坐标几何与函数

我们在这一节介绍坐标几何与函数概念的历史与价值。我们将用较大的篇幅介绍它们的创始人的思想与成就，以便从这些大科学家的身上学到一些科学的世界观和方法论。

坐标几何

坐标几何就是通常所说的解析几何。作者认为解析几何作为这个学科的名称不恰当，因为“解析” (analytic) 的含义是（自伯拉图以来）是指：从结论开始往回寻找，直到一些已知的条件为止，从而解答问题。这与证明中演绎推理的过程恰好相反。而在解析几何中主要的方法是用代数工具解决几何问题，与上述的“解析”的含义不同。似乎“代数几何”更贴切一些（现今的“代数几何”是一个庞大的学科，可以认为是解析几何的高度的抽象与推广）。

对于坐标几何作出主要贡献的是费马 (Fermat)(1601-1665) 和笛卡尔 (1596-1650) 。他们把代数方程和曲线曲面等几何对象联系起来，是数学发展中最重要的创造之一。和历史上的大数学家一样，他们都在众多学科中有很深的造诣。

费马 在微积分起源的四个方面（由路程求速度和加速度及其反问题（由初速度加速度求速度和路程）、求曲线的切线、极值问题、求长度、面积、体积）中的两个（切线和极值）给出了一般的方法（求微商）。他在光学上提出了最小时间原理，由此出发证明了（ 1626 年之前由斯内尔 (Snell) 发现的，后来笛卡尔独立地由发现了的）光的折射定律（如果和牛顿第一定律联系起来，似乎自然界有追求经济化的一般原则），这是一流的贡献。他和帕斯卡 (Pascal)(1588-1651) 共同开创了概率论的研究（在通信中解决赌注分配的问题具有一般性）。他在数论中的贡献是众所周知的，他创造了无限下降法（与归纳法相反，要想证明一个命题对于所有的一类正整数（例如形如 $4n+3$ 的素数）都成立，只要证明：如果有一个数使得结论不成立，则必有一个更小的数使得结论不成立，从而得到矛盾（结论对于最小的数总应当是对的，否则结论显然错误））。费马研究过素数的多种形式的表达式，例如形如 $4n+1$ 的素数可以唯一地表示为两个平方数的和，形如 $8n+1$ 和 $8n+3$ 的素数可以表示为 a^2+2b^2 。高斯在费马的影响下研究了整系数二元二次型表达整数问题，是现代数论的开端。方程 $x^2-Ay^2=1(A$ 为正整数$)$ 有无穷多整数解是费马证明的，此方程后来被欧拉误称为贝尔方程。对于费马大定理的研究更始现代数论的长久的推动力。

费马了解韦达（将古希腊的几何中隐藏的代数恒等式用当时的符号表达出来）的工作，这有助于他创造坐标几何。他实际上引入的是斜坐标系。对于平面上的一条曲线，他选定一个点 O 和由 O 出发的曲线下方的一条射线。对于曲线上的一般点 J ，由 J 出发作一条直线与射线交于一点 Z ，将 OZ 的长度记为 A ， ZJ 的长度记为 E ，则 J 的位置就由 A 、 E 两个字母定出。他没有明确地写出另一个坐标轴，也不用负数。他这样表达他的原理：“只要在最后的方程中出现两个未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就描绘出一条直线或曲线。”他给出了直线以及所有二次曲线的方程，并且断言：如果方程是一次的，则它表示的曲线是直线，如果方程是二次的，则它表示的曲线是圆锥曲线。他在 1637 年的《求最大之和最小值的方法》一书中引进了曲线 $y=x^n$ 和 $y=x^{-n}$ 。

他创造坐标几何的动机是寻求解决几何问题的一般方法（在他们之前，几何学中的技巧性很强，几乎每个问题都要不同的方法去处理）。在 1629 年写的 1679 年出版的《平面和

立体的轨迹引论》这本小书中明确说，他找到了一个研究曲线问题的普遍方法。

笛卡尔 是近代第一个杰出的哲学家，他又是现代生物学的奠基人、第一流的物理学家。他只偶然地是个数学家。

他是机械论哲学的奠基人，机械论的含义是：一切自然现象（包括人体的机制）都可以归结为符合力学定律的运动（但灵魂除外）。他认为有两个世界，一个是由不变的粒子、原子以及它们在空的空间中的运动构成的物质世界，运动是力作用在基本粒子上的结果，而力服从于不变的数学定律。这些定律是上帝也无法干预的。另一个是思维世界（如甜与苦、冷与热以及颜色等），即人的感官被物质世界冲击时产生的效果，他只存在于人的意念中，实际上并不存在。他的哲学风行于 17 世纪。牛顿对于运动的重视受了笛卡尔很大的影响。在天文学中他创立的漩涡理论在 17 世纪是最有影响的宇宙学说。他是光的折射定律的发现者之一，对于透镜尤其有兴趣。他本人做了许多力学、光学和生物学的实验。他不推崇纯粹数学，认为把数学方法只用于数学本身是没有价值的，因为这不是在研究自然。

