印度和阿拉伯

印度

1. 时间：公元前 800 年之前没有数学，公元前 800 年到公元 200 年 1000 年内有一些原始数学，但是没有数学专著。现在所了解的当时印度的数学是从其他方面的著述（绳法经）、钱币、铭文等方面得知的。公元 200 年到 1200 年是他们数学发展的第二个阶段，那时已是希腊数学的后期。

公元前 300 年后开始出现数的记号，对于 1 - 9 用不同的记号，对于后来的十进位是有好处的。没有零和进位法。绳法经中有修祭坛的法则，公元前 5 - 4 世纪记载了 $\sqrt{2}$ 的近似值。祭坛的底面形状为正方形、圆、半圆或等腰梯形，但面积都要相等。这就出现一些几何问题。当时他们已经懂得了毕达哥拉斯定理。阿帕斯塔姆巴 (Āpastamba) 给出了作与给定的正方形面积相等的圆的方法 (相当于取 π 为 3.09)。

公元 200 年到 1200 年是他们数学的高潮时期。受了亚历山大数学的影响（瓦拉哈米希拉 (Varāhamihira)(∼500 B.C) 曾说："希腊人并不纯正（指信仰不同），但必须受到崇敬，因为他们在科学上训练有素并在这方面超过别人。"

这个时期印度最大的数学家是阿里亚伯哈塔 (Āryabhata)(476-500)、婆罗摩笈多 (Brahmagupta)(598-660)、筏驮摩那 (Mahāvira)(9 世纪)、婆什迦罗 (Brāskara)(1114-？)。他们没有写专门的数学书，数学是作为夹在天文著作中的篇章出现的。

i) 算术. 到了 600 年，除了天文上用的 60 进位外，

- 10 进位记数法已经通用。
- 有了 0，并且说 0 乘以任何数都等于 0，任一数减 0 不会使得该数变小。他们将分数写成现代的样子，但是没有分数线。所有分母为 0 的分数都相等，而且无论加、减上任何数后都不变。婆什迦罗称此数为无穷量。
- 有了负数，用以表示欠债。婆罗摩笈多（628 年左右）提出了负数的四则运算。婆什迦罗认为正数的平方根有两个，一正一负。但是负数没有平方根。
- 承认无理数，并且进行无理数运算，例如按照婆什迦罗，

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{(3+12)+2\sqrt{3\cdot 12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

他还用语文叙述了（二次）无理数的加法法则。举例来说，就是

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{\left(\frac{12}{3}+1\right)^2\cdot 3}=3\sqrt{3}.$$

算术运算已经很像今天的样子，例如除以一个分数等于颠倒相乘。

他们并没有意识到无理数的概念所涉及到的逻辑难点。他们的算术完全独立于几何。

ii) 代数.

- 他们引入了一些符号（也用文字）表达运算（很象丢番图），例如用 ka 表示对于后面的数开平方。

● 解二次方程。将所有二次方程统一为一类（即允许系数为负数）。也用配方法（不考虑非实根的情形）。

● 解不定方程。

他们要求出 $ax \pm by = c(a, b, c$ 为整数$)$ 的全部解（丢番图只求一个解）。阿里亚伯哈塔首先提出，再由后继者用“连分数”给出了完整的解法（本质上是欧几里德算法）。

他们也考虑二次不定方程，解出了形如 $y^2 = ax^2 + 1(a$ 不是平方数$)$ 的不定方程。

iii) 几何．没有新进展。球面积、体积的公式是从海伦、托勒枚处学来的。还有些自己发明的不正确的公式，例如四边形面积为

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

（其中 a, b, c, d 位各边长， s 为半周长）。事实上，此公式只对于圆内接四边形成立。他们常将 π 取为 $\sqrt{10}(\sim 3.16227766\cdots)$ 。

iv) 三角．将托勒枚所定义正弦函数改为更接近于现代的定义（托勒枚用弧所对的弦长作为正弦值，他的“弦长”指的是将圆周和直径等分为同样的份数（ 60 的方幂），弦所含的单位数。阿里亚伯哈塔则（近似地）选取弦与弧的长度单位相等）。根据他们的定义，制造了正弦数表。他们还应用了余弦。

