概率统计 B
第三章 随机变量的数字特征

根据李东风老师课件修改

2017 春季学期

本节目录

随机变量的数字特征

- 随机变量的概率函数（PMF）、密度函数（PDF）、分布函数是对随机变量分布的最完整刻画。
- 但实际中分布难以描述和确定。
- 容易计算分布的一些数字特征：
  - 中心位置特征；
  - 分散程度特征。
- 期望是重要的概率论研究工具。

期望

- **例** 设某种彩票发行了 10 万张，每张售 1 元，其中 10 张有奖，各奖励 5000 元，其它无奖。
- 问：买一张彩票，平均盈利多少？
- 设 X 为盈利的随机变量。则 $X = 10000 - 1$ 或 -1。

X	4999	-1
p	$\frac{10}{100000}$	$1 - \frac{10}{100000}$

- 平均盈利为

$$EX = 4999 \cdot \frac{10}{100000} - 1 \cdot (1 - \frac{10}{100000}) = -0.5\text{（元）}$$

期望

- 期望是一种加权平均，加权为每个值的取值概率。这与大量重复试验时的结果是一致的。
- 比如，彩票例子中，如果用 4999 与 -1 直接算术平均得 2499 元，显然是荒谬的。原因是取 4999 的概率远比取 -1 的概率小得多。

放射性粒子求平均粒子数

X	频数	频率	p_k
0	57	0.022	0.021
1	203	0.078	0.081
2	383	0.147	0.156
3	525	0.201	0.202
4	532	0.204	0.195
5	408	0.156	0.151
6	273	0.105	0.097
7	139	0.053	0.054
8	45	0.017	0.026
9	27	0.010	0.011
≥ 10	16	0.006	0.007
总计	2608	1.000	1.000

期望定义

- **定义 1.1** 设离散型随机变量 X 的概率分布为

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \ldots$$

则称

$$\sum_k x_k p_k$$

为随机变量 X 的**期望**（或 **数学期望**），记作 EX 或 $E(X)$。

- EX 是随机变量取值的加权平均，按照概率的频率定义，这更符合多次重复观测后随机变量的平均表现。也叫做 X 的**均值**, 或 X 的分布的均值。

二点分布的期望

- X 分布

X	1	0
概率	p	1-p

- $$EX = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

二项分布的期望

- $X \sim \mathrm{B}(n,p)$,

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n$$

- 则

$$\begin{aligned}
EX =& \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} \\
=& \sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
=& \sum_{k=1}^{n} \frac{np\cdot(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \\
=& np \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'![(n-1)-k']!} p^{k'} q^{(n-1)-k'} \\
=& np \sum_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} p^{k'} q^{(n-1)-k'} = np
\end{aligned}$$

泊松分布的期望

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\ldots,(\lambda>0)$$

- 则

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k'}}{k'!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}=\lambda \end{aligned}$$

超几何分布的期望

- 设 X 服从参数为 N,M,n 的超几何分布 $(n \leq N - M)$:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \min(M, n)$$

- 超几何分布期望

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{m=0}^{\min(M,n)} m \cdot P(X=m) \\
&= \sum_{m=1}^{\min(M,n)} m \frac{M!}{m!(M-m)!} \\
&\quad \cdot \frac{(N-M)!}{(n-m)![(N-M)-(n-m)]!} \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!} \\
&= \sum_{m=1}^{\min(M,n)} \frac{M \cdot (M-1)!}{(m-1)![(M-1)-(m-1)]!} \\
&\quad \cdot \frac{[(N-1)-(M-1)]!}{[(n-1)-(m-1)]![(N-1)-(M-1)-((n-1)-(m-1))]!} \\
&\quad \cdot \frac{n \cdot (n-1)![(N-1)-(n-1)]!}{N \cdot (N-1)!} \\
&= \frac{nM}{N} \sum_{m'=0}^{\min(M-1,n-1)} \frac{C_{M-1}^{m'} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-m'}}{C_{N-1}^{n-1}} \\
&= \frac{nM}{N}
\end{aligned}
$$

