应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2016年秋季学期

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值、自协方差估计的作用

- AR, MA, ARMA模型的参数可以由自协方差函数唯一确定。
- 有了样本之后，可以先估计均值和自协方差函数。
- 然后由均值和自协方差函数解出模型参数。
- 均值和自协方差可以用矩估计法求。
- 还要考虑相合性、渐近分布、收敛速度等问题。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值、自协方差估计的作用

- AR, MA, ARMA模型的参数可以由自协方差函数唯一确定。
- 有了样本之后，可以先估计均值和自协方差函数。
- 然后由均值和自协方差函数解出模型参数。
- 均值和自协方差可以用矩估计法求。
- 还要考虑相合性、渐近分布、收敛速度等问题。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值、自协方差估计的作用

- AR, MA, ARMA模型的参数可以由自协方差函数唯一确定。
- 有了样本之后，可以先估计均值和自协方差函数。
- 然后由均值和自协方差函数解出模型参数。
- 均值和自协方差可以用矩估计法求。
- 还要考虑相合性、渐近分布、收敛速度等问题。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值、自协方差估计的作用

- AR, MA, ARMA模型的参数可以由自协方差函数唯一确定。
- 有了样本之后，可以先估计均值和自协方差函数。
- 然后由均值和自协方差函数解出模型参数。
- 均值和自协方差可以用矩估计法求。
- 还要考虑相合性、渐近分布、收敛速度等问题。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值、自协方差估计的作用

- AR, MA, ARMA模型的参数可以由自协方差函数唯一确定。
- 有了样本之后，可以先估计均值和自协方差函数。
- 然后由均值和自协方差函数解出模型参数。
- 均值和自协方差可以用矩估计法求。
- 还要考虑相合性、渐近分布、收敛速度等问题。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$ 的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$ 的相合性
$\hat{\gamma}_k$ 的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的 χ^2 检验

均值估计公式

- 设$x_1, x_2, \ldots, x_N$是平稳列$\{X_t\}$的观测。
- $\mu = \mathrm{E}X_t$的点估计为

$$\hat{\mu} = \bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

- 把观测样本看成随机样本时记做大写的$X_1, X_2, \ldots, X_N$。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值估计公式

- 设$x_1, x_2, \ldots, x_N$是平稳列$\{X_t\}$的观测。
- $\mu = \mathrm{E}X_t$的点估计为

$$\hat{\mu} = \bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

- 把观测样本看成随机样本时记做大写的$X_1, X_2, \ldots, X_N$。

均值估计公式

- 设$x_1, x_2, \ldots, x_N$是平稳列$\{X_t\}$的观测。
- $\mu = \mathrm{E}X_t$的点估计为

$$\hat{\mu} = \bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

- 把观测样本看成随机样本时记做大写的$X_1, X_2, \ldots, X_N$。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

相合性

- 设统计量$\hat{\theta}_N$ 是θ 的估计. 在统计学中有如下的定义
  1. 如果$\mathrm{E}\hat{\theta}_N = \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的无偏估计.
  2. 如果当$N \to \infty$, $\mathrm{E}\hat{\theta}_N \to \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的渐近无偏估计.
  3. 如果$\hat{\theta}_N$ 依概率收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的相合估计.
  4. 如果$\hat{\theta}_N$ a.s.收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的强相合估计.
- 一般情况下, 无偏估计比有偏估计来得好. 对于由(1.1)定义的$\bar{X}_N$, 有

$$\mathrm{E}\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}X_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mu = \mu.$$

所以, $\bar{X}_N$ 是均值μ 的无偏估计.

相合性

- 设统计量$\hat{\theta}_N$ 是θ 的估计. 在统计学中有如下的定义
  1. 如果$\mathrm{E}\hat{\theta}_N = \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的无偏估计.
  2. 如果当$N \to \infty$, $\mathrm{E}\hat{\theta}_N \to \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的渐近无偏估计.
  3. 如果$\hat{\theta}_N$ 依概率收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的相合估计.
  4. 如果$\hat{\theta}_N$ a.s.收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的强相合估计.
- 一般情况下, 无偏估计比有偏估计来得好. 对于由(1.1)定义的$\bar{X}_N$, 有

$$\mathrm{E}\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}X_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mu = \mu.$$

所以, $\bar{X}_N$ 是均值μ 的无偏估计.

相合性

- 设统计量$\hat{\theta}_N$ 是θ 的估计. 在统计学中有如下的定义
  1. 如果$\mathrm{E}\hat{\theta}_N = \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的无偏估计.
  2. 如果当$N \to \infty$, $\mathrm{E}\hat{\theta}_N \to \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的渐近无偏估计.
  3. 如果$\hat{\theta}_N$ 依概率收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的相合估计.
  4. 如果$\hat{\theta}_N$ a.s.收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的强相合估计.
- 一般情况下, 无偏估计比有偏估计来得好. 对于由(1.1)定义的$\bar{X}_N$, 有

$$\mathrm{E}\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}X_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mu = \mu.$$

所以, $\bar{X}_N$ 是均值μ 的无偏估计.

相合性

- 设统计量$\hat{\theta}_N$ 是θ 的估计. 在统计学中有如下的定义
  1. 如果$\mathrm{E}\hat{\theta}_N = \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的无偏估计.
  2. 如果当$N \to \infty$, $\mathrm{E}\hat{\theta}_N \to \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的渐近无偏估计.
  3. 如果$\hat{\theta}_N$ 依概率收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的相合估计.
  4. 如果$\hat{\theta}_N$ a.s.收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的强相合估计.
- 一般情况下, 无偏估计比有偏估计来得好. 对于由(1.1)定义的$\bar{X}_N$, 有

$$\mathrm{E}\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}X_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mu = \mu.$$

所以, $\bar{X}_N$ 是均值μ 的无偏估计.

相合性

- 设统计量$\hat{\theta}_N$ 是θ 的估计. 在统计学中有如下的定义
  1. 如果$\mathrm{E}\hat{\theta}_N = \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的无偏估计.
  2. 如果当$N \to \infty$, $\mathrm{E}\hat{\theta}_N \to \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的渐近无偏估计.
  3. 如果$\hat{\theta}_N$ 依概率收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的相合估计.
  4. 如果$\hat{\theta}_N$ a.s.收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的强相合估计.
- 一般情况下, 无偏估计比有偏估计来得好. 对于由(1.1)定义的$\bar{X}_N$, 有

$$\mathrm{E}\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}X_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mu = \mu.$$

所以, $\bar{X}_N$ 是均值μ 的无偏估计.

相合性

- 设统计量$\hat{\theta}_N$ 是θ 的估计. 在统计学中有如下的定义
  1. 如果$\mathrm{E}\hat{\theta}_N = \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的无偏估计.
  2. 如果当$N \to \infty$, $\mathrm{E}\hat{\theta}_N \to \theta$, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的渐近无偏估计.
  3. 如果$\hat{\theta}_N$ 依概率收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的相合估计.
  4. 如果$\hat{\theta}_N$ a.s.收敛到θ, 则称$\hat{\theta}_N$ 是θ 的强相合估计.
- 一般情况下, 无偏估计比有偏估计来得好. 对于由(1.1)定义的$\bar{X}_N$, 有

$$\mathrm{E}\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}X_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mu = \mu.$$

所以, $\bar{X}_N$ 是均值μ 的无偏估计.

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值估计的相合性

- 好的估计量起码应当是相合的. 否则, 估计量不收敛到要估计的参数, 它无助于实际问题的解决.
- 对于平稳序列$\{X_t\}$, 如果它的自协方差函数$\{\gamma_k\}$收敛到零, 则

均值估计的相合性

- 好的估计量起码应当是相合的. 否则, 估计量不收敛到要估计的参数, 它无助于实际问题的解决.
- 对于平稳序列$\{X_t\}$, 如果它的自协方差函数$\{\gamma_k\}$收敛到零, 则

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值估计的相合性II

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\bar{X}_N-\mu)^2=\mathrm{E}\Big[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(X_k-\mu)\Big]^2\\
=&\frac{1}{N^2}\mathrm{E}[\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(X_k-\mu)(X_j-\mu)]=\frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_{k-j}\\
=&\frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1-j}^{N-j}\gamma_m \qquad (\text{令}m=k-j)\\
=&\frac{1}{N^2}\sum_{m=-N+1}^{N-1}\sum_{j=\max(1-m,1)}^{\min(N-m,N)}\gamma_m=\frac{1}{N^2}\sum_{m=-N+1}^{N-1}(N-|m|)\gamma_m\\
\leq&\frac{1}{N}\sum_{m=-N}^{N}|\gamma_m|\to 0,\qquad \text{当}N\to\infty. \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

即$\bar{X}_N$ 均方收敛到μ.

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值估计的相合性III

利用切比雪夫不等式

$$\Pr(|\bar{X}_N - \mu| \ge \delta) \le \frac{\mathrm{E}(\bar{X}_N - \mu)^2}{\delta^2} \to 0, \quad (\delta > 0)$$

得到$\bar{X}_N$ 依概率收敛到μ. 于是$\bar{X}_N$是μ的相合估计.