在数学中他主张采用代数和几何中一切最好的东西互相取长补短。事实上，他所作的是把代数用到几何中去。他看到了代数在提供一般方法方面的用途，以及代数的机械推理能减少解题时思维的工作量。这种思想体现在他的《几何》一书中。他自吹说欧洲几乎没有一个数学家能懂它的著作（他在书中省略了所有的证明）。该书在开头部分仿照韦达用代数表示几何图形中出现的量的的相等关系，但是他引入的量可以是已知的，也可以是未知的。他的目的是解决几何作图问题。他说明了用这种方法解决作图问题的一般原则，即：首先假定图形已经作出，用字母表示必要的几个已知和未知线段（未知线段可以是多个），然后，弄清楚这些（已知、未知）线段之间的关系，使得同一个量能够用两种方式表示出来，这样就得到一个方程。要找出与未知量个数同样多的方程，再经过代数运算（解方程），求出所要作的未知线段（用已知线段给出的）表达式。依据这个表达式就可以作出未知线段。这并不是现代意义下的解析几何，而只是代数方法在几何作图中的应用，称为确定的作图方法。

接着，他考虑所谓不确定作图。这种作图的结果是得到许多长度，这些长度对应的线段的端点填满一条曲线。他（类似于费马所作的那样）选定一个点 A 和过 A 的一条直线作为基线（坐标轴）。从图形上的一个点 P 出发作一条与基线成固定角度的直线，与基线交于一点 B ，他把 B 到 A 的距离记为 x ， P 到 B 的距离记为 y（实际上就是斜坐标系）此时经过代数方法的到的方程是不定方程（含有两个未知量 x 和 y ）。笛卡尔着重指出，对于每个 x ， y 满足一个确定方程，因而可以画出 x 、 y 对应的端点。如果取无穷多个 x 的值，就得到无穷多个 y 的值，从而得到无穷多个点 C 。所有这些 C 的轨迹就是不确定的作图所希望得到的曲线。他也只考虑正的 x 、 y 。对于确定和不确定作图他都对于具体的例子给出解答，但是没有证明。

有了曲线方程的思想之后，笛卡尔断言：曲线的方程的次数与坐标轴的位置的选取无关。他又强调指出好的坐标轴的选取应当使得方程简单（这含有曲线方程的标准形的思想）。他还考虑对于两条不同的曲线的交点问题：在同一坐标系下写出他们的方程，求解联立方程即可得到交点（的坐标）。实际上它并没有（也不可能）真正去解高于二次联立方程，而只是在两条曲线已经作出的假定下断言二曲线的交点是联立方程的解。

接着笛卡尔讨论几何曲线的分类。他把一次、二次曲线称为第一类（他说圆锥曲线是二次的，但没有证明）。三、四次曲线为第二类，五、六次曲线为第三类，依此类推。他认为在同一类中次数较高的方程可以化为次数较低者（这个观念当然是不对的）。他认为曲线的复杂程度由方程的次数所决定，以至于象蔓叶线（其方程为 $x^3+y^3-3axy=0$ ）比 $y=x^4$ 还要简单。

笛卡尔也考虑了三维坐标，指出空间中的一点向两个垂直平面做垂线可以描述个点的位置，由此可以写出空间曲线、曲面的方程。但是他没有进一步考虑这种三维的推广。

笛卡尔批判希腊人将曲线分为平面曲线、立体曲线和线性曲线的观点。希腊人将直线与圆称为平面曲线，将圆锥曲线称为立体曲线，其余的曲线（如蚌线、螺线）为线性曲线，因为他们需要靠圆规直尺之外的特殊机械工具才能画出。笛卡尔说：圆规直尺也是机械。机械作图的准确性无关紧要，不能说只有用圆规和直尺作出的图形才是合法的。他引入了“几何曲线”的概念：可以用含两个变量的有限次代数方程表示的曲线。这大大地推广了曲线概念的容许度。其他的曲线则称为机械曲线。（后来莱布尼兹将笛卡尔的“几何曲线”与“机械曲线”分别称为“代数曲线”和“超越曲线”。）

