微积分

微积分是欧几里德几何之后全部数学中最大的创造。其创始人是 17 世纪的英国的牛顿和德国的莱布尼兹 (Leibniz)(1646-1716) 。

在牛顿和莱布尼兹之前已经有了许多体现微积分思想的研究。这种思想可以追溯到古希腊的欧几里德几何，即用穷竭法求相似形的几何量之间的比例关系。事实上，现代的积分理论正是基于穷竭法的思想。

我们将首先回顾一下 17 世纪在牛顿和莱布尼兹之前微积分的前期历史，然后着重讲述牛顿和莱布尼兹。

一． 17 世纪初的微积分

在上一讲我们曾经提到过微积分起源于四个问题，即： (1) 由加速度求路程及其反问题， (2) 求曲线的切线， (3) 极值问题， (4) 求长度、面积、体积。

第 (1) 个问题实际上被伽利略 (1564-1642) 归结到第 (4) 个问题（及其反问题）。在匀加速运动中，他证明了：在时间 - 速度图形下的面积就是距离。他对于面积的想法和开普勒 (1571-1630) 类似（开普勒用无穷小面积或体积之和来求面积或体积），但是他（通过面积）给出的距离公式（ $s = 16t^2$ ，其中 s 是以英尺为单位的距离， t 是以秒为单位的时间，物体作自由落体运动，重力加速度为 32 ）的证明是含糊不清的。如果运动比较复杂，距离就更无法由速度算出来了。

求曲线的切线与光的反射和折射密切相关，因而很多人研究过这个问题。费马（ 1629 年就已经得到的、出现在 1637 年的手稿《求最大之和最小值的方法》中）的方法是实际上就是现代的方法。他用相似三角形（通过消去小增量）求出次切线的长度，从而确定切线的位置。费马的方法的正确性需要极限理论作基础，而极限理论在当时是没有的。笛卡尔对于多项式定义的曲线给出了切线的（不依赖于极限的）纯代数的求法。他批评费马的方法无法表达清楚。但是费马宣称自己的方法优越（适用于任何曲线），同时他也看到了小增量的好处（这个小增量实际上就是微分 $\mathrm{d}x$ ）。其他研究过切线问题的人还有罗贝瓦尔 (Roberval)(1602-1675) 以及巴罗 (Barrow)(1630-1677) ，前者将曲线看作具有两个方向上的速度的运动的点的轨迹，切线方向就是合速度方向，因而是两个方向上的速度构成的平行四边形的对角线方向。这推广了阿基米德求（阿基米德）螺线的切线的方法。托里拆利 (Torricelli)(1608-1647) 是伽利略的学生，他用罗贝瓦尔的方法求出了曲线 $y = x^n$ 的切线。巴罗是剑桥大学的第一任教授（牛顿的前任），他试图完全用几何的方法得到切线，以避开说不清的极限概念。他的方法非常复杂，实际上他最终还是无法避开代数，本质上和费马的方法一样。例如他计算曲线 $y^2 = px$ 在其上一点 (x, y) 处的切线如下：用 $x + e$ 代替 x ，用 $y + a$ 代替 y ，得到 $y^2 + 2ay + a^2 = px + pe$ 。消去 y^2 和 px ，得到 $2ay + a^2 = px$ 。然后他去掉 e 和 a 的高次项，得到 $\frac{a}{e} = \frac{p}{2y}$（切线的斜率），由此算出次切线的长度，即得到了切线。

关于问题 (3) ，即求极值的问题，开普勒在《测量酒桶体积的新科学》 (1615 年) 一书中说到一个重要的事实：变量（例如内接于球的底面为正方形的直平行六面体的体积）越接近于极大值，其（相对于高的）变化越小。费马在《求最大之和最小值的方法》中用一个例子说明自己的方法。给定一个线段，求其上一点，使得以被这点分成的两部分线段为边的矩形的面

