公元前 10000 年到 3000 年多数原始文明社会（即定居了的、建立家园、靠农牧业为生的）只有 1 、 2 和 “许多” 这样的数字概念。关于几何只知道直线圆和角（来源于臂和腿：例如 “股”）用途：交易、田地面积、陶器和花布上的几何图案、计时等。

古埃及

1. 居住在尼罗河一带，分为上、下埃及。

2. 时间：公元前 3500 年到公元前 332 年希腊亚历山大大帝占领之前基本上没有大的改变。

i) 考古文物（草片书）表明公元前 1700 年已经有了象形数字（以 10 为底，不是进位制）。

ii) 加减法：添上或划去一些记号，乘法为叠加（象二进制），除法也象二进制，分数都写成（分子为 1 的）单分数之和（依据列表），进而作四则运算。

iii) 代数：求解一次方程，特殊的二次方程 $(ax^2 = b)$ 。没有成套的记号。

iv) 几何：不是独立学科，每年尼罗河上涨后要重新划分土地。不准确的面积公式：四边形的面积为对边的平均数的乘积，三角形的面积为两边的平均数乘以第三边的一半。

算立方体、柱体、锥体体积。有正确的截锥体体积公式：上、下底为边长 a, b 的正方形、高为 h 的截锥体体积为 $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ 。

所有解题的法则不用记号，而是用语文表达 。

v) 天文学：依据天狼星的位置（公元前 4241 年就已）将一年定为 365 天。天狼星的位置重复出现的周期是 $365\frac{1}{4}$ 天。该日天狼星在太阳升起之前能较长的时间被看到，也是尼罗河水开始上涨的日子，定为一年的开始。

评论 ：有整数和分数的记数法和算术，代数、几何中有经验公式，相信这些经验是正确的，没有想到它们应当有理论依据。没有有意识的抽象思维（没有抽象出一般的解题法则）。应用于实际问题。

巴比伦

1. 居住在现在伊拉克一带。

2. 时间：考古文物表明公元前 1000 年已经有了数字（楔形文字，以 60 进制为主个别地方与十进制混用）[今天我们仍有此用法：“角”、“时间”、英制长度等] 。和简单的分数（作为整体）和简单的运算，没有 0（以至于一种写法可能有多种解释）。

较高级的发展是在公元前 600-300 年。

i) 公元前 330 年之后用特定符号将数字分开（不再混淆）。

ii) 有了加、减、乘法，除法：乘以分数（只用 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ 的乘积，其他分数用这三个分数的乘积的近似值代替（列了近似值表））。（一直用到 16 世纪文艺复兴时代的欧洲，（例如托勒枚就用））。

也有平方、平方根、立方、立方根表（算出 $\sqrt{2} \sim 1.414213$ 不是 1.414214 实际是 1.414213562... ））。求宽 h 高 w 的矩形对角线 $(h>w)d \sim h+\frac{w^2}{2h}$(参照 $\sqrt{h^2+w^2}=h(1+\frac{w^2}{h^2})^{\frac{1}{2}}$）。

iii)　代数：求一个数使得它与它的倒数的和 = 给定数（即二次方程）；求 5 、 10 个变量 5 、 10 个特殊方程的解（变量被称为长、宽、面积等，问题与解答都用语文叙述，只说解题步骤不说道理）。

特殊问题中算出了等差数列与等比数列的和，几批勾股数。

iv)　几何：不是独立学科，只是为划分土地或算建筑用砖等实际问题。面积与体积有固定算法（公式），但图形不清。圆面积 = 周长平方 /12(相当于取 $\pi=3$)，算六边形与外接圆周长之比时相当于取 $\pi=\frac{1}{8}$ ）。

v)　天文学：日、月运动观察，由列表中的数据推算日、月出现在特定位置的时间，月蚀的时间推算得很准（误差在几分钟之内）。制定日历（阴历），将圆分为 360 度。

评论：解方程是代数的开端；对于整数和分数有系统的写法，使得能将算数的水平提到相当高的阶段，用于解决实际问题特别是天文学的问题。代数、算术、几何中的算法步骤、法则根据物理事实，边算边改，见不到逻辑推理。

