数学基础

1. **数学基础的危机**. 20 世纪初，随着数学发展的深入，数学本身的基础受到严重的挑战。公理化方法（即从公理出发进行逻辑演绎）长期被使用在数学的所有分支，但是这个方法的基础是否可靠的问题并没有解决。特别是在康托的集合论出现后，人们发现这个可靠性有本质性的问题。问题以所谓悖论的形式出现，例如康托在 1899 年提出的悖论：设 M 为所有集合的集合， $P(M)$ 为 M 的所有子集组成的集合。由于 M 包含所有的集合，所以 M 包含 $P(M)$. 这矛盾康托的集合论的基本定理（即一个集合的所有子集的集合的基数总大于原集合的基数）。特别无法解释的悖论是罗素 (Russell)(1872-1970) 在 1902 年提出的悖论（泽梅罗 (Zermelo)(1871-1953) 也独立地发现了此悖论）：以 T 表示“不是自身的一个元素的集合”的全体组成的集合，问题是： T 是否属于 T 。如果 $T \in T$, 由 T 的定义得出 $T \notin T$; 如果 $T \notin T$, 则由 T 的定义有 $T \in T$. 罗素还提出了众所周知的通俗的“理发师悖论”。这些悖论都属于逻辑悖论，除此之外还有语义悖论，例如：欧布利德 (Eubulides)(公元前 4 世纪）的说谎者悖论：一个人说：“我现在说的是一句谎话。”

2. **集合论的公理化**. 关于集合论的悖论，泽梅罗认为这是由于康托对于集合的概念未加限制所导致的。他开始了集合论的公理化的工作。其计划是：只准许看起来不大可能产生矛盾的类进入集合论，例如空类、有限类、自然数组成的类。安全类的子类、联合、以及一个安全类的所有子类所组成的类所组成的类都是安全的。他排除了取余，因为一个安全类在某个大的范围内的余并不一定安全。泽梅罗的形式集合论经过弗伦克尔 (Fraenkel)(1981-1965) 和冯. 诺伊曼 (von Neumann)(1903-1957) 等人的修改，形成了几种系统，其中最常用的公理是所谓“ ZF 系统”（泽梅罗在 1908 年提出的 7 条公理加上弗伦克尔补充的一条（替换公理））。该系统中所用的初始符号和语言包括 i) 变元 $x, y, z, u, v, x_1, \cdots$, 它们是集合的通名； ii) 谓词符号 $\in$ 和 $=$; iii) 摹状算子 ι(即“使得 $\cdots$ 成立的一个个体”); iv) 逻辑联结词和量词： $\leftrightarrow$(等价) 、 $\rightarrow$(蕴含) 、 $\vee$(或者) 、 $\wedge$(并且) 、 $\neg$(否定) 、 $\forall$(全称) 、 $\exists$(存在); v) 括号： (、). 语言的表达式分为“项”（集合的名）和“公式”（命题)，项和公式的生成遵照一定的规则. ZF 系统的（非逻辑）公理包括： i) 外延性公理（即 $\forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z$) 、 ii) 对偶公理 (即集合 $\{x, y\}$ 存在) 、 iii) 并集公理 (即集合 $\bigcup z$ 存在) 、 iv) 幂集公理 (即集合的幂集合存在) 、 v) 分离性公理 (集合中存在使得某公式成立的元素组成的子集) 、 vi) 无穷公理 (存在无穷可列集合) 、 vii) 选择公理（对于任意多个非空集合，可以同时从每个集合中选择出一个元素）和 viii) 替换公理 (由某个集合出发，存在将此集合的每个元素替换为使得某公式成立的（另一个集合的）元素）。系统的推理规则是在逻辑公理下含有等号的摹状词（即 $x = x$, $x = y \rightarrow (A(x) = A(y))$, 其中 $A(x)$ 是不含 y 的公式）的一阶谓词演算。泽梅罗的形式集合论由于用公理限定了他认为可以考虑的集合的范围，在实际上成功地避免了悖论（即直到现在还没有发现悖论）. 同时他的集合论也满足了建立全部分析、拓扑、代数等学科的需要.

