应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2017年秋季学期

q步相关

- 平稳序列$\{X_t\}$的自协方差函数若满足$\gamma_q \neq 0$, $\gamma_k = 0, k > q$，则称$\{X_t\}$是q步相关的。
- 有限项的线性平稳列具有q步相关性，称为滑动平均模型。

q步相关

- 平稳序列$\{X_t\}$的自协方差函数若满足$\gamma_q \neq 0$, $\gamma_k = 0, k > q$，则称$\{X_t\}$是q步相关的。
- 有限项的线性平稳列具有q步相关性，称为滑动平均模型。

滑动平均模型的例子

- 每隔2小时记录的化学反应数据时间序列$\{x_t, t = 1, \ldots, 197\}$。
- 一阶差分得

$$y_t = x_t - x_{t-1}, t = 2, \ldots, 197$$

- $\{y_t\}$的样本自相关系数列呈现截尾性。(见演示)
- 可以拟合

$$Y_t = \varepsilon_t + \hat{b}\varepsilon_{t-1}, t \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

- 模型特点是$\{\gamma_k\}$ 1步截尾。

滑动平均模型的例子

- 每隔2小时记录的化学反应数据时间序列$\{x_t, t = 1, \ldots, 197\}$。
- 一阶差分得

$$y_t = x_t - x_{t-1}, t = 2, \ldots, 197$$

- $\{y_t\}$的样本自相关系数列呈现截尾性。(见演示)
- 可以拟合

$$Y_t = \varepsilon_t + \hat{b}\varepsilon_{t-1}, t \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

- 模型特点是$\{\gamma_k\}$ 1步截尾。

滑动平均模型的例子

- 每隔2小时记录的化学反应数据时间序列$\{x_t, t=1,\ldots,197\}$。
- 一阶差分得

$$y_t = x_t - x_{t-1}, t = 2, \ldots, 197$$

- $\{y_t\}$的样本自相关系数列呈现截尾性。(见演示)
- 可以拟合

$$Y_t = \varepsilon_t + \hat{b}\varepsilon_{t-1}, t \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

- 模型特点是$\{\gamma_k\}$ 1步截尾。

滑动平均模型的例子

- 每隔2小时记录的化学反应数据时间序列$\{x_t, t = 1, \dots, 197\}$。
- 一阶差分得

$$y_t = x_t - x_{t-1}, t = 2, \dots, 197$$

- $\{y_t\}$的样本自相关系数列呈现截尾性。(见演示)
- 可以拟合

$$Y_t = \varepsilon_t + \hat{b}\varepsilon_{t-1}, t \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

- 模型特点是$\{\gamma_k\}$ 1步截尾。

滑动平均模型的例子

- 每隔2小时记录的化学反应数据时间序列$\{x_t, t = 1, \ldots, 197\}$。
- 一阶差分得

$$y_t = x_t - x_{t-1}, t = 2, \ldots, 197$$

- $\{y_t\}$的样本自相关系数列呈现截尾性。(见演示)
- 可以拟合

$$Y_t = \varepsilon_t + \hat{b}\varepsilon_{t-1}, t \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

- 模型特点是$\{\gamma_k\}$ 1步截尾。

MA(q)模型和MA(q)序列

- **定义1.1** 设$\{\varepsilon_t\}$ 是WN$(0,\sigma^2)$, 如果实数$b_1, b_2, \ldots, b_q$ $(b_q \neq 0)$使得

$$B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \neq 0, \ |z| < 1,$$

则称

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

是q 阶滑动平均模型, 简称为MA(q)模型;

- 称由(1.2)决定的平稳序列$\{X_t\}$是滑动平均序列, 简称为MA(q)序列.
- 如果进一步要求多项式$B(z)$在单位圆上也没有零点: $B(z) \neq 0$ 当$|z| \leq 1$, 则称(1.2)是可逆的MA(q)模型, 称相应的平稳序列是可逆的MA(q)序列.

MA(q)模型和MA(q)序列

- **定义1.1** 设$\{\varepsilon_t\}$ 是WN$(0,\sigma^2)$, 如果实数$b_1, b_2, \dots, b_q$ $(b_q \neq 0)$使得

$$B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \neq 0, \ |z| < 1,$$

则称

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

是q 阶滑动平均模型, 简称为MA(q)模型;
- 称由(1.2)决定的平稳序列$\{X_t\}$是滑动平均序列, 简称为MA(q)序列.
- 如果进一步要求多项式$B(z)$在单位圆上也没有零点: $B(z) \neq 0$ 当$|z| \leq 1$, 则称(1.2)是可逆的MA(q)模型, 称相应的平稳序列是可逆的MA(q)序列.