希腊

1. 居住在现在的希腊、意大利南部、西西里、北非一带。

2. 时间：文明可以追述到公元前 2800 年。创立了拼音文字。公元前七世纪有了草片纸。

数学分为两大时期：公元前 600-300 年（古典时期）和公元前 300 年 - 公元 600 年（亚历山大时期），以数学与其他学科的关系为依据。

古典时期

1. 爱奥尼亚 (Ionian) 学派（ Thales[tháles], 公元前 625?-574? ）. 最早认识到自然界实质，即组成自然界的本质不变的原始物质存在。最早的无神论者。（而希腊的宗教中充满了神话）对于数学本身没有大的成就。

2. 毕达哥拉斯 (Pythagoras)（公元前 585-497 年）学派. 最早研究抽象概念，认为数与图形是思维的抽象（埃及人的直线是拉紧的绳子或田地的一边）。

认为数（指整数）是宇宙的要素（相当于原子），是几何上的点的很小的扩大。常把数比做沙滩上的沙子。

关于数的结果：

三角形数正方形数以及多边形数（等差级数的和）。

部分勾股弦三元组数的公式（ m 为奇数， $m, (m^2-1)/2, (m^2+1)/2$ ）。（一般地应为 $2mn, m^2+n^2, m^2-n^2$ $(m>n>0)$ ）

发现并定义了素数。

比例（算术平均、几何平均、调和平均（倒数的算术平均的倒数）、完全比例（一数：算

术平均 = 调和平均：另一数），称为音乐比例）

$\sqrt{2}$ 与 1 不可共度的证明（与现代的证明一样）。这导致希腊数学的中心问题：数与线段的长度能等同吗（当然在长度单位可以任意选区的前提下）？他的作法是：在几何中不再考虑不可共度的量。

关于几何

最大的贡献是毕达哥拉斯定理。

证明了关于三角形、平行线、多边形、圆、球、正多面体的一些定理。

三角形三内角和为 180 度。

平面可被正三角形、正方形、正六边形填满。

开创面积应用问题（给定面积的与给定多变性相似的图形作图问题）。

疑问：似乎对于大多数结果在开始没有给出证明（而是根据特例确认他们的结果），这有违于希腊人的数学观念（希腊人对数学的最大贡献是坚持一切数学结果必须根据明确的公理用演绎法推出）。该学派的晚期成员可能证明了这些结果。

3. 埃利亚 (Eleatic) 学派. 兹诺 (Zeno)(公元前 490 ？ -429 ？) 提出四个悖论（与时间和空间的连续性有关）。一是“运动不存在”，二是神行太保与乌龟赛跑，三是流矢不动，四是游行队伍悖论。

4. 诡辩 (Sophist) 学派. 雅典（公元前 479 年后希腊的商业中心）的第一个学派。研究三大作图难题。提出割圆线用于三等分角。将三等分角归于求一个线段与其二倍的二次比。

5. 伯拉图 (Plato)(公元前 428-348) 学派. 是当时最有学问的人。公元前 387 年在雅典成立学院，很像现在的大学。一直到 529 年被（信奉基督教的）罗马王因“传授异端邪说”而封闭。

他不是数学家，但热心于数学，深信数学对于哲学和了解宇宙的重要作用。受毕达哥拉斯学派很大影响。他鼓励数学家们钻研数学，公元前 4 世纪的所有重要的数学工作都是他的朋友和学生做出来的。

他认为数学概念是抽象物，数和几何概念与任何具体事物不同。数学概念不依赖于经验而有其本身的实在性。他把观念世界与物质世界严格区分开来。观念世界是独立的永恒的，是宇宙的真实存在。物质世界中的关系是会改变的，因而不是绝对真理。数学是绝对真理的一部分，它不因时间而改变。物理科学、力学等就不同，它依赖于感觉，而不是纯粹思维的产物。