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值估计性质

- **定理1.1** 设平稳序列$\{X_t\}$有均值μ和自协方差函数$\{\gamma_k\}$, 则
  1. $\bar{X}_N$是μ 的无偏估计.
  2. 如果$\gamma_k \to 0$, 则$\bar{X}_N$ 是μ的相合估计.
  3. 如果$\{X_t\}$还是严平稳遍历序列, 则$\bar{X}_N$是μ的强相合估计.
- 第三条结论利用§1.5 的遍历定理5.1可得。
- 任何强相合估计一定是相合估计.
- 线性平稳列的均值估计是相合估计。(第一章定理3.3)
- ARMA序列的均值估计是相合估计。

均值估计性质

- **定理1.1** 设平稳序列$\{X_t\}$有均值μ和自协方差函数$\{\gamma_k\}$, 则
  1. $\bar{X}_N$是μ 的无偏估计.
  2. 如果$\gamma_k \to 0$, 则$\bar{X}_N$ 是μ的相合估计.
  3. 如果$\{X_t\}$还是严平稳遍历序列, 则$\bar{X}_N$是μ的强相合估计.
- 第三条结论利用§1.5 的遍历定理5.1可得。
- 任何强相合估计一定是相合估计.
- 线性平稳列的均值估计是相合估计。(第一章定理3.3)
- ARMA序列的均值估计是相合估计。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值估计性质

- **定理1.1** 设平稳序列$\{X_t\}$有均值μ和自协方差函数$\{\gamma_k\}$，则
  1. $\bar{X}_N$是μ 的无偏估计.
  2. 如果$\gamma_k \to 0$，则$\bar{X}_N$ 是μ的相合估计.
  3. 如果$\{X_t\}$还是严平稳遍历序列，则$\bar{X}_N$是μ的强相合估计.
- 第三条结论利用§1.5 的遍历定理5.1可得。
- 任何强相合估计一定是相合估计.
- 线性平稳列的均值估计是相合估计。(第一章定理3.3)
- ARMA序列的均值估计是相合估计。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值估计性质

- **定理1.1** 设平稳序列$\{X_t\}$有均值μ和自协方差函数$\{\gamma_k\}$，则
  1. $\bar{X}_N$是μ 的无偏估计.
  2. 如果$\gamma_k \to 0$，则$\bar{X}_N$ 是μ的相合估计.
  3. 如果$\{X_t\}$还是严平稳遍历序列，则$\bar{X}_N$是μ的强相合估计.
- 第三条结论利用§1.5 的遍历定理5.1可得。
- 任何强相合估计一定是相合估计.
- 线性平稳列的均值估计是相合估计。(第一章定理3.3)
- ARMA序列的均值估计是相合估计。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值估计性质

- **定理1.1** 设平稳序列$\{X_t\}$有均值μ和自协方差函数$\{\gamma_k\}$，则
  1. $\bar{X}_N$是μ 的无偏估计.
  2. 如果$\gamma_k \to 0$，则$\bar{X}_N$ 是μ的相合估计.
  3. 如果$\{X_t\}$还是严平稳遍历序列，则$\bar{X}_N$是μ的强相合估计.
- 第三条结论利用§1.5 的遍历定理5.1可得。
- 任何强相合估计一定是相合估计.
- 线性平稳列的均值估计是相合估计。(第一章定理3.3)
- ARMA序列的均值估计是相合估计。

均值估计性质

- **定理1.1** 设平稳序列$\{X_t\}$有均值μ和自协方差函数$\{\gamma_k\}$, 则
  1. $\bar{X}_N$是μ 的无偏估计.
  2. 如果$\gamma_k \to 0$, 则$\bar{X}_N$ 是μ的相合估计.
  3. 如果$\{X_t\}$还是严平稳遍历序列, 则$\bar{X}_N$是μ的强相合估计.
- 第三条结论利用§1.5 的遍历定理5.1可得。
- 任何强相合估计一定是相合估计.
- 线性平稳列的均值估计是相合估计。(第一章定理3.3)
- ARMA序列的均值估计是相合估计。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值估计性质

- **定理1.1** 设平稳序列$\{X_t\}$有均值μ和自协方差函数$\{\gamma_k\}$，则
  1. $\bar{X}_N$是μ 的无偏估计.
  2. 如果$\gamma_k \to 0$，则$\bar{X}_N$ 是μ的相合估计.
  3. 如果$\{X_t\}$还是严平稳遍历序列，则$\bar{X}_N$是μ的强相合估计.
- 第三条结论利用§1.5 的遍历定理5.1可得。
- 任何强相合估计一定是相合估计.
- 线性平稳列的均值估计是相合估计。(第一章定理3.3)
- ARMA序列的均值估计是相合估计。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

均值估计性质

- **定理1.1** 设平稳序列$\{X_t\}$有均值μ和自协方差函数$\{\gamma_k\}$, 则
  1. $\bar{X}_N$是μ 的无偏估计.
  2. 如果$\gamma_k \to 0$, 则$\bar{X}_N$ 是μ的相合估计.
  3. 如果$\{X_t\}$还是严平稳遍历序列, 则$\bar{X}_N$是μ的强相合估计.
- 第三条结论利用§1.5 的遍历定理5.1可得。
- 任何强相合估计一定是相合估计.
- 线性平稳列的均值估计是相合估计。(第一章定理3.3)
- ARMA序列的均值估计是相合估计。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

独立同分布样本的中心极限定理

- 若$X_1, X_2, \ldots, X_N$ iid $\sim (\mu, \sigma^2)$，
  则$\sqrt{N}(\bar{X}_N - \mu) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$.
- 可以据此计算μ的95%置信区间。

$$[\bar{X}_N - 1.96\sigma/\sqrt{N},\ \bar{X}_N + 1.96\sigma/\sqrt{N}]. \tag{1.3}$$

  其中的1.96也经常用2近似代替。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

独立同分布样本的中心极限定理

- 若$X_1, X_2, \ldots, X_N$ iid $\sim (\mu, \sigma^2)$，
  则$\sqrt{N}(\bar{X}_N - \mu) \xrightarrow{\text{d}} \text{N}(0, \sigma^2)$.
- 可以据此计算μ的95%置信区间。

$$[\bar{X}_N - 1.96\sigma/\sqrt{N},\ \bar{X}_N + 1.96\sigma/\sqrt{N}]. \tag{1.3}$$

其中的1.96也经常用2近似代替。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

线性平稳列的均值估计的中心极限定理

- **定理1.2**　设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的$\mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. 线性平稳序列$\{X_t\}$由

$$X_t = \mu + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.5}$$

定义, 其中$\{\psi_k\}$平方可和. 如果$\{X_t\}$的谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{-ik\lambda} \right|^2 \tag{1.6}$$

在$\lambda = 0$连续, 并且$f(0) \neq 0$, 则当$N \to \infty$时,

$$\sqrt{N}(\bar{X}_N - \mu) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, 2\pi f(0))$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

推论

- 当$\{\psi_k\}$绝对可和时，$f(\lambda)$连续.
- **推论1.3** 在定理1.2条件下，如果$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\psi_k|<\infty$和$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k\neq 0$ 成立，则当$N\to\infty$时

$$\sqrt{N}(\bar{X}_N-\mu)\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathrm{N}(0,2\pi f(0))$$

并且

$$2\pi f(0)=\gamma_0+2\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j. \tag{1.7}$$

- 中心极限定理成立时可以构造μ的渐近置信区间或对μ作假设检验。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

推论

- 当$\{\psi_k\}$绝对可和时，$f(\lambda)$连续.
- **推论1.3** 在定理1.2条件下，如果$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\psi_k| < \infty$和$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k \neq 0$ 成立，则当$N \to \infty$时

$$\sqrt{N}(\bar{X}_N - \mu) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, 2\pi f(0))$$

并且

$$2\pi f(0) = \gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j. \tag{1.7}$$

- 中心极限定理成立时可以构造μ的渐近置信区间或对μ作假设检验。

推论

- 当$\{\psi_k\}$绝对可和时，$f(\lambda)$连续.
- **推论1.3**　在定理1.2条件下，如果$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\psi_k|<\infty$和$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k\neq 0$ 成立，则当$N\to\infty$时

$$\sqrt{N}(\bar{X}_N-\mu)\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathrm{N}(0,2\pi f(0))$$

并且

$$2\pi f(0)=\gamma_0+2\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j. \tag{1.7}$$

- 中心极限定理成立时可以构造μ的渐近置信区间或对μ作假设检验。

收敛速度

- 相合的估计量的渐近性质除了是否服从中心极限定理外，还包括这个估计量的收敛速度.
- 收敛速度的描述方法之一是所谓的重对数律.
- 重对数律成立时，得到的收敛速度的阶数一般是

$$O\left(\sqrt{\frac{2\ln\ln N}{N}}\right).$$

- 除了个别的情况，这个阶数一般不能再被改进.

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

收敛速度

- 相合的估计量的渐近性质除了是否服从中心极限定理外，还包括这个估计量的收敛速度.
- 收敛速度的描述方法之一是所谓的重对数律.
- 重对数律成立时，得到的收敛速度的阶数一般是

$$O\left(\sqrt{\frac{2\ln\ln N}{N}}\right).$$

- 除了个别的情况，这个阶数一般不能再被改进.

