复变函数

从技术上的角度上看， 19 世纪数学中最独特的创造是单复变函数论。它在 19 世纪的数学中的地位就象 18 世纪中的微积分一样。他被认为是抽象科学中最和谐的理论之一。复变函数理论的研究起源于部分分式的积分、对数函数（在负数上的取值）、保形变换、实系数多项式的分解等问题。

复变函数就是自变量为复数的函数（有时也简称为复函数），可以视为实函数的一种自然的推广。实函数论中的所有概念都可以平行地搬到复函数中来，例如极限、连续、导数、积分、级数收敛性等等。此外，它还有复数集自身的结构所导致的独特的理论。

从结构上讲，复数集和实数集都是域（最简单的代数结构），都是完备的（对于收敛序列取极限封闭）。二者的差别是：实数集是全序集而复数集不是；复数集是代数封闭的（任一多项式在其中皆有根）而实数集不是。我们将着重介绍复函数与实函数的不同之处。

1. **积分**. 欧拉在 1776 年之后直到去世 (1883 年) 写了一系列用复函数计算实函数的积分的论文，这些论文都在他去世之后才发表。他发现的一个重要事实是：如果一个实函数中的变元用复数代替，则得到的复函数的实部和虚部之间存在密切的联系。详言之，设 $Z(z)$ 为一个实函数，令 $z = x + \mathrm{i}y$（则 $Z(z) = Z(x+\mathrm{i}y)$ 的值通常是复数），再令 $Z(x+\mathrm{i}y) = M(x,y) + \mathrm{i}N(x,y)$ ，则 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 这两个实二元函数必满足以下的关系：

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{$*$}$$

欧拉的推导是简单的。他考虑积分

$$\int Z(z)\mathrm{d}z = V.$$

当 $z = x+\mathrm{i}y$ 时， V 也是复函数. 记 $V = P(x,y)+\mathrm{i}Q(x,y)$, 其中 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 为二元实函数，则有

$$P + \mathrm{i}Q = \int (M + \mathrm{i}N)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y).$$

取复共轭，就有

$$P - \mathrm{i}Q = \int (M - \mathrm{i}N)(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y).$$

由以上二式就解得

$$P = \int M\mathrm{d}x - N\mathrm{d}y, \qquad Q = \int N\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y.$$

所以

$$\begin{aligned} P &= \int\int \frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x - \frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int \frac{\partial M}{\partial y}(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y) - \frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\int\int (\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

如果当初的函数 $f(x)$ 是连续的（欧拉考虑的都是连续的），并且开始的积分路径取为闭路径，则 $P=0$ 。由闭路径的任意性即知二重积分号下的函数为 0 。对于积分 Q 做同样的讨论就得到 $(*)$ 式。这就是现在我们熟知的 *哥西 - 黎曼方程* 。达朗贝尔在 1752 年的论文《关于流体阻力的一个新理论试论》中在研究理想流体的运动时就已经遇到过满足哥西 - 黎曼方程的函数。无论是达朗贝尔还是欧拉都没有对于复函数进行深入的讨论。