本节目录

连续型随机变量的期望

- **定义 2.1** 设连续型随机变量的密度为 $p(x)$，称

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \tag{2.1}$$

为 X 的期望（或均值），记作 EX(或 $E(X)$)。

- 要求 (2.1) 的积分收敛才有期望。
- 解释：连续型随机变量的 $p(x)$ 是一个比例系数，不是概率。

- 把 X 的取值范围划分为区间 $(x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \ldots,$ 当 $p(x)$ 连续，每个区间都很短时近似计算 X 的平均为

$$
\begin{aligned}
EX &\approx \sum_i x_i P(x_i < X \leq x_{i+1}) \\
&\approx \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} xp(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx
\end{aligned}
$$

均匀分布的期望

- $X \sim \mathrm{U}(a, b)$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

-

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b-a} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

- EX 是区间 $[a, b]$ 的中点。与“均匀”分布意义相符。

指数分布的期望

- $X \sim \mathsf{E}(\lambda)$:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} (\lambda > 0)$$

- 期望

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \lambda \int_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\infty} te^{-t}dt \quad (\text{令} t = \lambda x) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[(-te^{-t})\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-t}dt\right] \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

- 所以 $\frac{1}{\lambda}$ 是指数分布的期望。

正态分布

- $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

- 期望

$$\begin{aligned}
EX =& \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \\
=& \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
=& \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} d\frac{x-\mu}{\sigma} \\
=& \sigma \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sigma \cdot \frac{\mu}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
=& \sigma \cdot 0 + \mu = \mu
\end{aligned}$$

- 正态分布密度以 $x=\mu$ 为对称轴，且 μ 为均值。
- 其它分布如果也有对称轴 $x=c$ 且期望存在则其期望也等于 c。

伽玛分布

- $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

- 期望

$$\begin{aligned} EX &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt \quad (\text{令} t = \beta x) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

本节目录

期望的简单性质

- 对常数 c, k, b 和随机变量 X, 有

$$\begin{aligned}
&(1) \quad E(c) = c; \\
&(2) \quad E(kX) = kE(X); \\
&(3) \quad E(X+b) = E(X) + b; \\
&(4) \quad E(kX+b) = kE(X) + b.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

证明 (1)

- $E(c) = c$?
- 常数 c 可以看成离散随机变量，取 c 的概率为 1，按期望公式有

$$E(X) = c \times 1 = c$$

证明 (2)

- $E(kX) = kE(X)$?
- 当 $k = 0$ 时显然成立。
- 当 $k \neq 0$ 时，若 X 为离散分布：

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

- 则 $Y = kX$ 的分布为

$$P(Y = kx_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

- 按定义

$$E(Y) = \sum_i (kx_i)p_i = k\sum_i x_i p_i = kE(X)$$

- 若 $k \neq 0$，X 为连续型，密度 $p(x)$，则 $Y = kX$ 有密度

$$p_Y(y) = \frac{1}{|k|} p\left(\frac{y}{k}\right)$$

- 事实上

$$\begin{aligned}
F_Y(y) =& P(kX \le y) = \begin{cases} P(X \le \frac{y}{k}) & k > 0 \\ P(X \ge \frac{y}{k}) & k < 0 \end{cases} \\
=& \begin{cases} F_X(\frac{y}{k}) & k > 0 \\ 1 - F_X(\frac{y}{k}) & k < 0 \end{cases} \\
p_Y(y) =& F_Y'(y) = \begin{cases} p(\frac{y}{k})\frac{1}{k} & k > 0 \\ -p(\frac{y}{k})\frac{1}{k} & k < 0 \end{cases} \\
=& \frac{1}{|k|} p\left(\frac{y}{k}\right)
\end{aligned}$$

- 按期望定义

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy \\
&= \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} y p\left(\frac{y}{k}\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} k t p(t) dt \quad (\text{令} t = \frac{y}{k}) \\
&= k \int_{-\infty}^{\infty} t p(t) dt \\
&= k E(X)
\end{aligned}
$$

证明（3）

- $E(X+b)=E(X)+b$?
- 只对 $X\sim p(x)$ 证明。
- $Y=X+b\sim p(y-b)$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(X+b\le y)=F(y-b) \\ p_Y(y) =& F'(y-b)=p(y-b) \end{aligned}$$

- 期望

$$\begin{aligned} E(X+b) =& E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} y p(y-b)dy \\ =& \int_{-\infty}^{\infty}(t+b)p(t)dt \quad (\text{令} t=y-b) \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} tp(t)dt+b\int_{-\infty}^{\infty}p(t)dt \\ =& E(X)+b \end{aligned}$$

