典范投影 p。我们有一个图表

— — —

其中 v_1, v, v_2, i, i' 都是典范含入，映射 p' 与 p 在 M' 上的限制有相同的图像，它是满的？？？。可以立即验证这个图表是交换的，并且它的各行都是正合的。记号 $T(Q)$ 和 $T(v)$ 与引理 4 证明中的意义相同，我们有一个交换图表

— — —

依照no 1, 引理1，该图表的两行都是正合的；由于E对于M_1和M_2来说是平坦的，故知$T(v_1)$和$T(v_2)$都是单的；进而，依照no 1, 引理2，$T(i)$是单的。于是§1, no 4, 命题2的推论1表明$T(v)$是单的，因而E是M调平坦的。

b) 若I是一个有限集，包含n个元素，则可以对n进行归纳，并使用a)。

c) 在一般情形中，设M'是M的一个有限型子模。则可以找到指标集I的一个有限子集J，使得M'包含在直和$M_J = \bigoplus_{\iota \in J} M_\iota$之中。依照b)，$E$对于$M_J$来说是平坦的；从而典范同态$E \otimes_A M' \to E \otimes_A M_J$是单的。另一方面，由于$M_J$是$M$的 26
直和因子，故知典范同态$E \otimes_A M_J \to E \otimes_A M$是单的 (no 1, 引理2)。通过取合成，可以由此得知，$E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$是单的，从而$E$对于$M$来说是平坦的，这是依据引理3。

n° 3 平坦模

命题1. – 设E是一个A右模。以下三个性质是等价的：

a) E对于A来说是平坦的，（换句话说，对于A的任意左理想$\mathfrak{a}$，典范同态$E \otimes_A \mathfrak{a} \to E \otimes_A A_s = E$都是单的）。

b) E是M调平坦的，对任意A左模M。

c) 对任意A左模和同态的正合序列

– – –

序列

– – –

都是正合的。

易见b)蕴涵a)。反之，假设a)成立；依照no 2, 引理5，E对于任意自由A左模来说都是平坦的；由于任何A左模都同构于一个自由模的商 (《代数学》, II (3版), §1, no 11, 命题20)，故由no 2, 引理4知，E对于M来说是平坦的。

下面证明c)蕴涵b)。若$v : M' \to M$是一个单同态，则序列$0 \to M' \xrightarrow{f} M$是正合的；依照c)，序列$0 \to E \otimes_A M' \xrightarrow{1 \otimes v} E \otimes_A M$是正合的；这就意味着$1 \otimes v$是单的，换句话说，$E$是$M$调平坦的。

最后，蕴涵关系b) ⇒ c)是下面这个更具体的引理的推论：

引理6. – 若$M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} M''$是$A$左模的一个正合序列，并且$E$是一个对于$M''$来说平坦的$A$右模，则序列

– – –

是正合的。

记号$T(Q)$和$T(v)$的含义与no 2, 引理4证明中的相同。令$M''_1 = w(M)$，并 27
设$i : M''_1 \to M''$是典范含入，p是M到M''_1的映射，与w有相同的图像。序列$M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{p} M''_1 \to 0$是正合的，故由no 1, 引理1知，序列

– – –

是正合的。此外，由于 E 是 M'' 调平坦的，故知映射 $T(i): T(M_1'') \to T(M'')$ 是单的，再由于 $T(i) \circ T(p) = T(w)$，故知序列

$$T(M') \xrightarrow{T(v)} T(M) \xrightarrow{T(w)} T(M'')$$

是正合的 (§1, no 3)。

定义 2. – 所谓一个 A 右模 E 是平坦的，是指它满足命题 1 中的等价条件。

可以同样地定义平坦 A 左模的概念。说一个 A 右模 E 是平坦的等价于说 E，看作是 A° 左模，是平坦的。

注解 – 1) 依照 no 2, 引理 3，为了使一个 A 右模 E 是平坦的，必须且只需对于 A 的任意有限型左理想 $\mathfrak{a}$，映满 $E\mathfrak{a}$ 的典范映射 $E \otimes_A \mathfrak{a} \to E$ (命题 1) 都是单的。

2) 设 E 是一个平坦 A 右模。若 M' 是 A 左模 M 的一个子模，则典范含入 $E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$ 使我们可以把 $E \otimes_A M'$ 等同于 $E \otimes_A M$ 的一个子群。准此，设 N 是一个 A 左模，$u: M \to N$ 是一个同态，$K = \operatorname{Ker} u$, $I = \operatorname{Im} u$。考察正合序列。

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{u} N$$

立即表明 (命题 1)，$E \otimes_A (\operatorname{Ker} u)$ 可以等同于 $\operatorname{Ker}(1_E \otimes u)$。另一方面，令 u' 是满同态 $M \to I$，与 u 有相同图像，并且令 i 是典范含入 $I \to N$，则 $1_E \otimes u'$ 是满的 (no 1, 引理 1) 并且 $1_E \otimes i$ 是单的，因为 E 是平坦的。由于 $1_E \otimes u = (1_E \otimes i) \circ (1_E \otimes u')$，故知 $E \otimes_A (\operatorname{Im} u)$ 可以等同于 $\operatorname{Im}(1_E \otimes u)$。

28 **命题 2**. – (i) 设 $(E_\iota)_{\iota \in I}$ 是一族 A 右模。为了使 $E = \bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$ 是平坦的，必须且只需每个 E_ι 都是平坦的。

(ii) 设 I 是一个有序集，$(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ 是 A 右模的一个归纳系 (《代数学》, II (3 版), §6, no 6)。若每个 E_α 都是平坦的，则 $E = \varinjlim E_\alpha$ 是平坦的。

设 $M' \to M$ 是 A 左模的一个单同态。

(i) 为了使直和同态

– – –

是单的，必须且只需每个同态 $E_\iota \otimes_A M' \to E_\iota \otimes_A M$ 都是如此 (《代数学》, II (3 版), §1, no 6, 命题 7 的推论 1)，这就证明了 (i)，因为 $\bigoplus_{\iota \in I}(E_\iota \otimes_A M)$ 可以典范等同于 $E \otimes_A M$ (《代数学》, II (3 版), §3, no 7, 命题 7)。

(ii) 根据前提条件，每个序列

$$0 \longrightarrow E_\alpha \otimes_A M' \longrightarrow E_\alpha \otimes_A M$$

都是正合的；从而序列

– – –

也是如此，因为取归纳极限与张量积可以交换 (《代数学》, II (3 版), §6, no 7, 命题 12)，并且保持正合性 (ibid., §6, no 6, 命题 8)。

n° 4 平坦模的一些例子

1) 对任意环 A，易见 A_d 都是一个平坦 A 模 (《代数学》, II (3 版), §3, no 4, 命题 4)。于是由 no 3, 命题 2, (i) 知，任何自由 A 右模，或者更一般的，任何投射 A 右模 (《代数学》, II (3 版), §2, no 2) 都是平坦 A 模。

2) 若 A 是一个半单环 (《代数学》, VIII, §5, no 1, 定义 1)，则任何 A 右模 E 都是半单的，从而是一些单模的直和；由于每个单模都同构于 A_d 的一个直和因 29
子 (ibid., §5, no 1, 命题 6)，故知 E 是投射的，因而是平坦的，这是根据 1) (参照习题 16)。

* 3) 在第 II 章和第 III 章中，我们将更加细致地考察平坦 A 模的两个重要的例子：A 的分式环 $S^{-1}A$ 以及 A 在 $\mathfrak{I}$ 进拓扑下的分离完备化 $\widehat{A}$。*

命题 3. – 设 A 是一个环，E 是一个 A 右模。

(i) 假设 E 是平坦的。则对于 A 的任意元素 a，只要它不是右零因子 [3]，关系式 $x \in E$, $xa = 0$ 就蕴涵 $x = 0$。

(ii) 假设 A 是一个交换整环，且它的任何有限型理想都是主理想（比如说主理想整环 (《代数学》, VII, §1, no 1)）。则为了使 E 是平坦的，必须且只需 E 是无挠的。

首先证明 (i)。设 $v : A_s \to A_s$ 是 A 左模的同态 $t \mapsto ta$；前提条件即意味着 v 是单的。由于 E 是平坦的，故知同态 $1_E \otimes v : E \otimes_A A_s \to E \otimes_A A_s$ 也是单的。如果把 $E \otimes_A A_s$ 典范等同于 E，则 $1_E \otimes v$ 化为 E 的自同态 $x \mapsto xa$。从而关系式 $xa = 0$ 蕴涵 $x = 0$。

下面证明 (ii)。根据 (i)，若 E 是平坦的，E 是无挠的。反之，设 E 是一个无挠 A 模；下面我们来验证，对于 A 的任意有限型理想 $\mathfrak{a}$，典范同态 $E \otimes_A \mathfrak{a} \to E$ 都是单的 (no 3, 注解 1)。若 $\mathfrak{a} = (0)$，则这个陈言是显然的；若否，则根据前提条件，我们有 $\mathfrak{a} = Aa$，其中 $a \in A$ 且 $a \neq 0$，于是 $t \mapsto ta$ 是 A 到 $\mathfrak{a}$ 上的一个同构 v；令 i 是典范含入 $\mathfrak{a} \to A$，$i \circ v$ 是 a 在 A 中产生的同筋。则 $1_E \otimes (i \circ v)$ 是 a 在 E 中产生的同筋，并且是单的，因为 E 已假设是无挠的。然则我们有 $1_E \otimes (i \circ v) = (1_E \otimes i) \circ (1_E \otimes v)$；由于 $1_E \otimes v$ 是一个同构，故知 $l_E \otimes i$ 是单的，这就完成了证明。

例子 – 把命题 3 应用到环 $\mathbb{Z}$ 上，我们看到 $\mathbb{Q}$ 是一个平坦 $\mathbb{Z}$ 模，但是 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$（取 $n \geqslant 2$）不是一个平坦 $\mathbb{Z}$ 模。

n° 5 商模的平坦性 30

命题 4. – 设 E 是一个 A 右模。以下三个性质是等价的：

a) E 是平坦的。

b) 对于 A 右模的任意正合序列

— — —

[3] 还记得环 A 中的一个*右零因子*（相应的，*左零因子*）是这样一个元素 $b \in A$，它使得映射 $x \mapsto xb$（相应的，$x \mapsto bx$）不是单的。

和任意 A 左模 F，序列

— — —

都是正合的。

c) 存在一个正合序列 (1)，其中 H 是平坦的，使得对于 A 的任意有限型左理想 $\mathfrak{a}$，序列 (2) 对于形如 $A_s/\mathfrak{a}$ 的 A 左模 F 都是正合的。

首先证明 a) 蕴涵 b)。A 左模 F 同构于某个自由模的商 (《代数学》, II (3 版), §1, no 11, 命题 20)；换句话说，我们有一个正合序列

— — —

其中 L 是自由的。考虑图表

— — —

易见这个图表是交换的，并且它的各行和各列都是正合的，这是依据 no 1, 引理 1；进而，由于 $1_G \otimes p$ 和 $1_H \otimes p$ 都是满的 (no 1, 引理 1)，故有 $G \otimes F = \operatorname{Coker}(1_G \otimes i)$， $H \otimes F = \operatorname{Coker}(1_H \otimes i)$； $w \otimes 1_R$ 是满的 (no 1, 引理 1)；最后，由
31 于 L 是自由的，从而是平坦的，故知 $v \otimes 1_L$ 是单的。从而可以应用蛇形图表 (§1, no 4, 命题 2, (iii)) 来给出一个正合序列

— — —

准此，若 E 是平坦的，则 $1_E \otimes i$ 是单的，换句话说 $\operatorname{Ker}(1_E \otimes i) = 0$，并且正合序列 (4) 表明 $v \otimes 1_F$ 是单的，从而序列 (2) 是正合的（有见于 no 1, 引理 1）。

由于 b) 显然蕴涵 c)，故我们只消再证明 c) 蕴涵 a)。考虑图表 (3)，取 $R = \mathfrak{a}$, $L = A_s$, $F = A_s/\mathfrak{a}$，并且应用正合序列 (4)。根据前提条件，$v \otimes 1_F$ 是单的，从而 $\operatorname{Im}(d) = 0$；进而，由于 H 是平坦的，我们有 $\operatorname{Ker}(l_H \otimes i) = 0$；从而序列 (4) 的正合性意味着 $\operatorname{Ker}(1_E \otimes i) = 0$，换句话说，$1_E \otimes i$ 是单的，这就证明了 E 是平坦的 (no 3, 注解 1)。

命题 5. – 设 $0 \to E' \xrightarrow{v} E \xrightarrow{w} E'' \to 0$ 是 A 右模的一个正合序列。假设 E'' 是平坦的。则为了使 E 是平坦的，必须且只需 E' 是平坦的。

设 $u : F' \to F$ 是 A 左模的一个单同态。考虑图表

— — —

它是交换的，并且它的各行都是正合的 (no 1, 引理 1)。因为 E'' 是平坦的，所以 $1_{E''} \otimes u$ 是单的；进而，命题 4 证明 $v \otimes 1_{F'}$ 和 $v \otimes 1_F$ 都是单的。准此，若 E 是平坦的，则 $1_E \otimes u$ 是单的，从而 $(1_E \otimes u) \circ (v \otimes 1_{F'}) = (v \otimes 1_F) \circ (1_{E'} \otimes u)$ 也是单的；由此推知 $1_{E'} \otimes u$ 是单的，因而 E' 是平坦的。反过来，若 E' 是平坦的，则 $1_{E'} \otimes u$ 是单的；于是可由 §1, no 4, 命题 2 的推论 1 推出，$1_E \otimes u$ 是单的，因而 E 是平坦的。