最早对于复变函数论作出贡献的是高斯。1811 年他在给贝塞尔 (Bessel)(1784-1846) 的信中针对贝塞尔关于对数积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 的一篇论文指出：*函数 $\phi(x)$(其表达式可能是实的) 沿复平面上一条路径 C 作定积分 $\int_C \phi(x)\mathrm{d}x$ ，得到的结果可能不仅仅被积分的上下限所决定，有时会因为积分路径的不同而改变* 。这是复函数与实函数的一个主要差别之一。（一元实函数的定积分只有一条路径，因而不会发生这个问题）。他断言：只要 $\phi(x)$（是单值的并且）不变为 ∞ ，则积分与路径无关（他说这个事实的证明并不难，以后将写出证明。但事实上他一直没有发表这个证明）。如果 $\phi(x)$ 变为 ∞ ，则积分可以由于路径的不同而取许多值。积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 如果从 1 出发，路径不包围 0 ，则得出的积分是唯一的，如果路径包围 0 ，则要在不包围 0 的情形所得到的值上加或减去 $2\pi\mathrm{i}$ 。这样，对于一个给定的复数 $a+b\mathrm{i}$ ，就有很多对数函数值 $\log(a+b\mathrm{i})$ 。（按后来的函数的定义，他关于积分与路径无关的条件当然不够，应当加上函数 $\phi(x)$ 连续的条件。但是按照当时对函数的理解，即函数是初等函数的有限表达式，他的说法是正确的）。泊哇松在 1820 年的一篇论文中也谈到了积分与路径之间可能有关。他也以对数积分为例，考虑 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ ，令 $x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ，其中 θ 由 $(2n+1)\pi$ 变到 0 。则

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\int_{(2n+1)\pi}^{0} \mathrm{d}\theta = -(2n+1)\pi\mathrm{i}\ .$$

高斯与泊哇松并没有发表过关于复变函数的更重要的结果。复变函数的系统理论是哥西、外尔斯特拉斯、黎曼建立的。

哥西在 1814-1825 年间由矩形区域出发过渡到一般的区域，由实函数过渡到复函数，逐步证明了只要 $\phi(z)$ 在由 z_0 到 z 两条路径围成区域上连续，则积分 $\int_{z_0}^{z} \phi(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关。在这过程中，他说：在 “严格并且直接由实到虚的过渡” 时，他心中想的是（上面 $(*)$ 式中的）两个方程。哥西在很长时间内（ 1839 年前）认为连续函数都是可微的。（黎曼严格区分了可微和连续。由导数的定义出发容易推导出：如果一个复函数 $f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=M(x,y)+\mathrm{i}N(x,y)$ ，其中 $M(x,y),\ N(x,y)$ 为 $x,\ y$ 的二元可微实函数，则复函数 $f(z)$ 可微当且仅当 $M(x,y),\ N(x,y)$ 满足哥西 - 黎曼方程。）

哥西还研究了函数不连续的情形。如果 $f(z)$ 以 $z=z_1$ 为单极点，即 $f(z_1)$ 为无穷但极限 $\lim\limits_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=F(z_1)\neq\infty$ ，两条路径围成的区域包含 z_1 ，且 $f(z)$ 在此区域中只有 z_1 这一个极点，则沿着两条路径的积分相差 $2\pi\mathrm{i}F$ 。哥西将此 F 称为 $f(z)$ 在 z_1 处的 *留数* 。哥西的这个结果本质上就是现在所说的 *留数定理* 。他后来给出了留数定理的现代的形式，即 $F(z_1)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int f(z)\mathrm{d}z$ ，其中的积分路径是沿包围 z_1 的小圆周。

1831 年哥西证明了解析函数在一点处的值可以用包含这个点的一个圆周上的积分表示

出来，他的公式是

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{z}f(\bar{z})}{\bar{z}-z}\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\bar{z}=Z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ ，而 Z 是 f 在点 z 处（马克劳林）级数展开的收敛半径。这实际上就是现在的 *哥西积分公式* $\left(f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right.$ ，ζ 按正方向经由包含 z 的一条闭路，在此闭路包围的区域内 f 解析$\left.\right)$。哥西还研究了多值复函数。但是这方面的理论是由黎曼奠定的。哥西在差不多 25 年中（直到 1843 年）单独一人发展了复函数理论。

