拓扑

拓扑学是研究具有连续性的对象的学科。由于时间和空间都具有直观上的连续性，所以拓扑学有重要的学术价值。如果把拓扑学理解为研究（拓扑空间的）同胚变换下不变的性质的学科，则在克莱因的观念下，拓扑学可以看作几何学的一个分支，不过它所涵盖的对象非常广泛。从这个意义上可以说拓扑学是最一般的几何学。其原因是同胚的定义不需要任何经典的几何概念，诸如距离、直线性、线性性、光滑性等，它所需要的仅仅是维持某种直观上明显的邻近性。拓扑学可以看作是"橡皮上的几何学"。即它所研究的是几何图形在不发生断裂和粘合的连续变换下不变的性质。这里的所谓几何图形并不局限于通常意义下的图形。一般而言，拓扑空间的点可以是任一集合中的元素，不过这些元素之间有离得远近的关系。最简单的拓扑空间是通常的欧几里德空间以及其中的图形。

康托建立了集合论（1874 年）之后，人们探索在集合（特别是函数集合）上定义元素间远近的概念，一些人 (特别是哈达玛 (Hadamard)(1865-1963)) 在变分法的研究中开始考虑连续函数的集合。弗雷歇 (Fréchet)(1878-1973) 对于函数空间和泛函分析做出了奠基性的贡献。在他的博士论文（1906 年）中引入了现代的度量空间（即距离空间）的定义。所谓"距离"是集合上的一个实值二元函数 d, 满足三条性质： i) 对称性，即 $d(A,B)=d(B,A)$; ii) 正定性，即 $d(A,B)\geq 0$, 且 $d(A,B)=0$ 当且仅当 $A=B$; iii) 三角不等式，即 $d(A,C)\leq d(A,B)+d(B,C)$. 度量空间也是自然的拓扑空间。在度量空间中可以像欧几里的空间中一样定义（"点" 组成的）序列的收敛性与极限点。在度量空间中可以谈一个点的球形邻域或方形邻域。事实上，邻域的概念不一定要以度量为前提（试想而且橡皮上的几何图形在橡皮变形之下一般不保持距离不变）。现今的拓扑学中的一个点的邻域就是包含这个点的一个"开集"。在一个集合中如果有一组开集，就称此集合为一个拓扑空间，同时也称这组开集给出了此集合上的一个拓扑。开集是由三条性质定义的，即 i) 整个集合和空集都是开集， ii) 任一多个开集的并集仍是开集， iii) 有限多个开集的交仍是开集。开集的补集称为闭集。用闭集也可以定义拓扑（利用迪摩根律）。当然，在这种广泛的定义下会出现很多离奇的拓扑空间。

拓扑学按内容考虑通常分为点集拓扑和代数拓扑，其奠基人分别是豪斯道夫 (Hausdorff) (1868-1942) 和庞卡莱。

1. **点集拓扑学**. 豪斯道夫在 1914 年的《点集论纲要》一书中引入了邻域的概念，从而建立了抽象拓扑空间的完整理论。他所定义的邻域要满足下述定义性质（故意避开度量的概念）： i) 每个点 x 含于至少一个邻域中（称此邻域为 x 的邻域）， ii) 同一个 x 的两个邻域的交仍是 x 的邻域， iii) 如果 U 是 x 一个邻域， $y\in U$, U 必包含 y 的某个邻域， iv) 对于任意两个不同的点，都存在这两个点邻域，它们的交集为空集。具有这些邻域的集合就称为拓扑空间。实际上他所定义的拓扑空间是现在所说的豪斯道夫空间。

有了邻域的概念，就可以定义点集的开集、极限点、闭集、紧致性、连通性、可分离性等基本概念。拓扑空间 T 的一个子集 U 称为一个开集，如果对于任意的 $x\in U$, 都存在 x 的一个邻域 U_x, 满足 $U_x\subseteq U$. 设 S 是 T 的一个子集，点 x 称为 S 的极限点，如果 x 的任意邻域都含有 S 中的点。如果 T 的子集 V 包含它自身的所有极限点，则 V 称作一个闭集（容易证明 V 是闭集当且仅当 $T\setminus V$ 是开集）。包含一个子集的最小闭集（也就是包含该子集的所有闭集的交）称为此子集的闭包。一个拓扑空间称为紧致的（列紧的），

如果它的任一无穷子集都有极限点（特别地， T 的任一闭集都是紧致的（子空间）），例如欧几里德直线就不是紧致的。一个拓扑空间 T 称为连通的，如果无论以任何方式将 T 分解为两个真子集的无交并，至少有一个子集含有另一个子集的极限点。例如 $y = \sin\frac{1}{x}$ 并上 y 轴上的区间 $(-1,1)$ 是连通的 (也可以将 $(-1,1)$ 换成 $[-1,1]$). 可分离性是弗雷歇在早些时候引入的，它的含义是：可数子集的闭包。

