微分方程

微分方程是为了研究物理、天文中出现的问题而自然出现的。最初的问题与弹性有关，主要是（垂直、水平）梁在外加负荷下的形状的改变（被伽利略所研究）。在弹性的研究中中一个重要的物理定律是虎克定律。后来人们研究悬链线的形状、弦的震动、悬链的摆动、单摆的运动等。

摆的问题特别引起人们的兴趣，因为通过摆的周期与重力加速度的关系可以推断地球是否为扁的。牛顿就通过不同地点的摆的周期的变化推断出地球的赤道半径比极半径多 $1/230$（比现在的结果多了 30%），后来有的家庭和探险队进行实地测量（赤道与极地附近 1° 纬度和经度对应的地面路程），结果都没有牛顿的理论推导的结果好，有的测量结果甚至说地球是尖的。至于地球是否为椭球（如果是椭球，应当是是哪一种椭球）都没有结论。地球形状的重要性不仅在于此问题的本身，它还密切地联系着万有引力定律。单摆导致微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$(其中 θ 为摆角， t 为时间， g 为重力加速度， l 为摆长)，但是 18 世纪的分析学解不了这个方程。惠更斯 (Huygens)(1629-1695) 引进了摆线，在几何上解决了这个问题。另一个备受人们关注的课题是天文学，主要是行星绕日运行（二体问题）与月球在地球与太阳的引力下的运动（三体问题）。月球的运动对于航海（当时船舶的所处的位置的经度要靠月亮的方位决定）。

一. 常微分方程

人们首先遇到的是常微分方程，后来的偏微分方程以至微分几何和变分法都对于常微分方程提出了新的课题，促进常微分方程的发展。

1. **一阶常微分方程**. 大伯努利是求解常微分方程的先驱者之一。 1690 年他解决了 *等时问题* ，此问题是：求一条曲线，使得质点在重力作用下从曲线上的任一点出发沿曲线下滑到达底部的时间与起点的位置无关。他列出了一个简单的曲线的 x 、 y 坐标满足的一阶微分方程，解得该曲线为摆线的半支 (旋转 90°) 。他提出 *悬链线* 问题。伽利略曾猜想悬链线应当抛物线，事实上如果水平线密度均匀时才是抛物线，但悬链线的密度是假定为相对于线的长度均匀的。小伯努利在次年（象今天的力学中所讲的一样）列出了悬链线满足的微分方程并求出了悬链线方程（莱布尼兹用微积分也得到了同样的结果）。他为自己强于哥哥而感到莫大的骄傲。 1691 至 1692 年间伯努利兄弟推广了悬链线问题，解决了非均匀密度的无弹性软绳、等厚度的弹性绳、各点所受的力都指向同一点的绳在悬挂时的形状问题。小伯努利还解决了非均匀密度的无弹性软绳情形的反问题，即由悬链线的形状求线的密度。大伯努利证明了一个重要的结果：在两端固定的定长的所有曲线中悬链线的重心最低。

莱布尼兹和小伯努利在 1694 年提出 *等交曲线* 问题，即对于给定的一族曲线，求与该曲线族的每条曲线都交出相同角度的曲线。如果规定角度为直角，就与光在非均匀介质中的传播密切相关（此时所求的曲线称为正交轨线）。大伯努利的学生赫尔曼 (Hermann)(1678-1773) 在 1717 年给出了一个法则：曲线族 $F(x,y,c)=0$(c 为参数) 的正交轨线满足微分方程 $F'_y\mathrm{d}x=F'_x\mathrm{d}y$ （莱布尼兹就有这个想法）。

小伯努利后来解决了 *抛射体* 在阻力正比于速度的任一方幂的介质中的运动问题。

18 世纪已经有了 *恰当微分方程* 的概念，即方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 中的

$M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 满足 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ 。恰当方程总是可以用积分求解的。当时也已经知道：如果一个方程不是恰当的，常常可以乘上一个积分因子使之变为恰当方程。

通常一个微分方程有依赖于参数的许多解，叫作通解。泰勒发现有的方程除通解之外还有解，称为 *奇解* 。克莱罗 (Clairaut)(1713-1765) 、欧拉、达朗贝尔、拉格朗日都研究过奇解。拉格朗日说明了：从几何上看，奇解是通解的包络。