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$ 的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$ 的相合性
$\hat{\gamma}_k$ 的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的 χ^2 检验

收敛速度

- 相合的估计量的渐近性质除了是否服从中心极限定理外，还包括这个估计量的收敛速度.
- 收敛速度的描述方法之一是所谓的重对数律.
- 重对数律成立时，得到的收敛速度的阶数一般是

$$O\left(\sqrt{\frac{2\ln\ln N}{N}}\right).$$

- 除了个别的情况，这个阶数一般不能再被改进.

收敛速度

- 相合的估计量的渐近性质除了是否服从中心极限定理外，还包括这个估计量的收敛速度.
- 收敛速度的描述方法之一是所谓的重对数律.
- 重对数律成立时，得到的收敛速度的阶数一般是

$$O\left(\sqrt{\frac{2\ln\ln N}{N}}\right).$$

- 除了个别的情况，这个阶数一般不能再被改进.

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$ 的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$ 的相合性
$\hat{\gamma}_k$ 的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的 χ^2 检验

收敛速度II

- **定理1.4** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$，线性平稳序列$\{X_t\}$由(1.5)定义，谱密度$f(0)\neq 0$．当以下的条件之一成立时：
  1. 当$k\to\pm\infty$，$\psi_{|k|}$ 以负指数阶收敛于0；
  2. 谱密度$f(\lambda)$在$\lambda=0$连续，并且$\mathrm{E}|\varepsilon_t|^r<\infty$ 对某个$r>2$成立，

  则有重对数律

$$\limsup_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_N-\mu)=\sqrt{2\pi f(0)},\quad a.s. \qquad (1.8)$$

$$\liminf_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_N-\mu)=-\sqrt{2\pi f(0)},\quad a.s. \qquad (1.9)$$

- 易见重对数率满足时$(\bar{X}_n-\mu)\cdot o(1)=o(\sqrt{\frac{\ln\ln N}{N}})$，$\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_n-\mu)/o(1)$不收敛。

收敛速度II

- **定理1.4** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$，线性平稳序列$\{X_t\}$由(1.5)定义，谱密度$f(0)\neq 0$. 当以下的条件之一成立时:
  1. 当$k\to\pm\infty$, $\psi_{|k|}$ 以负指数阶收敛于0;
  2. 谱密度$f(\lambda)$在$\lambda=0$连续，并且$\mathrm{E}|\varepsilon_t|^r<\infty$ 对某个$r>2$成立，

  则有重对数律

$$\limsup_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_N-\mu)=\sqrt{2\pi f(0)},\quad a.s. \qquad (1.8)$$

$$\liminf_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_N-\mu)=-\sqrt{2\pi f(0)},\quad a.s. \quad (1.9)$$

- 易见重对数率满足时$(\bar{X}_n-\mu)\cdot o(1)=o(\sqrt{\frac{\ln\ln N}{N}})$，$\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_n-\mu)/o(1)$不收敛。

收敛速度II

- **定理1.4** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的$\mathrm{WN}(0,\sigma^2)$，线性平稳序列$\{X_t\}$由(1.5)定义，谱密度$f(0)\neq 0$. 当以下的条件之一成立时:
  1. 当$k\to\pm\infty$, $\psi_{|k|}$ 以负指数阶收敛于0;
  2. 谱密度$f(\lambda)$在$\lambda=0$连续，并且$\mathrm{E}|\varepsilon_t|^r<\infty$ 对某个$r>2$成立，

  则有重对数律

$$\limsup_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_N-\mu)=\sqrt{2\pi f(0)},\quad a.s. \qquad (1.8)$$

$$\liminf_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_N-\mu)=-\sqrt{2\pi f(0)},\quad a.s. \qquad (1.9)$$

- 易见重对数率满足时$(\bar{X}_n-\mu)\cdot o(1)=o(\sqrt{\frac{\ln\ln N}{N}})$，$\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_n-\mu)/o(1)$不收敛。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

收敛速度II

- **定理1.4** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$，线性平稳序列$\{X_t\}$由(1.5)定义，谱密度$f(0)\neq 0$. 当以下的条件之一成立时:
  1. 当$k\to\pm\infty$, $\psi_{|k|}$ 以负指数阶收敛于0;
  2. 谱密度$f(\lambda)$在$\lambda=0$连续，并且$\mathrm{E}|\varepsilon_t|^r<\infty$ 对某个$r>2$成立，

  则有重对数律

$$\limsup_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_N-\mu)=\sqrt{2\pi f(0)},\quad a.s. \tag{1.8}$$

$$\liminf_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_N-\mu)=-\sqrt{2\pi f(0)},\quad a.s. \tag{1.9}$$

- 易见重对数率满足时$(\bar{X}_n-\mu)\cdot o(1)=o(\sqrt{\frac{\ln\ln N}{N}})$, $\sqrt{\frac{N}{2\ln\ln N}}(\bar{X}_n-\mu)/o(1)$不收敛。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

AR(2)的均值计算

- 令

$$A(z) = (1 - \rho e^{i\theta} \cdot z)(1 - \rho e^{-i\theta} \cdot z)$$

考虑AR(2)模型

$$\begin{aligned} A(\mathscr{B})X_t =& \varepsilon_t \\ X_t =& 2\rho \cos\theta X_{t-1} - \rho^2 X_{t-2} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

- 为模拟方便设$\{\varepsilon_t\}$ iid $\sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$。
-

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^N x_t, \quad \bar{\varepsilon}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^N \varepsilon_t$$

AR(2)的均值计算

- 令

$$A(z) = (1-\rho e^{i\theta}\cdot z)(1-\rho e^{-i\theta}\cdot z)$$

考虑AR(2)模型

$$\begin{aligned} A(\mathscr{B})X_t =& \varepsilon_t \\ X_t =& 2\rho\cos\theta X_{t-1} - \rho^2 X_{t-2} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

- 为模拟方便设$\{\varepsilon_t\}$ iid $\sim$ N$(0,\sigma^2)$。
-

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_t, \quad \bar{\varepsilon}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

AR(2)的均值计算

- 令

$$A(z) = (1 - \rho e^{i\theta} \cdot z)(1 - \rho e^{-i\theta} \cdot z)$$

考虑AR(2)模型

$$\begin{aligned} A(\mathscr{B})X_t =& \varepsilon_t \\ X_t =& 2\rho \cos\theta X_{t-1} - \rho^2 X_{t-2} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

- 为模拟方便设$\{\varepsilon_t\}$ iid $\sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$。
-

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_t, \quad \bar{\varepsilon}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{x}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

AR(2)的均值计算II

- 模型方程两边求平均

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_N =& 2\rho\cos\theta \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k - \rho^2 \frac{1}{N}\sum_{k=-1}^{N-2} x_k + \bar{\varepsilon}_N \\
=& 2\rho\cos\theta \bar{X}_N - \rho^2 \bar{X}_N + \bar{\varepsilon}_N \\
& + 2\rho\cos\theta \frac{1}{N}(x_0 - x_N) - \rho^2 \frac{1}{N}(x_{-1} + x_0 - x_{N-1} - x_{N-2}) \\
\approx& 2\rho\cos\theta \bar{X}_N - \rho^2 \bar{X}_N + \bar{\varepsilon}_N \\
\bar{x}_N \approx& \frac{1}{A(1)}\bar{\varepsilon}_N = \frac{1}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2}\bar{\varepsilon}_N
\end{aligned}
$$

- N较大时$\bar{x}_N$和$\bar{\varepsilon}_t$成正比。

AR(2)的均值计算II

- 模型方程两边求平均

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_N =& 2\rho\cos\theta\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x_k - \rho^2\frac{1}{N}\sum_{k=-1}^{N-2}x_k + \bar{\varepsilon}_N \\
=& 2\rho\cos\theta\bar{X}_N - \rho^2\bar{X}_N + \bar{\varepsilon}_N \\
& + 2\rho\cos\theta\frac{1}{N}(x_0 - x_N) - \rho^2\frac{1}{N}(x_{-1} + x_0 - x_{N-1} - x_{N-2}) \\
\approx& 2\rho\cos\theta\bar{X}_N - \rho^2\bar{X}_N + \bar{\varepsilon}_N \\
\bar{x}_N \approx& \frac{1}{A(1)}\bar{\varepsilon}_N = \frac{1}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\bar{\varepsilon}_N
\end{aligned}
$$

- N较大时$\bar{x}_N$和$\bar{\varepsilon}_t$成正比。

估计收敛性的模拟

- 为了观察$N \to \infty$时$\bar{x}_N$的收敛可以模拟L个值然后观察$\bar{x}_N, N = n_0, n_0 + 1, \ldots, L$ 的变化。
- 为了研究固定N情况下$\bar{X}_N$的精度以至于抽样分布，可以进行M次独立的随机模拟，得到M个$\bar{X}_N$的观测值。这种方法对于难以得到估计量的理论分布的情况是很有用的。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

估计收敛性的模拟

- 为了观察$N \to \infty$时$\bar{x}_N$的收敛可以模拟L个值然后观察$\bar{x}_N, N = n_0, n_0 + 1, \ldots, L$ 的变化。
- 为了研究固定N情况下$\bar{X}_N$的精度以至于抽样分布，可以进行M次独立的随机模拟，得到M个$\bar{X}_N$的观测值。这种方法对于难以得到估计量的理论分布的情况是很有用的。