注解 – 1) 完全有可能 E 和 E' 都是平坦的，E'' 却不是如此，例如 $\mathbb{Z}$ 模 $E = \mathbb{Z}$, $E' = n\mathbb{Z}$, $E'' = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \geqslant 2)$。

32 2) 平坦模的子模未必是平坦模 (习题 3)。

n° 6 有关交集的性质

引理 7. – 设 E 是一个 A 右模，F 是一个 A 左模，F', F'' 是 F 的两个子模，并且 $F = F' + F''$。则 $E \otimes F'$ 和 $E \otimes F''$ 在 $E \otimes F$ 中的典范像的交集等于 $E \otimes (F' \cap F'')$ 的典范像。

事实上，考虑图表

− − −

其中未说明的箭头都是典范含入和典范罩满，j 是 (《代数学》, I, § 6, no 13, 定理 6) 中所定义的典范同构。该图表是交换的，并且它的各行都是正合的。由此可以导出（因为 $F = F' + F''$）一个交换图表

− − −

该图表的各行都是正合的 (no 1, 引理 1)，并且 $1_E \otimes j$ 是一个同构。于是我们的陈言是 § 1, no 4, 命题 1, (i) 的一个特殊情形。(参照 习题 5)。

命题 6. – 设 E 是一个 A 右模，F 是一个 A 左模，并且 E 对于 F 来说是平坦的。对于 F 的任意子模 F'，我们令 $\varphi(F')$ 是 $E \otimes F'$ 在 $E \otimes F'$ 到 $E \otimes F$ 的典范映射（它是单的）下的像，这是依据 no 2, 定义 1)。于是若 F', F'' 是 F 的两个子模，则有

$$\varphi(F' \cap F'') = \varphi(F') \cap \varphi(F'') \text{ 。}$$

事实上，由于 E 对于 F 来说是平坦的，$\varphi(F' + F'')$ 可以等同于 $E \otimes (F' + F'')$，并且子模 $\varphi(F')$, $\varphi(F'')$ 和 $\varphi(F' \cap F'')$ 分别可以等同于 $E \otimes F'$, $E \otimes F''$ 和 $E \otimes (F' \cap F'')$ 在 $E \otimes (F' + F'')$ 中的典范像。于是命题 6 缘自引理 7。

注解 1. – 前提条件与命题 6 相同，对于 F 的任意子模 F'，我们通常把 $E \otimes$ 33
F' 等同于 $\varphi(F')$。这就给出了下面的公式

$$E \otimes_A (F' \cap F'') = (E \otimes_A F') \cap (E \otimes_A F'') \text{ 。}$$

命题 7. – 设 E 是一个 A 右模，E' 是 E 的一个子模，F 是一个 A 左模，F' 是 F 的一个子模。假设 E/E' 或者 F/F' 是一个平坦模。则 $E' \otimes F'$ 在 $E \otimes F$ 中的典范像是 $E' \otimes F$ 和 $E \otimes F'$ 在 $E \otimes F$ 中的典范像的交集。

比如假设 E/E' 是平坦的，并考虑图表

− − −

其中的箭头都是典范同态。该图表是交换的，并且其各行都是正合的 (no 1, 引理 1)。由于 E/E' 是平坦的，故知 u 是单的。于是我们的陈言是 § 1, no 4, 命题 1, (i) 的一个特殊情形。

推论 – 设 E 是一个 A 右模，E' 是 E 的一个子模。
(i) 假设 E/E' 是平坦的。则对于 A 的任意左理想 $\mathfrak{a}$，均有

$$E'\mathfrak{a} = E' \cap E\mathfrak{a} \text{ 。} \tag{5}$$

(ii) 反之，假设 E 是平坦的，并且对于 A 的任意有限型左理想 $\mathfrak{a}$，均有关系式 (5)。则 E/E' 是平坦的。

(i) 只需把命题 7 应用到 $F = A_s$ 和 $F' = \mathfrak{a}$ 上。

(ii) 为了证明 E/E' 是平坦的，可以应用 no 5, 命题 4 的判别法 c)；从而需要证明，对于 A 的任意有限型左理想 $\mathfrak{a}$，序列

$$0 \to E'/E'\mathfrak{a} \longrightarrow E/E\mathfrak{a} \longrightarrow E/(E' + E\mathfrak{a}) \longrightarrow 0$$

在 $E'/E'\mathfrak{a}$ 处都是正合的。然则，这刚好就是关系式 (5) 所给出的。

34 注解 2. – 如果仅假设 E/E' 对于 F 来说是平坦的，或者 F/F' 对于 E 来说是平坦的，则命题 7 的结论仍然是对的。

n° 7 平坦模的张量积

设 A, B 是两个环， E 是一个 A 右模， F 是一个 (A, B) 双模 (《代数学》, II (3 版), § 1, no 14)。还记得 (《代数学》, II (3 版), § 3, no 4) $E \otimes_A F$ 上典范地带有一个 B 右模的结构，它满足

$$---$$

命题 8. – 设 A, B 是两个环， E 是一个 A 右模， F 是一个 (A, B) 双模。假设 E 是平坦的，并且 F 作为 B 模是平坦的。则 B 模 $E \otimes_A F$ 是平坦的。

事实上，设 G 是一个 B 左模， G' 是 G 的一个子模。因为 F 作为 B 右模是平坦的，所以典范同态 $F \otimes_B G' \to F \otimes_B G$ 是单的。而因为 E 是平坦的，所以典范同态

$$---$$

是单的。由于 $E \otimes_A (F \otimes_B G')$ 和 $E \otimes_A (F \otimes_B G)$ 可以分别典范等同于 $(E \otimes_A F) \otimes_B G'$ 和 $(E \otimes_A F) \otimes_B G$ (《代数学》, II (3 版), § 3, no 8, 命题 8)，故知典范同态 $(E \otimes_A F) \otimes_B G' \to (E \otimes_A F) \otimes_B G$ 是单的，这就证明了 $E \otimes_A F$ 是一个平坦 B 模。

推论 1. – 设 C 是一个交换环， E, F 是两个平坦 C 模。则 $E \otimes_C F$ 是一个平坦 C 模。

事实上， F 是一个 (C, C) 双模，故只需把命题 8 应用到 $B = A = C$ 上。

推论 2. – 设 ρ 是环 A 到环 B 的一个同态。若 E 是一个平坦 A 右模，则把它的纯量环扩张到 B 上而得到的 B 右模 $\rho^*(E) = E_{(B)}$ (《代数学》, II (3 版), § 5, no 1) 是平坦的。

35 事实上，根据定义我们有 $E_{(B)} = E \otimes_A B$，其中 B 可以藉由 ρ 而看作是 (A, B) 双模。由于 B 右模 B_d 是平坦的，故只需应用命题 8。

推论 3. – 设 R, S 是两个环， $\varphi : R \to S$ 是一个环同态。若 M 是一个平坦 S 右模，并且 $\varphi^*(S_d)$ 是一个平坦 R 右模，则 $\varphi_*(M)$ 是一个平坦 R 右模。

还记得 $\varphi_*(M)$ 是这样定义出来的一个 R 右模：对任意 $x \in M$ 和任意 $r \in R$，均有 $x.r = x.\varphi(r)$ （《代数学》, II (3 版), § 1, no 13）。于是可以把命题 8 应用到 $A = S$, $B = R$, $E = M$ 和 $F = S$ 上，这里 S 上的 (S, R) 双模结构是由 φ 所定义的；于是 R 右模 $M \otimes_S S$ 与 $\varphi_*(M)$ 无异。

命题 9. – 设 $(A_\alpha, f_{\beta\alpha})$ 是环的一个滤相归纳系，$A = \varinjlim A_\alpha$ 是它的归纳极限，$(E_\alpha, g_{\beta\alpha})$ 是 A_α 右模的一个归纳系，与前者有相同的指标集，$E = \varinjlim E_\alpha$ 是它的归纳极限，这也是一个 A 右模 (《代数学》, II (3 版), § 6, no 6)。于是若每个 E_α 都是平坦 A_α 模，则 E 是一个平坦 A 模。

事实上，设 $E'_\alpha = E_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$，其中 A 藉由典范同态 $A_\alpha \to A$ 而看作是一个 A_α 左模；我们知道 A 右模 E 可以典范同构于 $\varinjlim E'_\alpha$ （前引, 命题 12 的推论 2）。由命题 8 的推论 2 知，对任意 α，E'_α 都是一个平坦 A 右模，从而 E 是一个平坦 A 模，这是依据 no 3, 命题 2。

n° 8 有限呈示模

设 A 是一个环。所谓 A 左模（相应的，A 右模）E 的一个*呈示*（或*长度为 1 的呈示*），是指 A 左模（相应的，A 右模）的一个正合序列

$$- - - ,$$

其中 L_0 和 L_1 都是自由的。

任何 A 模 E 都有一个呈示。事实上，我们知道 (《代数学》, II (3 版), § 1, no 11, 命题 20)，可以找到一个满同态 $u : L_0 \to E$，其中 L_0 是自由的；若 R 是 u 的核， 36
则同样可以找到到一个满同态 $v : L_1 \to R$，其中 L_1 是自由的。若我们把 v 看作是 L_1 到 L_0 的一个同态，则序列 $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \to 0$ 是正合的，这是根据定义，故得我们的陈言。

若 $\rho : A \to B$ 是一个环同态，则 E 的任何一个呈示 (6) 都可以给出 $E_{(B)} = E \otimes_A B$ 的一个呈示：

$$L_1 \otimes_A B \longrightarrow L_0 \otimes_A B \longrightarrow E \otimes_A B \longrightarrow 0 \tag{7}$$

这是依据 no 1, 引理 1 和下面的事实：$L \otimes_A B$ 是一个自由 B 模，只要 L 是自由的。

所谓模 E 的一个呈示 (6) 是*有限的*，是指自由模 L_0 和 L_1 都具有有限的基底。易见若呈示 (6) 是有限的，则呈示 (7) 也是如此。所谓 E 是一个*有限呈示 A 模*，是指它有一个有限呈示。

引理 8. – (i) 具有一个有限呈示的模总是有限型的。
(ii) 若 A 是一个左 Noether 环，则任何有限型 A 左模都有一个有限呈示。
(iii) 任何有限型投射模都有一个有限呈示。

陈言 (i) 可由定义立得。若 A 是左 Noether 的，并且可以找到一个满同态 $u : L_0 \to E$，其中 L_0 是一个自由 A 左模，且具有有限的基底，则 u 的核 R 是有限型的 (《代数学》, VIII, § 2, no 1, 命题 1 et no 3, 命题 7)，从而可以找到一个满同

态 $v : L_1 \to R$，其中 L_1 是自由的，且具有有限的基底，于是正合序列 $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \to 0$ 就是 E 的一个有限呈示；故得 (ii)。

最后，假设 E 是一个有限型投射模；则它是某个有限型自由模 L_0 的直和因子 (《代数学》, II (3 版), § 2, no 2, 命题 4 的推论)；于是满同态 $L_0 \to E$ 的核 R 可以同构于 L_0 的一个商模，从而是有限型的，以下与上面的过程同理。

37 引理 9. – 设 A 是一个环， E 是一个有限呈示的 A 模。对任意正合序列

− − −

只要 G 是有限型的， F 就是有限型的。

设 $L_1 \xrightarrow{r} L_0 \xrightarrow{s} E \to 0$ 是一个有限呈示；若 (e_i) 是 L_0 的一个基底，则对每个 i，均有一个元素 $g_i \in G$ 满足 $p(g_i) = s(e_i)$；从而 $u(e_i) = g_i$（对任意 i）所定义的同态 $u : L_0 \to G$ 就满足 $s = p \circ u$。由于 $s \circ r = 0$，故有 $u(r(L_1)) \subseteq \operatorname{Ker} p$，且由于 $\operatorname{Ker} p$ 同构于 F，故我们看到，存在一个同态 $v : L_1 \to F$，使得图表

− − −

是交换的。由于 j 是单的，并且 s 是满的，故可应用蛇形图表 (§ 1, no 4, 命题 2)，换句话说，存在一个正合序列

$$0 \ = \ \operatorname{Ker} 1_E \ \xrightarrow{d} \ \operatorname{Coker} v \ \longrightarrow \ \operatorname{Coker} u \ \longrightarrow \ \operatorname{Coker} 1_E \ = \ 0 \quad 。$$

这就表明 $\operatorname{Coker} v$ 同构于 $G/u(L_0)$，它是有限型的，这是根据前提条件。进而我们有正合序列

$$0 \ \longrightarrow \ v(L_1) \ \longrightarrow \ F \ \longrightarrow \ \operatorname{Coker} v \ \longrightarrow \ 0$$

且由于 $v(L_1)$ 和 $\operatorname{Coker} v$ 都是有限型的，故知 F 也是如此 (《代数学》, II (3 版), § 1, no 7, 命题 9 的推论 5)。

n° 9 同态模的纯量扩张

设 A 和 B 是两个环， E 是一个 A 右模， F 是一个 B 右模， G 是一个 (B, A) 双模。还记得 (《代数学》, II (3 版), § 4, no 2) 我们曾定义了 $\mathbb{Z}$ 模的一个典范同态

$$\nu \ : \ F \otimes_B \operatorname{Hom}_A(E, G) \ \longrightarrow \ \operatorname{Hom}_A(E, F \otimes_B G) \tag{8}$$

