第四章作业

习题十一 3, 5; 习题十二 1, 4; 习题十三 4, 6, 9;

习题十四 3, 6, 8; 习题十五 1, 3, 4.

第 4.1 节 习题十一 3, 5.

3. 随机向量$(X,Y)$的联合密度为

$$p(x,y) = c(R-\sqrt{x^2+y^2}),\ 当x^2+y^2<R^2;$$

$$p(x,y) = 0,\ 当x^2+y^2\geq R^2.$$

求: (1) 系数$c$, (2) 随机向量落在圆$x^2+y^2\leq r^2$内的概率, $(r<R)$.

5. 设$(X,Y)$的联合密度为

$$p(x,y) = A\sin(x+y),\ 当0<x<\frac{\pi}{2}\ ,\ 0<y<\frac{\pi}{2};$$

$$p(x,y) = 0,\ 其他.$$

求: (1) 系数$A$, (2) 边缘密度.

第 4.2 节 习题十二 1, 4.

1. 假设$X,Y$相互独立, 密度分别为 $p_X(x) = 1,\ 0\leq x\leq 1;\ p_X(x) = 0,$ 其他. $p_Y(y) = e^{-y},\ y>0;\ p_Y(y) = 0,\ y\leq 0.$ 求 $X+Y$的密度.

4. 设$X,Y$独立同分别, 密度为$p(\cdot)$, 分布函数为$F(\cdot)$. 求 $\min\{X,Y\}$的密度.

第 4.3 节 习题十三 4, 6, 9.

4. 设 $(X,Y)$服从区域$D=\{(x,y): 0<y<x<1\}$上的均匀分布, 求相关系数$\rho$.

6. 已知$D(X)=25,\ D(Y)=36,\ \rho=0.4.$ 求$D(X+Y)$及$D(X-Y)$.

9. 设$X\sim \mathrm{N}(0,1)$, 而$Y=X^n$($n$是正整数). 求$\rho_{XY}$.

第 4.4 节 习题十四 3, 6, 8.

3. 设$X,Y,Z$独立同分布，服从N(0,1)，求$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$的概率密度.

6. 将$n$只球放入$M$只盒子中去，设每只球落入每个盒子是等可能性的. 求有球的盒子数 X 的均值. (提示: 引入随机变量 $X_i=1$，当第$i$只盒子中有球; $X_i=0$，当第$i$只盒子中无球. 显然有$X=X_1+\cdots+X_M$.)

8. 对于随机变量$X,Y,Z$，已知$EX=EY=1$，$EZ=-1$，$D(X)=D(Y)=D(Z)=1$，$\rho_{XY}=0$，$\rho_{XZ}=\frac{1}{2}$，$\rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$.

第 4.5 节 习题十五 1, 3, 4.

1. 设$X$与$Y$相互独立. $X$服从泊松分布，$EX=\lambda_1$，$Y$也服从泊松分布，$EY=\lambda_2$. 试在$X+Y=n$的条件下求出$X$的条件分布.

3. 设$X$和$Y$都是离散型随机变量，$E(Y^2)$存在. $\varphi(x)=E(Y|X=x)$，当$P(X=x)>0$; $\varphi(x)=0$，否则. 试证明: 对任何非负函数$\psi(x)$，只要$E(\psi(x))^2$存在，必成立:

$$E(\varphi(x)-Y)^2\le E(\psi(x)-Y)^2.$$

4. 设一天走进某百货商店的顾客数是均值为 1200 的随机变量，又设这些顾客所花的钱数是相互独立的，均值为 50 元的随机变量. 又设任一顾客所花的钱数和进入该商店的总人数相互独立. 试问该商店一天的平均营业额是多少？