自协方差函数估计公式

- $$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k}(x_j - \bar{x}_N)(x_{j+k} - \bar{x}_N), \quad 0 \le k \le N-1, \tag{2.2}$$

  $$\hat{\gamma}_{-k} = \hat{\gamma}_k$$

- 样本自相关系数(ACF)估计为

  $$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}, \quad |k| \le N-1 \tag{2.3}$$

- k较大时参与平均的项减少所以$\hat{\gamma}_k$估计误差会随k增大而变大。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

自协方差函数估计公式

- $$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k}(x_j - \bar{x}_N)(x_{j+k} - \bar{x}_N), \quad 0 \le k \le N-1, \tag{2.2}$$
  $$\hat{\gamma}_{-k} = \hat{\gamma}_k$$
- 样本自相关系数(ACF)估计为
  $$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}, \quad |k| \le N-1 \tag{2.3}$$
- k较大时参与平均的项减少所以$\hat{\gamma}_k$估计误差会随k增大而变大。

自协方差函数估计公式

- $$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k}(x_j - \bar{x}_N)(x_{j+k} - \bar{x}_N), \quad 0 \le k \le N-1, \tag{2.2}$$

  $$\hat{\gamma}_{-k} = \hat{\gamma}_k$$

- 样本自相关系数(ACF)估计为

  $$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}, \quad |k| \le N-1 \tag{2.3}$$

- k较大时参与平均的项减少所以$\hat{\gamma}_k$估计误差会随k增大而变大。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

自协方差函数估计公式

- 估计γ_k一般不使用除以$N-k$的估计形式:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{N-k}(x_j - \bar{x}_N)(x_{j+k} - \bar{x}_N) \tag{2.4}$$

因为:

- 我们不对大的k计算$\hat{\gamma}_k$;
- 更重要的是只有除以N的估计式才是正定的。

自协方差函数估计公式

- 估计γ_k一般不使用除以$N-k$的估计形式:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{N-k}(x_j - \bar{x}_N)(x_{j+k} - \bar{x}_N) \tag{2.4}$$

因为:

  - 我们不对大的k计算$\hat{\gamma}_k$;
  - 更重要的是只有除以N的估计式才是正定的。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

自协方差函数估计公式

- 估计γ_k一般不使用除以$N-k$的估计形式:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{N-k}(x_j - \bar{x}_N)(x_{j+k} - \bar{x}_N) \tag{2.4}$$

因为:
  - 我们不对大的k计算$\hat{\gamma}_k$;
  - 更重要的是只有除以N的估计式才是正定的。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

样本自协方差的正定性

- 只要观测$x_1, x_2, \ldots, x_N$不全相同则

$$\hat{\Gamma}_N = (\hat{\gamma}_{k-j})_{k,j=1,2,\ldots,N}$$

正定。

- 令$y_j = x_j - \bar{x}_N$，记

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ 0 & \cdots & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_{N-1} & y_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

则

$$\hat{\Gamma}_N = \frac{1}{N} A A^T$$

- 只要y_j不全是零则A满秩。

样本自协方差的正定性

- 只要观测$x_1, x_2, \ldots, x_N$不全相同则

$$\hat{\Gamma}_N = (\hat{\gamma}_{k-j})_{k,j=1,2,\ldots,N}$$

正定。

- 令$y_j = x_j - \bar{x}_N$，记

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ 0 & \cdots & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_{N-1} & y_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

则

$$\hat{\Gamma}_N = \frac{1}{N} A A^T$$

- 只要y_j不全是零则A满秩。

样本自协方差的正定性

- 只要观测$x_1, x_2, \ldots, x_N$不全相同则

$$\hat{\Gamma}_N = (\hat{\gamma}_{k-j})_{k,j=1,2,\ldots,N}$$

  正定。

- 令$y_j = x_j - \bar{x}_N$，记

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ 0 & \cdots & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_{N-1} & y_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

  则

$$\hat{\Gamma}_N = \frac{1}{N} A A^T$$

- 只要y_j不全是零则A满秩。

样本自协方差的正定性

- 事实上，设$y_1 = \cdots = y_{k-1} = 0$，$y_k \neq 0$，则$A$矩阵左面会出现一个以$y_k$值开始非零的斜面，显然是满秩的。
- 故$x_1, \ldots, x_N$不全相同时$\hat{\Gamma}_N$正定。
- $\hat{\Gamma}_n (1 \leq n \leq N)$作为$\hat{\Gamma}_N$的主子式也是正定的。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

样本自协方差的正定性

- 事实上，设$y_1 = \cdots = y_{k-1} = 0$, $y_k \neq 0$，则A矩阵左面会出现一个以y_k值开始非零的斜面，显然是满秩的。
- 故$x_1, \ldots, x_N$不全相同时$\hat{\Gamma}_N$正定。
- $\hat{\Gamma}_n (1 \leq n \leq N)$作为$\hat{\Gamma}_N$的主子式也是正定的。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

样本自协方差的正定性

- 事实上，设$y_1 = \cdots = y_{k-1} = 0$, $y_k \neq 0$，则A矩阵左面会出现一个以y_k值开始非零的斜面，显然是满秩的。
- 故$x_1, \ldots, x_N$不全相同时$\hat{\Gamma}_N$正定。
- $\hat{\Gamma}_n (1 \leq n \leq N)$作为$\hat{\Gamma}_N$的主子式也是正定的。

$\hat{\gamma}_k$的相合性

- **定理2.1** 设平稳序列的样本自协方差函数$\hat{\gamma}_k$由(2.2)或(2.4)定义.
  1. 如果当$k \to \infty$时$\gamma_k \to 0$, 则对每个确定的k, $\hat{\gamma}_k$是γ_k的渐近无偏估计:
  $$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\hat{\gamma}_k = \gamma_k.$$
  2. 如果$\{X_t\}$是严平稳遍历序列, 则对每个确定的k, $\hat{\gamma}_k$和$\hat{\rho}_k$ 分别是γ_k 和ρ_k 的强相合估计:
  $$\lim_{N\to\infty} \hat{\gamma}_k = \gamma_k \ , a.s., \quad \lim_{N\to\infty} \hat{\rho}_k = \rho_k \ , a.s..$$

$\hat{\gamma}_k$的相合性

- **定理2.1** 设平稳序列的样本自协方差函数$\hat{\gamma}_k$由(2.2)或(2.4)定义.
  1. 如果当$k \to \infty$时$\gamma_k \to 0$, 则对每个确定的k, $\hat{\gamma}_k$是γ_k的渐近无偏估计:

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\hat{\gamma}_k = \gamma_k.$$

  2. 如果$\{X_t\}$是严平稳遍历序列, 则对每个确定的k, $\hat{\gamma}_k$和$\hat{\rho}_k$分别是γ_k和ρ_k的强相合估计:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\gamma}_k = \gamma_k \ , a.s., \qquad \lim_{N\to\infty} \hat{\rho}_k = \rho_k \ , a.s..$$

$\hat{\gamma}_k$的相合性

- **定理2.1** 设平稳序列的样本自协方差函数$\hat{\gamma}_k$由(2.2)或(2.4)定义.
  1. 如果当$k \to \infty$时$\gamma_k \to 0$, 则对每个确定的k, $\hat{\gamma}_k$是γ_k的渐近无偏估计:
  $$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\hat{\gamma}_k = \gamma_k.$$
  2. 如果$\{X_t\}$是严平稳遍历序列, 则对每个确定的k, $\hat{\gamma}_k$和$\hat{\rho}_k$ 分别是γ_k 和ρ_k 的强相合估计:
  $$\lim_{N\to\infty} \hat{\gamma}_k = \gamma_k \ , a.s., \quad \lim_{N\to\infty} \hat{\rho}_k = \rho_k \ , a.s..$$

定理2.1证明

下面只对由(2.2)定义的样本自协方差函数证明定理2.1, 对由(2.4)定义的$\hat{\gamma}_k$的证明是一样的.
设$\mu = EX_1$, 则$\{Y_t\} = \{X_t - \mu\}$ 是零均值的平稳序列. 利用

$$\bar{Y}_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j = \bar{X}_N - \mu$$

得到

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_k =& \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k}(Y_j - \bar{Y}_N)(Y_{j+k} - \bar{Y}_N)\\ =& \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k}[Y_j Y_{j+k} - \bar{Y}_N(Y_{j+k} + Y_j) + \bar{Y}_N^2]. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

定理2.1证明II

$$
\begin{aligned}
\hat{\gamma}_k =& \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k}(Y_j - \bar{Y}_N)(Y_{j+k} - \bar{Y}_N) \\
=& \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k}[Y_j Y_{j+k} - \bar{Y}_N(Y_{j+k} + Y_j) + \bar{Y}_N^2]. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

利用(1.2)得到$E\bar{Y}_N^2 = E(\bar{X}_N - \mu)^2 \to 0$. 利用Schwarz不等式得到

$$
\mathrm{E}|\bar{Y}_N(Y_{j+k} + Y_j)| \le [\mathrm{E}\bar{Y}_N^2 \mathrm{E}(Y_{j+k} + Y_j)^2]^{1/2} \le [4\mathrm{E}\bar{Y}_N^2\gamma_0]^{1/2} \to 0.
$$