似乎问题已经解决。但是还存在三个问题。一是相容性问题：没有发现公理集合论下的悖论并不等于从数学上证明了相容性。庞卡莱针对相容性没有被证明的现状形象地说：“为了防备狼，羊群一用篱笆圈了起来了，但是却不知道圈内有没有狼。”二是选择公理的引用（这是标准分析、代数、拓扑的某些部分所需要的）。许多人反对这个公理，特别是在 1904 年泽梅罗用选择公理证明良序定理（即任意集合都是良序集（每一个非空子集都有初始元素

的集合））后选择公理遭到了很多批评。三是用以进行推理的逻辑公理当时并没有完全建立起来，它与数学的关系也不清楚，特别是把逻辑推理用于无穷集合的合理性并没有依据。

之后在对于数学基础的争论中出现了三个主要的派别，即逻辑派、直观派、形式派。

1. **逻辑派**. 在 1930 年之前逻辑派在数学基础的理论中占有统治地位。逻辑派的创立人事罗素和怀特海德 (Whitehead)(1861-1947), 他们的想法是：数学可以从逻辑推导出来。在他们之前，逻辑已经有很长一段发展历史。最初的逻辑学是亚里士多德创立的，他提出推理过程的矛盾律和排中律法则。笛卡尔由于看到了代数方法在几何论证中的威力，因而设想将逻辑代数化，即建立逻辑代数，这方面的一份未完成的草稿现在还留存着。莱布尼兹抱有笛卡尔同样的宏伟目标，要建立一种只受形式逻辑约束的、可以进行普遍推理的演算，使得人们能够在一切领域中机械地轻易地进行推理。它直接间接地引入了逻辑加法、乘法、等同、否定、空集的概念和包含、一一对应、多一对应、等价关系等抽象关系。一直到 19 世纪初，其他人的探索都没有比莱布尼兹更前进一步。狄摩根在 19 世纪中期对于逻辑学做出了重要贡献，提出了著名的狄摩根律。同时期的布尔 (Boole)(1815-1864) 是自学成材的数学家，他用符号方法奠定了逻辑代数的基础，现在被称为布尔代数。他用 $x, y, z, \cdots$ 表示类（集合），$A, B, C, \cdots$ 表示个体元素。1 表示万有类，0 表示空类，xy 表示 x 与 y 的交，$x+y$ 表示 x 与 y 的并，x 的补记为 $1-x$, x 与 y 的差记为 $x-y$, x 含于 y 则用 $xy=x$ 表示。等号表示同一性。他对于运算定义了公理性质：交换律、结合律、幂等率、分配率，他把 0 律和 1 律作为常识。他认为根据上面的直观解释进行初等的推理，得到的就是逻辑的公理。例如矛盾律，即 A 不能既是 B 又不是 B, 可以表示为 $x(1-x)=0$(因为 x 含于 x, 所以 $xx=x$). 类似地，$x+(1-x)=1$ 表达的就是排中律（任何东西不是 x 就是非 x). 从狄摩根和布尔以后，逻辑便离开了哲学而靠近数学。之后的皮尔斯 (Peirce)(1854-1914) 推进了命题演算，把命题与命题函数区分开来（命题只含有常量，例如“苹果是水果”，命题函数含有变量，例如“ x 是苹果）。弗雷格 (Frege)(1848-1925) 扩展了变量、量词和命题函数的运用。他区分了一个元素和这个元素组成的集合，引进实性蕴含的概念（A（实性）蕴含 B 的含义是：A 真 B 也真，或者 A 假). 他还研究了关系逻辑（例如顺序关系）。把逻辑建立在明确的公理基础上之后，他开始（作为逻辑的延展去）建立数学。在他的《算数的基本法则》一书的第二卷将要付印时，罗素把悖论告诉了他，结果是他的理论的基础垮掉了。

