几何

本节我们将着重介绍非欧几何. 这种几何的建立是十九世纪的数学中在本质上最深刻的同时在技术上最简单的进展。它的发展与微分几何有关。最终非欧几何被解释为在射影空间中通过所谓“绝对形”引入度量的结果，而欧几里德几何是非欧几何的特殊情形（退化情形）。

1. **历史回顾**. 非欧几何与欧几里德几何本质上的不同之处在于平行公设。自公元前 300 年到 1800 年间，人们始终认为欧几里德几何是物理空间的正确的理想化。大量的人花了很多精力致力于说明欧几里德的第 5 公设的正确性。托勒枚证明了第 5 公设，但他不自觉地用到了“两条直线不能包围整个平面”以及“平行线被一直线所截所得到的两侧的内角具有同样的性质”。纳西尔 - 爱丁 (Nasir-Eddin)(1201-1247) 是欧几里德几何的波斯文编写者，他证明第 5 公设所用到的假设是：如果两条直线不平行，则由其中一条直线的点向另一条直线所作的垂线将随着点的远离可以超过任何长度（事实上 5 世纪的普洛克努斯 (Proclus) 给出过类似的证明）。沃利斯在 1663 年研究了纳西尔 - 爱丁的证明，用“对于任意三角形，存在边长任意大的与之相似的三角形”代替纳西尔 - 爱丁的假设，证明了第 5 公设。 1769 年约瑟夫 - 芬 (Joseph Fenn) 提出了第 5 公设的最简单的替代物，即“两条相交直线不能同时平行于第三条直线”（普洛克努斯在对于欧几里德的《几何原本》的注释中曾说过这句话）。 1795 年普莱费尔 (Playfair)(1748-1819) 给出了现在教科书中所用的平行公设，即“通过不再直线 l 上的一点 P ，在 P 与 l 的平面上，只有一条直线不与 l 相交”。勒让德在大约 20 年的时间里研究过平行公设。他用到过的假设有“存在不同大小的相似三角形”、“过不共线的三点可以作一个圆”、“过 60° 角的内任一点可以作一条直线与角的两边相交”等等。但他发现这些假设都依赖于平行公设。他得到了一些不依赖于平行公设的结果，例如只要有一个三角形的内角和等于直角的二倍，则所有的三角形皆如此。萨凯里 (Saccheri)(1667-1733) 研究的路线是考虑而相邻内角都是直角的对角线相等的四边形，它证明了该四边形的其余两个内角必然相等，并且证明了它们不能是钝角，但无法证明它们不是锐角，只是在锐角的假设下得出了若干看起来不合情理的结论。寻求可以接受的公理来代替第 5 公设或由欧几里德的其他公理（公设）来证明第 5 公设的人数是如此之多而又如此徒劳无功，以至于达朗贝尔在 1795 年把平行公理问题称为“几何原理中的家丑”。

1763 年克吕格尔 (Klügel)(1739-1812) 首次提出：人们接受欧几里德的平行公理的的正确性是基于经验。他怀疑平行公理能够被证明。兰伯特 (Lambert)(1728-1777) 在克吕格尔的影响下研究平行公理，在 1766 年写了《论平行线》一书（ 1786 出版）。他证明了萨凯里考虑的钝角的情形得出的定理在球面几何中成立，于是他猜想锐角的假设下得到的定理应当适用于虚半径的球面。施魏卡特 (Schweikart)(170-1859) 是一个法学教授，业余研究数学。他在 1818 年将 1816 年写的一份备忘录送给高斯征求意见。在备忘录中他提出有两类几何，即欧几里德几何和三角形三内角和不是两倍直角的几何，他称后者为“星空几何”，因为这种几何可能在星空中成立。他的外甥陶里努斯 (Taurinus)(1794-1874) 继续研究星空几何，他证明了虚半径球面上成立的公式恰好就是在星空几何中所成立的。

克吕格尔和兰伯特最早认识到非欧几何存在，而关于这种几何异于欧几里德几何的的技术性推导的最大功绩应当归功于萨凯里。但是非欧几何所面临的最大的问题，即它是否像欧几里德几何一样可以描述物质空间，则是高斯首先获得了正确的观念。高斯并没有发表过有

