

平展上同调教学大纲

本课程的主要内容有三个：一是介绍平展上同调理论，特别是 Grothendieck 六函子；二是介绍（局部）傅里叶变换与 Weil 猜想的证明；三是介绍可构造平展层的示性类以及关于 Grothendieck L-函数的若干猜想；

第零章 简介

- 1、Weil 猜想的历史与 Weil 同调
- 2、Grothendieck 六函子
- 3、若干未解决的猜想

第一章 预备知识

- 1、范畴（极限、伴随函子、Kan 延拓）
- 2、层与同调、三角范畴与导出函子
- 3、若干特殊态射：flat 态射、非分歧态射、光滑态射与平展态射
ind-étale、weakly étale、w-local spaces and rings
- 4、descent 理论
- 5、微分层的定义与性质、余切丛

第二章 Grothendieck 拓扑

- 1、Grothendieck 拓扑的定义与基本例子（h、fppf、fpqc、étale、pro-étale 拓扑等）
- 2、Grothendieck 拓扑中的点（选）
介绍(strictly) Henselian (valuation) ring 等
- 3、pro-étale 拓扑与 replete topos
- 4、拉回与推出函子
- 5、Exceptional 函子的构造
- 6、Compact support
- 7、可构造层

第三章 域上的(pro)平展上同调

第四章 曲线的(pro)平展上同调

- 1、Kummer 层与 Artin-Schreier 层
- 2、计算曲线的平展上同调
- 3、Swan 导子与 Grothendieck-Ogg-Safarevich 公式
- 4、Gabber's canonical extension

第五章 Grothendieck 六函子

- 1、Proper/Smooth 基变换定理及其证明
- 2、Gabber's purity
- 3、若干 Kunnet 定理
- 4、ULA 条件与 transversal 条件
- 5、Lefschetz-Verdier 定理及其证明

第六章 (pro) 平展基本群

第七章 广义 Weil 猜想

- 1、Poincare 对偶与 Grothendieck L-函数
- 2、局部整体原则
- 3、Weights、傅里叶变换、Radon 变换
- 4、关于曲线与态射的 Weil 猜想
- 5、局部与整体 monodromy
- 6、若干应用

第八章 示性类

- 1、上同调示性类的定义与泛性质
- 2、Nearby/Vanishing cycle
- 3、Milnor 公式与导子公式及其证明（需介绍局部傅里叶变换）
- 4、Lefschetz pencil 与示性类的纤维化公式
- 5、Beilinson 关于 E-因子的猜想

参考资料:

- [BS15] B. Bhatt and P. Scholze, *The pro-étale topology for schemes*, Asterisque 369 (2015), 99-201.
- [Del74] P. Deligne, *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES **43** (1974), 273-307.
- [Del80] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publ. Math. IHES **65** (1980), 137-252.
- [GK15] O. Gabber and S. Kelly, *Points in algebraic geometry*, Journal of Pure and Applied Algebra 219 (2015), 4667-4680.
- [KW01] R. Kiehl and R. Weissauer, *Weil Conjectures, Perverse Sheaves and l-adic Fourier Transform*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Lau87] G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Publ. Math. IHES 65 (1987), 131-210.
- [SGA4h] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, avec la collaboration de J.F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.L. Verdier, Lecture Notes in Math. 569, Springer, 1977.
- [SGA5] A. Grothendieck et al., *Cohomologie l-adique et fonctions L*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965. dirigé par A. Grothendieck avec la collaboration de I. Bucur, C. Houzel, L. Illusie, J.-P. Jouanolou et J.-P. Serre. Lecture Notes in Mathematics 589, Springer-verlag, Berlin-New York, (1977).