所以当$N \to \infty$,

$$
E\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k} E(Y_j Y_{j+k}) + o(1) = \frac{N-k}{N}\gamma_k + o(1) \to \gamma_k.
$$

定理2.1证明III

强相合性的证明：用遍历定理得到

$$\bar{Y}_N \to \mathrm{E} Y_1 = 0, \text{a.s.},$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k}(Y_{j+k}+Y_j) = \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j - \sum_{j=1}^{k} Y_j + \sum_{j=1}^{N-k} Y_j\right)$$

$$= \bar{Y}_N - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} Y_j + \frac{N-k}{N}\bar{Y}_{N-k} \to 0, \text{a.s.},$$

于是，从(2.7)式

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k}[Y_j Y_{j+k} - \bar{Y}_N(Y_{j+k}+Y_j) + \bar{Y}_N^2]. \tag{2.7}$$

可知

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k} Y_j Y_{j+k} + o(1) \to E(Y_1 Y_{1+k}) = \gamma_k, \text{ a.s.}$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

$\hat{\gamma}_k$的渐近分布—线性平稳列

- 只考虑线性序列。
- 设$\{\varepsilon_t\}$是4阶矩有限的独立同分布的WN$(0,\sigma^2)(\sigma^2>0)$, 实数列$\{\psi_k\}$平方可和.
- 线性平稳序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

- $\{X_t\}$有自协方差函数

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \tag{2.9}$$

- $\{X_t\}$有谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{ij\lambda} \right|^2. \tag{2.10}$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

$\hat{\gamma}_k$的渐近分布—线性平稳列

- 只考虑线性序列。
- 设$\{\varepsilon_t\}$是4阶矩有限的独立同分布的WN$(0, \sigma^2)(\sigma^2 > 0)$, 实数列$\{\psi_k\}$平方可和.
- 线性平稳序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

- $\{X_t\}$有自协方差函数

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \tag{2.9}$$

- $\{X_t\}$有谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{ij\lambda} \right|^2. \tag{2.10}$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

$\hat{\gamma}_k$的渐近分布—线性平稳列

- 只考虑线性序列。
- 设$\{\varepsilon_t\}$是4阶矩有限的独立同分布的$\mathrm{WN}(0,\sigma^2)(\sigma^2>0)$，实数列$\{\psi_k\}$平方可和.
- 线性平稳序列

$$X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j},\quad t\in\mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

- $\{X_t\}$有自协方差函数

$$\gamma_k=\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j\psi_{j+k} \tag{2.9}$$

- $\{X_t\}$有谱密度

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j e^{ij\lambda}\right|^2. \tag{2.10}$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

$\hat{\gamma}_k$的渐近分布—线性平稳列

- 只考虑线性序列。
- 设$\{\varepsilon_t\}$是4阶矩有限的独立同分布的WN$(0,\sigma^2)(\sigma^2>0)$, 实数列$\{\psi_k\}$平方可和.
- 线性平稳序列

$$X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j},\quad t\in\mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

- $\{X_t\}$有自协方差函数

$$\gamma_k=\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j\psi_{j+k} \tag{2.9}$$

- $\{X_t\}$有谱密度

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j e^{ij\lambda}\right|^2. \tag{2.10}$$

$\hat{\gamma}_k$的渐近分布—线性平稳列

- 只考虑线性序列。
- 设$\{\varepsilon_t\}$是4阶矩有限的独立同分布的WN$(0, \sigma^2)(\sigma^2 > 0)$，实数列$\{\psi_k\}$平方可和.
- 线性平稳序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

- $\{X_t\}$有自协方差函数

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \tag{2.9}$$

- $\{X_t\}$有谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{ij\lambda} \right|^2. \tag{2.10}$$

$\hat{\gamma}_k$的渐近分布—极限分布

- 设自协方差函数列$\{\gamma_k\}$平方可和。
- 设$\{W_t\}$为独立同分布N(0,1)。
- 令

$$\mu_4 = \mathrm{E}\varepsilon_1^4, \quad M_0 = \frac{1}{\sigma^2}(\mu_4 - \sigma^4)^{1/2} > 0$$

- 定义正态时间序列

$$\xi_j = (M_0\gamma_j)W_0 + \sum_{t=1}^{\infty}(\gamma_{t+j} + \gamma_{t-j})W_t, \quad j \geq 0 \quad (2.11)$$

$$R_j = \sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{t+j} + \rho_{t-j} - 2\rho_t\rho_j)W_t, \quad j \geq 1, \quad (2.12)$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

$\hat{\gamma}_k$的渐近分布—极限分布

- 设自协方差函数列$\{\gamma_k\}$平方可和。
- 设$\{W_t\}$为独立同分布N(0,1)。
- 令

$$\mu_4 = \mathrm{E}\varepsilon_1^4, \quad M_0 = \frac{1}{\sigma^2}(\mu_4 - \sigma^4)^{1/2} > 0$$

- 定义正态时间序列

$$\xi_j = (M_0\gamma_j)W_0 + \sum_{t=1}^{\infty}(\gamma_{t+j} + \gamma_{t-j})W_t, \quad j \geq 0 \quad (2.11)$$

$$R_j = \sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{t+j} + \rho_{t-j} - 2\rho_t\rho_j)W_t, \quad j \geq 1, \quad (2.12)$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

$\hat{\gamma}_k$的渐近分布—极限分布

- 设自协方差函数列$\{\gamma_k\}$平方可和。
- 设$\{W_t\}$为独立同分布N(0,1)。
- 令

$$\mu_4 = \mathrm{E}\varepsilon_1^4, \quad M_0 = \frac{1}{\sigma^2}(\mu_4 - \sigma^4)^{1/2} > 0$$

- 定义正态时间序列

$$\xi_j = (M_0\gamma_j)W_0 + \sum_{t=1}^{\infty}(\gamma_{t+j} + \gamma_{t-j})W_t, \quad j \geq 0 \quad (2.11)$$

$$R_j = \sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{t+j} + \rho_{t-j} - 2\rho_t\rho_j)W_t, \quad j \geq 1, \quad (2.12)$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

$\hat{\gamma}_k$的渐近分布—极限分布

- 设自协方差函数列$\{\gamma_k\}$平方可和。
- 设$\{W_t\}$为独立同分布N(0,1)。
- 令

$$\mu_4 = \mathrm{E}\varepsilon_1^4, \quad M_0 = \frac{1}{\sigma^2}(\mu_4 - \sigma^4)^{1/2} > 0$$

- 定义正态时间序列

$$\xi_j = (M_0\gamma_j)W_0 + \sum_{t=1}^{\infty}(\gamma_{t+j} + \gamma_{t-j})W_t, \quad j \geq 0 \quad (2.11)$$

$$R_j = \sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{t+j} + \rho_{t-j} - 2\rho_t\rho_j)W_t, \quad j \geq 1, \quad (2.12)$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

样本自协方差和自相关的中心极限定理

- **定理2.2** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$，满足$\mu_4 = E\varepsilon_1^4 < \infty$. 如果线性平稳序列(2.8)的谱密度(2.10)平方可积:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(\lambda)]^2 \, d\lambda < \infty,$$

则对任何正整数h，当$N \to \infty$时，有以下结果

1. $\sqrt{N}(\hat{\gamma}_0 - \gamma_0, \hat{\gamma}_1 - \gamma_1, \ldots, \hat{\gamma}_h - \gamma_h)$ 依分布收敛到$(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_h)$.
2. $\sqrt{N}(\hat{\rho}_1 - \rho_1, \hat{\rho}_2 - \rho_2, \ldots, \hat{\rho}_h - \rho_h)$ 依分布收敛到$(R_1, R_2, \ldots, R_h)$.

- 可以据此构造γ_k和ρ_k的近似的区间估计和近似的假设检验。

样本自协方差和自相关的中心极限定理

- **定理2.2** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$，满足$\mu_4 = E\varepsilon_1^4 < \infty$. 如果线性平稳序列(2.8)的谱密度(2.10)平方可积:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(\lambda)]^2 \, d\lambda < \infty,$$

  则对任何正整数h，当$N \to \infty$时，有以下结果
  1. $\sqrt{N}(\hat{\gamma}_0 - \gamma_0, \hat{\gamma}_1 - \gamma_1, \ldots, \hat{\gamma}_h - \gamma_h)$ 依分布收敛到$(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_h)$.
  2. $\sqrt{N}(\hat{\rho}_1 - \rho_1, \hat{\rho}_2 - \rho_2, \ldots, \hat{\rho}_h - \rho_h)$ 依分布收敛到$(R_1, R_2, \ldots, R_h)$.
- 可以据此构造γ_k和ρ_k的近似的区间估计和近似的假设检验。

样本自协方差和自相关的中心极限定理

- **定理2.2** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0, \sigma^2)$，满足$\mu_4 = E\varepsilon_1^4 < \infty$. 如果线性平稳序列(2.8)的谱密度(2.10)平方可积：

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(\lambda)]^2 \, d\lambda < \infty,$$

则对任何正整数h，当$N \to \infty$时，有以下结果

1. $\sqrt{N}(\hat{\gamma}_0 - \gamma_0, \hat{\gamma}_1 - \gamma_1, \ldots, \hat{\gamma}_h - \gamma_h)$ 依分布收敛到$(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_h)$.
2. $\sqrt{N}(\hat{\rho}_1 - \rho_1, \hat{\rho}_2 - \rho_2, \ldots, \hat{\rho}_h - \rho_h)$ 依分布收敛到$(R_1, R_2, \ldots, R_h)$.