关非欧几何的专门论著，他的观点出现在于若干朋友的通信中。 他担心这方面的研究成果会被人耻笑，正如 1829 年 1 月 27 日给贝塞尔的信中所说的：他怕波奥提 (Boeoti)（希腊的一个愚笨部落）人的嚷嚷（影射反对者）。高斯在微分几何的曲面研究中脱离空间的坐标，而用曲面自身的不变量来决定曲面，从而得到内涵的曲面上的几何。用曲面的测地线来代替欧几里德几何中的直线，得到的就是非欧几何（只要有非 0 的常曲率）。黎曼将高斯的想法推广到 n 维空间，更重要的是他不再把空间作为一个整体，而是局部地考察其几何性质。

罗巴切夫斯基 (Lobatchevsky)(1793-1856) 、同时还有波尔约 (Bolyai)(1802-1860) 和高斯关于非欧几何工作本质上相同。多数人认为罗巴切夫斯基和波尔约都受到过高斯的影响，他们二人的理论非常相似。罗巴切夫斯基的几何最容易用初等的语言叙述。

2. **罗巴切夫斯基几何**. 罗巴切夫斯基在 1826 年曾提出他的几何基础的观点，但该文稿已经丢失。 1829-1855 期间他发表了一系列关于他的几何的论文和专著。

设 AB 为给定的一条直线， C 为一个点， C 到 AB 的垂线长为 x 。定义 *平行角* $\pi(x)$ 满足

$$\mathrm{tg}\frac{\pi(x)}{2} = \mathrm{e}^{-x}.$$

在 C 处以 C 到 AB 的垂线为边向两侧作大小为 $\pi(x)$ 的角。这两个角的（非垂线）的两条边（所在的直线）就是与 AB 相交或不相交的直线的分界线，即在平行角之内的直线都与 AB 相交，其它的直线（包括平行角的边）都与 AB 不相交（即平行）。所以在罗巴切夫斯基几何中过直线外一点有无数多条直线与该直线平行. 他证明了在他的几何中平面三角形满足以下的基本公式：设 A, B, C 为欧几里德几何意义下的直角三角形的三个顶点，其对边分别为 a, b, c ，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{ctg}\pi(a) &= \mathrm{ctg}\pi(c)\sin A,\\ \sin A &= \cos B \sin\pi(b),\\ \sin\pi(c) &= \sin\pi(a)\sin\pi(b).\end{aligned}$$

值得注意的是：如果边长都是虚数，则这些公式在普通的球面三角中都成立。 在普通的球面三角中，三个角分别为 A, B, C 的三角形的面积是 $r^2(A+B+C-\pi)$ ，而在罗巴切夫斯基几何中这样的三角形的面积则是 $r^2(\pi-(A+B+C))$ ，也就是用 $\mathrm{i}r$ 代替球面三角中的 r 。他又推导出曲线 $y=f(x)$ 上的点 (x,y) 处的弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}y)^2 + \frac{(\mathrm{d}x)^2}{\sin^2\pi(x)}}.$$

由此可以算出半径为 r 的圆的周长为 $\pi(\mathrm{e}^r - \mathrm{e}^{-r})$ ，并证明圆面积为 $\pi(\mathrm{e}^{\frac{r}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{r}{2}})^2$ 。

罗巴切夫斯基和波尔约的工作在后来的 30 年中被人们所忽视，直到高斯关于非欧几何的通信和注记在他 1855 年去世之后被出版，人们才注意这个课题。

一个重要的问题是：罗巴切夫斯基几何的公理系统是否相容。由于这种几何对于虚半径球面成立，而实半径球面几何是欧几里德几何第一部分，所以高斯、波尔约和罗巴切夫斯

基都相信这些公理有相容性，但这只是一种信仰。相容性问题是 40 年后解决的。庞卡莱在 1882 年给出了罗巴切夫斯基几何在圆内的实现：过两点的直线是与圆周正交的圆弧，两点 P, Q 的距离由过它们的“直线”与圆弧的交点 P_a,P_b 与 P, Q 之间的弦的比所定义，即 $d(P_1, P_2) = \log(P_1P_b/P_2P_b)(P_1P_a/P_2P_a)$ ，两条直线的夹角就是通常的角。

另一个问题是罗巴切夫斯基几何是否仅仅是数学家的一种游戏。罗巴切夫斯基在他较早的的一篇论文中曾经说明他的几何有可能在距离大约为地球直径的 50 万倍的星际观察中被验证。 1922 年弗里德曼 (A. A. Friedman) 他发现了爱因斯坦方程的一个解，这个解意味着宇宙随时间膨胀。对于固定的时间，他所发现的度量给出罗巴切夫斯基空间。狭义相对论中的速度空间就是一个罗巴切夫斯基空间。此外，罗巴切夫斯基几何已被成功地运用于基本粒子的碰撞及核子研究的其他问题。对于数学本身，罗巴切夫斯基本人用将他的几何用于数学分析，得到了大约 200 个定积分的值。 1882 年庞卡莱将罗巴切夫斯基几何用于自守函数。