MA(q)模型和MA(q)序列

- **定义1.1** 设$\{\varepsilon_t\}$ 是WN$(0,\sigma^2)$, 如果实数$b_1, b_2, \ldots, b_q$ $(b_q \neq 0)$使得

$$B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \neq 0, \ |z| < 1,$$

则称

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

是q 阶滑动平均模型, 简称为MA(q)模型;

- 称由(1.2)决定的平稳序列$\{X_t\}$是滑动平均序列, 简称为MA(q)序列.
- 如果进一步要求多项式$B(z)$在单位圆上也没有零点: $B(z) \neq 0$ 当$|z| \leq 1$, 则称(1.2)是可逆的MA(q)模型, 称相应的平稳序列是可逆的MA(q)序列.

MA的特征

- 低阶的MA与AR相比较光滑(滑动平均)，振荡较轻。
- 稳定性较好。
- 高阶的MA可以模拟AR的特征。
- 用推移算子把模型写为

$$X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

- 对于可逆MA，$B^{-1}(z)$有Taylor展式

$$B^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j z^j, \quad |z| \le 1 + \delta \ (\delta > 0)$$

所以

$$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j X_{t-j} \tag{1.4}$$

MA的特征

- 低阶的MA与AR相比较光滑(滑动平均)，振荡较轻。
- 稳定性较好。
- 高阶的MA可以模拟AR的特征。
- 用推移算子把模型写为

$$X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

- 对于可逆MA，$B^{-1}(z)$有Taylor展式

$$B^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j z^j, \quad |z| \le 1 + \delta \ (\delta > 0)$$

所以

$$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j X_{t-j} \tag{1.4}$$

MA的特征

- 低阶的MA与AR相比较光滑(滑动平均)，振荡较轻。
- 稳定性较好。
- 高阶的MA可以模拟AR的特征。
- 用推移算子把模型写为

$$X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

- 对于可逆MA，$B^{-1}(z)$有Taylor展式

$$B^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j z^j, \quad |z| \le 1 + \delta \ (\delta > 0)$$

所以

$$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j X_{t-j} \tag{1.4}$$

MA的特征

- 低阶的MA与AR相比较光滑(滑动平均)，振荡较轻。
- 稳定性较好。
- 高阶的MA可以模拟AR的特征。
- 用推移算子把模型写为

$$X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

- 对于可逆MA，$B^{-1}(z)$有Taylor展式

$$B^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j z^j, \quad |z| \leq 1 + \delta \ (\delta > 0)$$

所以

$$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j X_{t-j} \tag{1.4}$$

MA的特征

- 低阶的MA与AR相比较光滑(滑动平均)，振荡较轻。
- 稳定性较好。
- 高阶的MA可以模拟AR的特征。
- 用推移算子把模型写为

$$X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

- 对于可逆MA，$B^{-1}(z)$有Taylor展式

$$B^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j z^j, \quad |z| \le 1 + \delta \ (\delta > 0)$$

所以

$$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j X_{t-j} \tag{1.4}$$

MA序列的自协方差函数

- 记$b_0 = 1$，则对MA(q)序列有$\mathrm{E}X_t = 0$，

$$\gamma_k = \mathrm{E}(X_t X_{t+k}) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}, & 0 \le k \le q \\ 0, & k > q \end{cases} \tag{1.5}$$

MA序列的谱密度

- **定理1.1** MA(q)序列$\{X_t\}$的自协方差函数是q步截尾的：

$$\gamma_q = \sigma^2 b_q \neq 0, \quad \gamma_k = 0, \ |k| > q. \tag{1.6}$$

并且有谱密度

$$\begin{aligned} f(\lambda) =& \frac{\sigma^2}{2\pi} |B(e^{i\lambda})|^2 \\ =& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \gamma_k e^{-ik\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

- (1.7)的第一条可以用线性平稳列的定理1.7.2或用谱密度定义直接证明。第二条用自协方差绝对可和时谱密度公式(定理2.3.1) 得到也可以用谱密度定义得到。

MA序列的谱密度

- **定理1.1** MA(q)序列$\{X_t\}$的自协方差函数是q步截尾的：

$$\gamma_q = \sigma^2 b_q \neq 0, \quad \gamma_k = 0, \ |k| > q. \qquad (1.6)$$

并且有谱密度

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} |B(e^{i\lambda})|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \gamma_k e^{-ik\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \qquad (1.7)$$