拓扑空间之间的联系(象一般的集合一样)是由映射建立的. 对于拓扑空间而言, 最有用的映射是连续映射（就像代数结构之间的映射要保持运算一样）。拓扑空间的映射 $f : T \to S$ 称为连续的，如果对于任一 $x \in T$ 以及 $f(x)$ 的任一邻域 U, 都存在 x 的一个邻域 W, 使得 $f(W) \subseteq U$. 这恰是用 ε-δ 语言叙述函数（在整个定义域上）连续性的推广。 f 连续通常也（等价地）定义为： S 的任一开集在 f 下的反像为开集。如果进一步要求 f 是双射，并且 f^{-1} 也连续，则称 f 是一个同胚。此时说 T 和 S 是同胚的。在拓扑学的意义下，同胚的拓扑空间被认为是一样的。拓扑学的目的就是研究同胚映射下的不变的性质。上面说过的拓扑空间的性质都是这样的性质。

弗雷歇提出了一个自然的问题：抽象的拓扑空间与度量空间究竟有多大的差别？乌雷松 (Urysonh)(1898-1924) 在他去世一年后发表的一篇论文中证明了：如果一个拓扑空间的任意两个不相交的闭集都包含在两个不相交的开集之中（这样的拓扑空间称为正规空间），并且单点集都是闭集，则在此空间上可以定义一个度量（而且按度量定义的拓扑就是原来的拓扑）。在同一年发表的另一篇论文中，他证明了：任一可分离的度量空间都同胚于希尔伯特方体的一个子集（所谓希尔伯特方体就是满足 $0 \le x_i \le \frac{1}{i}$ 的无穷序列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 的集合，并且像通常欧式空间一样定义两个点之间的距离，即 对应分量的差的平方和的平方根）。于是可分离的正规空间都同胚于希尔伯特方体。

拓扑空间的另一个重要概念是维数。显然不能用一一对应为维数相等的依据（因为康托在 1874 年已经证明了 $\mathbb{R}^n$ 的所有点可以一一对应到直线 $\mathbb{R}^1$ 上）。通常的欧式空间中的几何图形的维数规定为该图形上的点的坐标中独立变化的最大数目，这也不适用于一般的拓扑空间。 1912 年庞卡莱给出了维数的归纳定义：一个闭的连通的拓扑空间是 n 维的，如果存在一个 $n-1$ 维的闭的连通的子空间，将原来的空间分成两部分。布劳维尔 (Brouwer)(1881-1966) 指出这个定义对于对顶的锥面不合适，因为一个点（ 0 维）就可以将二维的面分开。门格尔 (Menger)(1902-?) 和乌雷松修改了庞卡莱的定义，成为现在的样子，即：空集是 -1 维的；归纳地，拓扑空间中的一个点 P 处的局部维数被定义为 n 维的，如果存在 P 的充分小的邻域，此邻域的边界是 $n-1$ 维的（邻域的边界是邻域的闭包减去邻域）。一个拓扑空间称为 n 维的，如果它在各点处的局部维数都不超过 n, 并且至少在一点处的局部维数等于 n. 维数的另一个常用的定义是勒贝格 (Ledesgue) 给出的，他称一个拓扑空间的维数为 n ，如果 n 是具有下述性质的最小的整数：任意小的闭子集组成的整个空间的有限覆盖中，有 $n+1$ 个闭子集交集非空。这两种定义在欧几里德空间的情形与通常的定义相符。维数也是同胚不变量。维数理论中的一个重要结果是门格尔定理：任意一个 n 维紧致的度量空间都同胚于 $2n+1$ 维的欧几里的空间的某个子集。

通常讲来，似乎曲线是一维拓扑空间. 但是曲线不能这样定义。门格尔和乌雷松把曲线定义为一维的连通闭集，这样就排除了皮诺曲线的情形。

关于点集拓扑有上百个的概念被引入。究竟它们中哪些是由最终价值的，数学家们似乎并不关心，他们毫不迟疑地投身于点集拓扑的纵深发展。

1. **代数拓扑学**. 和点集拓扑的方法不同，代数拓扑（也称为组合拓扑）用代数的方法研究拓扑不变量，特别是拓扑空间的同调群、基本群和同伦群。研究过程中经常将拓扑空间剖分成一些小的部分的组合。