对于 $y \in F$ 和 $u \in \operatorname{Hom}_A(E, G)$， $\nu(y \otimes u)$ 就是 A 线性映射 $x \mapsto y \otimes u(x)$。

38 **命题 10**. – 设 A, B 是两个环， E 是一个 A 右模， F 是一个 B 右模， G 是一个 (B, A) 双模。假设 F 是平坦的。于是若 E 是有限型的 (相应的，有限呈示的)，则典范同态 (8) 是单的 (相应的，一一的)。

首先固定 A, B, F, G，且对任意 A 右模 E，令

$$T(E) = F \otimes_B \operatorname{Hom}_A(E, G) \ , \qquad T'(E) = \operatorname{Hom}_A(E, F \otimes_B G)$$

并且令 ν_E 是同态 (8)；对任意 A 右模同态 $v : E \to E'$，令 $T(v) = 1_F \otimes \mathrm{Hom}(v, 1_G)$ 和 $T'(v) = \mathrm{Hom}(v, 1_F \otimes 1_G)$。设 $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{w} E \to 0$ 是 E 的一个呈示；我们假设自由模 L_0（相应的，自由模 L_0 和 L_1）是有限型的。则有图表

— — —

它是交换的，且第二行是正合的 (《代数学》, II (3 版), § 2, no 1, 定理 1)；进而，序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L_0, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L_1, G)$$

是正合的 (前引)，且由于 F 是平坦的，故知 (9) 的第一行也是一个正合序列 (no 3, 命题 1)。准此，我们知道 ν_{L_0}（相应的，ν_{L_0} 和 ν_{L_1}）是一一的（相应的，都是一一的）(《代数学》, II (3 版), § 4, no 2, 命题 2)。若仅假设 ν_{L_0} 是一一的，则由 (9) 知，$\nu_{L_0} \circ T(w) = T'(w) \circ \nu_E$ 是单的，从而 ν_E 也是如此。若我们假设 ν_{L_0} 和 ν_{L_1} 都是一一的，则由 § 1, no 4, 命题 2 的推论 2, (ii) 可以推出，ν_E 是满的，且由于我们刚才已经看到 ν_E 是单的，故知它是一一的。证毕。

n° 10 纯量扩张：交换环的情形

现在设 A 是一个交换环，B 是一个环，$\rho : A \to B$ 是一个环同态，且使得 $\rho(A)$ 包含在 B 的中心之中；换句话说，ρ 在 B 上定义了一个 A 代数的结构。则对任意 A 模 E，B 右模 $E_{(B)} = E \otimes_A B$ 都可以等同于 $B \otimes_A E$，因为 $\rho_*(B_s)$ 和 $\rho_*(B_d)$ 上的 A 模结构是相同的，这是根据前提条件。还记得对任意一对 A 模 (E, F)，我 39
们都定义了一个典范 B 同态

— — —

对于 $u \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$，我们有 $\omega(u \otimes 1) = u \otimes 1_B$ (《代数学》, II (3 版), § 5, no 3)。

命题 11. – 设 A 是一个交换环，B 是一个环，ρ 是一个从 A 到 B 的中心里的同态，E 和 F 是两个 A 模。假设 B 是一个平坦 A 模，并且 E 是有限型的（相应的，有限呈示的）。则典范同态 (10) 是单的（相应的，一一的）。

由于 ω 是典范同构

— — —

和典范同态 (8)

$$\nu : \; B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(E, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E, B \otimes_A F)$$

(前引) 的合成，故知这个命题是 no 9, 命题 10 的一个推论。

现在假设 A 和 B 都是交换的，考虑三个 A 模 E_1, E_2, E_3 和一个 A 双线性映射 $f : E_1 \times E_2 \to E_3$。则可以找到唯一一个 B 双线性映射 $f_B : E_{1(B)} \times E_{2(B)} \to E_{3(B)}$，使得对所有 $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ 均有 $f_B(1 \otimes x_1, 1 \otimes x_2) = 1 \otimes f(x_1, x_2)$ (《代数学》, IX, § 1, no 4, 命题 1)。

在下面的叙述中，我们将假设 B 是一个平坦 A 模，且对于 E_i $(i = 1, 2, 3)$ 的任意子模 E'，我们都把 $E'_{(B)}$ 典范等同于它在 $E_{i(B)}$ 中的像 (no 3, 注解 2)。

命题 12. – 设 A, B 是两个交换环，ρ 是 A 到 B 的一个同态，E_1, E_2, E_3 是三个 A 模，$f: E_1 \times E_2 \to E_3$ 是一个 A 双线性映射，并且

$$f_B \ :\ E_{1(B)} \times E_{2(B)} \longrightarrow E_{3(B)}$$

是它们的纯量扩张。考虑 E_2 的一个子模 F_2 和 E_3 的一个子模 F_3，并且令 T 是 E_1 的这样一个子模，由所有满足下述条件的 $x_1 \in E_1$ 所组成：对任意 $x_2 \in F_2$，均
40 有 $f(x_1, x_2) \in F_3$。假设 B 是一个平坦 A 模，并且 F_2 是有限型的。则 $T_{(B)}$ 是由所有满足下述条件的 $x'_1 \in E_{1(B)}$ 所组成的：对任意 $x'_2 \in F_{2(B)}$，均有 $f_B(x'_1, x'_2) \in F_{3(B)}$ 。

事实上，设 p 是典范罩满 $E_3 \to E_3/F_3$；对每个 $x_1 \in E_1$，我们都可以定义一个从 F_2 到 E_3/F_3 的 A 线性映射 $x_2 \mapsto p(f(x_1, x_2))$，我们把它记为 $g(x_1)$；从而 g 是 E_1 到 $\mathrm{Hom}_A(F_2, E_3/F_3)$ 的一个 A 同态，并且 g 的核与 T 无异。因为 B 是一个平坦 A 模，所以有正合序列

− − −

(no 3, 命题 1)。依照命题 11，典范同态

− − −

是单的。另一方面，由于 B 是一个平坦 A 模，故知 $(E_3/F_3)_{(B)}$ 可以典范等同于 $E_{3(B)}/F_{3(B)}$；ω 与 $1 \otimes g$ 合成，则可以得到一个同态 u，它使序列

$$0 \longrightarrow T_{(B)} \longrightarrow E_{1(B)} \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}_B(F_{2(B)}, E_{3(B)}/F_{3(B)})$$

成为正合的。由定义立知，对于 $x'_1 = 1 \otimes x_1 \in E_{1(B)}$，$u(x'_1)$ 就是这样一个线性映射，它把 $x'_2 \in F_{2(B)}$ 对应到 $f_B(x'_1, x'_2)$ 的 $\bmod F_{3(B)}$ 同余类；借助线性延拓，这对任意 $x'_1 \in E_{1(B)}$ 也都是对的；而由于 u 的核就是 $T_{(B)}$，命题由此得证。

推论 1. – 设 A, B 是两个交换环，$\rho: A \to B$ 是一个同态，且使 B 成为一个平坦 A 模，E 是一个有限呈示的 A 模。则对于 E 的任意有限型子模 F，$F_{(B)}$ 在 $E_{(B)}$ 的对偶中的正交补都等于 $(F')_{(B)}$，这里我们是用 F' 来标记 F 在 E 的对偶 E^* 中的正交补。

由命题 11 知，$(E^*)_{(B)}$ 典范同构于 $E_{(B)}$ 的对偶 $(E_{(B)})^*$。于是只需把命题 12 应用到 $E_1 = E^*$, $E_2 = E$, $E_3 = A$, $F_2 = F$, $F_3 = \{0\}$ 上，并取 f 是 $E^* \times E$ 上的典范双线性形式。

推论 2. – 设 A, B 是两个交换环，$\rho: A \to B$ 是一个同态，且使 B 成为一个平坦 A 模。则对任意有限型 A 模 E，$E_{(B)}$ 的零化子都等于 B 的理想 $\mathfrak{a}B$，其中 $\mathfrak{a}$ 是 E 在 A 中的零化子。

41 只需把命题 12 应用到 $E_1 = A,\ E_2 = E_3 = E,\ F_2 = E,\ F_3 = \{0\}$ 上。

注解 – 如果关于模 E_i 和双线性映射 f 不存在误解的可能，则我们有时也用 $F_3 : F_2$ 来标记命题 12 中的模 T，并且称之为 F_2 到 F_3 的*传输子*。于是命题 12 也可以写成

− − −

看一个特殊情形，其中 E_i 都等于环 A，且 f 就是乘法，则 F_i 都是理想 $\mathfrak{a}_i$，故得传输子公式

$$B(\mathfrak{a}_3 : \mathfrak{a}_2) \;=\; B\mathfrak{a}_3 : B\mathfrak{a}_2 \tag{12}$$

只要 B 是一个平坦 A 模，并且 $\mathfrak{a}_2$ 是一个有限型理想。

n° 11 用线性关系来解释平坦条件[4]

在这一小节中，A 表示一个环，E 是一个 A 右模，F 是一个 A 左模。

$E \otimes_A F$ 中的任何元素都可以写成 $z = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$ 的形状（不只一种方式），其中 $e_i \in E$ 且 $f_i \in F$。下面的引理给出了这个和式等于零的条件：

引理 10. – 设 $(f_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是 F 的**一个生成元组**，$(e_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是 E 的一族元素，除有限个之外都是零。则为了使 $\sum\limits_{\lambda\in L} e_\lambda \otimes f_\lambda = 0$，必须且只需存在一个有限集 J 和 E 中的一族元素 $(x_j)_{j\in J}$ 以及 A 中的一族元素 $(a_{j\lambda})$ $(j \in J, \lambda \in L)$，满足下面的条件：

1° 族 $(a_{j\lambda})$ 除有限个之外都是零；

2° 对任意 $j \in J$，均有 $\sum\limits_{\lambda\in L} a_{j\lambda} f_\lambda = 0$ ；

3° 对任意 $\lambda \in L$，均有 $e_\lambda = \sum\limits_{j\in J} x_j a_{j\lambda}$。

用一种理想化的语言来说，这组 e_λ 可以写成 A 中的一组元素的 E 系数线性组合，并且 A 中这组元素都是“ f_λ 之间的线性关系”。

事实上，考虑自由 A 模 $A_s^{(L)}$，典范基底是 (u_λ)，设 $g : A_s^{(L)} \to F$ 是下面这个同态：即对任意 $\lambda \in L$，均有 $g(u_\lambda) = f_\lambda$；令 R 是 g 的核，则有（因为诸 f_λ 可以生成 F）正合序列 42

— — —

其中 i 是指典范含入。依照 no 1, 引理 1，由此可以导出正合序列

— — —

然则，$E \otimes_A A_s^{(L)}$ 可以典范等同于 $E^{(L)}$，元素组 $e = (e_\lambda) \in E^{(L)}$ 将被等同于 $\sum\limits_{\lambda} e_\lambda \otimes u_\lambda$（《代数学》, II (3 版), § 3, no 7, 命题 7 的推论 1）。为了使一个这组元素落在 $1_E \otimes g$ 的核之中，必须且只需 $\sum\limits_{\lambda\in L} e_\lambda \otimes f_\lambda = 0$ 在 $E \otimes_A F$ 中是成立的；有见于正合序列 (13)，这等价于说 e 落在 $1_E \otimes i$ 的像之中，也就是说我们有下面的关系式

$$\sum_{\lambda\in L} e_\lambda \otimes u_\lambda \;=\; \sum_{j\in J} x_j \otimes i(r_j) \tag{14}$$

[4]这一小节中的结果在本章以下的内容中将不会用到，除了 § 3, no 7 之外。

其中 $x_j \in E,\ r_j \in R$ 并且 J 是有限的。若令 $i(r_j) = \sum_{\lambda \in L} a_{j\lambda} u_\lambda$，则条件 $r_j \in R$ 可以转化为关系式 $\sum_{\lambda \in L} a_{j\lambda} f_\lambda = 0$，对任意 $j \in J$ 均成立；另一方面，关系式 (14) 可以转化为 $e_\lambda = \sum_{j \in J} x_j a_{j\lambda}$，对任意 $\lambda \in L$ 均成立 (《代数学》, II (3 版), §3, no 7, 命题 7 的推论 1)，这就完成了证明。

命题 13. – 为了使 E 对于 F 来说是平坦的 (no 2, 定义 1)，必须且只需下面的条件得到满足：

(R) 若 $(e_i)_{i\in I}$ 和 $(f_i)_{i\in I}$ 分别是 E 和 F 中的两族有限个元素，且在 $E \otimes_A F$ 中满足 $\sum_{i\in I} e_i \otimes f_i = 0$，则可以找到一个有限集 J 和 E 中的一族元素 $(x_j)_{j\in J}$ 以及 A 中的一族元素 (a_{ji}) $(j \in J, i \in I)$，满足下面的条件：