2. **解析延拓**. 外尔斯特拉斯研究复函数的途径是应用幂级数。他最主要的贡献是创立了 *解析开拓* 的理论。许多复函数的泰勒级数常有一个收敛半径，该半径对应的圆 C 上存在一个或几个点使得泰勒级数在这些点处发散。 C 上使得泰勒级数不发散的点处该函数仍然可以进行泰勒展开，从而将函数的定义域扩大到收敛圆之外。对于新的收敛半径对应的圆周又可以重复上述作法。如此下去，可以得到所讨论的函数的最大的定义范围，这就是外尔斯特拉斯在 1841 年后所作的解析开拓。他还证明了可微复函数一定有幂级数展开式（这对于实函数是不成立的）。用它的这个展开定理与哥西积分公式相结合，容易证明可微复函数的导函数仍然可微。于是就得到结论： *一个复函数如果在一个区域中可微，则在该区域中无穷次可微* 。所以对于复函数而言，可微函数、无穷次可微函数和具有泰勒展开的函数都是一回事。通常，具有泰勒展开的函数称为解析函数，所以人们也将复可微函数称为复解析函数。外尔斯特拉斯还在椭圆函数（即双周期函数）方面作了具有基本重要性的工作。

3. **黎曼面**. 到了黎曼时期 复函数的基础理论已经建立了，但是并不完整，主要的问题是多值函数的困扰。黎曼给出了多值函数的一个完美的定义域，使得多值函数单值化，这就是所谓的 *黎曼面* 。例如 $w^2=z$ 所定义的函数 $w=\pm\sqrt{z}$ 是二值的。黎曼对于此函数这样构造了他的定义域：将复平面沿实轴的正半轴切开，并添加一个无穷远点 ∞ ，将两个这样的带缝的扩充了的复平面叠在一起，然后把上面的复平面的的幅角大于 0 小于 $\frac{\pi}{2}$ 的部分相邻的实轴切缝与下面的复平面的的幅角接近 2π 的部分相邻的实轴粘合起来，又把下面的复平面的的幅角大于 0 小于 $\frac{\pi}{2}$ 的部分相邻的实轴切缝与上面的复平面的的幅角接近 2π 的部分相邻的实轴粘合起来，同时将两个 ∞ 粘合。这样就得到幅角范围为 0 到 4π 的一个双层复平面。当 z 在上面的一层复平面上时，就让它的平方根 w 取幅角在 0 到 π 之间的值，而当 z 在下面的复平面上时，就让 w 取幅角在 π 到 2π 之间的值。这样就使得 w 成为了 z 的单值函数。

接着黎曼研究了给定的黎曼面上的单值解析函数，他所定义的单值解析函数实际上是我们现在所说的半纯函数。所以这种函数在黎曼面的几乎所有点处都可微并且满足哥西 - 黎曼方程。 黎曼在给出了满足一些限制条件（主要是极点处的性状）的（黎曼面上的）半纯函数。反过来，他相信黎曼面上的单值解析函数会导出与黎曼面相关联的二元代数方程，此方程定义的代数曲线经过适当处理后（奇性化解到高维复射影空间中的光滑代数曲线）可以等同（解析同胚）于当初的黎曼面，但是关于它对于这个导出过程他并没有说清楚。他进一步研究了这种代数曲线的连通性（单联通或多连通）以及亏格的计算公式，成为后来的黎曼 - 洛克定理的主要组成部分。他的这些工作奠定了现代的紧致黎曼曲面（也就是复代数曲线）理论的基础。

4. **椭圆积分**. 椭圆弧长的计算难倒了数学家。椭圆弧长的积分无法写成初等函数。事实上，柳维尔在 1883 年证明了椭圆弧长的积分不可能有初等表达式。

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 由点 $(0,b)$ 到横坐标为 x $(0\le x\le a)$ 的点的弧长为

$$u=a\int_0^x\frac{(1-k^2x^2)\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