3. **高斯和黎曼的微分几何**. 欧拉早就知道用两个参数表示曲面上的点（即曲面可以写成参数方程 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ 的样子）。高斯从这个方程出发对于曲面作了系统的研究。由于

$$\mathrm{d}x = a\mathrm{d}u + a'\mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}y = b\mathrm{d}u + b'\mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}z = c\mathrm{d}u + c'\mathrm{d}v,$$

其中 a, a', b, b', c, c' 为 x, y, z 对于 u, v 的偏导函数，又有弧长 s 的微分 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ ，所以

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,$$

其中

$$E = a^2 + b^2 + c^2, \quad F = aa' + bb' + cc', \quad G = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

都是 u, v 的函数。高斯又对于曲面上的一点 (u, v) 处由 $\mathrm{d}u : \mathrm{d}v$ 和 $\mathrm{d}u' : \mathrm{d}v'$ 给出的两个方向之间的夹角 θ 得到

$$\cos\theta = \frac{E\mathrm{d}u\mathrm{d}u' + F(\mathrm{d}u\mathrm{d}v' + \mathrm{d}u'\mathrm{d}v) + G\mathrm{d}v\mathrm{d}v'}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\mathrm{d}u'^2 + 2F\mathrm{d}u'\mathrm{d}v' + G\mathrm{d}v'^2}}.$$

高斯又定义了曲面的（总）曲率 K ，并得到计算公式

$$K = \frac{1}{2H}\Big(\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{H}\frac{\partial G}{\partial u}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{2}{H}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{H}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial u}\Big)\Big),$$

其中 $H = \sqrt{EG - F^2}$ 。他注意到一个至关重要的事实，即曲面上的距离和角度只依赖于 E, F, G 。高斯在 1827 年的文章中寻找曲面的测地线。测地线满足 u 关于 v 的二阶微分方程，其系数都是 E, F, G 的函数。他还证明了以测地线为边的曲面上的三角形上曲率的积分等于三个角之和减去 π(即 $180°$) 。这是一个极其精美的定理。

高斯之前的曲面总是作为三维欧几里德空间中的图形，即用欧几里德度量来研究。但是高斯证明了曲面可以脱离三维欧几里德空间而从自身出发进行研究，曲面的所有度量性质完全被 $\mathrm{d}s^2$ 中的 $(u, v$ 的) 三个二元函数 E, F, G 所确定。如果将曲面作为一个二维空间，

以测地线作为直线，则得到的几何通常都是非欧几何，除非该曲面的的曲率是常曲率 0 。进一步说，即使对于同一个曲面图形，不同的 E, F, G 的选取也会得到不同的几何。例如罗巴切夫斯基几何中

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}y^2 + \frac{1}{\sin^2 \pi(x)}\mathrm{d}x^2$$

就规定了平面上的一种非欧几何（其中 (x, y) 是平面直角坐标系中点的坐标， $\pi(x) = 2\mathrm{arctg}\ \mathrm{e}^{-x}$），其总曲率是负的常数。

高斯为黎曼指定的格丁根大学教授资格演说的内容是几何基础。黎曼的演说在 1868 年发表，题目为《关于作为几何学基础的假设》。黎曼不仅把高斯的内蕴几何学从二维推广到 n 维，而且采用现代的微分几何的观念，即局部地研究几何（因为他感到对于一般的空间无法作整体研究）。对于一个 n 维流形，他假定距离的平方为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j,$$

其中 g_{ij} 是坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数， $g_{ij} = g_{ji}$, 并且 $\mathrm{d}s^2$ 对于所有的坐标取值都大于 0 。然后他定义流形上一条路径的长度为 $\mathrm{d}s$ 沿此路径的积分，两点之间的测地线为连接此两点的路径的长度的变分为 0 的路径（于是两点之间的测地线不一定唯一，例如球面上的对径点，甚至圆柱面上的任意两个连线不垂直于母线的点，它们之间的测地线有无穷多条）。测地线的方程满足 n 个（坐标函数关于 s 的）二阶常微分方程组成的方程组。黎曼又定义了 n 维流形的曲率，这是高斯关于曲面的总曲率的推广。黎曼还研究了 n 维流形在一点处的二维子流形的曲率之间的关系。黎曼要求流形的曲率不能取负值（这和爱因斯坦所用的几何不同）。他证明了一个流形是欧几里德空间当且仅当其曲率为 0 。