积最大。设整个线段为 B，其中一部分为 A，则矩形面积为 $(B-A)A=AB-A^2$。然后他用 $A+E$ 代替 A，则另一部分就是 $B-(A+E)$，矩形面积为 $(A+E)(B-A-E)$。如果这里的 A 和 $B-A$ 使得面积最大，他认为（按照开普勒的看法）上面说的两个面积应当相等。于是得到等式 $AB+EB-A^2-2AE-E^2=AB-A^2$。即 $EB-2AE-E^2=0$。此式除以 E，再取 $E=0$，就得到 $B=2A$。所以结论是：正方形时面积最大。他说这个方法是普遍有效的。作为一般原则的描述，他说：如果 A 是自变量，并且如果 A 增加到 $A+E$，则当 E 变成无限小并且函数经过一个极大值（或极小值）时，函数的前后两个值是相等的。把这两个值等同起来，用 E 除方程，然后使 E 消失，就可以从所得的方程确定函数取极大值或极小值的 A 的值。用现在的语言说，即如果函数 $f(X)$ 在 $X=A$ 除达到极值，则 $\frac{f(A+E)-F(A)}{E}$ 趋于 0(当 E 趋于 0)，也就是 $f'(A)=0$。

研究问题 (4) 的人很多。开普勒求面积、体积的方法是将同维数的容易计算的小的图形的面积、体积求和，让小图形越来越小，个数越来越多以至无穷。这当然是积分的思想，但是他不可能说清楚（因为没有极限的概念）。卡瓦列里 (Cavalieri)(1598-1647) 是伽利略的学生，他力图将伽利略求面积的方法说清楚。他认为面积是由无穷多条等距、平行的线段构成的，体积是由无穷多个等距、平行的平面面积构成的。他把这些线段和面积叫作面积和体积的不可分元。例如平行四边形的对角线将该四边形分成的两个三角形的面积相等（这是伽利略推导自由落体运动的路程公式时用到的事实），其原因是这两个三角形有对应相等的线段不可分元。他的方法被称为“不可分法”。根据不可分法，他得到了现在中学立体几何中的“卡瓦列里定理”：如果两个等高的立体的距离底面相等的截面的面积有恒定的比例，则他们的体积之比等于这个比例。对于平面图形的面积也有类似的定理。他在《一百道杂题》（1639 年）一书中对于 $n=1,\cdots,9$ 用不可分法证明了 $\int_0^a x^n\mathrm{d}x=\frac{a^{n+1}}{n+1}$。他的方法遭到了同时代人的很多批评，但是还是有许多人（例如费马、帕斯卡、罗贝瓦尔）用这个方法。罗贝瓦尔用不可分法求出了摆线的半拱下的面积是圆面积的 1.5 倍。他的证明富有技巧性。计算面积、体积的最重要的新方法仍然来源于古希腊的穷竭法。原来的穷竭法是用多边形和多面体去接近复杂的图形。17 世纪的数学家借助于坐标几何用矩形或长方体作逼近。例如求抛物线 $y=x^2$ 下方由 $x=0$ 到 $x=B$ 的面积。将 x 轴上 0 到 B 的线段分成 n 等份，则分点的横坐标为 $d=i\frac{B}{n}$ $(i=1,\cdots,n)$。从每个分点出发作平行于 y 轴的直线与抛物线相交，则交点的纵坐标为 $(id)^2$。以 x 轴上的每个小等分线段为底边以该小段的右端点对应的抛物线上的点的纵坐标为高作矩形，则这些矩形的面积之和为

$$\begin{aligned}&d\cdot d^2+d\cdot(2d)^2+d\cdot(3d)^2+\cdots+d\cdot(nd)^2=d^3(1+2^2+3^2+\cdots n^2)\\=&d^3\Big(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\Big)=B^3\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\Big).\end{aligned}$$

当 n 是无穷大时，就得到面积 $\frac{1}{3}B^3$。这个方法是斯泰芬 (Stevin)(1548-1620) 在 1586 年提出的，许多人（包括费马、帕斯卡在内）都运用此方法。但是如果曲线不是这样简单，则计算中的第二到第三步（求级数的和）需要特别的技巧。因此这种方法得到的结果并不多。沃利斯在《无穷的算术》用分析的方法一书中计算了大量的面积。在计算圆面积时求得了我们在第四讲中提到的 $\frac{4}{\pi}$ 的无穷乘积表达式。圣文森特的格雷戈里 (Gregory)(1584-1667) 用在求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与 x 轴上 x_0 到 x 的线段之间的面积时发现：如果以 x 轴上的小线段为侧边的曲线梯形面积相等时，对应的 y 的值成等比数列。用现在的语言来说就是