其中 $k=1-\frac{b^2}{a^2}$ ，$t=\frac{x}{a}$ 。

椭圆积分的权威性工作是由勒让德 (Legendre)(1752-1833) 做出的。他引入了三类椭圆积分，即

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

在他之前欧拉得到了椭圆积分的加法定理。勒让德通过变量（替换例如 $x=\sin\phi$），将上述积分化为简单的形式，例如第一类椭圆积分就变成了

$$u(=F(k,\phi))=\int_0^\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

这个积分很象 $\arcsin x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ ， $\arcsin x$ 的反函数 $\sin x$ 是一个周期函数，而且有加法公式等算术性质。于是阿贝尔 (Abel)(1802-1829) 从另一个角度考虑椭圆积分：把积分的变上限 x 视为弧长 u 的函数，进一步地将 ϕ 视为弧长 u 的函数。这个想法也出现在雅可比 (Jacobi)(1804-1851) 的工作中。雅可比引入了函数

$$\mathrm{am}\ u=\phi$$

他引入的其他函数记号后来被简化为

$$\mathrm{sn}\ u=x,\qquad \mathrm{cn}\ u=\cos\phi,\qquad \mathrm{dn}\ u=\sqrt{1-k^2\sin^2\phi},$$

其中的 k 称为椭圆积分的“模” $(0<k<1)$ 。这些函数被称为 椭圆函数(sn 、 cn 和 dn 分别称为椭圆正弦、椭圆余弦和椭圆 δ) 。容易看出

$$\mathrm{sn}^2u+\mathrm{cn}^2u=1,\qquad \mathrm{dn}^2u+k\mathrm{sn}^2u$$

以及 am u, sn u 都是奇函数， cn u, dn u 都是偶函数。

直观上容易看出动点的坐标（或幅角）是椭圆弧长的周期函数。所以定积分

$$K=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2t^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=F(k,\frac{\pi}{2})$$

与椭圆函数的周期有关（若用 $k'=\sqrt{1-k^2}$ 代替此式中的 k，所得到的 $F(k',\frac{\pi}{2})$ 也与周期有关）。事实上， $\mathrm{sn}\ u$, $\mathrm{cn}\ u$ 都以 $4K$ 为周期， $\mathrm{dn}\ u$ 以 $2K$ 为周期。

到此为止，一切都是在实数范围内讨论的。阿贝尔进一步将椭圆函数推广到复数上。他引入

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}u,k)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}(u,k')}{\mathrm{cn}(u,k')},\quad \mathrm{cn}(\mathrm{i}u,k)=\frac{1}{\mathrm{cn}(u,k')},\quad \mathrm{dn}(\mathrm{i}u,k)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{dn}(u,k')}{\mathrm{cn}(u,k')},$$

其中各函数自变量后面的 k 和 k' 表示椭圆积分的模。阿贝尔对于实的椭圆函数又证明了加法定理：

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(u+v)&=\frac{\mathrm{sn}u\cdot\mathrm{cn}v\cdot\mathrm{dn}v+\mathrm{sn}v\cdot\mathrm{cn}u\cdot\mathrm{dn}u}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v},\\ \mathrm{cn}(u+v)&=\frac{\mathrm{cn}u\cdot\mathrm{cn}v-\mathrm{sn}u\cdot\mathrm{dn}u\cdot\mathrm{sn}v\cdot\mathrm{dn}v}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v},\\ \mathrm{dn}(u+v)&=\frac{\mathrm{dn}u\cdot\mathrm{dn}v-k^2\mathrm{sn}u\cdot\mathrm{cn}u\cdot\mathrm{sn}v\cdot\mathrm{cn}v}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v}.\end{aligned}$$

应用这些公式就可以定义一般的复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 得椭圆函数值。进而阿贝尔证明了 $\mathrm{sn}\,z$ 以 $2\mathrm{i}K'$ 为周期， $\mathrm{cn}\,z$ 以 $2(K+\mathrm{i}K')$ 为周期， $\mathrm{dn}\,z$ 以 $4\mathrm{i}K'$ 为周期. 于是设三种椭圆函数都具有两个周期，而且这两个周期都是实线性无关的。这是阿贝尔的伟大发现。于是这些椭圆函数就完全被复平面上的适当的平行四边形上的取值所决定。