4. **度量化的射影空间**. 在黎曼之后很多人研究常曲率空间究竟有哪些可能。对于负的常曲率曲面，贝尔特拉米 (Beltrami)(1835-1900) 没有依赖黎曼的工作，独自将罗巴切夫斯基几何在三维欧几里德空间中部分地表出。将曳物线（即从其上一点作切线与一条给定的直线相交，此交点到切点线段长为定值的曲线。若定直线取为 z 轴，则曳物线在 x-z 平面上的方程为 $z = k\log\frac{k+\sqrt{k^2-x^2}}{x} - \sqrt{k^2-x^2}$, k 为该曲线与 x 轴交点到原点的距离）绕 z 轴旋转，在此旋转面（其曲率为 $-1/k^2$）上可以实现罗巴切夫斯基平面的一部分（将罗巴切夫斯基平面上的直线（测地线）对应到旋转面上的测地线）。但是无法将整个罗巴切夫斯基平面都对应到曳物线的旋转面上。后来希尔伯特证明了这种不可能性。而对于正的常曲率曲面，利布曼 (Liebmann)(1874-1939) 证明了这种曲面在三维欧几里德空间中只能是球面。在平面上实现非欧几何必须将欧几里德平面拓宽到射影平面. 这方面的开创者是拉盖尔和凯莱 (Cayley)(1821-1895)，而克莱因最后完成了全部工作。

射影几何出现于文艺复兴时代，其背景是研究绘画时不同位置的截景之间的关系。狄萨格 (Desargues) (1591-1661) 对于射影几何作了最重要的奠基性工作。

我们首先介绍凯莱的方法，在后面谈到拉盖尔的结果（作为凯莱和克莱因工作的特例）。事实上凯莱的工作与拉盖尔无关。

凯莱在射影平面上任意取定一个二次曲线，称之为“绝对形”，其方程为

$$F(x,x)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0,\qquad a_{ij}=a_{ji},$$

对应的双线型为

$$F(x,y)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_iy_j,\qquad a_{ij}=a_{ji}.$$

令

$$G(u,u)=\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}u_iu_j=0,$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式(即 $G(u,u)=0$ 为绝对形的线方程)。对于点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 和 $y=(y_1,y_2,y_3)$, 凯莱定义这两点之间的距离为

$$\delta=\arccos\frac{F(x,y)}{(F(x,x)F(y,y))^{\frac{1}{2}}};$$

定义坐标为 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 和 $v=(v_1,v_2,v_3)$ 的两条直线之间的夹角 ϕ 满足

$$\cos\phi=\arccos\frac{G(u,v)}{(G(u,u)G(v,v))^{\frac{1}{2}}}.$$

凯莱证明了：若取绝对形为 $x^2+y^2=0$, 则角度的公式将成为普通的欧几里德几何中的公式, 而这正是拉盖尔当初为了用射影概念给出欧几里德平面几何的度量性质时得到的结果。凯莱又将他的理论推广到三维的情形。

克莱因接受了凯莱的思想。但是他认为凯莱对于射影坐标的本质没有弄清楚。克莱因的工作体现了他对于几何学本质的认识 (即 1872 年提出的所谓“爱尔兰根纲领” (Erlangen Program)) 。我们用二维的情形来说明克莱因的作法。

在射影平面上无法用通常的欧几里德几何中的方法来定义两点之间的距离和二直线的夹角，因为这些定义依赖于点的坐标，从而使得定义出来的量不确定。但是射影几何中保留着一个基本的不变量，就是交比。对于同一直线上的四个点 A,B,C,D ，用 C 和 D 分别作为线段 AB 的分点，得到的两个比的比值就成为交比，记为 (AB,CD) ，即

$$(AB,CD)=\frac{AC}{CB}\Big/\frac{AD}{DB}.$$

或者用点的坐标来写，设 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 为点 X 的一个齐次坐标 (X 取 A,B,C,D, 相应地 x 和 $x_i(i=1,2,3)$ 分别取 a,b,c,d 和 a_i,b_i,c_i,d_i) 。如果 $c=\lambda_1a+\lambda_2b$, $d=\mu_1a+\mu_2b$ ，其中 λ_i,μ_i 满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$, $\mu_1+\mu_2=1$, 则

$$(AB,CD)=\frac{\mu_1}{\mu_2}:\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