坐标几何的重要性 有几点是显而易见的。1. 研究对象的扩大：笛卡尔大大冲破了希腊人的几何对象； 2. 全新的方法：用代数方法可以迅速地证明任何几何事实，而且这种方法是一种统一的、机械的程序，甚至更为有效（例如证明三角形 3 个高线交于一点，在几何中要区分该点（垂心）在三角形内、外的情形，而用代数方法可以统一地处理）。3. 坐标几何是双面的工具，几何的概念可以用代数的语言表述，几何的问题可以用代数的方法解决；反过来给代数的语言以几何的解释可以使得人们直观地掌握那些代数语言的意义，从而得到启发去提出新的结论（这在后来的代数几何中尤为明显）。拉格朗日 (Lagrange)(1736-1813) 曾在他的《数学概要》中写道：“只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄。但是当这两门科学结成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力。从那以后，就以快速的步伐走向完善。” 4. 坐标几何能够将形象表达为数量的形式，这正是测地学、航海学、天文计算、抛物体运动、光线在透镜传播等大量实际问题所需要的。

坐标几何使得代数变得比几何更重要，为代数与几何的位置的颠倒铺平了道路。 17 世纪以前几何统治着代数，代数处于附庸的地位。 17 世纪之后，代数成为了数学的基本学科。在这个交替过程中，微积分起到了决定性的作用。牛顿和莱布尼兹都认为微积分和无穷级数是代数的扩展，是“无穷”的代数。 1797 年拉格朗日在《解析函数论》中说：“微积分及其以后的发展只是初等代数的一个推广。”

在笛卡尔之后，坐标几何仍然有一些进展，但在 17 世纪中进展缓慢。其原因之一是笛卡尔在《几何》一书中强调代数只是作为几何作图的工具，从而掩盖了坐标几何的一般思想。其二是笛卡尔故意将他的《几何》写的使人难懂，因而传播缓慢。此外，由于历史的影响，许多人不同意把代数与几何混淆起来，其中包括塔尔塔利亚、韦达、牛顿这些大数学家。牛顿的观点是代数应当被排除在初等几何之外，以免影响初等几何的简单性。使得坐标几何迟迟不被接受的的最重要的原因是：代数缺乏严密性，事实上无理数长期没有被真正承认为数，所以无法将实数与点对应起来，而这正是坐标几何的基础。

沃利斯 (Wallis)(1616-1703) 在《论圆锥曲线》（ 1655 ）中第一次有意识地引进负的横纵坐标。他可能是第一个用方程推导圆锥曲线的性质的人。牛顿的《流数法与无穷级数》大约写于 1671 年（第一次出版是 1736 年的英译本），其中大量地应用了坐标几何。除了平面直角坐标系之外（可能从沃利斯处学来的），他还引入了极坐标系和双极坐标系（给定一个两个点，用到这两个点的距离决定一个点）。但人们公认（大）伯努利是极坐标的发明者（他在 1691 年发表了一篇关于极坐标的文章，而当时牛顿的书还没有出版）。

函数

函数是数学中最重要的概念之一。函数的思想应当说起源于伽利略 (Galileo)(1564-1642)

伽利略 在许多科学领域中都是杰出的人物。他被称为是现代发明之父。他是敏锐的天文观察者。他虽然不是望远镜的发明者，但是他一听说有关望远镜的说法，就能立即造出一个来。他是显微镜的独立发明者，他设计了第一个摆钟，还设计了并制作了一种罗盘，罗盘的标尺自动给出数据，而不像以前那样需要使用者去计算数据。他是近代声学的第一个重要的研究者，这项研究成为 18 世纪数学工作中的主要动力之一。

他的科学哲学大部分与笛卡尔一致，但是他给近代科学制定出更彻底更有效更具体的程序，并且用自己的工作正是该程序的有效性。他把科学与宗教教条决然割裂开来。

他对于自然界的看法和笛卡尔基本相同。德谟克里特的原子论在伽利略的著作中比在笛卡尔著作中更为明显。他认为有真空（这不同于笛卡尔以及以前的哲学家、物理学家），原子在真空中运动。伽利略认为原子的主要性质是不可透入性和不可毁灭性。物质的质的差别是由于原子的数量、大小、形状和位置排列上的差别造成的，物质的变化是由原子的组合和分解引起的。他相信自然界按照完美而且不变的数学规律活动着。伽利略也将世界分为第一性和第二性的。他说："如果把耳朵、舌头、鼻子都去掉，我的看法是：形状、数量（大小）和运动将仍然存在，但是将要失去气味、味道和声音，这些是活的动物抽象出来的，依我看来，只是一些名词而已。"这样，伽利略透过了成千上万的现象和性质而集中到物质和运动这两种可以用数学描述的对象。他也认为任何一个科学分支应建立在数学公理或原理的基础上，通过演绎推理建立新的真理。

他的方法论基本上达芬奇和培根一致，即物理学的真理应当来自经验与实验。这与和希腊人、中世纪人（哥白尼以及开普勒为代表）甚至笛卡尔有根本性的不同。这些人都相信基本真理出自人的内心：只要对于周围的现象认真地去想，就可以得到例如"等量加等量仍是等量"或"两点确定一条直线"这样的数学公理。在物理学中，希腊人（特别是亚里士多德）也曾这样地找出原理。一旦出现不符合这些真理的现象时，他们就造出一些特殊的解释，这些人坚信先天性的真理到如此程度：（依照伽利略的说法）他们首先决定世界应该怎样，然后把看见的东西配合到预想的原理中去。。