上面说到的都是一阶常微分方程。

2. **二阶以上的常微分方程**. 二阶方程最早出现于大伯努利对于船帆在风力作用下的形状问题，其方程是 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}=(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s})^3$($s$ 为弧长)。小伯努利证明了此问题与悬链线问题在数学上是相同的. 后来在对于两端固定的弦在震动过程中的形状的研究中也出现了二阶方程，得到的解是正弦曲线。摆(包括在阻尼介质中运动的摆)、一端固定的细绳的震动、纵波的传播等都遵从二阶方程。

黎卡提方程 $y'=a_0(x)+a_1(x)y+a_2(x)y^2$ 是一阶非线性微分方程，可以用来将二阶方程化为一阶方程。

小伯努利研究一端固定的弹性横梁的横向位移问题导致 4 阶常系数线性微分方程。欧拉研究了一般的 *常系数齐次高阶线性微分方程* 。他用指数变换得到特征方程，从而完整地解决了这种方程(共有阶数多个彼此无关的通解)。接着欧拉又对于 *非齐次高阶常系数线性微分方程* 通过两端乘以指数函数 $\mathrm{e}^{\alpha x}$ 来降低方程的阶数，归纳地解出了这种方程。

拉格朗日向 *变系数线性微分方程* 迈出了第一步。他用乘以待定函数的方法降低方程的阶(得到的关于待定函数的方程后来被称作原方程的伴随方程)。后来勒让德创造了常数变异法。

多个微分方程联立就是 *微分方程组* 。 *三体问题* 乃至 n 体问题导致的微分方程组是不能精确解出来的。研究这种方程组有两个方向，一是求近似解，二是探求某些这种运动的定理, 例如牛顿在他的《原理》中证明了了 n 体质量中心在一条直线上作匀速运动. 三体问题有一些精确的结果，应当归功于勒让德，他是天体力学大师之一。他得到了三体运动的初始条件非常特殊时(例如三体的初始位置是等边三角形的三个顶点或共线的三点)的精确解。近似计算就是要计算摄动(偏离圆锥曲线的运动)，在这方面做出最大贡献的是拉普拉斯。

3. **特殊函数**. 在很多场合微分方程的解无法用初等函数表达，这时级数就成了最有力的工具。牛顿甚至用级数解一阶微分方程(例如 $\dot{y}=2+3x-2y+x^2+x^2y$)。级数解的一个重要产物是造就了一系列的特殊函数，它们看起来要比通常的初等函数复杂，但是同样有很多好的性质以及广泛的应用。从微分方程的角度看，初等函数满足的微分方程是一阶的，而特殊函数满足方程是二阶的。这些函数可以看作是初等函数的拓宽，扩大了经常用到的函数的范围。一类常见的特殊函数包括贝塞尔函数、诺伊曼 (Newmann)(1832-1925) 函数、汉克尔 (Hankel)(1839-1873) 函数(分别称为第一、二、三类柱函数)，他们都是贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

的解(该方程早先曾被小伯努利的两个儿子和欧拉(在研究薄膜震动时)研究过，但系统的研究是贝塞尔在研究行星运动时所作的)，其中 n 是复参数。对于给定的参数 n ，贝塞尔

函数是

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\Big(1-\frac{x^2}{2^2\cdot 1!(n+1)}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!(n+1)(n+2)}-+\cdots\Big),$$

其中 $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{z-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 为（欧拉引入的） Γ 函数。当 n 不是整数时，贝塞尔方程的基础解为 $J_n(x)$ 和 $J_{-n}(x)$ 。但是当 n 是整数时， $J_n(x)$ 和 $J_{-n}(x)$ 线性相关，诺伊曼函数

$$N_n(x)=\lim_{t\to n}\frac{1}{\sin t\pi}(J_t(x)\cos t\pi-J_{-t}(x))$$

就是贝塞尔方程的另一个基础解。汉克尔函数有两种： $H_n^{(1)}(x)$ 和 $H_n^{(2)}(x)$ ，都是 $J_n(x)$ 和 $N_n(x)$ 的线性组合：

$$H_n^{(1)}(x)=J_n(x)+\mathrm{i}N_n(x),\qquad H_n^{(2)}(x)=J_n(x)-\mathrm{i}N_n(x),$$

它们在应用上更方便。另一类特殊函数是所谓“球函数”，它们是 微分方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

的解。勒让德和海涅给出了两类球函数（勒让德的解是具有“正交性质”的多项式）。由欧拉发现、高斯详细研究的超几何级数 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ 是方程

$$x(x-1)y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y'-\alpha\beta y=0$$