印度的数学主要目的是应用，只是告诉你应该怎样作。没有严格的推理，这在某种意义上是好事（例如对于无理数的处理）。

阿拉伯

阿拉伯人在伊斯兰教的创始者穆哈默德 (Muhammad)(570-632) 领导下由游牧民族统一起来，并在他去世后不到半世纪内征服了从印度到西班牙的大片土地，包括北非和南意大利。 755 年阿拉伯帝国分裂为两个独立的王国，东部帝国以巴格达为首都，西部帝国以西班牙的科尔瓦多为首都。他们对于其他种族和教派是宽大的，容许异教徒自由活动。他们在巴格达设立了一个学院、一个图书馆和一个天文观测台。巴格达成为了较大的文化中心，

他们的文化来源相当丰富，他们请印度学者住在巴格达，罗马国王贾斯蒂尼安 (Justinian) (483-565) 在 529 年封闭伯拉图学院后许多学者由希腊逃到波斯，阿拉伯人与东罗马（拜占庭）帝国建立联系，收买希腊手稿，他们统治了亚历山大时期的埃及的藏有学术手稿的修道院。阿拉伯的数学学者大多是希腊、波斯、犹太人和基督徒。他们的数学直接来自希腊手稿。他们将希腊手稿和著作（包括《原本》、《大汇编》）译成阿拉伯文。后来很多原著都已失传，传给欧洲的就是这些阿拉伯译本。

i) 算术．改进了印度的数字记号和进位记法。将印度的分数记法写成现在的样子。像印度人一样随便地使用无理数。但是他们抛弃了负数。

ii) 代数．他们提供了这个学科名称。天文学家阿拉花拉子米 (Al-Khowârizmi)(780-850) 的著作《 Al-jabr w°al muqâbala 》的书名意为“复原、化简”。该书在 12 世纪译为拉丁文时书名为《 algebrae et almucgrabaleaque 》。此后这个学科就简称为 algebra 。此书是根据婆罗摩笈多的著作写的，也有希腊人的影响。他把方程的未知量称为“根”。

阿尔卡克西 (al-Karkhî) 在 11 世纪写的阿拉伯代数书是模仿丢番图的。但是他完全不用记号（倒退了）。

解二次方程仍然从几何上寻求解释。

突出的一点是借助圆锥曲线用作图法解三次方程（以前阿基米德也做过类似的事情）。例如海亚姆 (Khayyam)(1040-1123) 解 $x^3+b^2x=b^2c$ 。首先在直线 l 上取一点 Q ，作以 Q 为顶点、焦距为 $b/2$ 的与直线 l 相切的抛物线。再在 l 上取一点 R 使得 $QR=c$ 。以 QR 为直径作圆，与抛物线交于一点 P ， P 到 L 的垂线记为 PS ，则 QS 的长度就是根（设 $QS=x$ ， $PS=y$ 。因为 P 在抛物线上，由抛物线的方程知 $x^2(=2py)=by$ 。而 P 又在圆上，所以 $x(c-x)=y^2$ 。将第一个等式平方，再用第二个等式带入，即知 x 是原方程的根）。

阿拉伯人也解了某些二、三次不定方程。

iii) 几何. 没有新进展，对于《原本》中的第五公设作过"证明"和评注，使得后人能知道希腊手稿的情况。讨论过用直尺和定脚圆规作图问题。

iv) 三角. 沿袭了印度的三角. 引入了正切、余切、正割、余割. 纳西尔 - 爱丁 (Nasie-Eddin)(1201-1274) 的著作《论四边形》将平面三角和球面三角系统化。书中有解球面直角三角形的六个基本公式，并引入现今称为"极三角形"，用以解一般的三角形。而欧洲人直到 1450 年才知道这本书，以至于三角一直是天文学的附属学科。

阿拉伯人做数学的目的是推进其他几门科学（天文学、光学、占星术、医学（通过占星术）)，而不是为了数学本身。

1100-1300 年十字军东征打击了东部阿拉伯人，然后是蒙古人的侵占， 1258 年巴格达的国君已不存在。西部的阿拉伯人 1492 年被基督徒征服。该地区的数学和科学活动告一段落。

欧洲（中世纪）

中世纪指的是公元 500-1400 年。在此之前欧洲只有原始的文明，人们主要的工作是畜牧、打猎和种植庄稼（而当时巴比伦、希腊、阿拉伯的科学已经蓬勃发展了几个世纪）。

公元 500 年天主教会已经成为有组织有势力的集团。英国和法国开始建立附属于修道院的学校，目的是教授人们念诵圣经以及训练教会的圣职人员。后来在这些学校的基础上产生了大学，它们在形式上是独立的，但实际上是为教会服务的（如巴黎大学、牛津、剑桥大约成立于 1200 年）。