43 1° 对任意 $j \in J$，均有 $\sum_{i\in I} a_{ji} f_i = 0$；

2° 对任意 $i \in I$，均有 $e_i = \sum_{j\in J} x_j a_{ji}$。

假设 E 对于 F 来说是平坦的。设 (e_i) 和 (f_i) 是两族有限个元素，且在 $E \otimes_A F$ 中满足 $\sum_i e_i \otimes f_i = 0$，并设 F' 是 F 的由诸 f_i 所生成的子模。因为典范映射 $E \otimes_A F' \to E \otimes_A F$ 是单的，所以在 $E \otimes_A F'$ 中也有 $\sum_i e_i \otimes f_i = 0$，于是可以把引理 10 应用到 E 和 F' 上；这样就得到了族 (x_j) 和 (a_{ji})，满足条件 (R)。

反过来，假设条件 (R) 得到满足。设 F' 是 F 的一个子模，并设 $y = \sum_{i\in I} e_i \otimes f_i$ 是典范映射 $E \otimes_A F' \to E \otimes_A F$ 的核中的一个元素。因为 (R) 是成立的，故我们可以找到元素族 (x_j) 和 (a_{ji})，满足条件 1° 和 2°。由此得知，在 $E \otimes_A F'$ 中，我们有

$$y = \sum_{i,j} x_j a_{ji} \otimes f_i = \sum_{j\in J} \Big(x_j \otimes \sum_{i\in I} a_{ji} f_i \Big) = 0 \quad 。$$

从而 $E \otimes_A F' \to E \otimes_A F$ 是单的。证毕。

推论 1. – 为了使一个 A 右模 E 是平坦的，必须且只需它满足下面的条件：

(RP) 若 $(e_i)_{i\in I}$ 和 $(b_i)_{i\in I}$ 分别是 E 和 A 中的两族有限个元素，且满足 $\sum_{i\in I} e_i b_i = 0$，则可以找到一个有限集 J 和 E 中的一族元素 $(x_j)_{j\in J}$ 以及 A 中的一族元素 (a_{ji}) $(j \in J, i \in I)$，使得对任意 $j \in J$，均有 $\sum_{i\in I} a_{ji} b_i = 0$，并且对任意 $i \in I$，均有 $e_i = \sum_{j\in J} x_j a_{ji}$ 。

事实上，把命题 13 应用到模 $F = A_s$ 上，则条件 (RP) 与条件 (R) 无异。

用一种理想化的语言来说，(RP) 意味着：诸 b_i 之间的任何 E 系数的“线性关系”都是诸 b_i 之间的 A 系数线性关系的（E 系数）线性组合。

更特别的，考虑 A 到环 B 中的一个同态，它使 B 成为一个 A 右模。我们知
44 道 (no 3, 命题 1)，说这个 A 模是平坦的，等价于说它对于任意 A 左模 A_s^m $(m \geqslant 1)$ 来说都是平坦的。若我们把命题 13 中的条件 (R) 应用到 $E = B$ 和 $F = A_s^m$ 上，则可以得到下面的条件：

推论 2. – 为了使环 B 是一个平坦 A 右模，必须且只需它满足下面的条件：
(RP′) 考虑以 A 中的 c_{ki} 为系数的齐次线性方程组

$$- - -$$

它的每一个落在 B 中的解 $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ 都可以写成一个线性组合

$$- - -$$

其中的系数 $b_j \in B$，并且对每个 j，$(z_{jk})_{1\leqslant k\leqslant n}$ 都是方程组 (15) 的落在 A 中的解。

§ 3　忠实平坦模

n° 1　忠实平坦模的定义

命题 1. – 设 E 是一个 A 右模。以下四个性质是等价的：

a) 为了使 A 左模的一个序列 $N' \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} N''$ 是正合的，必须且只需序列

$$E \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes v} E \otimes_A N \xrightarrow{1 \otimes w} E \otimes_A E''$$

是正合的。

b) E 是平坦的，并且对任意 A 左模 N，关系式 $E \otimes_A N = 0$ 都蕴涵 $N = 0$。

c) E 是平坦的，并且对于 A 左模的任意同态 $v : N' \to N$，关系式 $1_E \otimes v = 0$ 都蕴涵 $v = 0$。

d) E 是平坦的，并且对于 A 的任意极大左理想 $\mathfrak{m}$，均有 $E \neq E\mathfrak{m}$。

为了写起来简单，对任意 A 左模 Q，我们令 $T(Q) = E \otimes_A Q$，同时对任意 A 左模同态 v，令 $T(v) = 1_E \otimes v$。

我们首先证明 a), b) 和 c) 的等价性。

45 下面证明 a) 蕴涵 b)。若 a) 是成立的，则易见 E 是平坦的 (§ 2, no 3, 命题 1)。另一方面，设 N 是一个 A 左模，且满足 $T(N) = 0$，考虑序列 $0 \to N \to 0$；条件 $T(N) = 0$ 即意味着序列 $0 \to T(N) \to 0$ 是正合的。根据 a)，序列 $0 \to N \to 0$ 是正合的，故得 $N = 0$。

下面证明 b) 蕴涵 c)。假设 b) 是成立的，并设 $v : N' \to N$ 是一个同态，I 是它的像。由于 $T(v)$ 的像可以等同于 $T(I)$ (§ 2, no 3, 注解 2)，故知条件 $T(v) = 0$ 蕴涵 $T(I) = 0$，从而 $I = 0$，这是根据 b)，因而 $v = 0$。

现在证明 c) 蕴涵 a)。假设 c) 是成立的，考虑一个 A 左模同态的序列

$$N' \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} N'' \quad , \tag{1}$$

以及与之相应的序列

$$T(N') \xrightarrow{T(v)} T(N) \xrightarrow{T(w)} T(N'') \quad 。\tag{2}$$

若序列 (1) 是正合的，则 (2) 也是如此，因为 E 是平坦的 (§ 2, no 3, 命题 1)。反之，若 (2) 是正合的，则首先有 $T(w \circ v) = T(w) \circ T(v) = 0$，从而 $w \circ v = 0$，这是根据前提条件。令 $I = v(N')$ 和 $K = w^{-1}(0)$；则有 $I \subseteq K$，这是根据上面所述。考虑正合序列

$$- - -$$

其中 i 和 p 都是典范映射。由于 E 是平坦的，故知序列

$$0 \longrightarrow T(I) \xrightarrow{T(i)} T(K) \xrightarrow{T(p)} T(K/I) \longrightarrow 0$$

是正合的，换句话说，$T(K/I)$ 同构于 $T(K)/T(I)$，而它是 0，这是根据前提条件，因为 $T(I)$ （相应的，$T(K)$ ）可以等同于 $T(v)$ 的像（相应的，$T(w)$ 的核）(§ 2, no 3, 注解 2)。然而关系式 $T(p) = 0$ 蕴涵 $p = 0$，这是根据前提条件，从而我

们有 $K=I$，这就证明了序列 (1) 是正合的。

最后来证明 b) 和 d) 的等价性。若 b) 是成立的，则有 $E/E\mathfrak{m}=E\otimes_A(A_s/\mathfrak{m})\neq 0$，因为 $A_s/\mathfrak{m}\neq 0$；故得 d)。反之，假设 d) 是成立的；A 的任何左理想 $\mathfrak{a}\neq A$ 都包含在某个极大左理想 $\mathfrak{m}$ 之中 (《代数学》, I, §8, no 7, 定理 2)，从而前提条 46
件 $E\neq E\mathfrak{m}$ 蕴涵 $E\neq E\mathfrak{a}$，换句话说 $E\otimes_A(A_s/\mathfrak{a})\neq 0$。换个说法就是，对任意单苇 A 左模 $N\neq 0$，我们有 $T(N)\neq 0$。现在若 N 是任意的一个 $\neq 0$ 的 A 左模，则它包含一个 $\neq 0$ 的单苇子模 N'；而因为 E 是平坦的，所以 $T(N')$ 可以等同于 $T(N)$ 的一个子群；我们刚刚已看到 $T(N')\neq 0$，从而 $T(N)\neq 0$。证毕。

定义 1. – 所谓一个 A 右模 E 是忠实平坦的，是指它满足命题 1 中的四个等价条件。

可以同样地定义忠实平坦的 A 左模的概念；易见为了使一个 A 左模 E 是忠实平坦的，必须且只需 E，看作是 A° 右模，是忠实平坦的。

注解 – 若 E 是一个忠实平坦 A 模，E 是一个忠实 A 模：事实上，若一个元素 $a\in A$ 满足条件：对任意 $x\in E$，均有 $xa=0$，则 A 中的同筋 $h:b\mapsto ba$ 满足 $1_E\otimes h=0$；故得 $h=0$，这是根据命题 1 的性质 c)，也就是说 $a=0$，因为 A 有单位元。

例子 – 1) 一个平坦模和一个忠实平坦模的直和是一个忠实平坦模，这是依据命题 1 的性质 d) 及 §2, no 3, 命题 2。

2) 由于 A_s 是忠实平坦的，这是依据命题 1 的判别法 d) 及 §2, no 4, 例子 1，故由 1) 知，任何不等于 0 的自由模都是忠实平坦的。相反的，可以找到这样的自由模的直和因子 (换句话说，非零投射模)，它是忠实的，但不是忠实平坦的 (习题 2)。

3) 设 A 是一个*主理想*整环。为了使一个 A 模 E 是忠实平坦的，必须且只需它是*无挠*的，并且对于 A 的任意不可约元 p (《代数学》, VII, §1, no 3)，均有 $E\neq Ep$；这可由 §2, no 4, 命题 3 及命题 1 的判别法 d) 立得。

ZZZZZ 4) 例子 3) 表明，$\mathbb{Z}$ 模 $\mathbb{Q}$ 是一个平坦模，且是忠实的，但*不是忠实平坦*的。

命题 2. – 设 E 是一个忠实平坦 A 右模，$u:N'\to N$ 是一个 A 左模同态。则 47
为了使 u 是单的 (相应的，满的，一一的)，必须且只需 $1_E\otimes u:E\otimes_A N'\to E\otimes_A N$ 是如此。

这是命题 1 的判别法 a) 的一个直接推论。

命题 3. – 设 $0\to E'\to E\to E''\to 0$ 是 A 右模的一个正合序列。假设 E' 和 E'' 都是平坦的，并且其中之一是忠实平坦的。则 E 是忠实平坦的。

我们已经知道 E 是平坦的 (§2, no 5, 命题 5)。下面要验证 E 具有命题 1 中的性质 b)。设 N 是一个 A 左模。由于 E'' 是平坦的，故有正合序列

— — —

(§2, no 5, 命题 4)。若 $E\otimes_A N=0$，则由此推知 $E'\otimes_A N$ 和 $E''\otimes_A N$ 都是零；由于模 E',E'' 中有一个是忠实平坦的，这就表示说 $N=0$。

n° 2　忠实平坦模的张量积

命题 4. – 设 R, S 是两个环，E 是一个 R 右模，F 是一个 (R, S) 双模。假设 E 是忠实平坦的。则为了使 F 是一个平坦（相应的，忠实平坦）S 模，必须且只需 $E \otimes_R F$ 是如此。

1° 若 F 是平坦的，则 $E \otimes_R F$ 是平坦的 (§2, no 7, 命题 8)。

2° 假设 $E \otimes_R F$ 是平坦的，并设 $v : N' \to N$ 是 S 左模的一个单同态。则同态 $1_E \otimes 1_F \otimes v : E \otimes_R F \otimes_S N' \to E \otimes_R F \otimes_S N$ 是单的 (§2, no 3, 命题 1)。由 no 1, 命题 2 可以推出 $1_F \otimes v : F \otimes_S N' \to F \otimes_S N$ 是单的；从而 F 是一个平坦 S 模 (§2, no 3, 命题 1)。

3° 假设 F 是忠实平坦的，并设 N 是一个 S 左模，满足 $E \otimes_R F \otimes_S N = 0$。则因为 E 是忠实平坦的，所以这就表示说 $F \otimes_S N = 0$，故得 $N = 0$，因为 F 是忠实平坦的；这就证明了 $E \otimes_R F$ 是忠实平坦的。

4° 假设 $E \otimes_R F$ 是忠实平坦的，并设 N 是一个 S 左模，满足 $F \otimes_S N = 0$。则有 $E \otimes_R F \otimes_S N = 0$，故得 $N = 0$，这就证明了 F 是忠实平坦的。

48 **推论** – 设 C 是一个交换环，E 和 F 是两个忠实平坦 C 模。则 C 模 $E \otimes_C F$ 是忠实平坦的。

把命题 4 应用到 $R = S = C$ 上即可。

n° 3　环变换

命题 5. – 设 ρ 是环 A 到环 B 的一个同态。若 E 是一个忠实平坦 A 右模，则 B 右模 $\rho^*(E) = E_{(B)} = E \otimes_A B$ 是忠实平坦的。

把 no 2, 命题 4 应用到 $R = A$, $S = F = B$ 上即可，因为此时 B 模 B_d 是忠实平坦的。

推论 – 若 E 是一个忠实平坦 A 右模，并且 $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个双边理想，则 $(A/\mathfrak{a})$ 右模 $E/E\mathfrak{a}$ 是忠实平坦的。

把命题 5 应用到 $B = A/\mathfrak{a}$ 上，并取 ρ 是典范同态即可。

命题 6. – 设 A 是一个交换环，B 是 A 上的一个代数，$\rho : a \mapsto a.1$ 是 A 到 B 的典范同态。假设 B 是一个忠实平坦 A 模。则为了使一个 A 模 E 是平坦的（相应的，忠实平坦的），必须且只需 B 右模 $E_{(B)} = E \otimes_A B$ 是平坦的（相应的，忠实平坦的）。