的解.这种级数包括了当时所知道的几乎所有的初等函数和特殊函数。1839 年拉梅 (Lamé)(1795-1870) 引入了椭球调和函数，它是 微分方程

$$(\rho^2-h^2)(\rho^2-k^2)\frac{\mathrm{d}^2E(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho(2\rho^2-h^2-k^2)\frac{\mathrm{d}E(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+((h^2+k^2)p-n(n+1)\rho^2)E(\rho)=0$$

的解（其中 h^2, k^2 是参数， p, n 是常数）。柳维尔 (Liouville)(1809-1882) 和海涅给出了此方程的另一个解，称为第二类拉梅函数。后来还有马蒂厄 (Mathieu)(1836-1890) 的椭圆柱函数、韦伯 (Weber)(1842-1913) 的抛物柱函数等等。后来有若干专著论述这些函数。

4. **满足边界条件的二次常微分方程**. 斯图姆 (Sturm)(1803-1855) 和柳维尔建立了满足边界条件的二阶常微分方程一般理论。他们证明了满足一定边界条件的齐次微分方程

$$L(x)y''+M(x)y'+\lambda N(x)y=0$$

（其中 $L(x)$, $M(x)$, $N(x)$ 是 x 的连续函数， λ 是参数）在 λ 取大正数 λ_n 时有解，这些解具有某种正交性质，它们组成的级数可以表示所有具有较好性质的满足边界条件的函数（类似于傅立叶展开时的三角函数）。

5. **存在唯一性定理**. 19 世纪的数学家们发现大量的微分方程无法求解。于是开始考虑给定初始和边界条件的微分方程的解是否存在的问题。最主要的结果是由哥西证明的定理，即如果 $f(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在包含某点 (x_0,y_0) 的一个邻域（矩形区域）内是实连续函数，则 $y'=f(x,y)$ 有满足 $y(x_0)=y_0$ 的唯一解。利普希茨 (Lipschitz)(1832-1903) 将哥西的条件 " $f'_y(x,y)$ 连续" 减弱为 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<K|y_1-y_2|$（ K 为某常数）。哥西又给出了判别 $y'=f(x,y)$ 有解的第二个方法，即优势函数（亦称控制函数）法。用此方法可以证明：若 $f(x,y)$ 在点 $P=(x_0,y_0)$ 的一个邻域内解析（即可以展成幂级数），则此方程有满足 $y(x_0)=y_0$ 的唯一解。哥西又将存在唯一性的第二个方法推广到一阶常微分方程组 $y'_k=f_k(x,y_1,\cdots,y_n)$ $(k=1,2,\cdots,n)$.

6. **自守函数**. 一个常微分方程 $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_n(x)=0$ 如果某些 $p_i(x)$ 有极点，黎曼和福克斯 (Fuchs)(1833-1902) 发现它的（复函数）解不唯一。当解 $y=y(x)$ 的自变量 x 在系数的极点附近环绕时，解函数要改变为 n 个特解得线性组合。这些线性组合的系数构成的 n 阶矩阵的全体组成一个群，称为此方程的单值群。庞卡莱和克莱因 (Klein)(1849-1925) 特别研究了超几何方程 $\eta''(z)+p_1(z)\eta'(z)+p_2(z)=0$（其中系数 $p_1(z)$ 和 $p_2(z)$ 为 z 的有理分式），他们证明了当超几何方程中的参数 α 、 β 、 γ 为实数时，此方程的任二特解的商 $\zeta(z)=\frac{\eta_1(z)}{\eta_2(z)}$（它满足一个三阶微分方程）将复上半平面单值地保形映射到一个由圆弧组成的曲边三角形。 $\zeta(z)$ 的反函数 $z=z(\zeta)$ 就是所谓的 "自守函数"，此函数在超几何方程的单值群的作用下不变（即对于单值群中的矩阵（是行列式的绝对值为 1 的实二阶矩阵）

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

有 $z\left(\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}\right)=z(\zeta)$ ）。自守函数已经推广为在一般的所谓 "福克斯群" （粗略地说，二阶实特殊线性群的离散子群）所用下不变的函数。注意：周期函数以及椭圆函数都是在特殊的群（整数加法群和以及两个整数加法群的直和）作用下不变的函数，所以自守函数是周期函数以及椭圆函数的本质性的推广。庞卡莱进一步将福克斯群推广到复数域，引入所谓 "克莱茵群"，再此群作用下不变的的函数称为 "克莱因函数"。自守函数在物理和数学的很多分支中有广泛的应用。