拉丁文（即罗马文）是教会的官方语言，而罗马的数学微不足道，所以欧洲人所能学到的数学只是一些原始的一套记数法和简单的算术。有少数翻译家将希腊数学译成拉丁文。

到了公元 1000 年左右欧洲的学校开始重视数学。当时的教会希望教士能用说理来捍卫神学，而数学被认为是训练神学说理的最好学科，就像伯拉图认为数学是训练哲学的最好学科一样。重视数学的另一个原因是当时盛行的占星术需要一些数学知识。比如，占星术士要把大量的人的出生、结婚、疾病、死亡时出现的星座记录下来，就需要懂得一些数学。有些大学里天文学成了占星学的一部分。

一直到 1100 年之前欧洲人对于数学始终没有兴趣。其原因是对于物理世界缺乏兴趣。（因为基督教使得人们主要关心自己的精神生活，上帝的拯救和对天国的企求重于一切，而对自然的研究无助于（肉体死亡后）精神在天堂的生活。）

1100 年之后情况开始有些好转，其直接原因是十字军东征，这使得欧洲人接触到阿拉

伯的文明。当然在此前后，封建君主制的欧洲已经有了自由民经营的初步工业和独立的商业，通过贸易和旅游与邻近的阿拉伯人来往。王公、教会官员和商人都已经有钱供养为他们个人服务的从事科学和艺术的人们. 他们大力搜集希腊著作的抄本、阿拉伯文译本和课本。王公和教会领袖支持学者到阿拉伯的文化中心去钻研。越来越多的希腊、阿拉伯著述被译成质量不断提高的拉丁文译本，其中包括欧几里德、托勒枚、亚里士多德、海伦、阿基米德的著作以及阿拉花拉子米的《代数》。这些灿烂的文明使得欧洲学者倾倒，对于这些译著的崇拜远远超过对于他们自己的著作。

这些文明刚刚传入欧洲，就引起了人们的理性思考，希望用自然科学而不是神的意志来解释自然界。但是亚里士多德的详尽的论著（建立在内心感觉合理的说法而不顾及是否符合实际经验的基础上，因而符合教会的需要）却使得数学在欧洲的进展推迟了约两个世纪。

1. 数学. 斐波那契 (Fibonacci)(1170-1250) 被认为是当时通晓全部数学的人。他的著作是为西西里的宫廷所写的。他的《算经》和《四艺书》仍用文字而不是记号，讲述已有的数学（一次、二次方程和不定方程个别的三次方程），认为三次方程不能用代数方法解。《几何实习》重新讲述了欧几里德的《原本》和希腊三角术的大部分内容。他的突出贡献是证明了 $x^3+2x^2+10x=20$ 的根不能用尺规作图得出。这第一次表明了存在希腊人由几何作图得到的无理数之外的无理数。他引入了斐波那契数列（由 1 ， 2 开始，连续两项之和定义为下一项： 1 ， 2 ， 3 ， 5 ， 8 ， 13 , . . .)。

奥雷姆 (Oresme)(1323-1382) 是一个地方主教兼巴黎学院教师。他第一个引入分数指数的概念（例如，因为 $4^3=64=8\times 8$ ，所以 $4^{3/2}=8$ ）。

2. 物理. 奥雷姆和比里当 (Buridan)(1300?-1360?) 不同意当时流行的亚里士多德的“物体运动速度与力和阻力的比值成正比”的观点，认为物体不受外力时永远保持匀速运动。在比里当的论述中实际上引入了“动量”的概念。他们还考虑了非匀速运动，认为平均速度等于初速度与末速度的平均值。

3. 光学. 这是中世纪欧洲人最感兴趣的学科。 1200 年时希腊和阿拉伯人发现的光学的基本定律都以为人们所知。 1299 年出现了眼镜。光线通过棱镜时的散射现象被发现，又通过光纤穿过水的过程研究彩虹。

总的说来，中世纪期间数学是停滞了，其他学科的改变也不大，但是由实际（而不是由圣经）检验知识的理念在逐渐萌生。

欧洲（文艺复兴时期）

这个时期 (1400-1600) 欧洲的大革命使得政体由君主制转变为民主制。 1453 年土耳其征服君士坦丁堡时在那里的希腊学者逃到意大利，带来了希腊著作。欧洲人由希腊原文译成拉丁文，结果要比从阿拉伯文翻译的好。 1450 年已经有了活版印刷，再早一些时间中国的造纸术传到了欧洲。于是从 1747 年起各个学科的书籍开始出现。 1842 年欧几里德的《原本》第一次出版，一世纪内大量的希腊著作都相继问世。资本家希望用知识节约开支、增加财富。商人和探险家有关异地的见闻和知识使得人们对于教会的科学和宇宙学说的可靠性产生怀疑。人们又返回到毕达哥拉斯、伯拉图的数学世界中去寻求答案。于是出现了新的教条：上帝是按照数学设计了大自然。换句话说，把上帝推崇为至高无上的数学家。文艺复兴时代的自然科学家是神学家：他们用自然代替圣经作为他们的研究对象。