最早有组合拓扑的观念的是莱布尼兹，他不满意坐标几何，认为坐标几何只关心量，而他希望有一种直接表示部位（例如多边形的顶点和边的数目）的几何。笛卡尔在 1639 年已经知道多面体的一个组合性质，莱布尼兹在 1675 年也知道了这个性质，即现在所称的（多面体的）欧拉示性数等于 2 。所谓欧拉示性数是指多面体的顶点数减去边数再加上面数 $(V-E+F=2)$. 欧拉在 1751 年给出了这个结果的证明。 1881 年哥西给出了另一个证明，他用到了现代的剖分法。墨比乌斯 (Möbius)(1790-1868) 建议将多面体的表面分成三角形。把这些三角形的边适当地等同起来就可以得到原来的多面体。这个想法在后来的代数拓扑中只有普遍意义的。他还认为有些曲面能够被剪开，例如有两个洞的环面可以在剪开后变成一个空心十字，这两种几何图形的性质密切相关。

与剖分法相关的问题是曲面的"侧"。1858 年墨比乌斯和利斯廷 (Listing)(1806-1882)(哥廷根的物理教授，高斯的学生）各自独立地发现了单侧曲面（形象地说，即在此曲面上刷油漆时，刷子不离开曲面就可以将整个曲面涂遍），其中最著名的是墨比乌斯带。

另一个与剖分有关的问题是图论中的四色问题。

对于组合拓扑的最大的推动力来自于现在所说的曲面的 "连通数"。 直观上说，一个闭曲面成为 n 连通的，如果该曲面上有 n 个洞。这个问题的重要性是黎曼在复变函数论的研究中最早发现的（牵涉到积分与路径的关系）。黎曼在 1851 年定义的连通数比现代所说的连通数多 1 。他的定义是：如果（有边界的）曲面上存在 n 条闭曲线，它们不能将曲面分成两部分，但是再任意添上一条闭曲线就能把曲面分成两部分，就称该曲面是 $n+1$ 阶连通的。例如正方形（包括内部）是 1 连通的，而两个同心圆之间所夹的部分是 2 连通的，有一个洞的环面（亏格为 1 ）是 3 连通的。克利福德 (Clifford)(1845-1879) 证明了具有 w 个支点（即在其附近的环路上函数的解析延拓会产生新的函数的点）的 n 值函数的黎曼面可以变换成挖掉 $p=\frac{w}{2}-n+1$ 个洞的球面， 1882 年克莱因将此模型转化为具有 p 个柄的球面 (p 就是此带柄球面的亏格). 在曲面的同胚分类问题中，一个重要的概念是 "可定向"。一个曲面称为可定向的，如果它能够三角剖分，并且存在所有三角形的定向，使得相邻的三角形的公共边的方向相反。例如环面是可定向的，而克莱因瓶（将矩形的一对边粘合，另一对边反向粘合）是不可定向的（进一步，它是无边的、无内无外的单侧曲面）。克莱因在 1874 年证明了：两个可定向的（无边的）闭曲面同胚当切仅当它们的亏格相等。对于有边的闭曲线，还应当加上 "边的条数" 相等这一条件（有边情形的这一结论是若当在 1866 年证明的）。

我们在上面所谈到的都是有关闭曲面的理论。这是 19 世纪大多数时间里代数拓扑的主要内容。但是有一个重要的例外，就是贝蒂 (Betti)(1823-1892) 在 1870 年的工作。贝蒂认识到了高维图形连通数的重要性。他推广了黎曼对于曲面的连通数的概念，归纳地定义了高维连通数。例如，一个 n 维图形中 2 维连通数是不能围出三维图形的闭曲面（二维闭子空间）的最大数目。贝蒂的一维连通数比黎曼的连通数少 1 。他证明了复多项式 $f(x,y,z)$ 得复零点集（四维实图形）的一维连通数等于三维连通数。

庞卡莱被认为是 19 世纪最后 1/4 世纪和 20 世纪初的领袖数学家，并且是对于数学及其应用具有全面知识的最后一个人。他的研究领域涉及数学的几乎所有的领域以及物理、电磁理论、动力学、流体力学和天文学。自然科学是他研究数学的动机。