二. 偏微分方程

偏微分方程并不是作为常微分方程在逻辑上的推广而出现的，它象常微分方程一样，完全是来自于力学、物理、天文等方面的实际问题。人们逐渐发现，从某些表面上完全不相干的实际问题中抽象出来的微分方程却基本上一样的，例如刻画弦的震动、声音的传播、电磁场等的微分方程都差不多。

1. **波动方程**. 波动方程起源于弦的震动。如果只考虑弦上一个固定的点的运动状况，就得到一个二阶常微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-Kx$; 如果考虑在某一时刻弦的形状，也得到一个类似的方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-ky$（这两个方程中的 x 都表示弦上一点的横坐标，即到该点到弦的一个端点

的距离，t 表示时间，y 表示弦上坐标为 x 的点相对于平衡位置的位移，K 和 k 是由弦的性质决定的常数）。这是小伯努利开始的考虑。接着他同时考虑 x、y、t 之间的关系，即视 y 为 x 和 t 的函数，就导致偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

其中 a 为常数。这就是所谓"一维波动方程"，它的解是 t 的周期函数。这里的弦的两端固定，但是弦在初始时刻 $t=0$ 时的形状对于方程的解有重要的影响。

关于弦的初始形状可以是甚么样子发生了长时间的（18 世纪 60 和 70 年代）激烈的争论。达朗贝尔认为初始条件 $y(0,x)(=y(t,x)|_{t=0}) = f(x)$ 必须是二次可微的，欧拉则认为 $f(x)$ 很任意，甚至可以是不连续的（他的不连续函数用现在的语言说是指有间断导数的连续函数）。他意识到对于"不连续"函数的考虑将分析学带入一个全新的领域。小伯努利的儿子丹尼尔 - 伯努利坚持认为初始条件一定可以表为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中 a_n 是常数，l 是弦的长度。欧拉反对丹尼尔 - 伯努利，主要原因是：丹尼尔的表达式只能表示奇函数。达朗贝尔也批评丹尼尔，他不相信所有的奇周期函数（即使足够多次可微）都能表示为伯努利的形式。他也反对欧拉的不连续曲线（实际上达朗贝尔要求 $f(x)$ 二次可微对于解波动方程是重要的）。不久，年轻的尚不知名的拉格朗日也参加了争论，他认为无需对初始曲线加限制，因为在求解过程中只用到了积分。但是他忽略了积分与无穷求和交换次序时的条件。到了 1779 年，拉普拉斯也参加进来，站在达朗贝尔一边。这场争论的中心是三角级数所能表示的函数的范围究竟有多大。这个问题一直到傅立叶的工作（1822 年）之前一直没有解决。

在上面谈到的争论的同时，波动方程被推广到复杂的情形，这些情形来自对于乐器物理结构的研究、声音的传播以及水力学问题。1762 年欧拉着手研究粗细可变的以及密度不均匀的弦的振动问题，这导致形如

$$\frac{1}{c(x)^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

的方程。他说，对于一般的 $c(x)$，求此方程的通解超出了微积分的能力。他对于特殊的质量分布的弦对应的方程给出了解答，还在粗细分别为 m 和 n 长度分别为 a 和 b 的两段弦连接起来的情形证明了震动频率应当满足方程 $m\mathrm{tg}\frac{\omega a}{m} + n\mathrm{tg}\frac{\omega b}{n} = 0$（此方程的解称为该问题的特征值（或本征值），在偏微分方程中有基本的重要性）。达朗贝尔也研究了粗细可变的弦的振动问题。他在解上述微分方程时使用了分离变量法，即令 $y = h(t)g(x)$，代入原方程后得到关于 $h(t)$ 和 $g(x)$ 的两个二阶常微分方程。这种方法是解偏微分方程的一种基本方法。

欧拉在 1759 年第一个研究了二维偏微分方程，他考虑的是鼓的震动，方程为

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

其中 (x,y) 为鼓上一点的坐标， t 为时间， z 为点 (x,y) 在时刻 t 的垂直位移， c 为常数。首先他考虑的是矩形鼓，然后考虑圆形鼓。此时他将上面的方程化成极坐标的形式，得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}.$$