这个时期的一个重大进步是新的方法论的出现，提倡真正地摆脱教条，同样要求批判地接受希腊知识。培根 (Bacon)(1561-1626) 在他的论文《崇学篇》 (Adevancement of Learning)(1605) 特别是后来的《新方法》 (Novum Organum)(1620) 中说："寻找和发现真理有两条路，也只有两条路。其一，通过感觉和特例飞跃到普遍的公理，然后通过这些原则及一劳永逸的真理发明和判断一些派生的公理。另一种方法是从感觉和特例搜集公理，不断地逐步上升这样最后到达更普遍的公理；这后一种方法是真实的，但尚未有人用过。"他还认为掌握大自然应当是贯穿一切的动力，而掌握大自然是为了造福于人类，并不是为了学者的高兴和快乐。达. 芬奇 (Leonardo da Vinci)(1452-1519) 说："如果你不立足于大自然这个很好的基础，你的劳动将无益于人，无益于己。""在以数学为依据的科学的研究中，如果有些人不直接向自然界请教而是向书本的作者请教，那他就不是自然界的儿子而只是孙子了。"实践和纯粹科学在 17 世纪被融合了，科学家采用实践者的观察和经验，从实践中挑选出有用的题目和结果，更有效地进行纯科学工作，同时他们也愿意设法帮助实践。这成为了现代科学的开端。对于数学，这种方法论的长远效果是：在伯拉图"数学是现实的核心"的学说的指引下，现代数学几乎完全是由具体的科学问题产生的。在探求（根据观察和试验结果得到的）规律的道路上，数学从哲学中分离出来，和物理科学联系在一起。其后果是爆发了一个空前活跃的富有创造性的最多产的时期.

这个时期的艺术家（在追求忠实于世界原来面貌的绘画的过程中）着手研究透视法 - 射影几何的前身。这方面的天才人物是艾伯蒂 (Alberti)(1404-1472) 。他在《论绘画》一书中建议画用一只眼睛所见到的景物，通过光线的明暗的变化和将远处的景象画得较淡的办法实现立体感。他设想在在眼睛和景物之间有一个直立的玻璃板，以眼睛为中心的光束（投影线）就在玻璃板上标出一个个点，形成一个截景。这就应当是所要绘的画。为了能够得到准确的截景就必须用到几何。

文艺复兴时代科学上的最大成在于天文学. 哥白尼 (Copernicus)(1473-1543) 作为一个巨人突然出现。不知道他何以抛弃托勒枚的地心说。他提出了日心说，但是认为地球和行星绕太阳作匀速圆周运动. （第一个提出日心说的人是阿里斯塔克 (Aristarchus)（公元前 310 ？ -230 ？）。不过他只是认为恒星不动、地球绕日、月绕地球。）它的好处是能够简单地解释观测中行星运动的不规则性，而托勒枚需要用很多个所谓"周转圆"来解释。不过哥白尼学说与观测结果也差距很大。好在后来的开普勒 (Kepler)(1571-1630) 创立了三个定律（说行星的轨道是椭圆，太阳在椭圆的一个焦点处；行星运行是"匀面速度"的；行星的公转周期的平方等于他到太阳的平均距离的立方（用地球的公转周期和到太阳的平均距离为单位）（正确的是：用半主轴代替平均距离））。前两个定律公布在 1609 年出版的《新天文学》一书中，第三定律则在 10 年后的《世界的和谐》一书中。

他们的学说收到的主要的责难是：如果地球在动，为甚麼地球上的物体和云彩不被抛在后面？这个问题他们无法解答。

在文艺复兴时期开始的一个多世纪中数学本身基本上没有大的进展。后期开始出现了一些重大的进步, 韦达 (Vieta)(1540-1603)（他的职业是律师）是当时最好的数学家, 他对于数学做出了多方面的贡献.（一直被认为不能用代数方法求解的）三次方程有了一般的的解法, 这是由塔尔塔利亚 (Tartaglia)(1500-1557) 首先得到的，后来被卡尔丹 (Cardan)(1501-1576) 剽窃并写进他的《重要的艺术》一书中。