- (1.7)的第一条可以用线性平稳列的定理1.7.2或用谱密度定义直接证明。第二条用自协方差绝对可和时谱密度公式(定理2.3.1) 得到也可以用谱密度定义得到。

MA(q)序列的充要条件

- MA(q)序列是自协方差函数q步截尾的，反之若平稳列$\{X_t\}$自协方差函数q步截尾则其必为MA(q)序列。
- **定理1.3** 设零均值平稳序列$\{X_t\}$有自协方差函数$\{\gamma_k\}$，则$\{X_t\}$是MA(q)序列的充分必要条件是

$$\gamma_q \neq 0, \ \gamma_k = 0, \ |k| > q.$$

- 只需要证明充分性。
- 证明需要一个复变函数引理。

MA(q)序列的充要条件

- MA(q)序列是自协方差函数q步截尾的，反之若平稳列$\{X_t\}$自协方差函数q步截尾则其必为MA(q)序列。
- **定理1.3** 设零均值平稳序列$\{X_t\}$有自协方差函数$\{\gamma_k\}$，则$\{X_t\}$是MA(q)序列的充分必要条件是

$$\gamma_q \neq 0, \; \gamma_k = 0, \; |k| > q.$$

- 只需要证明充分性。
- 证明需要一个复变函数引理。

MA(q)序列的充要条件

- MA(q)序列是自协方差函数q步截尾的，反之若平稳列$\{X_t\}$自协方差函数q步截尾则其必为MA(q)序列。
- **定理1.3** 设零均值平稳序列$\{X_t\}$有自协方差函数$\{\gamma_k\}$，则$\{X_t\}$是MA(q)序列的充分必要条件是

$$\gamma_q \neq 0, \ \gamma_k = 0, \ |k| > q.$$

- 只需要证明充分性。
- 证明需要一个复变函数引理。

MA(q)序列的充要条件

- MA(q)序列是自协方差函数q步截尾的，反之若平稳列$\{X_t\}$自协方差函数q步截尾则其必为MA(q)序列。
- **定理1.3** 设零均值平稳序列$\{X_t\}$有自协方差函数$\{\gamma_k\}$，则$\{X_t\}$是MA(q)序列的充分必要条件是

$$\gamma_q \neq 0,\ \gamma_k = 0,\ |k| > q.$$

- 只需要证明充分性。
- 证明需要一个复变函数引理。

引理1.2

- **引理1.2** 设实常数$\{c_j\}$使得$c_q \neq 0$ 和
$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-q}^{q} c_j e^{-ij\lambda} \geq 0, \lambda \in [-\pi, \pi],$$
则有惟一的实系数多项式：
$$B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \neq 0,\ |z| < 1,\ b_q \neq 0. \qquad (1.8)$$
使得
$$g(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|B(e^{i\lambda})|^2.$$
这里σ^2为某个正常数.
- 证明时，令$G(z) = \sum_{j=-q}^{q} c_j z^{j+q}$则$G(z)$的$2q$ 个根中z_1是根必有z_1^{-1}也是根。$z_1 \neq \pm 1$时$z_1^{-1} \neq z_1$。把这样成对的根只取其中一个且要求不在单位圆内即可组成$B(.)$。详见谢衷洁《时间序列分析》P89–P92。

引理1.2

- **引理1.2** 设实常数$\{c_j\}$使得$c_q \neq 0$ 和
$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-q}^{q} c_j e^{-ij\lambda} \geq 0, \lambda \in [-\pi, \pi],$$
则有惟一的实系数多项式：
$$B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \neq 0,\ |z| < 1,\ b_q \neq 0. \qquad (1.8)$$
使得
$$g(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|B(e^{i\lambda})|^2.$$
这里σ^2为某个正常数.
- 证明时，令$G(z) = \sum_{j=-q}^{q} c_j z^{j+q}$则$G(z)$的$2q$ 个根中z_1是根必有z_1^{-1}也是根。$z_1 \neq \pm 1$时$z_1^{-1} \neq z_1$。把这样成对的根只取其中一个且要求不在单位圆内即可组成$B(.)$。详见谢衷洁《时间序列分析》P89–P92。

定理1.3证明

- 由自协方差绝对可和时谱密度公式得

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \gamma_k e^{-ik\lambda}$$

- 由引理，

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |B(e^{-i\lambda})|^2, \quad B(z)\text{单位圆内没有根.}$$