1° 若 E 是平坦的（相应的，忠实平坦的），则 $E_{(B)}$ 是平坦的（相应的，忠实平坦的），这是依据 §2, no 7, 命题 8 的推论 2（相应的，命题 5）。

2° 假设 $E_{(B)}$ 是平坦的，并设 $v : N' \to N$ 是 A 模的一个单同态。依照 §2, no 7, 推论 3，A 模 $E \otimes_A B$ 是平坦的，从而同态 $1_E \otimes 1_B \otimes v : E \otimes_A B \otimes_A N' \to E \otimes_A B \otimes_A N$ 是单的。由于 B 上的 A 右模结构和 A 左模结构是重合的。故知这个

同态可以等同于

$$- - -$$

由于 B 是一个忠实平坦 A 模，故可由此得知，$1_E \otimes v : E \otimes_A N' \to E \otimes_A N$ 是单的 (no 1, 命题 2)，这就证明了 E 是平坦的。 49

3° 最后假设 $E_{(B)}$ 是忠实平坦的。首先，E 是平坦的，这是依据 2°。进而设 N 是一个 A 模，满足 $E \otimes_A N = 0$。则有 $E \otimes_A N \otimes_A B = 0$，且因为 B 上的 A 右模结构和 A 左模结构是重合的，故得 $E \otimes_A B \otimes_A N = 0$，此式也可以写成 $(E \otimes_A B) \otimes_B (B \otimes_A N) = 0$。由于 $E_{(B)}$ 是一个忠实平坦 B 模，这就表示说 $B \otimes_A N = 0$ (no 1, 命题 1)，故得 $N = 0$，因为 B 是一个忠实平坦 A 模 (no 1, 命题 1)。证毕。

n° 4 纯量限制

命题 7. – 设 A, B 是两个环，ρ 是 A 到 B 的一个同态。设 E 是一个忠实平坦 B 右模。为了使 $\rho_*(E)$ 是一个平坦（相应的，忠实平坦）A 右模，必须且只需 B 是一个平坦（相应的，忠实平坦）A 右模。

我们把 no 2, 命题 4 应用到 R, S, E, F 分别换成 B, A, E, B 上，并取 B 上的 A 右模结构是由 ρ 所定义的；由此可以看到，B 是一个平坦（相应的，忠实平坦）A 模当且仅当 $E \otimes_B B = \rho_*(E)$ 是一个平坦（相应的，忠实平坦）A 模。

注解 – 1° 命题 7 表明，为了使 B 是一个忠实平坦 A 模，只需找到这样一个忠实平坦 B 模，它同时也是一个忠实平坦 A 模。

2° 设 A, B, C 是三个环，$\rho : A \to B$，$\sigma : B \to C$ 是两个环同态。命题 7 表明，若 C 是一个忠实平坦 B 模，并且 B 是一个忠实平坦 A 模，则 C 是一个忠实平坦 A 模。若 C 是一个忠实平坦 B 模，也是一个忠实平坦 A 模，则 B 是一个忠实平坦 A 模（为明确起见，这里的模都是右模）。相反的，完全有可能 B 和 C 都是忠实平坦 A 模，但 C 不是忠实平坦 B 模 (习题 7)。

n° 5 忠实平坦环 50

命题 8. – 设 A, B 是两个环，ρ 是 A 到 B 的一个同态。假设可以找到一个 B 右模 E，使得 $\rho_*(E)$ 是一个忠实平坦 A 模。则有：

(i) 对任意 A 左模 F，典范同态 $j : F \to F_{(B)} = B \otimes_A F$（即对 $x \in F$ 均有 $j(x) = 1 \otimes x$）都是单的。

(ii) 对于 A 的任意左理想 $\mathfrak{a}$，均有 $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$。

(iii) 同态 ρ 是单的。

(iv) 对于 A 的任意极大左理想 $\mathfrak{m}$，均可找到 B 的一个极大左理想 $\mathfrak{n}$，使得 $\rho^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$。

首先证明 (i)。我们知道 (《代数学》, II (3 版), §5, no 2, 命题 5 的推论)，对任意 B 右模 M，典范 A 同态 $i : M \to \rho_*(M) \otimes_A B = \rho^*(\rho_*(M))$（由 $i(y) = y \otimes 1$ 所定义）都是单的，并且 A 模 $i(M)$ 是 $\rho_*(M) \otimes_A B$ 的直和因子。从而对任意 A 左

模 F，

— — —

都是单的 (§2, no 1, 引理2)。若取 $M = E$，则可以由此推出 (因为 $i \otimes 1_F = 1_M \otimes j$），$j$ 是单的 (no 1, 命题2)。

陈言 (ii) 缘自 (i)，只需取 $F = A_s/\mathfrak{a}$，并且 (iii) 缘自 (ii)，只需取 $\mathfrak{a} = \{0\}$。

最后，若 $\mathfrak{m}$ 是 A 的一个极大左理想，则有 $\rho^{-1}(B\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$，这是依据 (ii)，因而 $B\mathfrak{m} \neq B$。从而可以找到 B 的一个包含 $B\mathfrak{m}$ 的极大左理想 $\mathfrak{n}$ (《代数学》, I, §8, no 7, 定理2)；我们有 $\mathfrak{m} \subseteq \rho^{-1}(\mathfrak{n})$，且由于 $\rho(1) \notin \mathfrak{n}$，故知 1 不属于 $\rho^{-1}(\mathfrak{n})$。因此 $\rho^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$。

如果 A 和 B 满足命题8中的那些条件，则我们通常藉由 ρ 把 A 等同于 B 的一个子环。

推论 – 在命题8的前提条件下，若 B 是左 Noether 的 (相应的，左 Artin 的)，则 A 也是如此。

事实上，若 A 有一个递增 (相应的，递减) 的左理想序列 $(\mathfrak{a}_n)$，且不是最终稳定的，则 B 的递增 (相应的，递减) 理想序列 $(B\mathfrak{a}_n)$ 也不是最终稳定的，因为 $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}_n) = \mathfrak{a}_n$，这与前提条件矛盾。

51 * *注解* 1). – 如果 A 和 B 都是交换的，则我们将在 II, §2, no 5, 命题11的推论4看到，命题8的前提条件表示说，对于 A 的任意素理想 $\mathfrak{p}$，均可找到 B 的一个素理想 $\mathfrak{q}$，使得 $\rho^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ (或者 $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$，只要我们把 A 等同于 B 的一个子环)。*

命题8特别也可以应用到 B 本身就是一个*忠实平坦* A 模的情形。不过在这种情况下我们有下面这个更精细的结果：

命题 9. – 设 A, B 是两个环，ρ 是 A 到 B 的一个同态。以下五个条件是等价的：

a) A 右模 B 是忠实平坦的。

b) 同态 ρ 是单的，并且 A 右模 $B/\rho(A)$ 是平坦的。

c) A 右模 B 是平坦的，并且对任意 A 左模 F，F 到 $B \otimes_A F$ 的典范同态 $x \mapsto 1 \otimes x$ 都是单的。

d) A 右模 B 是平坦的，并且对于 A 的任意左理想 $\mathfrak{a}$，均有 $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$。

e) A 右模 B 是平坦的，并且对于 A 的任意极大左理想 $\mathfrak{m}$，均可找到 B 的一个极大左理想 $\mathfrak{n}$，使得 $\rho^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$。

根据命题8，a) 蕴涵了性质 c), d), e) 中的每一个。另一方面，若 e) 是成立的，则对于 A 的任意极大左理想 $\mathfrak{m}$，均有 $B\mathfrak{m} \neq B$ (因为可以找到 B 的一个极大左理想 $\mathfrak{n}$ 满足 $B\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$)，并且 B 是一个忠实平坦 A 模，这是根据 no 1, 命题1, 判别法 d)；从而 e) 蕴涵 a)。

现在我们证明 c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a)，这将完成命题的证明。首先，c) 蕴涵 d)，这只要在 c) 中取 $F = A_s/\mathfrak{a}$。现在若 d) 是成立的，并取 $\mathfrak{a} = \{0\}$，则我们看到 ρ 是单的；由 d) 和 §2, no 6, 命题7的推论知，$B/\rho(A)$ 是一个平坦 A 右模，从而 d) 蕴

涵 b)。最后，若 b) 是成立的，则把 no 1, 命题 3 应用到正合序列

$$0 \longrightarrow A_d \xrightarrow{\rho} B \longrightarrow B/\rho(A) \longrightarrow 0$$

上可知，B 是一个忠实平坦 A 右模，因为 A_d 是忠实平坦的。证毕。 52

* 注解 2). – 如果 A 和 B 都是交换的，则我们将在 II, § 2, no 5, 命题 11 的推论 4 中看到，命题 9 中的诸条件还等价于下面的：

f) B 是一个平坦 A 模，且对于 A 的任意素理想 $\mathfrak{p}$，均可找到 B 的一个理想 $\mathfrak{q}$，使得 $\rho^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$。 *

在命题 9 的诸条件下，我们把 A 藉由 ρ 等同于 B 的一个子环。于是关系式 $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ 可以写成 $A \cap B\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$。另一方面，若 F 是一个 A 左模，则我们可以通过典范映射 $x \mapsto 1 \otimes x$ 把 F 等同于它在 $B \otimes_A F$ 中的像；若 X 是 F 的一个加法子群，则我们也用 BX 来记 X 在 $B \otimes_A F$ 中所生成的 B 左子模。在这些记号下，我们有：

命题 10. – 设 B 是一个环，A 是 B 的一个子环，且使 B 成为一个忠实平坦 A 右模。设 F 是一个 A 左模，F', F'' 是 F 的两个子模。则：

(i) 典范映射 $B \otimes_A F' \to B \otimes_A F$ 诱导了一个从 $B \otimes_A F'$ 到 BF' 的同构。

(ii) 我们有 $F \cap BF' = F'$。

(iii) 我们有 $B(F' + F'') = BF' + BF''$。

(iv) 我们有 $B(F' \cap F'') = BF' \cap BF''$。

事实上，由于 B 是一个平坦 A 右模，故知典范映射 $B \otimes_A F' \to B \otimes_A F$ 是单的；有见于上面作出的等同，它的像是 BF'，这就证明了 (i)。陈言 (ii) 缘自 § 2, no 6, 命题 7，应用到 $E = B$, $E' = A$ 上，并且利用公式 $A \otimes_A F = F$ 和 $A \otimes_A F' = F'$。陈言 (iii) 是显然的，而 (iv) 则缘自 § 2, no 6, 命题 6。

n° 6 忠实平坦环和有限性条件

命题 11. – 设 B 是一个环，A 是 B 的一个子环，且使 B 成为一个忠实平坦 A 右模。为了使一个 A 左模 F 是有限型的（相应的，有限呈示的），必须且 53
只需 B 模 $B \otimes_A F$ 是有限型的（相应的，有限呈示的）。

1° 即使 B 上没有平坦性条件，都容易看出，若 F 是一个有限型 A 左模，则 $B \otimes_A F$ 是一个有限型 B 左模。反之，若 $B \otimes_A F$ 是一个有限型 B 模，则它可由有限个形如 $1 \otimes x_i$ 的元素所生成，其中 $x_i \in F$；若 M 是诸 x_i 在 F 中所生成的 A 子模，并且 j 是典范含入 $M \to F$，则 $1_B \otimes j : B \otimes_A M \to B \otimes_A F$ 是一个满同态，从而 j 是满的 (no 1, 命题 2)，这就证明了 F 是有限型的。

2° 若 F 具有一个有限呈示，则 $B \otimes_A F$ 也是如此，即使 B 上没有平坦性条件 (§ 2, no 8)。只消再证明，若 $B \otimes_A F$ 具有一个有限呈示，则 F 也是如此。我们已经知道，根据 1°，F 是有限型的，从而存在一个满同态 $u : L \to F$，其中 L 是一个有限型自由 A 模。设 R 是 u 的核，如此一来，$B \otimes_A R$ 可以等同于满同态 $1_B \otimes u : B \otimes_A L \to B \otimes_A F$ 的核 (§ 2, no 3, 注解 2)。由于 $B \otimes_A F$ 具有一个有限

呈示，这是根据前提条件，故可推知 (§2, no 8, 引理 9) $B\otimes_A R$ 是有限型的；于是由 1° 知，R 是一个有限型 A 模，因而 F 具有一个有限呈示。

命题 12. – 设 B 是一个环，A 是 B 的中心里的一个交换子环，B 是一个忠实平坦 A 模。为了使一个 A 模 F 是有限型且投射的，必须且只需 $B\otimes_A F$ 是一个有限型投射 B 左模。

条件显然是必要的，即使 A 和 B 上没有任何前提条件 (《代数学》, II (3 版), §5, no 1, 命题 4 的推论)；下面证明它是充分的。有限型投射模总具有一个有限呈示 (§2, no 8, 引理 8)，故前提条件蕴涵 F 具有一个有限呈示，这是依据命题 11，从而，对任意 A 模 M，均有一个典范同构

$$\omega\ :\ B\otimes_A \mathrm{Hom}_A(F,M)\ \longrightarrow\ \mathrm{Hom}_A(B\otimes_A F, B\otimes_A M)$$