$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \log y$ 。另一个詹姆斯. 格雷戈里 (James. Gregory)(1638-1675) 研究过曲线段的长度的求法。但是椭圆的周长难住了数学家。

总的来说，牛顿和莱布尼兹的先驱者们在以上 4 个问题都已经有了微分和积分初步思想，并且解决了若干问题，还在少数情形下发现了这些问题之间的联系。

但是微积分的主要特征： *积分可以由微分的逆过程求得(即微积分基本定理)* 并没有被人们体会到。其主要原因是缺乏更高的洞察力(概括能力)以及传统的惰性。人们沉没在各种问题的细节里；还因为不少人力图通过传统的几何途径来获得严格性，而没有探索新的代数与坐标几何中所蕴含的巨大潜力. 作用不大的细微末节的推理耗尽了人们的精力。将各类表面上看来不同的问题统一起来用微积分来处理并且发现微分与积分的关系是由牛顿和莱布尼兹完成的。

二. 牛顿

牛顿 (Newton)(1642-1727) 出生于英格兰的一个小村庄，其父在他出生前两个月去世。他在上大学前在一个低水平的地方学校上学，没有特殊才华的表现。他考取大学时欧几里德几何的答卷有缺陷。 19 岁时他进入剑桥大学的三一学院，学习自然哲学(即科学)。他受到的鼓励几乎全部来自于他的老师巴罗，其他的老师对他并没有太高的评价。他自己作实验，研究笛卡尔的《几何》以及哥白尼、开普勒、伽利略、沃利斯和巴罗的著作。 4 年后他刚学完大学课程，伦敦地区流行鼠疫，学校关闭。他回到故乡伍尔斯索普。在接着的两年中 (1665-1666) 他开始了在机械、数学和光学方面的伟大的工作。他意识到引力与距离成反比的定律(这个概念以前有人(包括开普勒)提出过)是打开无所不包的力学大门的钥匙。他获得了解决微积分问题的一般方法。他通过光学试验作出了划时代的发现：太阳光的白光是各种颜色的光混合而成的。他后来说： “所有这些是在 1665 和 1966 两个鼠疫年中作的，因为在这些日子里我正处在发现力最盛的时期，而且对于数学和哲学(自然哲学)的关心比其他任何时候都多。” 鼠疫年后， 1667 年他回到剑桥获得硕士学位，被选为三一学院研究员。两年后巴罗辞去教授席位，牛顿被委任接替巴罗。听他的课的学生很少。除巴罗外，他的独创性的材料也很少有同事注意。他很长时间没有发表自己的成果，其原因似乎是他怕别人批评。狄摩根说 “一种病态的害怕别人反对的心理统治了他的一生。” 1672 年他发表了一篇光学论文并附有他的自然哲学思想的作品，遭到了包括虎克 (Hooke)(1636-1703) 和惠更斯 (Huygens)(1629-1695) 等大多数人的反对。牛顿决心再不发表论文了。但是 1675 年他又发表了另一篇光学论文，其中包括光的粒子学说，结果再一次遭到暴风雨般的批评。这次牛顿决心死后再公开他的成果。不过在 1687 年在他的同事天文学家豪雷 (Halley) 的协助下还是出版了《自然哲学的数学原理》 (简称《原理》)，后来又在 1704 年和 1707 年出版了《光学》和《普遍的算术》 。《原理》在 1713 和 1726 年再版。这本书给他带来了巨大的声望。此书很难懂，他对朋友说这是他故意这样做的， “目的是为了避免遭到数学知识浅薄的人的抑制。” 在当了 35 年教授之后，牛顿成为了沮丧的、痛苦的神经衰竭者。他决定放弃研究，并于 1695 年接受任命，担任伦敦的不列颠造币厂的监察，此后除了关于个别问题之外就没有进行过研究。 1703 年他成为皇家学会会长一直到逝世； 1705 年被授予爵士的称号。

我们简单介绍一下《原理》这本巨著。该书是研究天体力学的，但是对于数学的发展也有巨大的贡献。全书共分三卷。在序言中他定义了惯量、动量、力等力学概念，然后就叙述三个运动学定律。事实上前两个定律是伽利略和笛卡尔已经提出过，但是牛顿给出了更明确、更概括的叙述。第一卷开始讲述了微积分的一些定理，然后讨论中心力作用下的运动。他证