伽利略指出：在物理学中，和在数学中相反，基本原理必须来自经验与实验；在寻求基本的原理的过程中，要注意的是自然界是怎样说的，而不必在意心中所愿意的是什麼。他说："自然界不是先造出人脑，然后把世界安排得使得它能够被人的智慧所接受。"伽利略所说的"基本原理来自于经验和试验"有其更精确的含意。这主要体现在以下几个方面。 1. 出于自然界是简单的、和谐的这样的信心，他（和 50 年后的牛顿）相信： *少数的关键性试验应该能产生正确的基本原理* 。而他所谓的少数关键性试验，其中有许多是思想中的实验：依照日常经验应该得到的结果就是他的实验结论。例如，他在《关于两大世界体系的对话》中描写一个球从行驶的船的桅杆上掉下来时的运动，对话人之一问他是否作过这样的实验，他说："没有做过，我也不需要做，即使没有任何经验，我也能肯定是这样的，因为它不能不是这样的。" 2. 同其他近代科学的奠基人一样，他也认为 *科学工作中的演绎数学部分要比实验部分所起的作用大得多* 。这些数学演绎建立在通过直观和关键性的观察和试验所得到的具有普遍意义的、深刻的、清晰地而且不变的基本原理的基础上。但在获取基本原理的的方法上，伽利略认为必须 *通过抽象去掉试验及观测结果偶然和次要的效应，才能得到真理* 。例如他曾观察不同的物体在空气中降落的速度的差异都比在水中的降落速度的差异要小，所以他断定结束越稀薄，这种差异就越小。于是他得出结论：在真空中任何物体的下降速度都相等。 3. 不同于以往的只注重寻找自然界行为的定性解释的人，伽利略主张 *寻求量的公理* 。例如他提出了：物体在自由降落时的的速度等于时间的 32 倍（时间以秒为单位，长度以英尺为单位）。他选择了一组全新的概念使得它们之间可以用公式联系起来，这

些概念包括：距离、时间、速度、加速度、力、质量、重量等。对于当时的物理学而言，这是彻底的改造。 4. 伽利略注意到了：人从试验中可能会得出不正确的原理。从这种原理出发得出的推论也就不会正确。因此伽利略建议： 用实验考核推理的结果。

在伽利略的时代，天文观测、远距离的航海时经度的确定、火炮的发明等对于位置、运动、时间的准确性提出了更高的要求。这也正是伽利略注重于量的研究的原因之一。所以他产生 **函数** 的概念几乎是必然的。此概念在几乎所有研究工作中占有中心的位置。在《关于两门新科学的对话》中从始至终都包含着这一概念。他用语文和比例的语言描写一个量随着另一个量的变化而变化。例如他说："从静止状态开始以定加速度下降的物体，其经过的距离与所用的时间的平方成正比。"又如："沿着同高度的但不同坡度的倾斜平板下滑的物体，其下滑时间与平板的长度成正比。" 这种叙述与函数的差别基仅仅在于是否引入了符号。所以，在不久以后，他的上面两句话就被写成 $s = kt^2$ 和 $t = kl$ 了。

17 世纪引入的大部分函数在函数概念没有被弄清楚之前，是被当作曲线（即它的图像）研究的。例如，对于 $\log x$ 、 $\sin x$ 、 a^x 等都是这样。而有些曲线又被当作动点的轨迹。17 世纪中函数起初被定义成"由其他的量经过一系列代数运算而得到的量，或者经过任何其他可以想象的运算而得到的量"。这里的"其他可以想象的运算"指的是加、减、乘、除、开方五种代数运算之外的"取极限"。这种定义很快被放弃了，因为它包含的面太窄。函数的级数表达式就不属于这个范围（一般的无穷级数不能用上述六种（有限次）运算得出）。1665 年之后，牛顿在微积分的工作中常用"流量" (fluent) 表示变量之间的关系。 1673 年莱布尼兹用"函数" (function) 表示任何一个随着曲线上的点的变动而改变的量（例如点的坐标切线、法线的斜率、次切线的长度等)，他还引入了常量、变量、参变量等术语。1697 年小伯努利用"变量和常量以任何方式构成的量"（"任何方式"指代数表达式或超越表达式）来表述函数，次年它采用了莱布尼兹的" x 的函数"的说法。但这仍然不是现在我们所说的函数的全部。最终， 1714 年来布尼兹在他的著作《历史》中用"函数"一词表示依赖于变量的量。至于函数的记号，则经过多种变化后， 1734 年欧拉引进了 $f(x)$ 这种写法。从此函数概念就成为了微机分中的核心概念。