54 (§2, no 10, 命题 11)。现在设 $v: M\to M''$ 是 A 模的一个满同态，考虑交换图表

– – –

由于 $1_B\otimes v$ 是满的，并且 $B\otimes_A F$ 已假设是投射的，故知 $\mathrm{Hom}(1_{B\otimes F}, 1_B\otimes v)$ 是满的 (《代数学》, II (3 版), §2, no 2, 命题 4)，从而 $1_B\otimes \mathrm{Hom}(1_F, v)$ 也是如此。然而由于 B 是一个忠实平坦 A 模，故知 $\mathrm{Hom}(1_F, v)$ 本身就是满的 (no 1, 命题 2)，从而 F 是一个投射 A 模 (《代数学》, II (3 版), §2, no 2, 命题 4)。

n° 7 忠实平坦环上的线性方程

设 B 是一个环，A 是 B 的一个子环。所谓二元组 (A,B) 具有线性扩张性质，是指它们满足下面的条件：

(E) 对于系数 c_{ki} 和常数项 d_i 都属于 A 的任何线性方程组

– – –

它在 B 中的任何一个解 $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ 都可以写成下面的形状

$$y_k\ =\ x_k+\sum_{j=1}^{p} b_j z_{jk}\qquad (1\leqslant k\leqslant n) \tag{4}$$

其中 (x_k) 是方程组 (3) 在 A 中的一个解，诸 b_j 都属于 B，并且每个 $(z_{jk})_{1\leqslant k\leqslant n}$ 都是 (3) 所对应的齐次线性方程组在 A 中的一个解。

命题 13. – 设 A 是环 B 的一个子环。为了使二元组 (A,B) 具有线性扩张性质，必须且只需 B 是一个忠实平坦 A 右模。

条件是充分的。事实上，由于 B 是一个平坦 A 模，故知 (3) 所对应的齐次线性
55 方程组在 B 中的任何一个解都是其在 A 中的一些解的 B 系数线性组合 (§2, no 11, 命题 13 的推论 2)。从而归结为证明 (3) 在 B 中有解蕴涵着它在 A 中有解。然则，若令 $c_k=(c_{ki})_{1\leqslant i\leqslant m}\in A_s^m$, $d=(d_i)\in A_s^m$，则方程组 (3) 等价于 $B\otimes_A A_s^m = B_s^m$ 中

的方程 $\sum_{k=1}^{n} y_k \otimes c_k = 1 \otimes d$。换句话说，若 M 是由诸 c_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 在 A_s^m 中所生成的 A 子模，则 (3) 在 B 中有解 (y_k) 等价于（在 no 5 所作出的等同下）关系式 $d \in BM \cap A_s^m$；而由于 $BM \cap A_s^m = M$ (no 5, 命题 10, (ii))，故可得到 $d \in M$，也就是说，(3) 在 A 中有解 (x_k)。

条件是*必要*的。事实上，假设 (A, B) 具有线性扩张性质；我们已经知道，B 是一个平坦 A 右模 (§2, no 11, 命题 13 的推论 2)；下面证明对于 A 的任意左理想 $\mathfrak{a}$，均有 $B\mathfrak{a} \cap A = \mathfrak{a}$，这就能证明 B 是一个忠实平坦 A 右模 (no 5, 命题 9, d))。然则，设 $x \in B\mathfrak{a} \cap A$；则根据前提条件，可以找到 $y_i \in B$ 和 $a_i \in \mathfrak{a}$，使得 $\sum_i y_i a_i = x$；把性质 (E) 应用到这个系数和常数项都属于 A 的方程上可以推出，存在 $x_i \in A$，使得 $x = \sum_i x_i a_i$，从而 $x \in \mathfrak{a}$。证毕。

§ 4 平坦模和挠函子 Tor

针对那些比较熟悉同调代数的读者[5]，我们将简要地指明平坦模的理论是怎样联系到 Tor 函子的理论上的。

命题 1. – 设 E 是一个 A 右模。以下四个性质是等价的：

56 a) E 是平坦的。

b) 对任意 A 左模 F 和任意整数 $n \geqslant 1$，均有 $\mathrm{Tor}_n^A(E, F) = 0$。

c) 对任意 A 左模 F，均有 $\mathrm{Tor}_1^A(E, F) = 0$。

d) 对于 A 的任意有限型左理想 $\mathfrak{a}$，均有

− − −

首先证明 a) 蕴涵 b)。设

− − −

是 F 的一个自由消解。由于 E 是平坦的，故知序列

− − −

是正合的。由于诸 $\mathrm{Tor}_n^A(E, F)$ 同构于复形 (i) 的同调群，故知它们在 $n \geqslant 1$ 时都是零。

显然有 b) 蕴涵 c)，和 c) 蕴涵 d)。最后证明 d) 蕴涵 a)。正合序列

− − −

给出正合序列

$$\mathrm{Tor}_1^A(E, A_s/\mathfrak{a}) \longrightarrow E \otimes_A \mathfrak{a} \longrightarrow E \otimes_A A \quad 。$$

由于 d) 是成立的，故知典范同态

$$E \otimes_A \mathfrak{a} \longrightarrow E \otimes_A A = E$$

是单的，这就意味着 E 是平坦的 (§ 2, no 3, 命题 1)。

命题 1 提供了平坦模的一个十分常用的本征描述。我们仅举出一个应用的例子，即用它来重新证明 § 2, no 5, 命题 5，若 E' 和 E'' 都是平坦的，则正合序列

− − −

表明，对任意 A 左模 F，均有 $\mathrm{Tor}_1^A(E, F) = 0$，从而 E 是平坦的。若 E 和 E'' 都是平坦的，则正合序列

$$\mathrm{Tor}_2^A(E'', F) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(E', F) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(E, F)$$

表明，$\mathrm{Tor}_1^A(E', F) = 0$，从而 E' 是平坦的。

57 **命题 2**. – 设 R, S 是两个环，$\rho : R \to S$ 是一个同态，F 是一个 R 左模。则以

[5] 参考本书讨论范畴的章节，特别是讨论 Abel 范畴的部分（准备中）。由于这部分内容尚未面世，读者可以先参考 H. Cartan - S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton, 1956，或者，R. Godement, Théorie des Faisceaux, Paris (Hermann), 1958。

下两个性质是等价的：

a) 对任意 S 右模 E，均有 $\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(E),F)=0$。

b) S 左模 $\rho^*(F)=F_{(S)}=S\otimes_R F$ 是平坦的，并且我们有 $\mathrm{Tor}_1^R(\rho^*(S_d),F)=0$。

假设 a) 成立。取 $E=S_d$，我们看到 $\mathrm{Tor}_1^R(\rho^*(S_d),F)=0$。下面进而证明 $F_{(S)}$ 是一个平坦 S 模。为此，注意到若 E 是一个 S 右模，则加法群 $E\otimes_S F_{(S)}$ 可以等同于 $\rho_*(E)\otimes_R F$。从而若我们有 S 右模的一个正合序列

$$---$$

则根据 a)，可以导出一个正合序列

$$0 \longrightarrow \rho^*(E')\otimes_R F \longrightarrow \rho^*(E)\otimes_R F \longrightarrow \rho^*(E'')\otimes_R F \longrightarrow 0$$

即是说

$$---$$

这就证明了 $F_{(S)}$ 是平坦的。

反过来，若 b) 是成立的，则首先对任意自由 S 右模 $L=S_d^{(l)}$，均有 $\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(L),F)=(\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(S_d),F))^{(l)}=0$。任何 S 右模 E 都可以写成 $E=L/H$ 的形状，其中 L 是一个适当的自由 S 模；从而有正合序列

$$---$$

然而由于 $F_{(S)}$ 是平坦的，故知同态 $H\otimes_S F_{(S)}\to L\otimes_S F_{(S)}$ 是单的，并且它可以等同于同态

$$\rho^*(H)\otimes_R F \longrightarrow \rho_*(L)\otimes_R F \quad 。$$

于是由 (2) 就可以推出 $\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(E),F)=0$。

注解 – 由命题 2 也可以引出下面的正合序列

$$---$$

这是来自于和函子 Tor 的“结合性”相关的谱序列。

58 ## § 1 的习题

1) 在交换图表 (10) 中，假设二元组 (u', v') 是一个正合序列，并且 $v \circ u = 0$。试证明，我们有

$$\operatorname{Im}(b) \cap \operatorname{Im}(u') \;=\; b(\operatorname{Ker}(c \circ v)) \quad 。$$

2) 考虑交换群的一个交换图表

− − −

假设：1° (u, v) 和 (b, b') 都是正合序列；2° $v' \circ u' = 0$ 且 $a' \circ a = 0$；3° c 和 u' 都是单的，并且 a' 是满的。试证明，在这些条件下，u'' 是单的。

3) 考虑交换群的一个交换图表

− − −

其中我们假设各行各列都是正合的，并且 d 和 u'' 都是单的，而 a'' 是满的。试证明，在这些条件下，u''' 是单的。再进行推广。

59 4) 考虑交换群的一个交换图表

− − −

假设其中的两行都是正合的。

a) 试证明，若 a 是满的，b 和 d 是单的，则 c 是单的。

b) 试证明，若 d 是单的，a 和 c 是满的，则 b 是满的。

5) 假设给了一个正合序列 $A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \to 0$ 和两个满同态 $B' \xrightarrow{a'} A'$，$B'' \xrightarrow{a''} A''$，其中 A, A', A'', B', B'' 都是同一个环上的模。试证明，若 B'' 是一个投射模，则可以找到一个满同态 $a : B' \oplus B'' \to A$，使得图表

− − −

是交换的（i 和 p 都是典范映射）。

6) 假设给了一个正合序列 $0 \to A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A''$ 和两个单同态 $A' \xrightarrow{a'} C'$，$A'' \xrightarrow{a''} C''$，其中 A, A', A'', C', C'' 都是同一个环上的模。试证明，若 C' 是一个内射模 (《代数学》, II (3 版), § 2, 习题 11)，则可以找到一个单同态 $a : A \to C' \oplus C''$，使得图表

− − −

是交换的（i 和 p 都是典范映射）。

7) 设 U, V, W 是三个交换群，$f : U \to V$, $g : V \to W$ 都是同态。

a) 考虑图表

− − −

其中 $\alpha(u)=(u,f(u))$， $\beta(u,v)=v-f(u)$， $\gamma(v)=(g(v),v)$， $\delta(w,v)=w-g(v)$， $h(u,v)=(g(f(u)),v)$。试证明，这个图表是交换的，并且它的各行都是正合的。

b) 试由 a) 和 no 4, 命题 2 导出一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g\circ f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathrm{Coker}(g\circ f) \longrightarrow \mathrm{Coker}(g) \longrightarrow 0\text{。}$$

试给出这个正合序列的一种直接的定义方法。

§2 的习题 60

1) 举例说明，存在这样的 A 左模正合序列 $0\to N'\to N\to N''\to 0$ 和 A 右模 E，其中 E 是 N' 调平坦的，并且是 N'' 调平坦的，但不是 N 调平坦的（比如取 $N'=N''=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）。

2) 设 M,N 是 A 模 E 的两个子模，并且 $M+N$ 是平坦的。为了使 M 和 N 都是平坦的，必须且只需 $M\cap N$ 是平坦的。

3) 设 A 是域 K 上的二元多项式环 $K[X,Y]$。

a) 考虑 A 中的主理想 $\mathfrak{b}=(X)$, $\mathfrak{c}=(Y)$，它们都是自由 A 模，并且交集 $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}=(XY)$ 也是自由的。试证明， $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ 不是一个平坦 A 模，尽管 $\mathfrak{a}$ 是无挠的 (参照《代数学》, III, §2, 习题 4)。

b) 在 A 模 A^2 中，设 R 是这样一个子模，由所有形如 $(x,-x)$ 其中 $x\in\mathfrak{a}$ 的元素所组成。在 A 模 A^2/R 中，设 M,N 分别是 A^2 的两个直和因子在其中的像；试证明， M 和 N 都同构于 A，但 $M\cap N$ 不是一个平坦 A 模。

4) a) 举例说明，存在这样的正合序列，

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

它是不可分裂的，且其中每一项都是平坦模 (参照《代数学》, VII, §3, 习题 8 b))。

b) 试利用 a) 导出一个正合序列的例子

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

它是不可分裂的，它的各项都是不平坦的 A 右模，然而对任意 A 左模 F，序列 $0\to E'\otimes F\to E\otimes F\to E''\otimes F\to 0$ 都是正合的（可以使用 no 1, 引理 2）。

5) 举例说明，存在这样的一个 A 右模 E 和一个 A 左模 F 以及 F 的两个子模 F',F''，它使得 $E\otimes(F'\cap F'')$ 在 $E\otimes F$ 中的典范像不是 $E\otimes F'$ 和 $E\otimes F''$ 的典范像的交集 (参照 习题 3 a))。

¶ 6) 设 A 是一个环， M 是一个 A 左模。所谓 M 的一个长度为 n 的呈示或 n 级呈示，是指一个正合序列

其中 L_i 都是自由 A 左模 $(0 \leqslant i \leqslant n)$。所谓该呈示是有限的，是指诸 L_i 都是有限型自由模。

若 M 是一个有限型 A 左模，我们用 $\lambda(M)$ 来表示使 M 能够具有一个 n 级有限呈示的那些整数 $n \geqslant 0$ 的上确界（是有限数或者 $+\infty$）。若 M 不是有限型的，则令 $\lambda(M) = -1$。

a) 设 $0 \to P \to N \to M \to 0$ 是 A 左模的一个正合序列。则有 $\lambda(N) \geqslant \inf(\lambda(P), \lambda(M))$。（从 P 及 M 的两个 n 级呈示出发，使用 §1, 习题 5 导出 N 的一个 n 级呈示）。