证明（4）

- 由（2）、（3）得：

$$
\begin{aligned}
E(kX+b) &= E(kX)+b \quad (\text{性质 } 3)\\
&= kE(X)+b \quad (\text{性质 } 2)
\end{aligned}
$$

- 性质（4）包含了（2）和（3），叫做期望的**线性性质**。

随机变量函数的期望公式

- 对 $X \sim p(x)$, $Y = f(X)$,

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx \tag{3.2}$$

(要求右边绝对收敛)

- 若 $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots,$

$$E[f(X)] = \sum_i f(x_i)p_i \tag{3.3}$$

(要求右边的级数绝对收敛)

- 这样的公式免去了求 $Y = f(X)$ 的分布的过程。

例 3.1

- **例 3.1** $X \sim \mathsf{N}(0,1)$, 求 $E(X^2)$。
- 用两种办法。
- **解法 1** 用公式 (3.2)。

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} x d\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= -\left[x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= 0 + 1 = 1
\end{aligned}
$$

- （注意 $\lim_{x\to\pm\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$）

- **解法 2** 用分布函数法先求 $Y=f(X)$ 的分布密度再用期望定义。
- 显然

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(X^2 \le y) = P(|X| \le \sqrt{y}) \\ =& P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) \\ =& F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \quad (y \ge 0) \end{aligned}$$

($Y<0$ 是不可能事件)

- $Y = X^2$ 的密度

$$\begin{aligned} f_Y(y) =& F'_Y(y) = \phi(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + \phi(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} \quad (y > 0) \end{aligned}$$

(这是一个 Gamma($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$) 分布密度)

- 于是

$$
\begin{aligned}
E(X^2) = & E(Y) = \int_0^{\infty} y p_Y(y) dy \\
= & \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} dy \\
= & \int_0^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} 2t dt \quad (t = \sqrt{y}, y = t^2) \\
= & -\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2t d(e^{-\frac{t^2}{2}}) \\
= & 0 + 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1
\end{aligned}
$$

- 利用了公式 (3.2) 的解法更简便。

例 3.2

- **例 3.2** $X \sim \mathsf{U}[0, 2\pi]$, 求 $E(\sin X)$。
- **解**

$$E(\sin X) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) p_X(x) dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin(x) \frac{1}{2\pi} dx = 0$$

期望线性性质证明

- 期望的线性性质

$$E(kX+b)=kE(X)+b$$

是 $f(x)=kx+b$ 时公式 (3.2),(3.3) 的特例：

$$\begin{aligned}E(kX+b)=&\int_{-\infty}^{\infty}(kx+b)p(x)dx\\=&k\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx+b\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx\\=&kE(X)+b\end{aligned}$$

本节目录

方差

- 随机变量的数字特征可以用数字刻画最重要的分布特征。
- 分布特征中最重要的特征是位置特征和分散程度（分布宽窄）特征。
- 方差（标准差）用来刻画分散程度。
- 例：甲乙两个女生小合唱队的身高：
- 甲队：1.60, 1.62, 1.59, 1.60, 1.59;
- 乙队：1.80, 1.60, 1.50, 1.50, 1.60.
- 平均都是 1.60，但是甲队很整齐，乙队站在一起很杂乱。

- 数据波动程度也是反映客观现象的一种指标。
- 如：产品的某种特性（如强度）波动大，说明生产不稳定。
- 如：生物的某种特性（如血压）波动大，表示病态。
- 所以对于数据，除了关心均值，还要研究其波动程度（分散程度）。

数据的方差

- 对于给定的一批数据 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，用

$$\frac{1}{n-1}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2] \tag{4.1}$$