罗素和怀特海德独立于弗雷格具有同样的想法，即数学可以从逻辑推导出来。他们从一些不定义的概念（例如命题函数、肯定一个基本命题的真、命题的否等）出发，给出了关于命题的析取（即“或”）和蕴含的 6 条公设，由此推出亚里士多德的三段论法则。他们发现了悖论的根源在于：一个东西的定义包含了他所要定义的那个东西（例如所有集合的集合含有所有集合的集合）。为了避免悖论，他们引入了“层次”的概念。如果一个集合的元素只有一个，则适用于这种元素的命题函数就称为是层次为 0 的。变量的层次为 0 的命题函数称为是层次为 1 的。一般地，如果变量的层次小于和等于 n 的命题函数其层次为 $n+1$. 层次的引入确实避开了悖论，但是它使得论证变得十分复杂。为了避免这种复杂性，他们又引入了约化公理（任何层次的命题函数都被确认存在一个等价的层次为 0 的命题函数）。接着他们论述“类”（即满足某个命题函数的东西组成的集合）和“关系”（满足某个二元函数的偶对组成的集合）的概念。然后定义集合的“基数”为具有一一对应关系的所有的类的共同性质。有了基数也就有了自然数，就能建立起实数系、复数系、函数、分析、几何（用数来引进），并不需要另外的公理。

逻辑派的宏大计划就是要将数学奠基在逻辑上，不需要任何数学公理。事实上，罗素和怀特海德的体系一直没有完成。由于逻辑的公设和推论都是没有内容的（只有形式），结果，数学也只有形式而无内容，任何物理意义都不属于数学。正如罗素本人所说的：数学是这样一门学科，在其中我们永远不会知道我们所讲的是什么，也不会知道我们所说得是不是真的。

逻辑派受到很多批评，因为思维规律的演绎不能表现自然现象（如声、电磁、力等等），并且数学概念的产生依靠知觉和想象，新的知识不能脱离经验而仅由逻辑推导产生出来。但是无论如何，罗素和怀特海德实现了逻辑的彻底公理化，大大改变了数理逻辑这个学科的面貌。

2. **直观派**. 直观派的代表人物是布劳维尔。属于这个学派的还有外尔 (Weyl)(1885-1995). 和逻辑派不同，直观派认为逻辑不是在数学之先，而是数学活动的结果。数学概念嵌进人们的头脑实现与语言、逻辑和经验的。决定概念的正确性和可接受性的是直观而不是经验和逻辑。直观派认为全部数学基本上都应归约为整数，因为整数在直观上是清楚的。直观派的另一个重要观念是强调数学对象的可构造性，他们不承认不能构造的概念和证明.

直观派的起源可以追溯到科罗内克. 他认为整数是神造的，其他的东西都是人造的，可疑的。他想砍掉无理数和连续函数的理论。他反对不能通过有限步骤可以确定的概念，例如可约多项式的定义是存在真因子的多项式。他认为"可约的定义是没有可靠基础的，除非个定了一个方法，可以断定一个函数是否是可约的。"他尝试了重建代数（没有致力于重建分析），在算术和代数方面作了很好的工作，但并不符合他自己的标准。庞卡莱后来说：科罗内克一时忘记了他自己的哲学。