61 b) 设 $M_n \xrightarrow{u_n} M_{n-1} \to \cdots \to M_0 \xrightarrow{u_0} M \to 0$ 是 M 的一个 n 级有限呈示；试证明，若 $\lambda(M) > n$，$\mathrm{Ker}(u_n)$ 是一个有限型 A 模。（设 $L_{n+1} \xrightarrow{v_{n+1}} L_n \to \cdots \to L_2 \xrightarrow{v_2} L_1 \xrightarrow{v_1'} L_0 \xrightarrow{v_0} M \to 0$ 是 M 的一个 $(n+1)$ 级有限呈示，并设 $P = \mathrm{Ker}(v_0)$，如此一来，我们有 P 的一个 n 级呈示：

$$- - -$$

把 a) 的方法应用到正合序列 $0 \to P \to L_0 \to M \to 0$ 上，则可以得到一个正合序列

$$- - -$$

和一些正合序列 $0 \to \mathrm{Ker}(v_{i+1}) \to \mathrm{Ker}(w_i) \to \mathrm{Ker}(u_i) \to 0$（§1, no 4, 命题 2)。最后注意到 $\mathrm{Ker}(w_i)$ 是 $M_i \oplus L_{i+1}$ 的直和因子）。

c) 试证明，在 a) 的前提条件下，我们有

$$\lambda(M) \geqslant \inf(\lambda(N), \lambda(P)+1) 。$$

（若 $n \leqslant \inf(\lambda(N), \lambda(P)+1)$，则对 n 进行归纳来证明 $\lambda(M) \geqslant n$，使用 a) 的方法和 b)）。

d) 试证明，在 a) 的前提条件下，我们有

$$\lambda(P) \geqslant \inf(\lambda(N), \lambda(M)-1) 。$$

（方法与 c) 相同）。再由此导出，若 $\lambda(N) = +\infty$，则有 $\lambda(M) = \lambda(P)+1$。

e) 试利用 a), c) 和 d) 推出，若 $N = M \oplus P$，则有

$$\lambda(N) = \inf(\lambda(M), \lambda(P)) 。$$

特别的，为了使 N 具有一个有限呈示，必须且只需 M 和 P 都是如此。

f) 设 N_1, N_2 是 A 模 M 的两个子模。假设 N_1 和 N_2 都具有有限呈示。则为了使 $N_1 + N_2$ 具有一个有限呈示，必须且只需 $N_1 \cap N_2$ 是有限型的。

7) a) 在习题 6 的记号下，试证明，若 M 是一个投射模，则有 $\lambda(M) = -1$ 或者 $\lambda(M) = +\infty$。若 A 是一个左 Noether 环，则对任意 A 模 M，均有 $\lambda(M) = -1$ 或者 $\lambda(M) = +\infty$。

b) 若 $\mathfrak{a}$ 是环 A 的一个左理想，且不是有限型的，则单苇 A 模 $A_s/\mathfrak{a}$ 没有有限呈示，换句话说 $\lambda(A_s/\mathfrak{a}) = 0$ (no 8, 引理 9)。

c) 举例说明，存在这样的环 A 和它的一个单苇左理想 $\mathfrak{a}$，使得 $A_s/\mathfrak{a}$（这是有限呈示的）的对偶不是一个有限型 A 右模。

d) 设 K 是一个域，E 是向量空间 $K^{(N)}$，(e_n) 是 E 的典范基底，T 是 E 的张量代数，从而它有一个基底是由所有有限乘积 $e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k}$（$k \geqslant 0$，并且对任意 j，均有 $i_j \in \mathbb{N}$）所组成的。对于一个给定的整数 n，设 $\mathfrak{b}$ 是由诸乘积 $e_1e_0, e_2e_1, \ldots, e_ne_{n-1}$ 以及 $e_{n+k}e_n$（对任意 $k \geqslant 1$）在 T 中所生成的双边理想；设 A 是商环 $T/\mathfrak{b}$，且对任意整数 m，设 a_m 是 e_m 在 A 中的典范像。试证明，若 M 62
$= A_s/Aa_0$，则我们有 $\lambda(M) = n$（注意到对于 $m \leqslant n-1$，a_m 的左零化子就是 Aa_{m+1}，再使用习题 6 b)）。

8) 设 C 是一个交换环，E, F 是两个 C 模。试证明，我们有 $\lambda(E \otimes_C F) \geqslant \inf(\lambda(E), \lambda(F))$。

9) 设 E 是一个有限呈示 A 左模。

a) 试证明，对于任意一族 A 右模 $(F_\iota)_{\iota\in I}$，典范同态 $E \otimes_A (\prod_{\iota\in I} F_\iota) \to \prod_{\iota\in I}(E \otimes_A F_\iota)$（《代数学》, II (3 版), §3, no 7) 都是一一的。

b) 设 $(G_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ 是 A 左模的一个归纳系；试证明，典范同态

$$\varinjlim \operatorname{Hom}_A(E, G_\alpha) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(E, \varinjlim G_\alpha)$$

是一一的。

10) a) 设 A 是一个环，I 是一个集合，R 是 $L = A_d^{(I)}$ 的一个子模。设 $\mathfrak{S}$ 是由全体 (J, S) 组成的集合，其中 J 是 I 的一个有限子集，S 是 $A_d^J \cap R$ 的一个有限型子模。我们在 $\mathfrak{S}$ 上定义序关系“$J \subseteq J'$ 且 $S \subseteq S'$”；试证明，$\mathfrak{S}$ 对于这个序关系来说是滤相的，族 (A_d^J/S) 是 A 右模的一个归纳系，以 $\mathfrak{S}$ 为指标集，并且存在一个从 L/R 到 $\varinjlim_{(J,S)\in\mathfrak{S}} (A_d^J/S)$ 上的同构。

b) 试利用 a) 推出，任何 A 模都是有限呈示 A 模的归纳极限。

11) 设 E 是一个 A 右模。所谓 E 是*伪凝聚的*，是指 E 的任何有限型子模都是有限呈示的；伪凝聚模的子模都是伪凝聚的。所谓 E 是*凝聚的*，是指它是伪凝聚且有限型的（从而是有限呈示的）。

a) 设 $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ 是 A 右模的一个正合序列。试证明，若 E 是伪凝聚的（相应的，凝聚的），且 E' 是有限型的，则 E'' 是伪凝聚的（相应的，凝聚的）。试证明，若 E' 和 E'' 都是伪凝聚的（相应的，凝聚的），则 E 也是如此。试证明，若 E 和 E'' 都是凝聚的，则 E' 也是如此（可以使用习题 6 和 no 8, 引理 9）。

b) 设 E 是一个凝聚 A 模，E' 是一个伪凝聚（相应的，凝聚）A 模。试证明，对任意同态 $u : E \to E'$，$\operatorname{Im}(u)$ 和 $\operatorname{Ker}(u)$ 都是凝聚的，并且 $\operatorname{Coker}(u)$ 是伪凝聚的（相应的，凝聚的）（可以使用 a)）。

c) 试证明，伪凝聚（相应的，凝聚）模的直和（相应的，有限直和）也是一个伪凝聚（相应的，凝聚）模。

d) 若 E 是一个伪凝聚模，并且 M, N 是 E 的两个凝聚子模，试证明，$M + N$ 和 $M \cap N$ 都是凝聚的（可以使用 a) 和 c)）。

e) 假设 A 是交换的。试证明，若 E 是一个凝聚 A 模，F 是一个凝聚（相应的，伪凝聚）A 模，则 $\operatorname{Hom}_A(E, F)$ 是一个凝聚（相应的，伪凝聚）A 模。（可 63
以归结到 F 是凝聚的这个情形，考虑 E 的一个有限呈示，然后使用 b)。）

¶ 12) a) 设 A 是一个环。试证明，以下四个性质是等价的：

α) A 右模 A_d 是凝聚的。(习题 11)。

β) 有限呈示的 A 右模都是凝聚的。

γ) 对任意集合 I，A 左模 A_s^I 都是平坦的。

δ) 平坦 A 左模的任意乘积都是平坦的。

(为了证明 α) 蕴涵 β)，可以使用习题 11 b)。为了说明 γ) 蕴涵 α)，使用反证法，并利用 no 11, 命题 13。为了证明 α) 蕴涵 δ)，可以使用习题 9。)

我们称这样的一个环 A 是*右凝聚*的，同样可以定义*左凝聚*环的概念。

b) 试证明，右 Noether 环都是右凝聚的。举例说明，存在这样的右 Artin 环，它不是左凝聚的 (参照《代数学》, VIII, §2, 习题 4)。

* c) 秩为 1 的非离散赋值环 (第 VI 章) 是凝聚的，但它包含非凝聚的理想，且相应的 (单苇) 商模也不是伪凝聚的。*

d) 试证明，若 A 是一个右凝聚环，则对任意 A 右模 E，均有 $\lambda(E) = -1$ 或者 $\lambda(E) = 0$ 或者 $\lambda(E) = +\infty$ (习题 6)。

e) 设 $(A_\lambda, \varphi_{\alpha\beta})$ 是环的一个归纳系，其指标集是滤相的，并设 $A = \varinjlim A_\alpha$。假设对于 $\alpha \leqslant \beta$，A_β 都是一个平坦 A_α 左模。试证明，若诸 A_α 都是右凝聚的，则 A 也是如此。(首先观察到，对任意 α，A 是一个平坦 A_α 模，并且若 E 是 A_d 的一个有限型子模，则可以找到一个指标 α 和 $(A_\alpha)_d$ 的一个有限型子模 E_α，使得 $E_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$ 同构于 E。)

* f) 试利用 e) 推出，Noether 交换环上的 (有限元或无限元) 多项式环都是凝聚的。由此导出，凝聚环的商环未必是凝聚的。*

g) 为了使 A 是左凝聚的，必须且只需 A 的任何元素的左零化子都是有限型的，并且 A 的任意两个有限型左理想的交集也是有限型的 (可以使用习题 6 f))。

¶ 13) 设 A, B 是两个环，F 是一个 (A, B) 双模，G 是一个 B 右模。试证明，若 G 是内射的 (《代数学》, II (3 版), §2, 习题 11)，并且 F 是一个左平坦 A 模，则 A 右模 $\mathrm{Hom}_B(F, G)$ 是内射的。(可以使用关于一个 A 右模 E 的同构

$$
- - -
$$

(《代数学》, II (3 版), §4, no 1)。)

¶ 14) 设 A, B 是两个环，E 是一个 A 左模，F 是一个 (A, B) 双模，G 是一个 B 右模；考虑典范同态 (《代数学》, II (3 版), §4, 习题 5)

$$
\sigma : \mathrm{Hom}_B(F, G) \otimes_A E \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(E, F), G)
$$

64 即对任意 $x \in E$, $u \in \mathrm{Hom}_B(F, G)$, $v \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$，均有 $(\sigma(u \otimes x))(v) = u(v(x))$。试证明，若 G 是一个内射 B 模 (《代数学》, II (3 版), §2, 习题 11)，并且 E 是有限呈示的，则 σ 是一一的。(首先考虑 E 是有限型且自由的这个情形。)

¶ 15) 设 A 是一个环。试证明，有限呈示的平坦 A 左模 E 都是投射的。(给了一个 A 左模的满同态 $u : F \to F''$，设 u' 是同态 $\mathrm{Hom}(1_E, u) : \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_A(E, F'')$，$\overline{u}$ 是同态 $\mathrm{Hom}(u', 1_G) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_A(E, F''), G) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_A(E, F), G)$，其中 G 是一个可除 $\mathbb{Z}$ 模。首先使用习题 14 来证明，$\overline{u}$ 是单的；然后，选择适当的 G (《代数学》, II (3 版), §2, 习题 14) 来证明，u' 是满的。)

16) 设 A 是一个环，a 是 A 的一个元素。试证明，以下诸性质是等价的：

α) $a \in aAa$。

β) aA 是模 A_d 中的直和因子。

γ) A_d/aA 是一个平坦 A 右模。

δ) 对于 A 的任意左理想 $\mathfrak{b}$，均有 $aA \cap \mathfrak{b} = a\mathfrak{b}$。

（可以使用 no 6, 命题 7 的推论来证明 γ) 和 δ) 的等价性，然后通过找出幂等元 $e \in aA$ 满足 $eA = aA$ 来直接证明 δ) 蕴涵 α)，以及 α) 蕴涵 β)）。

17) 设 A 是一个环。试证明，以下诸性质是等价的：

α) 任何元素 $a \in A$ 都满足习题 16 中的那些等价性质。

β) A 的任何有限型右理想都是 A_d 的直和因子。

γ) 任何 A 左模都是平坦的。

δ) 任何 A 右模都是平坦的。

此时我们称 A 是一个**绝对平坦环**[6]。

（为了说明 α) 蕴涵 β)，可以使用《**代数学**》, VIII, §6, 习题 15 b)。）

¶ 18) 设 A 是一个绝对平坦环 (习题 17)。

a) 设 P 是一个投射 A 右模。试证明，P 的任何有限型子模 E 都是 P 的直和因子。（可以归结到 P 是有限型且自由的这个情形。然后注意到 P/E 是有限呈示的，再使用习题 15）。

b) 试证明，任何投射 A 右模 P 都可以写成一些单苇子模的直和，并且这里的每个单苇子模都同构于 A 的某个单苇右理想。（可以使用 Kaplansky 定理 (《**代数学**》, II (3 版), §2, 习题 3) 把问题归结到 P 是由一个可数个元素所生成的这个情形，然后使用 a)。）

c) 举例说明，存在这样的绝对平坦环 A 和有限型 A 模，后者不是投射的（考虑 A 除以一个非有限型理想后的商；参照《**代数学**》, VIII, §6, 习题 15 f) 和《**交换 65
代数学**》, II, §4, 习题 17）。