来刻画这批数据的分散程度（波动），其中 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$。

- 当所有 x_i 为常数时，(4.1) 等于零。
- 各 x_i 差别越大，则与平均值差别越大，(4.1) 越大。

随机变量的方差

- 仿照数据的方差提出：
- **定义 4.1** 设离散型随机变量的概率分布为

$$P(X = x_k) = p_k,\ k = 1, 2, \ldots$$

则称

$$\sum_k [x_k - E(X)]^2 p_k \tag{4.2}$$

为 X 的**方差**，记作 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$。

- **定义 4.2** 设连续型随机变量 X 的密度是 $p(x)$，则称

$$\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 p(x)dx \tag{4.2'}$$

为 X 的方差，记作 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$。

- 为了方差存在，期望 $E(X)$ 必须先存在；
- 对离散型，(4.2) 的级数若非有限项，则级数收敛时方差才存在；
- 对连续型，(4.2') 的积分收敛时方差才存在；
- 方差总是非负的：

$$D(X) \geq 0$$

方差等价定义

- **方差等价定义**

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 \tag{4.3}$$

按随机变量函数的期望公式，(4.3) 与 (4.2) 和 (4.2') 一致。

- 随机变量的方差，也称为其分布的方差：
- 注意：期望、方差只由分布决定，两个随机变量服从相同的分布（参数也要相同），则其期望、方差必定相同。

方差的恒等式

- 方差有如下恒等式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{4.4}$$

- **证明**

$$\begin{aligned}
D(X) =& E[X - E(X)]^2 \\
=& E\left\{X^2 - 2E(X)\cdot X + [E(X)]^2\right\} \\
=& E(X^2) - E[2E(X)\cdot X] + E[E(X)]^2 \\
=& E(X^2) - 2E(X)\cdot E(X) + [E(X)]^2 \\
=& E(X^2) - [E(X)]^2
\end{aligned}$$

- 这个证明用到了第四章定理：

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

- 方差恒等式（4.4）的另一证明：以 $X \sim p(x)$ 为例，

$$
\begin{aligned}
D(X) = & \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 p(x)dx \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ x^2 - 2E(X) \cdot x + [E(X)]^2 \right\} dx \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \\
& + [E(X)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx \\
= & E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 \cdot 1 \\
= & E(X^2) - [E(X)]^2
\end{aligned}
$$

二点分布的方差

- 对二点分布

$$
\begin{aligned}
E(X) =& p \\
E(X^2) =& 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p \\
D(X) =& E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)
\end{aligned}
$$

二项分布的方差

- 对二项分布

$$
\begin{aligned}
E(X) =& np \\
E(X^2) =& \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} \\
=& \sum_{k=1}^{n} [k(k-1)+k] \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
=& \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k q^{n-k} + E(X) \\
=& n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!} \\
& \cdot p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} + E(X) \\
=& n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} C_{n-2}^{k'} p^{k'} q^{(n-2)-k'} + E(X) \\
=& n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 + np(1-p) \\
D(X) =& E(X^2) - [E(X)]^2 = np(1-p)
\end{aligned}
$$

泊松分布的方差

- 对泊松分布

$$
\begin{aligned}
E(X) =&\lambda \\
E(X^2) =&\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\
=&\sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)+1] \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\
=&\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\
=&\lambda^2 \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} e^{-\lambda} + \lambda \sum_{k''=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k''}}{k''!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda \\
D(X) =&E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

均匀分布的方差

- 若 $X \sim \mathrm{U}(a,b)$, 则

$$
\begin{aligned}
E(X) =& \frac{a+b}{2} \\
E(X^2) =& \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx \\
=& \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b \\
=& \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) \\
D(X) =& E(X^2) - [E(X)]^2 \\
=& \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2) \\
=& \frac{1}{12}(b-a)^2
\end{aligned}
$$

指数分布的方差

- 设 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$, 则

$$
\begin{aligned}
E(X) =& \frac{1}{\lambda} \\
E(X^2) =& \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\
=& \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt \\
=& \frac{1}{\lambda^2} \Gamma(3) = \frac{1}{\lambda^2} 2! = \frac{2}{\lambda^2} \\
D(X) =& E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

正态分布的方差

- 设 $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$，则

$$
\begin{aligned}
D(X) =& E(X-\mu)^2 \\
=& \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} dx \\
=& \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{\frac{1}{2}t^2\} dt \quad (\text{令} t = \frac{x-\mu}{\sigma}) \\
=& \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\
=& \sigma^2 \quad (\text{见例 } 3.1)
\end{aligned}
$$

- 所以正态分布的两个参数 μ, σ^2 分别是分布的期望和方差。

伽玛分布的方差

- 设 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$:

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad (x > 0)$$

- 则

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{\alpha}{\beta} \\
E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\
&= \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{(\beta x)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-(\beta x)} d(\beta x) \\
&= \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{\beta^2} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} \\
D(X) &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}
\end{aligned}$$

方差的简单性质

- 当 k, b, c 为常数时

$$\begin{aligned} &(1) \quad D(c) = 0; \\ &(2) \quad D(kX) = k^2 D(X); \\ &(3) \quad D(X + b) = D(X); \\ &(4) \quad D(kX + b) = k^2 D(X). \end{aligned} \tag{4.5}$$

- **证明** （1）

$$\begin{aligned} E(c) =& c \\ E(c^2) =& c^2 \\ D(X) =& c^2 - c^2 = 0 \end{aligned}$$

- (2)

$$E(kX) = kE(X)$$

- （3）

$$
\begin{aligned}
E(X+b) =& E(X)+b \\
E(X+b)^2 =& E(X^2+2bX+b^2) = E(X^2)+2bE(X)+b^2 \\
D(X+b) =& E(X^2)+2bE(X)+b^2 \\
& -\{[E(X)]^2+2bE(X)+b^2\} \\
=& E(X^2)-[E(X)]^2 = D(X)
\end{aligned}
$$

- (4) 是（2）、（3）的推论:

$$
D(kX+b) = D(kX) = k^2D(X)
$$

本节目录

切比雪夫不等式

- **定理 5.1** 设随机变量 X 存在均值 $E(X)$ 与方差 $D(X)$，则有

$$P\left(|X - E(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0) \tag{5.1}$$

- **证明** （仅对连续型情形）

$$
\begin{aligned}
D(X) = &\int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx \\
\geq &\int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} [x - E(X)]^2 p(x) dx \\
&+ \int_{E(X)+\varepsilon}^{\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx \\
\geq &\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} p(x) dx + \varepsilon^2 \int_{E(X)+\varepsilon}^{\infty} p(x) dx \\
= &\varepsilon^2 P(X \leq E(X) - \varepsilon) + \varepsilon^2 P(X \geq E(X) + \varepsilon) \\
= &\varepsilon^2 P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)
\end{aligned}
$$

- 得证。

- 在切比雪夫不等式中取 $\varepsilon = k\sqrt{D(X)}$, 则

$$P(|X - E(X)| \geq k\sqrt{D(X)}) \leq \frac{1}{k^2}$$

其中 $\sqrt{D(X)}$ 叫做 X 的标准差。

- 特别地，$k = 3$ 时

$$P(|X - E(X)| \geq 3\sqrt{D(X)}) \leq \frac{1}{9}$$

- 对比正态分布，这个比例是小于千分之三。
- 从切比雪夫不等式可知 $D(X)$ 越小则 X 取值远离其均值的概率越小，所以反映了分布的分散程度。

原点矩与中心矩

- 称

$$E(X^k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

为 X 的 k 阶**原点矩**，记为 ν_k;

- 称

$$E[X - E(X)]^k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

为 X 的 k 阶**中心矩**, 记为 μ_k。

- 均值为 ν_1, 方差为 μ_2。

分位数与中位数

- 若 X 的分布函数 $F(x)$ 严格单调上升连续，则其存在反函数 $q(p), p\in(0,1)$，使得

$$F(q(p)) = p, \quad \forall p \in (0,1)$$

称 $q(p)$ 为 X 的**分位数函数**，$x_p = q(p)$ 叫做 X 的 p **分位数**。

- 一般地，对 $p\in(0,1)$，称 x_p 是随机变量 X 的 p 分位数，若

$$P(X < x_p) \le p \le P(X \le x_p) \tag{5.4}$$

- (5.4) 也写作

$$P(X \le x_p) \ge p, \quad P(X \ge x_p) \ge 1-p \tag{5.4'}$$

- 二分之一分位数叫做中位数。
- 分位数必存在，不一定唯一。有一种唯一化的定义为

$$x_p = \inf\{x : F(X) \geq p\} \quad (\forall p \in (0,1))$$

例：二点分布的分位数

- 二点分布 b(1,p_0)：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ p_0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

- 分位数

$$x_p = \begin{cases} 0 & p \in (0, p_0) \\ [0, 1] & p = p_0 \\ 1 & p \in (p_0, 1) \end{cases}$$