在随后的 25 年时间内没有人支持他的哲学。但是在悖论被发现以后直观主义复活了. 庞卡莱成为了第二个倡导者. 一方面他反对集合论，同时他也不承认逻辑派拯救数学的计划，理由是逻辑派把数学化为无限的同义反复。他嘲笑逻辑派对于 1 的定义说：这个定义对于从未听说过数目 1 的人来说，是一个令人赞赏的定义。他强调说：真正的数学总有其实用的目的，他会按照自身的原则不断地发展，而人们一点也不知道康托的集合论和逻辑主义会有什么东西可以保存下来。庞卡莱反对不能用有限个词定义的概念，例如按照选择公理选出的集合就不是真正被定义了的。他还认为算术不能用公理来判断其正确性，这种正确性的直观是先于公理而存在的。特别是数学归纳法，它不是公理而是一种基本的直观。庞卡莱赞成罗素关于悖论产生的原因的看法。波莱尔、贝尔 (Baire)(1874-1932) 、哈达玛和勒贝格对于逻辑主义和选择公理作了进一步的批评。

以上都只是直观主义者的零散的、片段的批评意见。布劳维尔系统地创立了直观主义。他的观点起源于一种广泛的哲学。他认为：基本的直观是按时间顺序出现的感觉。从 n 到 $n+1$ 的关系就是从时间进程所造成的特殊显象的二重性的原始直观中抽象出来的，再由无限反复而造成新的数学对象，这就产生了自然数的概念，导致无穷集合。他的无穷集合是一步步构造出来的，这和康托的无穷集合不一样，后者是"一下子"都出现的。

直观主义者不但强调所有的数学概念都应当是构造性的（不承认由不存在性导出矛盾的存在性的概念），同时也强调证明必须是构造性的，而不能是存在性的。例如经典分析中的存在性定理（例如有界无穷序列必有收敛子序列，单调有界序列必有极限点等等）都应该放弃，因为这些定理的证明都不是构造性的。又如欧几里德关于素数有无穷多个的证明也不应被接受，因为它没有给出确定第 n 个素数的方法。

一般而言，他们反对间接证法（反证法），即反对排中律：你不能说一个命题不是真的就必然是假的。对于有限集合可以用逐个检验的办法断定是否所有的元素都具有某一性质 P,

但是对于无限集合就行不通了。人们也许碰巧知道无穷集合中某个元素不具有性质 P, 从而断定 P 对于该集合不成立，或者由集合的构造能够知道或证明该集合具有性质 P. 但这与排中律无关。对于命题的证明否定排中律，就产生了三种命题，第一种是可以证明，第二种不可证明的，第三种是既不是可以证明的，也不是不可以证明的。第三种的一个例子是“在 π 的十进位表达式中存在由 $0, 1, \cdots, 9$ 依次排列的一段”。

关于逻辑，布劳维尔认为它只是联系真理的一种语言，并不是揭示真理的可靠工具。逻辑推导不出用别的方法得不到的真理。数学中的最重要进展都不是由于逻辑形式的完美化带来的，而是由基本理论本身的变革得到的。是逻辑依靠数学，而不是数学依靠逻辑。由于他们不承认任何先验的不可违反的逻辑原则，所以不承认从这种公理推出结论的数学工作。他们认为数学并不是非遵从逻辑的规律不可，所以悖论并不要紧，因为悖论所依靠的排中律并不是他们所承认的。

布劳维尔和他的学派曾力图在他们可以接受的构造的基础上建立新的数学，他们成功地建立了极限和微积分，但是他们的构造非常复杂，他们还重新构造了代数和几何的初等部分。历史上并没有多少数学家加入直观派。

3. **形式派**. 希尔伯特为了回答直观派这对于经典分析的批评，开始研究数学基础问题。1904 年的第三届国际数学家大会上他论述了自己的观点，这就是形式主义的开始。他的目的是个数学提供一个不用集合论的基础，并且确立算术的相容性（在 1899 年的《几何基础》一书中他已经把几何公理的相容性归结为算术的相容性）。他想保住无穷，保住存在性证明。 20 世纪 20 年代他发表了几篇关键性的文章，他的观点逐渐获得一些人的支持。