对偶地，过同一点的四角直线的交比也是射影不变量。

克莱因取定射影平面上的一条实方程定义的二次曲线为绝对形。设 P_1, P_2 为两个点，以 Q_1, Q_2 记过 P_1, P_2 的直线与绝对形的交点，克莱因定义 P_1 到 P_2 的距离（向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的长度）为

$$d(P_1, P_2) = c\log(P_1P_2, Q_1Q_2),$$

其中 c 为常数。由于交比具有性质：若 P_1, P_2, P_3 共线，则 $(P_1P_2, Q_1Q_2)\cdot(P_2P_3, Q_1Q_2) = (P_1P_3, Q_1Q_2)$，所以 $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$ 。类似地，设 u, v 为两条直线，以 l, w 记过 u, v 交点的绝对形的两条切线，定义 u, v 的夹角为

$$\phi = c'\log(uv, lw),$$

其中 c' 为常数。

可以用射影坐标写出上面的长度和距离的表达式，设绝对形的方程与前面的 F, G 相同。以 F_{xy} 记 $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j$，以 G_{uv} 记 $\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}u_iv_j$. 如果 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $y = (y_1, y_2, y_3)$ 为点 P_1 和 P_2 的坐标， (u_1, u_2, u_3) 和 (v_1, v_2, v_3) 为直线 u 和 v 的坐标，则

$$d(P_1, P_2) = c\log\frac{F_{xy} + \sqrt{F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}}}{F_{xy} - \sqrt{F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}}},$$

$$d(u, v) = c\log\frac{G_{uv} + \sqrt{G_{uv}^2 - G_{uu}G_{vv}}}{G_{uv} - \sqrt{G_{uv}^2 - G_{uu}G_{vv}}}.$$

(通常取 $c' = \frac{\mathrm{i}}{2}$，以保证 ϕ 是实的，并且全中心角为 2π). 可以证明这两个表达式与凯莱的表达式。

克莱因利用这些表达式证明了：要导出罗巴切夫斯基几何，绝对形必须是实的，即其平面方程为 $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$，此时绝对形内部是整个非欧几何平面，直线就是绝对形的弦，过直线外的一点显然有无穷多条该直线的平行线；要导出黎曼的正的常曲率几何，绝对形必须是虚的，即其平面方程为 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$，此时非欧几何的点和直线是整个射影平面上的点和直线；而对于欧几里德几何则需要绝对形退化为 $x_1^2 + x_2^2 = 0$ 并且 $x_3 = 0$(也就是两个点 $(1, \mathrm{i}, 0)$ 和 $(1, -\mathrm{i}, 0)$)，此时的点和直线是整个射影平面上不包含 $x_3 = 0$ 的点和直线；。罗巴切夫斯基几何也称为双曲几何，黎曼的正的常曲率几何也称为椭圆几何。椭圆几何中过两点的直线可能不唯一（例如球面），这种几何称为二重椭圆几何。否则称为单重椭圆几何克莱因给出了单重椭圆几何的具体实现，即粘合对径点的半球面。

如果一个射影变换使得某绝对形（作为集合）稳定，则在该变换下距离与角度都保持不变（因为交比是射影不变量）。保持某个绝对形稳定的可逆射影变换的全体构成群，该绝对形所决定的几何中的图形此群中的元素作用下变为全等形。克莱因 1872 年被接纳进入爱尔兰根大学教授会时所作的演讲《近代几何研究的比较评述》（后来被称为爱尔兰根纲领）的主要观念就是：任何一种几何都由变换群所刻画；每种几何所要做的事情实际上就是考虑其变换群下的不变量；一个几何的子几何是在原来变换群的子群下的一族不变量；一个几何的不变量是其子几何的不变量。从这样的观点出发，克莱因考虑过（双有理同构下的）三维代数几何和（同胚下的）拓扑学。当然并不是所有的几何都能纳入克莱茵的分类中（例如现今的代数几何和微分几何），但是他的观念确实能给大部分几何提供一个分类方法。

20 世纪的爱因斯坦 (Einstein)(1879-1955) 在广义相对论中用以刻画他的四维时 - 空空间的是黎曼度量

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j,$$

其中 x_4 表示时间， g_{ij} 反映物质的分布。这个度量（涉及到长度、时间、质量以及其它的物理量）由于观测者的不同而变化。但是自然界的规律应当对于所有（作任意相对运动）的观测者都是同样的，所以这些规律就是数学中的不变量。爱因斯坦 的不同于牛顿力学的相对论在麦克斯韦的电磁场方程之后又一次展示了数学的逻辑演绎得到的结果走到人们的经验之前的奇妙现象。