上述大部分结果也被雅科比独立地得到了，但是他在 1827 年的《新基础》一书中所用的的基本方法不令人满意。后来，他采用了不同的起点。他定义了四个 θ 函数，用他们可以将上述的三个椭圆函数表达出来。这四个 θ 函数是

$$\begin{aligned}\theta_0(v)=\theta_0(v;\tau)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi m^2\tau}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi mv},\\ \theta_1(v)=\theta_1(v;\tau)&=\mathrm{i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(m-\frac{1}{2})^2\tau}\mathrm{e}^{(2m-1)\mathrm{i}\pi v},\\ \theta_2(v)=\theta_2(v;\tau)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(m-\frac{1}{2})^2\tau}\mathrm{e}^{(2m-1)\mathrm{i}\pi v},\\ \theta_3(v)=\theta_3(v;\tau)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi m^2\tau}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi mv}.\end{aligned}$$

雅科比给出了这些函数的的无穷级数和无穷乘积的表达式，他们都收敛得非常快。

外尔斯特拉斯用级数定义了椭圆函数，主要是所谓的外尔斯特拉斯 $\wp$ 函数：

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\substack{m,n=-\infty\\(m,n)\neq(0,0)}}^{\infty}\frac{1}{(z+m\omega_1+n\omega_2)^2}-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2},$$

其中 ω_1 和 ω_2 是两个实线性无关的复数。 $\wp(z)$ 和它的导函数都是以 ω_1 和 ω_2 为周期的椭圆函数，并且任一以 ω_1 和 ω_2 为周期的椭圆函数都可以表示成 ω_1 和 ω_2 的有理分式。

椭圆函数在分析、几何、数论、物理、力学、天文、大地测量等众多学科中都被广泛地使用。

5. **保形映射**. 将解析函数 $w = f(z)$ 看作由 z（复）平面到 w（复）平面的映射，则将 z 平面上的一个区域 D 映成 w 平面上的一个区域 D_1 。这种映射有一个明显的特点，即：如果 z_0 为区域 D 中的一点，且 $f'(z_0) \neq 0$ ，则从 z_0 出发的一条射线 l 的像在 $f(z_0)$ 处的切线的倾角等于 l 的倾角加上 $f'(z_0)$ 的幅角，并且 z_0 在各个方向上的增量的绝对值在映射下的伸缩程度也基本相同 (这因为 $\Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$) 。于是区域 D 中任一点处的两条相交的光滑曲线之间的夹角在映射下保持不变。所以解析映射具有保角性。但这并不是说直线映成直线，通常讲来，直线只是映成光滑曲线。例如在映射 $w = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z}$ 下 z 平面上的实轴就变为 w 平面上的单位圆周（无穷多层螺旋形）。如果 $f(z)$ 在 z_0 导数为 0 ，则可以出现复杂的情形。这种“坏”的情形有时非常有用。 例如，

$$w = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)$$

称为茹科夫斯基函数，它在 $z = \pm 1$ 处导数为零。设 K 为 z 平面上过点 $z = \pm 1$ 的圆周其圆心 O 位于虚轴上 $(O = a\mathrm{i},\ a > 0)$ ， K' 为与 K 相切于 $z = 1$ 处的包含 K 的圆。则在茹科夫斯基函数下， K 变为连接 1 和 -1 的一段（向上凸起的）圆弧 L'（这因为：过圆内一定点的弦被交点所分成的两部分乘积为定值），而 K' 就变成在点 1 处与 L 相切的一条封闭曲线 L' ，其形状很象飞机机翼的剖面。这个变换对于计算飞机在飞行时的升力很有用。

虚数本来是难以被人们接受的虚无缥缈的量，于是复数也是如此，复变函数就更不可琢磨。但是这种函数却有很多理论上和实际上的应用。这体现了数学的一个特点：从公理出发，经过正确的逻辑推理，得到的结论由它的真实性。