形式派主张逻辑必须和数学同时加以研究：数学的任一部门的公理必须包含逻辑和数学的概念与原则。逻辑是一种符号语言，他把数学语句表达成公式，并且用形式的程序来进行推理。所有的记号和运算符号都与具体内容无关。希尔伯特在 1926 年说：数学思维的对象就是符号本身。符号就是本质；它们并不代表物理对象。公式能蕴含着直观上有意义的叙述，但是这些涵义并不属于数学。

希尔伯特把排中律保留了下来，亚里士多德的全部的逻辑法则都可以用在形式表达式上。他认为只要不使用“一切”这个词就可以避免悖论。逻辑学中已经成熟的概念和关系，例如“并且”、“或者”、“非”、“存在”等等都被希尔伯特所引用。为了处理无穷集合的性质，他用到超限公理（即如果一个命题适用于标准对象，他就适合所有对象）。

希尔伯特认为数学证明的模式是：肯定一个公式；肯定这个公式蕴含着另一个公式；$\cdots$, 一系列这样的步骤，其中每一步所用到的公式和蕴含关系都是公理或前面的结论，这就是证明。还有一个可以允许的操作，就是用一个符号替换另一个符号。一个命题是真的，必须而且只需它是这样一连串命题中的最后一个。这个标准是任何人都可以验证的，所以真理性和严密性就是确定的和客观的。

于是对于形式主义者来说，数学有若干的部门，每个部门都有自己的公理基础，各自建立自己的逻辑，各有自己的概念、公理、推导法则和定理。数学本身就是一堆形式系统。这就是希尔伯特的数学。

一个自然的问题是：这样的数学内部又没有矛盾？希尔伯特和他的学派证明了一些简单的形式系统的无矛盾性，并且把大部分经典数学的相容性（无矛盾性）归结为自然数的算术（数论）或者一种具有很好的性质的集合论的无矛盾性。但是他们并没有完成这看起来是最后的一步。事实上哥德尔在 1931 年的一篇文章中证明了：包含着通常逻辑和数论的一个系统的无矛盾性是不能证明的。

另一个问题是公理的完备性。希尔伯特是一个乐观主义者，他对于“形式化的数学”充满信心。在 1928 年国际数学会议上他说任何一个确定的数学问题总是可以解决的。但是哥德尔在上面提到的文章中的一个更一般的定理（不完备性定理）说：如果一个足以容纳数论的形式理论 T 是无矛盾的，则这个形式理论一定不完备，即存在一个数论语句 S, 使得 S 和非 S 都不是这个理论的定理。这符合布劳维尔对于命题的三种分类。更进一步可以说，哥德尔证明了直观的正确超过数学的证明。对于自康托以来一直困惑人们的“连续统假设”，科恩 (Cohen) 在 1963 年证明了：如果 ZF 系统是相容的，则连续统假设是无法证明的。

上面所述的三个派别各自对于数学基础做出了自己的贡献，但是都没有达到奠定数学基础的目标。 按照哥德尔的结论，形式化的数学需要无穷多条公理。

1930 年以后，三个学派都经历了巨大的变化。尤其引人注目的是“元数学”的发展。元数学最初追求的是象希尔伯特那样的一致性证明模式，后来却发展成为一大套理论。直观主义并没有改变他们的哲学，但是却开始改变他们的内容了。原来的直观主义摒弃公式，后来却被用来代替旧文献中的那些复杂的、往往是令人无法琢磨的语句。逻辑主义没有创造新的概念，在集合论观念的外衣下保存了下来。

从事实际研究的数学家们并不在意自己属于哪个派别。他们把各派中对于研究有用的概念和方法随便拿来使用。不仅如此，他们还不断地引进新的概念。现代数学中一种常用的涵盖面最广的概念是范畴与函子，这是 1942 年由埃勒伯格 (Eilerberg) 和马克兰 (MacLane) 引入的。直观地说，范畴是某种数学对象的全体以及它们之间的所有映射组成的，函子则是范畴之间的映射。

数学家并没有因为数学基础没有完全奠定而停止脚步，他们在数学研究中不断取得进展。