他关心推理的方法论，有人将推理的直接证法（分析法）和间接证法（归谬法）归功于他。

他的学派在数学上的最大成就时发现并研究圆锥曲线（出于天文学的需要）。研究圆锥曲线的另一个动力是立方倍积问题：人们在此之前已经知道此问题相当于求 x, y, 使得

$$a : x = x : y = y : 2a$$

(则有 $y = x^2/a$, $y^2 = 2ax$, 于是 $x^4/a^2 = 2ax$, 即 $x^3 = 2a^3$.) 这等价于求两条抛物线 $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$ 的交点。他们用平面垂直地截三种圆锥面得到圆锥曲线。

6. 欧多可索斯 (Eudoxus)(公元前 408 ？ -355 ？) 学派. 古埃及最大的数学家（仅次于后来的阿基米德）首次证明了锥体体积是相应柱体的 $1/3$ 。在多方面（天文、医学、几何、法律、地理等）有重要贡献。为了给出不可共度比的逻辑依据，他引入变量（简称为

量）。量不是数，它代表连续变化的东西（长度、角度、面积、体积、时间等）。这样避免了把无理数当成数。把数与几何截然分开。这导致以后的两千年间几何几乎成为全部严格数学的基础。这当然不对（用几何来表达无理数、处理无理数的运算不合实用），但也反映了他们思维的严格性。

7. 亚里士多德 (Aristotole)(公元前 384-322) 学派．他也不是数学家。作过伯拉图的学生和同事（约 20 年）。公元前 355 年成立了自己的 “学园学派”。他对于宇宙的看法与伯拉图不同，认为物质世界更为重要。对于 “定义” 他指出一系列定义总要由一个开头，因此未加定义的名词是需要的。所要定义的对象必须存在才有意义。他指出了公理与公设的不同（例如等量公理是公理，而 “两点间直线最短” 就是公设（公理是一切学科公有的真理，公设是被某一学科所接受的第一性原理））。他还讨论了点与线的关系、无穷大的含义。

它对于数学最重要的贡献是创立了逻辑学。他认为逻辑是各门学科的先行学科。他在数学推理的基础上提出了逻辑学的基本原理：矛盾律（一个命题不能既是真的又是假的）和排中律（一个命题必是真的或是假的）。

他的著作涉及到极为广泛的方面。

8. 欧几里德 (Euclid)（公元前 330 ？ -275 ？）

《原本》共 13 篇， 1-4 篇讲直边形与圆的基本性质，第 5 篇讲比例，第 6 篇讲相似形，第 7 、 8 、 9 篇讲数论，第 10 篇讲不可共度量的分类，第 11 ， 12 ， 13 篇讲立体几何与穷竭法。内容丰富，为所有后人所学习。对于数学的影响超过任何一本数学著作。

最大的创造是整部书的陈述方式——开头就陈述所有的公理（ 5 条公设和 5 条公理）(p.69)，明确地提出定义（ 23 个定义），接着是有条不紊的由浅入深的定理。从精心选择的少数几条公设出发能推导出几百个定理，他是费了心机的。特别是第五公理（平行公理）：

若一直线与两直线相交且同侧所交的两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。

他尽量避免了在无穷远处的事情发生。

他对于用重合法作证明并不满意，因为他感觉运动中图形性质可能变化，为保证不变化需要对于物理空间加限制。

他在数论中证明了欧几里的算法（带余除法）。用穷竭法证明了二圆的面积比等于半径比的平方，其严格性甚至比后来牛顿的证明还要好，无懈可击。

书中也有若干不易发觉的错误，例如两个圆相交并不一定有交点（因为并没有假定圆是连续的）。

欧几里的还有关于物理、二次曲线、天文学等著作至少有 8 部。

另一部名著是阿波罗尼斯（ Apollonius ）（公元前 262-220 ？）的《圆锥曲线》。全书共 7 篇，讲解了我们现在所用到的绝大多数定理。他是第一个在同一个圆锥面上截出所有圆锥曲线的人。