庞卡莱研究了上面提到的贝蒂考虑的四维实图形的的结构。他断定系统地研究一般 n 维图形的位置分析是必要的。开始他试图用图形的解析表示建立 n 维图形的理论，但是没有取得重要的进展。于是他转向“流形”的纯几何理论。“流形”是黎曼曲面的推广，如果一个图形的每一个点都有一个同胚于 $n-1$ 维实心球的内部，这个图形就是一个 n 维闭流形。例如球面和环面都是二维流形。除了闭流形之外，还有带边的流形，例如立方体和实心球都是带边的三维流形，它们的边都是二维实流形。1895 年庞卡莱发表了一篇基本性的论文，1904 年对于这篇论文写了 5 个长篇的补充，其中的第一篇补充中给出了他的最后方法，即胞腔的方法。后来布劳维尔对于庞卡莱的概念引入了标准的术语，即单形和复形。一个 n 维单形就是一个 n 维“三角形”，即：一维单形是一个线段，二维单形是三角形，三维单形是四面体，n 维单形是具有 $n+1$ 个顶点的超四面体，可以代表它的用 $n+1$ 个顶点的字母来表示，例如 $a_0a_1\cdots a_n$. 单形去掉一个顶点称为原来单形的一个面。一个复形是指一组满足下述两个条件的有限多个单形：i) 任意两个单形如果相交，则交集是这两个单形的一个公共面；ii) 单形的面仍然是复形中的一个成员。直观上说，复形是可以剖分成单形的图形。

在单形上要指定一个定向，两个顶点相同的单形如果它们的顶点的顺序相差一个偶置换，就认为它们的定向相同，否则认为定向相反，例如 $a_0a_1a_2$ 与 $a_0a_2a_1$ 就是定向相反的单形。顶点相同的单形，如果具有相同定向，则看作是相等的，否则认为是相反的。例如 $a_0a_1a_2=-a_0a_2a_1$.

对于一个复形可以构作它的 k 维单形的形式和。任何一个形式和称为一个 k 维链。复形 X 的 k 维链的全体记为 $C_k(X)$ 。

对于一个复形 X 的 k 维单形 $a_0a_1\cdots a_k$, 定义它的边缘为

$$\partial_k(a_0a_1\cdots a_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(a_0\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n)$$

(例如一维单形 a_0a_1 的边缘为 a_1-a_0). 称 ∂_k 为边缘映射. 将 ∂_k 线性扩充到 X 的 $C_k(X)$ 上，就得到由 $C_k(X)$ 到 $C_{k-1}(X)$ 的映射，仍记为 ∂_k 。庞卡莱把在边缘映射下映成 0 的链称为闭链，两个闭链称为相关的，如果它们的差是某个高一维的链的边缘。容易证明这种相关关系是一个等价关系。他接着证明了 k 维不相关的闭链的最大数目就是 k 维贝蒂的连通数(为了纪念贝蒂，庞卡莱将这个数称为贝蒂数)。例如平面上两个同心圆所夹的圆环的 0 维贝蒂数是 1 ，这因为任意一个点都是闭链，而任意两个点的差都是某条弧的边缘，由此可知偶数个点的形式和是相关的，因而任意奇数个点都和一个点相关。类似地，一维的贝蒂数也是 1, 2 维贝蒂数为 0. 他在第一篇和第二篇补充说明中给出了用矩阵的初等变换计算贝蒂数方法。他接着把欧拉示性数推广到 n 维空间 K ，其定义为 $N(K)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\alpha_k$, 其中 α_k 为 K 的 k 维单形的个数。然后他证明了一个基本的公式 $N(K)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_k$, 其中 p_k 为 K 的 k 维贝蒂数。

庞卡莱在 1899 年的论文中定义了 k 维挠系数的概念。如果一个闭链不是边缘，而它的的若干倍是边缘，这样的闭链称为挠闭链。k 维挠闭链的全体在 $C_k(X)$ 中组成一个交换群，这个交换群在上面定义的“相关”关系下的等价类是一个有限交换群，此交换群的初等因子 (一组有限多个正整数) 称为 k 维挠系数。

到了 1925 年 -1930 年间，在诺特的建议下，一些人把庞卡莱关于复形的理论用群论的语言改写出来。详细些说，前面所说的 $C_k(X)$ 在通常的加法下构成一个交换群 (称为 k 维

链群); 边缘映射 ∂_k 是群同态, 并且作连续两次边缘映射的结果是零映射, 即 $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. 这说明 $\operatorname{im}\partial_{k+1}$ 是 $\ker\partial_k$ 的子群。 ($\operatorname{im}\partial_{k+1}$ 称为 X 的 k 维边缘群, 记为 $B_k(X)$, $\ker\partial_k$ 为 X 的 k 维闭链群, 记为 $Z_k(X)$) 。商群 $Z_k(X)/B_k(X)$ 称为 X 的 k 维同调群, 记为 $H_k(X)$ 。它是有限生成的交换群。所以有

$$H_k(X) \cong \mathbb{Z}^{r_k} \times \mathbb{Z}/t_{k1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/t_{kl_k}\mathbb{Z},$$