他用 $z=u(r)\sin(\omega t+A)\sin(\beta\phi+B)$ 试解，得到 $u(r)$ 满足的常微分方程

$$u''+\frac{1}{r}u'+\Big(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\beta^2}{r^2}\Big)u=0.$$

这就是贝塞尔方程。然后他解出了全部第一类柱函数。

1759 年欧拉在柏林科学院宣读了了研究声音在空气中传播的三篇论文。在其中的第二篇中给出了二维和三维的波动方程，后者为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Z^2},$$

其中 c 是常数， X, Y, Z 是空间的三个两两正交的方向， $v=\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial y}{\partial Y}+\frac{\partial z}{\partial Z}$ 是位移 (x,y,z) 的散度（ x 、 y 、 z 是波在 X 、 Y 、 Z 三个方向上的位移分量）。拉格朗日也研究了同样的问题，得到的结果与欧拉相仿，但推导的细节有很多不同。

丹尼尔 - 伯努利、欧拉和拉格朗日写了大量的关于乐器所发的音调的论文，所涉及的乐器有长笛、管风琴、各种形状的喇叭、小号、军号等等。

欧拉在研究铃声和杆的震动时得到过四阶偏微分方程，但没能做进一步的研究。

波哇松和黎曼对于一般的三维和二维波动方程的初值问题分别作出解答，但他们用的方法不同，波哇松用的是球坐标，而黎曼则用格林定理。

2. **位势理论**. 位势理论是在研究一个物体对于一个质点的万有引力过程中产生的，所说的物体形状可以很一般，密度也可以很不规律。如果用 ξ,η,ζ 表示物体内的一般点在空间直角坐标系 x-y-z 下的坐标，则在 (x,y,z) 处的单位质量的质点所受的万有引力在 x 方向上的分量为 $f_x=-k\iiint\rho\frac{x-\xi}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$ ，其中 k 为万有引力常数， ρ 为物体在点 (ξ,η,ζ) 处的密度， r 为 (x,y,z) 到 (ξ,η,ζ) 的距离。质点所受的万有引力在 y 、 z 方向上的分量为 f_y 、 f_z 类似。这些积分通常是算不出来的。可以同时研究这三个分量。为此只要令

$$V(x,y,z)=\iiint\frac{\rho}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

则有 $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{k}f_x$ 等等。 $V(x,y,z)$ 就称为 *势函数* 。这个势函数通常也是无法用积分算出来的。但是 $V(x,y,z)$ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

这个方程就叫作 *位势方程* ，也叫作拉普拉斯方程。事实上丹尼尔 - 伯努利和欧拉都遇到过这个方程。拉普拉斯将位势方程用球坐标表示出来，将 V 设为距离 r 的负方幂的无穷级数

（每一项的系数都是球坐标中的两个角度的函数），他证明了这些系数可以表为含有勒让德的球函数的三重积分。借助于勒让德的球函数的正交性质，就可以计算这些系数，从而得到 V 。事实上拉普拉斯只对于一些特殊的物体计算过势函数。

拉普拉斯认为位势方程也适用于物体内部，波哇松纠正说，在物体内部方程的右端不是 0 ，而是 $-4\pi\rho$（后来高斯严格地证明了这一事实）。波哇松将位势理论用于静电学，推导出导体表面电荷的分布规律。他的基本原则是：导体内部任一点处的静电合力为 0 。

格林 (Green)(1793-1841) 是自学成材的英国数学家，他企图完全用数学的方式论述静电磁学。 1828 年他出版了一本私人印刷的小册子《关于数学分析应用于电磁学理论的一篇论文》，其中的主要定理是：设 U, V 为 x, y, z 的任意两个连续函数，他们的导数在给定的物体内的任何点处都不是无穷，则

$$\iiint U\Delta V \mathrm{d}v + \iint U\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}\sigma = \iiint V\Delta U \mathrm{d}v + \iint V\frac{\partial U}{\partial n}\mathrm{d}\sigma,$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子，即 $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ， n 是物体表面指向内部的法方向， $\mathrm{d}v$ 是体积元， $\mathrm{d}\sigma$ 是面积元。这个定理也被俄国数学家奥斯特洛格拉德斯基 (Ostrogradsky)(1081-1861) 独立证明过。根据这个定理，格林可以用 V 在物体表面上的取值和满足一定条件的容易找到的函数 U（即所谓“格林函数”）来确定 V 。势函数的存在性在物理上是不成问题的，严格的数学证明要用到“狄里赫勒原理”，该原理说：给定一个闭曲面 S 上的连续函数 f ，则在 S 的内部区域 T 和外部区域 T' 上都具有二阶连续导数并且在 S 上等于 f 的函数 U 中，使得狄里赫勒积分 $\iiint \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right)\mathrm{d}v$ 取最小值的函数必然满足位势方程。（这个原理曾因积分的下确界不一定存在而被质疑，后来希尔伯特给出了严格的证明。）

3. **热传导方程**.