- 可以据此构造γ_k和ρ_k的近似的区间估计和近似的假设检验。

样本自协方差和自相关的中心极限定理

- **定理2.2** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的$\mathrm{WN}(0,\sigma^2)$，满足$\mu_4 = E\varepsilon_1^4 < \infty$. 如果线性平稳序列(2.8)的谱密度(2.10)平方可积:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(\lambda)]^2 \, d\lambda < \infty,$$

则对任何正整数h，当$N \to \infty$时，有以下结果

1. $\sqrt{N}(\hat{\gamma}_0 - \gamma_0, \hat{\gamma}_1 - \gamma_1, \ldots, \hat{\gamma}_h - \gamma_h)$ 依分布收敛到$(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_h)$.
2. $\sqrt{N}(\hat{\rho}_1 - \rho_1, \hat{\rho}_2 - \rho_2, \ldots, \hat{\rho}_h - \rho_h)$ 依分布收敛到$(R_1, R_2, \ldots, R_h)$.

- 可以据此构造γ_k和ρ_k的近似的区间估计和近似的假设检验。

自相关检验的例子

- **例2.1**(接第三章例1.1)　对MA(q)序列$\{X_t\}$, 利用定理2.2 得到,只要当$m>q$: $\sqrt{N}\hat{\rho}_m$依分布收敛到R_m的分布。
-

$$R_m=\sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{t+m}+\rho_{t-m}-2\rho_t\rho_m)W_t,\quad m\geq q+1$$

注意$m\geq q+1$时$\rho_m=0, \rho_{t+m}=0$, ρ_{t-m}中的$t-m$应属于$[-q,q]$，所以令$l=t-m$有

$$R_m=\sum_{l=-q}^{q}\rho_l W_{l+m}$$

- R_m为期望为0, 方差为$1+2\rho_1^2+2\rho_2^2+\cdots+2\rho_q^2$的正态分布.
- 在假设H_0: $\{X_t\}$是MA(q)下, 对$m>q$有

$$\Pr\left(\frac{\sqrt{N}|\hat{\rho}_m|}{\sqrt{1+2\rho_1^2+2\rho_2^2+\cdots+2\rho_q^2}}\geq 1.96\right)\approx 0.05.$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

自相关检验的例子

- **例2.1**(接第三章例1.1)　对MA(q)序列$\{X_t\}$, 利用定理2.2 得到,只要当$m > q$: $\sqrt{N}\hat{\rho}_m$依分布收敛到R_m的分布。
-

$$R_m = \sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{t+m} + \rho_{t-m} - 2\rho_t\rho_m)W_t, \quad m \geq q+1$$

注意$m \geq q+1$时$\rho_m = 0, \rho_{t+m} = 0$, ρ_{t-m}中的$t-m$应属于$[-q, q]$，所以令$l = t-m$有

$$R_m = \sum_{l=-q}^{q} \rho_l W_{l+m}$$

- R_m为期望为0, 方差为$1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \cdots + 2\rho_q^2$的正态分布.
- 在假设H_0: $\{X_t\}$是MA(q)下, 对$m > q$有

$$\Pr\left(\frac{\sqrt{N}|\hat{\rho}_m|}{\sqrt{1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \cdots + 2\rho_q^2}} \geq 1.96\right) \approx 0.05.$$

自相关检验的例子

- **例2.1**(接第三章例1.1)　对MA(q)序列$\{X_t\}$, 利用定理2.2 得到,只要当$m > q$: $\sqrt{N}\hat{\rho}_m$依分布收敛到R_m的分布。
-

$$R_m = \sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{t+m} + \rho_{t-m} - 2\rho_t\rho_m)W_t, \quad m \geq q+1$$

注意$m \geq q+1$时$\rho_m = 0, \rho_{t+m} = 0$, ρ_{t-m}中的$t-m$应属于$[-q, q]$，所以令$l = t-m$有

$$R_m = \sum_{l=-q}^{q} \rho_l W_{l+m}$$

- R_m为期望为0, 方差为$1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \cdots + 2\rho_q^2$的正态分布.
- 在假设H_0: $\{X_t\}$是MA(q)下, 对$m > q$有

$$\Pr\left(\frac{\sqrt{N}|\hat{\rho}_m|}{\sqrt{1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \cdots + 2\rho_q^2}} \geq 1.96\right) \approx 0.05.$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

自相关检验的例子

- **例2.1**(接第三章例1.1)　对MA(q)序列$\{X_t\}$, 利用定理2.2 得到,只要当$m > q$: $\sqrt{N}\hat{\rho}_m$依分布收敛到R_m的分布。
-

$$R_m = \sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{t+m} + \rho_{t-m} - 2\rho_t\rho_m)W_t, \quad m \geq q+1$$

注意$m \geq q+1$时$\rho_m = 0, \rho_{t+m} = 0$, ρ_{t-m}中的$t-m$应属于$[-q,q]$，所以令$l = t-m$有

$$R_m = \sum_{l=-q}^{q} \rho_l W_{l+m}$$

- R_m为期望为0, 方差为$1+2\rho_1^2+2\rho_2^2+\cdots+2\rho_q^2$的正态分布.
- 在假设H_0: $\{X_t\}$是MA(q)下, 对$m > q$有

$$\Pr\left(\frac{\sqrt{N}|\hat{\rho}_m|}{\sqrt{1+2\rho_1^2+2\rho_2^2+\cdots+2\rho_q^2}} \geq 1.96\right) \approx 0.05.$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

自相关检验的例子II

- 现在用$\{X_t\}$表示第三章例1.1中差分后的化学浓度数据，在H_0：$\{X_t\}$是MA(q)下，用$\hat{\rho}_k$代替真值ρ_k后分别对$q=0,1$计算出

$$T_q(m) = \frac{\sqrt{N}\hat{\rho}_{m+q}}{\sqrt{1+2\hat{\rho}_1^2+2\hat{\rho}_2^2+\cdots+2\hat{\rho}_q^2}}, \quad m=1,\ldots,6.$$

$m=$	1	2	3	4	5	6
$q=0$	-5.778	0.281	-0.951	-0.121	-1.071	-0.116
$q=1$	0.243	-0.821	-0.104	-0.925	-0.100	1.631

- 在$q=0$的假设下，$|T_0(1)|=5.778>1.96$，所以应当否定$q=0$.

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

自相关检验的例子II

- 现在用$\{X_t\}$表示第三章例1.1中差分后的化学浓度数据，在H_0：$\{X_t\}$是MA(q)下，用$\hat{\rho}_k$代替真值ρ_k后分别对$q=0,1$计算出

$$T_q(m) = \frac{\sqrt{N}\hat{\rho}_{m+q}}{\sqrt{1+2\hat{\rho}_1^2+2\hat{\rho}_2^2+\cdots+2\hat{\rho}_q^2}}, \quad m=1,\ldots,6.$$

$m=$	1	2	3	4	5	6
$q=0$	-5.778	0.281	-0.951	-0.121	-1.071	-0.116
$q=1$	0.243	-0.821	-0.104	-0.925	-0.100	1.631

- 在$q=0$的假设下,$|T_0(1)|=5.778>1.96$，所以应当否定$q=0$.

自相关检验的例子III

-

$m=$	1	2	3	4	5	6
$q=0$	-5.778	0.281	-0.951	-0.121	-1.071	-0.116
$q=1$	0.243	-0.821	-0.104	-0.925	-0.100	1.631

- 实际工作中人们还计算概率

$$p = P(|\sqrt{N}\hat{\rho}_1| \geq |-5.778|),$$

并且把p称为检验的p值. 明显p值越小,数据提供的否定原假设的依据越充分. 现在在H_0下，$\sqrt{N}\hat{\rho}_1$近似服从标准正态分布, 所以p值几乎是零, 因而必须拒绝$\{X_t\}$是MA(0)的假设.

- 取$q=1$时$|T_1(m)|<1.96(1\leq m\leq 6)$, 所以不能拒绝$\{X_t\}$是MA(1)的假设.

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

自相关检验的例子III

-

$m=$	1	2	3	4	5	6
$q=0$	-5.778	0.281	-0.951	-0.121	-1.071	-0.116
$q=1$	0.243	-0.821	-0.104	-0.925	-0.100	1.631

- 实际工作中人们还计算概率

$$p = P(|\sqrt{N}\hat{\rho}_1| \geq |-5.778|),$$

并且把p称为检验的p值. 明显p值越小,数据提供的否定原假设的依据越充分. 现在在H_0下，$\sqrt{N}\hat{\rho}_1$近似服从标准正态分布, 所以p值几乎是零, 因而必须拒绝$\{X_t\}$是MA(0)的假设.

- 取$q=1$时$|T_1(m)|<1.96(1\leq m\leq 6)$, 所以不能拒绝$\{X_t\}$是MA(1)的假设.