明了面速度相等的定理、圆锥曲线运动时引力与距离平方成反比的定理以极其逆定理，这样从运动三定律出发推出了开普勒的三个定律。他还讨论了圆锥曲线运动的更细致的问题以及物体沿给定的表面的运动。接着他从运动定律和引力定律推断了二体运动的法则。然后他考虑球体和球壳对于一个质点的吸引力，证明了均匀球壳对于它内部的质点没有吸引力，对于椭球壳也有同样的结论。均匀球壳在对于在它外面的质点的引力等于将球壳的质量集中到球心时的引力，进而推导出两个球对称的物体之间的引力相当于把他们的质量都集中到球心时两个质点之间的引力。在第一卷的最后牛顿考虑了三体问题，这个问题至今没有解决。

《原理》的第二卷是流体力学的源头。在一些问题中他假定物体在介质中受到的阻力与速度成正比，在另一些问题中他假定阻力与速度的平方成正比。他研究了何种形状的物体受到的阻力最小，钟摆和发射的炮弹在空气和液体中的运动。在波动研究的研究中，他得到了声音在空气中的传播速度。对于介质中运动阻力的研究导致他的结论：行星是在真空中运行的。

第三卷的标题是“论世界的体系”。他将第一卷中的普遍理论用于太阳系。他说明了太阳的质量如何用地球的质量求出（对于行星与其卫星同样如此）他计算了地球的平均密度（是水的密度的 5-6 倍）。他证明了地球是一个扁球，并计算了扁的程度（与现在的数据略有差别），由此算出地球上不同位置物体重量的变化，并且证明了重量不能将地球的质量都集中到地心那样来算，其主要原因是地球是扁球以及月球的引力。他计算出地球的受力点应当在旋转轴上周期地变化，周期为 26000 年（亚历山大时期的希帕恰斯从观测资料中得到过，他所说的周期是地球的旋转轴相对于恒星天体运动的周期，与牛顿的周期是彼此相等的）。牛顿还研究了潮汐的原因，得到的结论是：月球是潮汐的主要原因，而太阳是次要的。利用潮汐他计算了月球的质量。他还对于月球的运动作了各方面的研究（如远地点的变化、月球轨道与地球轨道的相对位置的变化周期等），这对于改进地球经度的求法是必需的。在这方面他花费了大量时间做艰苦的工作，他说这个问题是他感到头疼。

牛顿对于科学的兴趣显然比对于数学的兴趣大得多。除了天体力学、光学、静力学、流体力学之外，他还对于化学做出了重要的贡献。他写过一篇《酸的性质》的论文，试图用最终微粒解释化学现象。他还在热学提出了著名的冷却定律。

下面我们谈谈牛顿关于微积分的工作。在这方面他总结了由许多人发展起来的思想，建立了成熟的方法，提出了前面提到的四个问题的内在联系。1669 年他在朋友间散发了题为《运用无穷多项方程的分析学》的小册子（1711 年出版）。他假定有一条曲线。他并不是去求曲线与 x 轴之间（在 y 轴和 x 处的纵坐标线之间）的面积，而是假定面积是已知的 z：

$$z = ax^m,$$

其中 m 是整数或分数。他把 x 的无限小增量称作 x 的“瞬” (moment)，记为 o（这是詹姆斯. 格雷戈里用过得记号，也就是费马所用的 E）。在曲线与 x 轴之间、y 轴和 $x+o$ 处的纵坐标线之间的面积应为 $z+o\cdot y$（即 $o\cdot y$ 是面积的瞬）。则应有

$$z + o\cdot y = a(x+o)^m.$$

将此式用二项式定理展开（如果 m 是分数，则得到一个无穷级数），在与上式相见，消去 o，略去含 o 的项，就得到

$$y = max^{m-1}.$$

（人们早已知道）此式右端是 $z = ax^m$ 在 x 处的变化率，因此面积在任一点 x 处的变化

率等于 y 在 x 处的值。反过来，如果曲线的方程是 $y=max^{m-1}$ ，则它下面的面积就是 $z=ax^m$ 。

在这里，牛顿不但给出了求变化率的普遍方法，同时证明了面积可以由求它的变化率的逆过程得到。因为面积是无穷小面积的和（的极限），所以牛顿证明了这样的“和”可以由求它的变化率的逆过程得到，即“和”可以由反微分得到。这就是我们现在所说的“微积分基本定理”。虽然牛顿的先驱者们从一些特殊的例子中模糊地预见到了这个事实，但是牛顿看到了这个事实的普遍性。