19) 设 A 是一个环。试证明，以下诸性质是等价的：

α) A 是半单的。

β) A 的任何右理想都是内射 A 模。

γ) 任何 A 右模都是投射的。

δ) 任何 A 右模都是内射的。

20) 设 A 是一个整环，B 是一个 A 代数，并且是一个平坦 A 模，M 是一个无挠 A 模。试证明，若 $t \in B$ 不是零因子，则对于一个 $z \in B \otimes_A M$ 来说，关系式 $t.z = 0$ 蕴涵 $z = 0$。（可以归结到 M 是有限型的这个情形，然后通过把 M 嵌入一个有限型自由 A 模之中，再归结到 $M = A$ 的情形。）

21) 设 S 是一个交换环，R 是一个交换 S 代数，B 是一个 S 代数 (未必交换)，$B_{(R)}$ 是 B 经过纯量扩张而得到的 R 代数。假设 R 是一个平坦 S 模，并且 B 是一个有限型 S 模。若 Z 是 B 的中心，试证明，$Z_{(R)} = Z \otimes_S R$ 到 $B_{(R)}$ 的典范同态是由 $Z_{(R)}$ 到 $B_{(R)}$ 的中心的一个同构。（可以使用正合序列

— — —

[6]在《**代数学**》, VIII, §6, 习题 15 中曾经称此为“正则环”，我们修改了用语，因为这个名称要留给交换代数中的另一个完全不同的概念。

其中 $\theta(x)(y)=xy-yx$，再加上 no 10, 命题 11。)

¶ 22) 设 E 是一个 A 左模。对于 A 的任意右理想 $\mathfrak{a}$，和任意元素 $a\in A$，我们以 $\mathfrak{a}:a$ 来记满足 $ax\in\mathfrak{a}$ 的那些 $x\in A$ 所组成的集合，并以 $\mathfrak{a}E:a$ 来记满足 $ay\in\mathfrak{a}E$ 的那些 $y\in E$ 所组成的集合。显然有 $(\mathfrak{a}:a)E\subseteq\mathfrak{a}E:a$。试证明，为了使 E 是平坦的，必须且只需，对于 A 的任意右理想 $\mathfrak{a}$ 和任意元素 $a\in A$，均有等式 $(\mathfrak{a}:a)E=\mathfrak{a}E:a$。（为了说明该条件是必要的，可以考虑 A 右模的正合序列 $0\to(\mathfrak{a}:a)/\mathfrak{a}\xrightarrow{\psi}A_d/\mathfrak{a}\xrightarrow{\varphi}A_d/\mathfrak{a}$，其中 ψ 是典范含入，并且 φ 是左乘 a 的映射（通过取商）所导出的映射。为了说明该条件是充分的，可以应用 no 11, 命题 13 的推论 1 中的判别法：从关系式 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i=0$ 出发，其中 $a_i\in A,\ x_i\in E$，把前提条件应用到理想 $\mathfrak{a}_2=\sum\limits_{i=2}^{n}a_iA$ 和元素 a_1 上，再对 n 进行归纳。)

23) a) 设 $0\to R\to L\to E\to 0$ 是 A 左模的一个正合序列，其中 L 是一个自由 A 模；设 (e_α) 是 L 的一个基底。试证明，以下诸条件是等价的：

α) E 是平坦的。

β) 对任意 $x\in R$，若 $\mathfrak{a}_x$ 是由 x 在基底 (e_α) 上的诸分量所生成的右理想，则有 $x\in R\mathfrak{a}_x$。

γ) 对任意 $x\in R$，均可找到一个同态 $u_x:L\to R$，使得 $u_x(x)=x$。

66 δ) 对于 R 中的任意一个有限序列 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$，均可找到一个同态 $u:L\to R$，使得对 $1\leqslant i\leqslant n$ 均有 $u(x_i)=x_i$。（可以使用 no 6, 命题 7 的推论）。

b) 设 $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个左理想，并且 $A/\mathfrak{a}$ 是一个平坦 A 模。试证明，对任意有限型左理想 $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$，均可找到 $x\in A$，使得 $\mathfrak{b}\subseteq Ax\subseteq\mathfrak{a}$（可以使用 a) 中的判别法 δ)）。

c) 试利用 a) 导出习题 15 中的结果的一个新证明。

d) 设 $\mathfrak{r}$ 是 A 的根，并设 $0\to R\to L\to E\to 0$ 是 A 左模的一个正合序列，其中 L 是自由的。假设 E 是平坦的，并且 R 包含在 $\mathfrak{r}L$ 之中。试证明，我们有 $R=0$（在 a) 的记号下，注意到 $\mathfrak{a}_x$ 是一个有限型理想，并且我们有 $\mathfrak{a}_x=\mathfrak{a}_x\mathfrak{r}$）。

e) 设 E 是一个平坦有限型 A 模；假设可以找到 A 的一个双边理想 $\mathfrak{b}$，包含在 A 的根之中，且使得 $E/\mathfrak{b}E$ 是一个自由 $(A/\mathfrak{b})$ 模。试证明，E 是一个自由 A 模（注意到存在一个有限型自由 A 模 L，使得 $L/\mathfrak{b}L$ 同构于 $E/\mathfrak{b}E$，再使用《代数学》, VIII, §6, no 3, 命题 6 的推论 4；然后应用 d)）。

24) 所谓 A 右模 M 的一个子模 M' 是*纯净的*，是指若我们以 $j:M'\to M$ 来记典范含入，则对任意 A 左模 N，同态 $j\otimes 1_N:M'\otimes_A N\to M\otimes_A N$ 都是单的。比如在下面两个条件下就是这样：M' 是 M 的直和因子，或者 M/M' 是平坦的，但这两个条件不是必要的 (习题 4)。

a) 试证明，为了使 M' 是 M 的一个纯净子模，必须且只需，若 $(m'_i)_{i\in I}$ 是 M' 中的一族有限个元素，$(x_j)_{j\in J}$ 是 M 的一族元素，且对任意 $i\in I$ 均有 $m'_i=\sum\limits_{j\in J}x_ja_{ji}$，其中 (a_{ji}) 是 A 中的一族元素，则可以找到 M' 中的一族元素 $(x'_j)_{j\in J}$，使得对任意 $i\in I$，均有 $m'_i=\sum\limits_{j\in J}x'_ja_{ji}$。（为了说明该条件是充分的，可以使用 no 11, 引理 10 来证明，对任意有限型 A 左模 N，$M'\otimes_A N\to M\otimes_A N$ 都是单的；为了说明该条件是必要的，考虑一个有限型 A 左模 $N=L/R$，其中 L 是一个有限型自

由A模，R是L的一个有限型子模。）试利用这个判别法导出，如果A是一个交换主理想整环，则A模的纯净子模的概念与《代数学》, VII, §2, 习题7中所定义的概念是一致的。

b) 设M是一个A右模，M'是M的一个子模，M''是M'的一个子模。试证明，若M'是M的一个纯净子模，并且M''是M'的一个纯净子模，则M''是M的一个纯净子模，并且M'/M''是M/M''的一个纯净子模。若M''是M的一个纯净子模，则M''是M'的一个纯净子模。

c) 试证明，若N和P是M的两个子模，并且$N\cap P$和$N+P$在M中都是纯净的，则N和P都是M的纯净子模。举例说明，在$\mathbb{Z}^2$中存在这样两个子模N, P，它们在$\mathbb{Z}^2$中都是纯净的，但$N+P$不是$\mathbb{Z}^2$的纯净子模。

d) 设C是一个交换环，E, F是两个C模；试证明，若E'（相应的，F'）是E（相应的，F）的一个纯净子模，则典范映射$E'\otimes_C F'\to E\otimes_C F$是单的，并且 67
把$E'\otimes_C F'$等同于$E\otimes_C F$的一个纯净子模。

e) 设$\rho: A\to B$是一个环同态，M是一个A右模，M'是M的一个纯净子模。试证明，$M'_{(B)}=M'\otimes_A B$可以典范等同于$M_{(B)}=M\otimes_A B$的一个纯净子模。

§3的习题

1) a) 为了使一族A模(E_λ)的直和是一个忠实平坦A模，只需每个E_λ都是平坦的，并且至少有一个是忠实平坦的。

b) 试利用a)推出，若A是一个单环，则任何非零A模都是忠实平坦的。这个结果对于半单环是否成立？

2) 设(p_n)是全体素数的严格递增序列，并设A是乘积环$\prod_n \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$。试证明，诸$\mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$的直和$E$是一个忠实的投射$A$模，但不是忠实平坦的（观察到$E$是$A$的一个理想，且满足$E^2=E$）。

3) 设A是一个右凝聚环(§2, 习题11)。为了使一族A左模的乘积是忠实平坦的，只需其中的每一个都是平坦的，并且至少有一个是忠实平坦的。

试由此导出，若A是一个凝聚的交换环，则形式幂级数环$A[[X_1,\dots,X_n]]$是一个忠实平坦A模。

4) 设A是域K上的一个单代数，B是A的一个子代数，它是半单的，但不是单的。试证明，A是一个忠实平坦B模（右和左），但可以找到这样的B右模E，它不是忠实平坦的，然而使$E\otimes_B A$成为一个忠实平坦A模(习题1)。

5) 设A是一个交换环，M是一个平坦A模，它包含一个子模N，后者不是平坦的(参照 §2, 习题3)。设B（相应的，C）是A模$A\oplus N$（相应的，$A\oplus M$），再定义其中的乘法是$(a,x)(a',x')=(aa',ax'+a'x)$；则$B$不是平坦$A$模，但$B$模$C$是一个忠实平坦$A$模，因而$B$满足no 5, 命题8中的诸条件。

6) 举例说明，存在这样的整环A和环B，A是B的子环，且使得B是一个平坦A模，但可以找到一个A模E，它不是投射的，也不是有限型的，然而$B\otimes_A$

E 是一个有限型自由 B 模。

7) 若 K 是一个域，则环 $K[X]$ 和域 $K(X)$ 都是忠实平坦 K 模，但 $K(X)$ 不是一个忠实平坦 $K[X]$ 模。

8) 设 p 是一个素数，并设 A 是 $\mathbb{Q}$ 的一个子环，由所有形如 k/p^n 的分数所组成，其中 $k \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0$。试证明，$A$ 是一个平坦 $\mathbb{Z}$ 模，且可以找到一个 $\mathbb{Z}$ 模 E，它不是平坦的，但它使 $A \otimes_{\mathbb{Z}} E$ 成为一个平坦 A 模。

9) 设 A 是一个交换环，B 是一个 A 代数，$(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ 是一族 A 代数，并且对任
68 意 $\lambda \in L$，设 $B_\lambda = C_\lambda \otimes_A B$ 是 C_λ 和 B 的张量积代数。设 E 是一个 B 左模。我们令 $E_\lambda = B_\lambda \otimes_B E = C_\lambda \otimes_A E$；这是一个 (B_λ, C_λ) 双模。同样的，若 F 是一个 B 右模，我们令 $F_\lambda = F \otimes_B B_\lambda = F \otimes_A C_\lambda$，这是一个 (C_λ, B_λ) 双模。

a) 试证明，(C_λ, C_λ) 双模 $F_\lambda \otimes_{B_\lambda} E_\lambda$ 同构于 $(F \otimes_B E) \otimes_A C_\lambda$。

b) 试证明，若 E 是一个平坦（相应的，忠实平坦）B 模，则每个 E_λ 都是一个平坦（相应的，忠实平坦）B_λ 模。逆命题也是对的，只要进而假设 $\bigoplus_{\lambda \in L} C_\lambda$ 是一个忠实平坦 A 模。

c) 试证明，若 L 是有限的，每个 E_λ 都是一个有限型投射 B_λ 模，并且 $\bigoplus_{\lambda \in L} C_\lambda$ 是一个忠实平坦 A 模，则 E 是一个有限型投射 B 模（可以使用 no 6, 命题 12）。

10) a) 设 $\rho : A \to B$ 是环的一个单同态。试证明，对于 A 的任意左理想 $\mathfrak{a}$，只要它是 A 中的某个子集 M 的左零化子，就有 $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$。

b) 试利用 a) 导出一个同态 $\rho : A \to B$ 的例子，它使得 A 右模 B 不是平坦的，然而对于 A 的任意左理想 $\mathfrak{a}$，均有 $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$（参照 §2, 习题 17 和《代数学》, VIII, §3, 习题 11 和 §2, 习题 6 以及 IX, §2, 习题 4)。

§4 的习题

1) 试证明，在命题 2 的陈述中，可以把条件 a) 换成：

a′) 对任意单苇 S 右模 E，均有 $\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(E), F) = 0$。

（为了证明 a′) 蕴涵 a)，可以首先考虑 E 可由 n 个元素所生成的情形，并且对 n 进行归纳。）

§ *4.* “
“
“
...... “
“
“
“
TOR