自相关检验的例子III

-

$m=$	1	2	3	4	5	6
$q=0$	-5.778	0.281	-0.951	-0.121	-1.071	-0.116
$q=1$	0.243	-0.821	-0.104	-0.925	-0.100	1.631

- 实际工作中人们还计算概率

$$p = P(|\sqrt{N}\hat{\rho}_1| \geq |-5.778|),$$

并且把p称为检验的p值. 明显p值越小,数据提供的否定原假设的依据越充分. 现在在H_0下，$\sqrt{N}\hat{\rho}_1$近似服从标准正态分布, 所以p值几乎是零, 因而必须拒绝$\{X_t\}$是MA(0)的假设.

- 取$q=1$时$|T_1(m)| < 1.96 (1 \leq m \leq 6)$, 所以不能拒绝$\{X_t\}$是MA(1)的假设.

谱密度平方可积的充要条件

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

- 对于实际工作者来讲谱密度平方可积的条件通常很难验证，于是希望能把定理2.2中谱密度平方可积的条件改加在自协方差函数$\{\gamma_k\}$的收敛速度上.
- **定理2.3** 对任一平稳序列$\{X_t\}$, 它的自协方差函数平方可和的充分必要条件是它的谱密度平方可积.
- 证明略（见课本）。
- **推论2.4** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的白噪声WN$(0,\sigma^2)$, 满足$\mu_4 = \mathrm{E}\varepsilon_t^4 < \infty$. 如果线性平稳序列(2.8)的自协方差函数平方可和: $\sum_k \gamma_k^2 < \infty$, 则定理2.2中的结论成立.

谱密度平方可积的充要条件

- 对于实际工作者来讲谱密度平方可积的条件通常很难验证，于是希望能把定理2.2中谱密度平方可积的条件改加在自协方差函数$\{\gamma_k\}$的收敛速度上.
- **定理2.3** 对任一平稳序列$\{X_t\}$，它的自协方差函数平方可和的充分必要条件是它的谱密度平方可积.
- 证明略（见课本）。
- **推论2.4** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的白噪声WN$(0,\sigma^2)$，满足$\mu_4 = \mathrm{E}\varepsilon_t^4 < \infty$. 如果线性平稳序列(2.8)的自协方差函数平方可和: $\sum_k \gamma_k^2 < \infty$，则定理2.2中的结论成立.

谱密度平方可积的充要条件

- 对于实际工作者来讲谱密度平方可积的条件通常很难验证，于是希望能把定理2.2中谱密度平方可积的条件改加在自协方差函数$\{\gamma_k\}$的收敛速度上.
- **定理2.3** 对任一平稳序列$\{X_t\}$，它的自协方差函数平方可和的充分必要条件是它的谱密度平方可积.
- 证明略（见课本）。
- **推论2.4** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的白噪声WN$(0,\sigma^2)$，满足$\mu_4 = \mathrm{E}\varepsilon_t^4 < \infty$. 如果线性平稳序列(2.8)的自协方差函数平方可和: $\sum_k \gamma_k^2 < \infty$，则定理2.2中的结论成立.

谱密度平方可积的充要条件

- 对于实际工作者来讲谱密度平方可积的条件通常很难验证，于是希望能把定理2.2中谱密度平方可积的条件改加在自协方差函数$\{\gamma_k\}$的收敛速度上.
- **定理2.3**　对任一平稳序列$\{X_t\}$，它的自协方差函数平方可和的充分必要条件是它的谱密度平方可积.
- 证明略（见课本）。
- **推论2.4**　设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的白噪声WN$(0, \sigma^2)$，满足$\mu_4 = \mathrm{E}\varepsilon_t^4 < \infty$. 如果线性平稳序列(2.8)的自协方差函数平方可和: $\sum_k \gamma_k^2 < \infty$，则定理2.2中的结论成立.

ψ_k快速收敛条件下的中心极限定理

- 定理2.2 要求白噪声的方差有4阶矩. 下面关于线性平稳序列的样本自相关系数的中心极限定理不要求噪声项的4阶矩有限.
- **定理2.5**([26])　设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$, 线性平稳序列$\{X_t\}$由(2.8)定义. 如果自协方差函数$\{\gamma_k\}$平方可和, 并且对某个常数$\alpha > 0.5$,

$$m^\alpha \sum_{|k|\geq m} \psi_k^2 \to 0, \quad m \to \infty, \tag{2.13}$$

则对任何正整数h, 当$N \to \infty$时

$$\sqrt{N}(\hat{\rho}_1 - \rho_1, \hat{\rho}_2 - \rho_2, \ldots, \hat{\rho}_h - \rho_h)$$

依分布收敛到

$$(R_1, R_2, \cdots, R_h).$$

- ARMA序列的$\{\psi_j\}$满足(2.13)所以ARMA序列的白噪声列是独立同分布序列时定理2.5结论成立。

ψ_k快速收敛条件下的中心极限定理

- 定理2.2 要求白噪声的方差有4阶矩. 下面关于线性平稳序列的样本自相关系数的中心极限定理不要求噪声项的4阶矩有限.
- **定理2.5**([26]) 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$, 线性平稳序列$\{X_t\}$由(2.8)定义. 如果自协方差函数$\{\gamma_k\}$平方可和, 并且对某个常数$\alpha > 0.5$,

$$m^\alpha \sum_{|k|\geq m} \psi_k^2 \ \to \ 0, \quad m \to \infty, \tag{2.13}$$

则对任何正整数h, 当$N \to \infty$时

$$\sqrt{N}(\hat{\rho}_1 - \rho_1, \hat{\rho}_2 - \rho_2, \ldots, \hat{\rho}_h - \rho_h)$$

依分布收敛到

$$(R_1, R_2, \cdots, R_h).$$

- ARMA序列的$\{\psi_j\}$满足(2.13)所以ARMA序列的白噪声列是独立同分布序列时定理2.5结论成立。

ψ_k快速收敛条件下的中心极限定理

- 定理2.2 要求白噪声的方差有4阶矩. 下面关于线性平稳序列的样本自相关系数的中心极限定理不要求噪声项的4阶矩有限.
- **定理2.5**([26]) 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$, 线性平稳序列$\{X_t\}$由(2.8)定义. 如果自协方差函数$\{\gamma_k\}$平方可和, 并且对某个常数$\alpha > 0.5$,
$$m^\alpha \sum_{|k|\geq m} \psi_k^2 \to 0, \quad m \to \infty, \tag{2.13}$$
则对任何正整数h, 当$N \to \infty$时
$$\sqrt{N}(\hat\rho_1 - \rho_1, \hat\rho_2 - \rho_2, \ldots, \hat\rho_h - \rho_h)$$
依分布收敛到
$$(R_1, R_2, \cdots, R_h).$$
- ARMA序列的$\{\psi_j\}$满足(2.13)所以ARMA序列的白噪声列是独立同分布序列时定理2.5结论成立。

关于独立同分布列的中心极限定理

- **推论2.6.** 如果$\{X_t\}$是独立同分布的白噪声,

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k}(x_t - \bar{x}_N)(x_{t+k} - \bar{x}_N)}{\sum_{t=1}^{N}(x_t - \bar{x}_N)^2}$$

是样本自相关系数, 则对任何正整数h

1.
$$\sqrt{N}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \cdots, \hat{\rho}_h)$$
依分布收敛到多元标准正态分布$N(0, I_h)$. 这里, I_h是$h \times h$的单位矩阵.

2. 如果$\mu_4 = EX_t^4 < \infty$, 则
$$\sqrt{N}(\hat{\gamma}_0 - \sigma^2, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_h)$$
依分布收敛到
$$\sigma^2(M_0 W_0, W_1, \ldots, W_h).$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

关于独立同分布列的中心极限定理

- **推论2.6.** 如果$\{X_t\}$是独立同分布的白噪声,

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k}(x_t - \bar{x}_N)(x_{t+k} - \bar{x}_N)}{\sum_{t=1}^{N}(x_t - \bar{x}_N)^2}$$

是样本自相关系数, 则对任何正整数h

1. $$\sqrt{N}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \cdots, \hat{\rho}_h)$$

   依分布收敛到多元标准正态分布$N(0, I_h)$. 这里, I_h是$h \times h$的单位矩阵.

2. 如果$\mu_4 = EX_t^4 < \infty$, 则

   $$\sqrt{N}(\hat{\gamma}_0 - \sigma^2, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_h)$$

   依分布收敛到

   $$\sigma^2(M_0 W_0, W_1, \ldots, W_h).$$

关于独立同分布列的中心极限定理

- **推论2.6.** 如果$\{X_t\}$是独立同分布的白噪声，

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k}(x_t - \bar{x}_N)(x_{t+k} - \bar{x}_N)}{\sum_{t=1}^{N}(x_t - \bar{x}_N)^2}$$

是样本自相关系数，则对任何正整数h

1. $$\sqrt{N}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \cdots, \hat{\rho}_h)$$

   依分布收敛到多元标准正态分布$N(0, I_h)$. 这里，I_h是$h \times h$的单位矩阵.