在证明了面积得导数是函数值 y 并断言逆程序正确后，牛顿证明了：如果 y 是若干项的和，则面积就是由每一项得到的面积的和。用现在的话说就是：函数的和的不定积分是函数的不定积分的和。这使得他可以用级数的积分进行计算。例如为了求 $y=1/(1+x^2)$ 的积分，他将 y 表示成

$$y=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

然后逐项积分。他注意到如果把 y 表成

$$y=\frac{1}{x^2+1}=x^{-2}\frac{1}{1+x^{-2}}=x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}+\cdots,$$

也能做逐项积分。他接着说：当 x 比较小时应该用第一个展开式，而当 x 比较大时必须用第二个展开式。由此可以看出牛顿已经有了我们现在所说的收敛性的意识，但还没有明确的概念。

这本小册子里的推理当然有说不清楚的地方，例如“瞬”的定义是什麼？为甚麼可以舍去含 o 的项？所以在小册子中说：“与其说是精确的证明，不如说是简短的说明。”

1671 年他写了《流数法和无穷级数》一书（1736 年出版）。书中他把变量称为“流量”(fluent)，把变量的变化率称为“流数” (fluxion)。他把流量 x 的流数记为 $\dot{x}$ ，把 $\dot{x}$ 的流数记为 $\ddot{x}$ ，流数 x 的流量为 $\acute{x}$ ， $\acute{x}$ 的流量为 x'' 。他把任何变量都看作是随时间而变的，而用 o 记无穷小的时间间隔。于是 $\dot{x}o$ 就是 x 的无穷小增量。如果有流量之间的关系式 $y=x^n$ ，为了求它们的流数 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 之间的关系，他从 $y+\dot{y}o=(x+\dot{x}o)^n$ 出发，经过和上面相同的处理，得到 $\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}$ 。用现在的记号，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=nx^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 。于是他可以通过 $\dot{y}$ 和 $\dot{x}$ 的比值求出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 。这个方法其实与前面的方法没有本质区别，其严格性并没有任何改进。但是观点毕竟有些不同：他把瞬 $\dot{x}o$ 、 $\dot{y}o$ 看作随时间变化的量，而原来的瞬都是（ x 和 z 的）最右端的一小片。新想法有伽利略的动力学观点，而老方法用的是静力学的观点。牛顿本人也知道流数 $\dot{x}$ 、 $\dot{y}$ 都没有真正定义过。

他接着讨论了逆过程，即从导数求原函数。他分三种情形考虑，实际上就是解了三类微分方程。他意识到了自己已经找到了一个普遍的方法。以前的各类问题都是他的方法所能处理的特例。

1676 年牛顿写了第三篇微积分论文《求曲边形的面积》（发表于 1704 年）。他试图避开无穷小量带来的含糊不清。他引入了新的概念：最初和最后比，并且借助于几何来说明这些概念。但实际上与前两种方法比较并没有改进逻辑上的严格性。

三．莱布尼兹

莱布尼兹最初研究法律，它的哲学学士学位论文是关于逻辑的。 1666 年他写了《论组合的艺术》，是一本关于一般推理方法的著作，因此获得了博士学位并使他成为阿尔特多福

大学的教授。 1672 年 3 月他作为德国城市美因茨的选帝侯（有权选举罗马帝国皇帝的诸侯）的大使政治出差到巴黎。这使得他与数学家和科学家有了接触，特别是惠更斯激起了他对数学的兴趣。莱布尼兹本人说他在 1672 年前基本上不懂数学。第二年他前往伦敦，遇到了另外一些数学家和科学家。他在做外交官的同时深入地研究了笛卡尔和帕斯卡的著作。1676 年他被任命为汉诺威选帝侯的图书馆的管理员的顾问。 24 年后勃兰登堡的选帝侯邀请他到柏林工作，直到去世。

除了外交官外，莱布尼兹还是哲学家、法学家、历史学家、语言学家和先驱的地质学家，他在逻辑学、力学、光学、数学、流体静力学、航海学和计算机方面都作了重要的工作。他重视知识的应用，将大学称为“僧院”，因为大学有知识但是没有判断力。 1700 年柏林科学院的建立就是它的建议。