傅立叶在研究热方程的过程中建立了三角级数理论，为关于波动方程的初始条件的争论作了终结。

各向同性的物体内的温度 T 作为位置的坐标 x, y, z 和时间 t 的函数满足微分方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = k^2\frac{\partial T}{\partial t}.$$

此方程称为（三维）热传导方程。傅立叶解决了一些特殊热传导问题。其实一维的情形就已经体现了傅立叶的方法。他假定一个两端温度为 0 绝热状态下的长度为 l 的柱轴。给定了 $t = 0$ 时的温度分布，求时刻 t 的温度分布。此时的方程为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2\frac{\partial T}{\partial t},$$

满足边界条件 $T(0,t) = T(l,t) = 0$ 和初始条件 $T(x,0) = f(x)$ 。傅立叶用了分离变量法，令 $T(x,t) = \phi(x)\psi(t)$. 代入原方程得到 $\frac{\phi''(x)}{k^2\phi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}$. 他证明了这个比值是常数，记为 λ. 于是有 $\phi(x) = b\sin(\sqrt{\lambda}kx + c)$. 根据边界条件 $\phi(0) = 0$ 得到 $c = 0$. 再用另

一个边界条件 $\phi(l)=0$ 就知道 $\sqrt{\lambda}$ 必是 $\frac{\pi}{kl}$ 的整数倍。所以 λ 可取 $\lambda_\nu=\left(\frac{\nu\pi}{kl}\right)^2$ （ν 为整数）。由于 ψ 为指数函数，而 λ 一定是某个 λ_ν ，所以

$$T_\nu(x,t)=b_\nu \mathrm{e}^{-(\frac{\nu\pi}{kt})^2 t}\sin\frac{\nu\pi x}{l}.$$

一般的解必定是 $T_\nu(x,t)$ 的线性组合（可能有无穷多项）。而 $T(x,0)=f(x)$ ，所以必有

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\frac{\nu\pi x}{l}.$$

于是出现了自然的问题： $f(x)$ 能表成三角级数吗？ b_ν 能确定吗？

傅立叶动用了马克劳林级数将 b_ν 变成无穷多个可以递推求解的线性方程的解（这里他用到了 $f(x)$ 的解析性）。又经过大胆的推导得到欧拉早已得到的结果 $b_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin\nu x\mathrm{d}x$ （取 $l=\pi$ ）。他发现： b_ν（作为积分）的存在性对于 $f(x)$ 的要求很少，所以他断言： $f(x)$ 可以取所有的函数。这又回到了丹尼尔 - 伯努利的观点。他的关键性的观念是：不管在区间 $[0,l]$ 之外怎样，在这个区间内他的三角级数总是等于 $f(x)$ 的。事实上傅立叶本人从未证明过 $f(x)$ 的任意性。他的观念很快被波哇松所采纳。

4. **偏微分方程组**. 一阶偏微分方程组最早出现于欧拉关于流体动力学的研究中。对于理想的（无黏性的）可压缩或不可压缩的流体的流动，根据牛顿第二定律，欧拉得到了由三个一阶偏微分方程组成的方程组。

19 世纪对于科学和技术带来巨大冲击的最壮观的胜利就是麦克斯韦 (Maxwell)(1831-1879) 在 1864 年发现的电磁学规律，该规律是由四个一阶偏微分方程组成的方程组（称为麦克斯韦方程）导出的。这四个方程将电场强度、磁场强度、介电系数、磁通率、电核密度以及时间和空间坐标联系起来。麦克斯韦预言了电磁波的存在，并推断出电磁波以光速传播，他还认为光是一种电磁波。不久赫兹在实验室中制造出了电磁波。这是理论走在实际前面的罕见的实例，是数学推理的可靠性的一个有力见证。