2. 如果$\mu_4 = EX_t^4 < \infty$，则

   $$\sqrt{N}(\hat{\gamma}_0 - \sigma^2, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_h)$$

   依分布收敛到

   $$\sigma^2(M_0 W_0, W_1, \ldots, W_h).$$

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

推论2.6证明

- 对白噪声，$\gamma_0 = \sigma^2$，

$$R_j = \sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{t+j} + \rho_{t-j} - 2\rho_t\rho_j)W_t = W_j, j \geq 1$$

$$\begin{aligned}\xi_j =&(M_0\gamma_j)W_0 + \sum_{t=1}^{\infty}(\gamma_{t+j} + \gamma_{t-j})W_t\\ =&\gamma_0 W_j = \sigma^2 W_j\\ \xi_0 =&(M_0\gamma_0)W_0 + \sum_{t=1}^{\infty}(\gamma_{t+0} + \gamma_{t-0})W_t\\ =&M_0\gamma_0 W_0 = \sigma^2 M_0 W_0\end{aligned}$$

- 定理2.5的条件满足。第二条满足推论2.4的条件。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

推论2.6证明

- 对白噪声，$\gamma_0 = \sigma^2$，

$$
\begin{aligned}
R_j &= \sum_{t=1}^{\infty}(\rho_{t+j} + \rho_{t-j} - 2\rho_t\rho_j)W_t = W_j, j \geq 1 \\
\xi_j &= (M_0\gamma_j)W_0 + \sum_{t=1}^{\infty}(\gamma_{t+j} + \gamma_{t-j})W_t \\
&= \gamma_0 W_j = \sigma^2 W_j \\
\xi_0 &= (M_0\gamma_0)W_0 + \sum_{t=1}^{\infty}(\gamma_{t+0} + \gamma_{t-0})W_t \\
&= M_0\gamma_0 W_0 = \sigma^2 M_0 W_0
\end{aligned}
$$

- 定理2.5的条件满足。第二条满足推论2.4的条件。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

AR(2)模型实例

- 首先用图形表示N不同时$\hat{\gamma}_k$的误差。
- 然后重复$M = 1000$次计算1000个$\hat{\gamma}_k$的标准差(称为标准误差)。发现N增大时标准误差减小。
- 误差随N减小的速度为$N^{-1/2}$。
- 根离单位圆近的模型其估计标准误差大。

AR(2)模型实例

- 首先用图形表示N不同时$\hat{\gamma}_k$的误差。
- 然后重复$M = 1000$次计算1000个$\hat{\gamma}_k$的标准差(称为标准误差)。发现N增大时标准误差减小。
- 误差随N减小的速度为$N^{-1/2}$。
- 根离单位圆近的模型其估计标准误差大。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

AR(2)模型实例

- 首先用图形表示N不同时$\hat{\gamma}_k$的误差。
- 然后重复$M = 1000$次计算1000个$\hat{\gamma}_k$的标准差(称为标准误差)。发现N增大时标准误差减小。
- 误差随N减小的速度为$N^{-1/2}$。
- 根离单位圆近的模型其估计标准误差大。

AR(2)模型实例

- 首先用图形表示N不同时$\hat{\gamma}_k$的误差。
- 然后重复$M = 1000$次计算1000个$\hat{\gamma}_k$的标准差(称为标准误差)。发现N增大时标准误差减小。
- 误差随N减小的速度为$N^{-1/2}$。
- 根离单位圆近的模型其估计标准误差大。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

白噪声的χ^2检验

- 若$\{X_t\}$是独立同分布的白噪声，根据推论2.6, N足够大时

$$\sqrt{N}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots, \hat{\rho}_m)$$

服从iid标准正态分布。于是

- $$\hat{\chi}^2(m) \triangleq N(\hat{\rho}_1^2 + \hat{\rho}_2^2 + \cdots + \hat{\rho}_m^2)$$

近似服从$\chi^2(m)$分布。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

白噪声的χ^2检验

- 若$\{X_t\}$是独立同分布的白噪声，根据推论2.6, N足够大时

$$\sqrt{N}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots, \hat{\rho}_m)$$

服从iid标准正态分布。于是

- $$\hat{\chi}^2(m) \triangleq N(\hat{\rho}_1^2 + \hat{\rho}_2^2 + \cdots + \hat{\rho}_m^2)$$

近似服从$\chi^2(m)$分布。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

白噪声的χ^2检验II

- 要检验$H_0:\{X_t\}$为独立同分布白噪声，可以用否定域

$$\{\hat{\chi}^2(m) > \lambda_\alpha(m)\}$$

其中$\lambda_\alpha(m)$为$\chi^2(m)$的右侧α分位数。

- 检验的p值为

$$\Pr(\chi^2(m) > \hat{\chi}^2(m)) = 1 - F_m(\hat{\chi}^2(m))$$

其中$F_m(.)$为$\chi^2(m)$分布函数。

- 虽然H_0要求$\{X_t\}$独立同分布，此方法可以用作一般性的白噪声检验。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

白噪声的χ^2检验II

- 要检验$H_0: \{X_t\}$为独立同分布白噪声，可以用否定域
$$\{\hat{\chi}^2(m) > \lambda_\alpha(m)\}$$
其中$\lambda_\alpha(m)$为$\chi^2(m)$的右侧α分位数。
- 检验的p值为
$$\Pr(\chi^2(m) > \hat{\chi}^2(m)) = 1 - F_m(\hat{\chi}^2(m))$$
其中$F_m(.)$为$\chi^2(m)$分布函数。
- 虽然H_0要求$\{X_t\}$独立同分布，此方法可以用作一般性的白噪声检验。

白噪声的χ^2检验II

- 要检验$H_0:\{X_t\}$为独立同分布白噪声，可以用否定域
$$\{\hat{\chi}^2(m) > \lambda_\alpha(m)\}$$
其中$\lambda_\alpha(m)$为$\chi^2(m)$的右侧α分位数。
- 检验的p值为
$$\Pr(\chi^2(m) > \hat{\chi}^2(m)) = 1 - F_m(\hat{\chi}^2(m))$$
其中$F_m(.)$为$\chi^2(m)$分布函数。
- 虽然H_0要求$\{X_t\}$独立同分布，此方法可以用作一般性的白噪声检验。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

白噪声的χ^2检验III

- 上述检验叫做Box-Pierce检验。
- 类似可以使用统计量

$$\hat{\chi}^2_{\mathrm{LB}}(m) \triangleq N(N-1)\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_k^2}{N-k}$$

在H_0下也近似服从χ^2_m分布。
- 相应的检验称为Ljung-Box检验。

白噪声的χ^2检验III

- 上述检验叫做Box-Pierce检验。
- 类似可以使用统计量

$$\hat{\chi}^2_{\text{LB}}(m) \triangleq N(N-1)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_k^2}{N-k}$$

在H_0下也近似服从χ^2_m分布。

- 相应的检验称为Ljung-Box检验。

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

白噪声的χ^2检验III

- 上述检验叫做Box-Pierce检验。
- 类似可以使用统计量

$$\hat{\chi}^2_{\mathrm{LB}}(m) \triangleq N(N-1)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_k^2}{N-k}$$

在H_0下也近似服从χ^2_m分布。
- 相应的检验称为Ljung-Box检验。

AR(2)和MA(1)模拟数据的检验

- 对AR(2)模型取不同根离单位圆距离试验。根离单位圆越近与白噪声差别越大。
- 对MA(1)模型用不同b模拟。b接近于1时与白噪声差别变明显。
- 关于$\hat{\chi}^2(m)$中项数m的选取：$m=5$比$m=20$有效。注意以ARMA模型为例，当k较大时ρ_k已经很小，所以$\hat{\rho}_k^2$贡献不大，取太大的m容易使检验不敏感。
- 演示

AR(2)和MA(1)模拟数据的检验

- 对AR(2)模型取不同根离单位圆距离试验。根离单位圆越近与白噪声差别越大。
- 对MA(1)模型用不同b模拟。b接近于1时与白噪声差别变明显。
- 关于$\hat{\chi}^2(m)$中项数m的选取：$m=5$比$m=20$有效。注意以ARMA模型为例，当k较大时ρ_k已经很小，所以$\hat{\rho}_k^2$贡献不大，取太大的m容易使检验不敏感。
- 演示

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验

AR(2)和MA(1)模拟数据的检验

- 对AR(2)模型取不同根离单位圆距离试验。根离单位圆越近与白噪声差别越大。
- 对MA(1)模型用不同b模拟。b接近于1时与白噪声差别变明显。
- 关于$\hat{\chi}^2(m)$中项数m的选取：$m=5$比$m=20$有效。注意以ARMA模型为例，当k较大时ρ_k已经很小，所以$\hat{\rho}_k^2$贡献不大，取太大的m容易使检验不敏感。
- 演示

AR(2)和MA(1)模拟数据的检验

- 对AR(2)模型取不同根离单位圆距离试验。根离单位圆越近与白噪声差别越大。
- 对MA(1)模型用不同b模拟。b接近于1时与白噪声差别变明显。
- 关于$\hat{\chi}^2(m)$中项数m的选取：$m=5$比$m=20$有效。注意以ARMA模型为例，当k较大时ρ_k已经很小，所以$\hat{\rho}_k^2$贡献不大，取太大的m容易使检验不敏感。
- 演示

均值的估计
相合性
中心极限定理
收敛速度
$\bar{X}_N$的模拟计算
自协方差函数的估计
自协方差估计公式及正定性
$\hat{\gamma}_k$的相合性
$\hat{\gamma}_k$的渐近分布
模拟计算
白噪声检验
白噪声的χ^2检验