其中 $t_{k1} \mid t_{k2} \mid \cdots \mid t_{kl_k}$. 显然 r_k 是 X 的 k 维贝蒂数, t_{kj} 是 X 的 k 维挠系数。同调群是代数拓扑中最重要的概念。

我们在前面已经看到(像门格尔、乌雷松、黎曼、贝蒂所作的那样)“边界”在定义维数和连通数中的重要性。但是把这个概念用适当的符号表达出来, 进而对于这些符号定义运算, 则是一个艰难的抽象过程。这种抽象是数学的精要所在。

庞卡莱(1895 年)推广了上面提到的贝蒂的工作, 得到了对偶定理, 即 n 维可定向的闭流形的 k 维贝蒂数等于 $n-k$ 维贝蒂数, 但他的证明并不完全。

庞卡莱在 1895 年的论文中还引进了拓扑空间的基本群的概念。所谓基本群就是道路的同伦等价类在连接运算下构成的群。基本群(通常不是交换群)也能反映二维闭曲面的连通数以及高维图形的某些高维性质。

庞卡莱遗留下了一些重要的猜测。他在第二篇补充说明中说: 如果两个闭流形有相同的贝蒂数和挠系数, 则它们就同胚。在第五篇补充中他给出了一个 3 维流形, 其贝蒂数和挠系数都与三维球(四维实心球的表面)一样, 但不是单联通的, 于是他又将单连通作为一个条件。然后又指出存在贝蒂数和挠系数都相同但是基本群不同的的三维流形。亚历山大 (Alexander)(1888-1971) 证明了两个三维流形可以有相同的贝蒂数、挠系数和基本群, 但是不同胚。

在庞卡莱的第五篇补充中他提出了著名的猜想: 每一个单连通、闭的、可定向的三维流形都同胚与三维球, 此猜想被推广为: 每个单连通的闭的 n 维流形, 如果具有 n 维球的贝蒂数和挠系数, 则同胚于 n 维球。这些猜想都叫做庞卡莱猜想。对于 $n \geq 5$, 斯梅尔 (Smale) 斯塔灵斯 (Stallings) 塞曼 (Zeeman) 等人在 1960-61 年间证明, 1982 年弗里德曼 (Freedman) 对于光滑的 4 维流形也证明了此猜想。据说 $n=3$ 的情形不久前已被证明, 但还没有确切报道。

同调群的一个变种是上同调群, 其中的链复形是复形到一个交换群(特别是整数加法群)的同态的全体在(边缘映射诱导的)上边缘下构成的上链复形。同调论的公理化是由艾林伯格 (Eilenberg) 和斯蒂因诺德 (Steennord) 在二十世纪 40 年代完成的。同调代数起源于同调论, 在二十世纪 40 年代成为一门独立的数学分支, 60 年代达到成熟, 被成功地应用于数学的许多分支。

代数拓扑的另一个重要分支是同伦论, 它与同调论有联系密切(例如同伦等价的复形的同调群相等)。同伦论引起代数 K- 理论。

拓扑学除了点集拓扑、代数拓扑之外, 还有微分拓扑, 他所研究的拓扑空间是微分流形, 其中的同胚映射是可逆的微分映射。此学科建立于二十世纪 30 年代, 与数学的很多分支和物理学都密切相关。

许多代数结构可以赋予拓扑结构, 例如实数域、复数域有自然的拓扑(它们是距离空间)。这导致“拓扑群”、“拓扑环”、“拓扑域”的具有拓扑的代数结构的概念, 在这些代数结构中的代数运算关于它上面的拓扑应当是连续的。我们看一个不平凡的例子。在上一讲我们提

到过汉瑟尔引入的 p - 进数域 (p 为素数) 。这种数域以有理数域上的所谓 p - 进绝对值为基础。一个有理数 a 的 p - 进绝对值 $|a|_p$ 定义如下： $|0|_p = 0$; 若 $a \neq 0$, 设 $a = p^t \frac{n}{m}$, $p \nmid mn$, 则 $|a|_p = p^{-t}$. 容易验证它满足绝对值的三条定义性质： i) $|a|_p \geq 0$, “ $=$ ” 成立当且仅当 $a = 0$; ii) $|ab|_p = |a|_p |b|_p$; iii) $|a + b|_p \leq |a|_p + |b|_p$. 进一步的事实是：在有理数集合上满足绝对值的三条定义性质的函数必等价于通常的绝对值或者某一个 p- 进绝对值。两个有理数之间的距离定义为它们的差的 p- 进绝对值。有理数域关于这种距离的完备化就是 p - 进数域。