莱布尼兹从 1684 年期发表微积分的论文，这些论文实际上是来自于从 1673 年开始写的但是从未发表的数百页的笔记。

他在《论组合的艺术》中注意到数列的不同阶差的关系：平方序列的一阶差是等差数列，二阶差是常数列。这对于他关于微积分思想是有重要的的。他一直把积分看作是求和。为了处理函数的积分，他把序列看作是函数在自变量的等距离分点处的值。他常将自变量的间距记为 $\mathrm{d}x$ 或 a ，而把相邻函数值的差记为 $\mathrm{d}y$ 或 l 。他的微积分的工作的出发点是求函数 $y=x$ 与 x 轴之间直角三角形的面积。此时他的序列恰好是由 0 开始的等差数列，而且数列的项的序号与该项的值乘以 l 相等。所以此三角形的面积应当等于 $\sum yl$ （他的记号是 $\mathrm{omn}.yl$ ，后来改为 $\int yl$ ）由平面几何知道三角形的面积为 $\frac{y^2}{2}$ 。因此他得到 $\frac{y^2}{2}=\int yl(=\int y\mathrm{d}y)$ 。他又从几何中得到一个定理：

$$\int x\mathrm{d}y = xy - \int y\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

在此式中取 $\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$ (则 $y=\int \mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}$) ，得到 $\int x^2\mathrm{d}x = x\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$ ，于是

$$\int x^2 = \frac{x^3}{3}.$$

在莱布尼兹的早期论文中，他似乎在探索积分和微分的运算，并看出它们是互逆的。在 1675 年 11 月 11 日标题为《切线的反方法的例子》的手稿中，他用 $\int$ 表示和，用 $\mathrm{d}x$ 表示差。他断言：“作为求和的过程的积分是微分的逆。”

在 1676 年 6 月 26 日的手稿中，他意识到求切线的最好方法是求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 。它正确地忽略了 $\mathrm{d}x$ 的高次项。

在 1676 年 11 月左右他给出了 $\mathrm{d}x^n = nx^{n-1}\mathrm{d}x$ 和 $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ，其中 n 是整数或分数。他说要微分 $\sqrt{a+bz+cz^2}$ ，设 $a+bz+cz^2=x$ ，微分 $\sqrt{x}$ ，再乘以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}z$ 。这就是链式法则。

1677 年 7 月 11 日左右，他给出了两个函数的和、差、积、商的微分的法则，但没有给出证明。

1680 年， $\mathrm{d}x$ 成为横坐标的差， $\mathrm{d}y$ 成为纵坐标的差，他继续用微分形式，例如 $y=a^2/x$ ，则 $\mathrm{d}y = -\frac{a^2}{x^2}\mathrm{d}x$ 。他给出求曲线长的弧元素为 $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ 。绕 x 轴的旋

转体体积为 $V=\pi\int y^3\mathrm{d}x$ 。

1686 年以及后来的论文中给出对数函数和指数函数的微分。他还讨论了曲率、密切圆和包络理论，1697 年他在给小伯努利的信中给出积分号下对参变量的微分。他还试图定义高阶微分。还想定义 $\mathrm{d}^{\alpha}y$ ，其中 α 为任意实数，但没有成功。

莱布尼兹的工作虽然富有启发性并且意义深远，但是非常零碎不全，使人几乎不能理解。后来伯努利兄弟把这些梗概性文章大力加工，并且作了大量的新发展。

四．牛顿与莱布尼兹的工作的比较

共同点． 1. 将微积分发展为能应用于众多函数的新的普遍方法；

2. 将微积分算术化，即在代数的概念的基础上建立微积分，以至于可以用同样的方法处理中许多不同的几何和物理问题；

3. 把面积、体积等以前作为和处理的问题归并为反微分。

不同点．

1. 牛顿把无穷小量作为求导数的手段，而莱布尼兹则直接使用无穷小增量。或者说，前者着重于微商，而后者着重于微分；

2. 牛顿自由地用无穷级数表示函数，而莱布尼兹更愿意用有限的表达式；

3. 他们的工作方式也不同。牛顿是根据实际经验的、具体的和谨慎的，而莱布尼兹是富于想象的、喜欢推广而且是大胆的。