- 如果$B(z)$在单位圆内和单位圆上都没有根，则可定义$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathscr{B})X_t$，用线性滤波的谱密度公式可得$\{\varepsilon_t\}$的谱密度是白噪声谱密度。
- 单位圆上可能有根的一般情况可以用Hilbert空间预测的方法证明（在第五章时证明）。

定理1.3证明

- 由自协方差绝对可和时谱密度公式得

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \gamma_k e^{-ik\lambda}$$

- 由引理，

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |B(e^{-i\lambda})|^2, \quad B(z)\text{单位圆内没有根}.$$

- 如果$B(z)$在单位圆内和单位圆上都没有根，则可定义$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathscr{B})X_t$，用线性滤波的谱密度公式可得$\{\varepsilon_t\}$的谱密度是白噪声谱密度。
- 单位圆上可能有根的一般情况可以用Hilbert空间预测的方法证明（在第五章时证明）。

定理1.3证明

- 由自协方差绝对可和时谱密度公式得

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-q}^{q}\gamma_k e^{-ik\lambda}$$

- 由引理，

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}|B(e^{-i\lambda})|^2,\quad B(z)\text{单位圆内没有根}.$$

- 如果$B(z)$在单位圆内和单位圆上都没有根，则可定义$\varepsilon_t=B^{-1}(\mathscr{B})X_t$，用线性滤波的谱密度公式可得$\{\varepsilon_t\}$的谱密度是白噪声谱密度。
- 单位圆上可能有根的一般情况可以用Hilbert空间预测的方法证明（在第五章时证明）。

定理1.3证明

- 由自协方差绝对可和时谱密度公式得

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-q}^{q}\gamma_k e^{-ik\lambda}$$

- 由引理，

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}|B(e^{-i\lambda})|^2,\quad B(z)\text{单位圆内没有根}.$$

- 如果$B(z)$在单位圆内和单位圆上都没有根，则可定义$\varepsilon_t=B^{-1}(\mathscr{B})X_t$，用线性滤波的谱密度公式可得$\{\varepsilon_t\}$的谱密度是白噪声谱密度。
- 单位圆上可能有根的一般情况可以用Hilbert空间预测的方法证明（在第五章时证明）。

最小序列

- **定义1.2** 设$\{X_t: \ t \in \mathbb{Z}\}$是平稳序列. 用$H_x$表示$\{X_t\}$产生的Hilbert空间, 用$H_x(s)$表示由$\{X_t: t \neq s\}$产生的Hilbert空间. 如果

$$H_x \neq H_x(s)$$

对某个$s \in \mathbb{Z}$成立, 则称$\{X_t\}$是**最小序列**.

- 对平稳序列，可以证明对某个s成立$H_x(s) \neq H_x$则对所有的s成立$H_x(s) \neq H_x$。
- 说明最小序列的每个X_t都含有其他X_s中没有的信息。
- 可完全线性预测的平稳序列(某Γ_n不满秩)非最小序列。
- **定理1.4([7])** 设平稳序列$\{X_t\}$有谱密度$f(\lambda)$, 则$\{X_t\}$是最小序列的充分必要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} < \infty. \qquad (1.10)$$

最小序列

- **定义1.2** 设$\{X_t: \ t \in \mathbb{Z}\}$是平稳序列. 用$H_x$表示$\{X_t\}$产生的Hilbert空间, 用$H_x(s)$表示由$\{X_t : t \neq s\}$产生的Hilbert空间. 如果

$$H_x \neq H_x(s)$$

对某个$s \in \mathbb{Z}$成立, 则称$\{X_t\}$是**最小序列**.
- 对平稳序列，可以证明对某个s成立$H_x(s) \neq H_x$则对所有的s成立$H_x(s) \neq H_x$。
- 说明最小序列的每个X_t都含有其他X_s中没有的信息。
- 可完全线性预测的平稳序列(某Γ_n不满秩)非最小序列。
- **定理1.4([7])** 设平稳序列$\{X_t\}$有谱密度$f(\lambda)$, 则$\{X_t\}$是最小序列的充分必要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} < \infty. \tag{1.10}$$

最小序列

- **定义1.2** 设$\{X_t: t \in \mathbb{Z}\}$是平稳序列. 用$H_x$表示$\{X_t\}$产生的Hilbert空间, 用$H_x(s)$表示由$\{X_t : t \neq s\}$产生的Hilbert空间. 如果

$$H_x \neq H_x(s)$$

对某个$s \in \mathbb{Z}$成立, 则称$\{X_t\}$是最小序列.

- 对平稳序列，可以证明对某个s成立$H_x(s) \neq H_x$则对所有的s成立$H_x(s) \neq H_x$。
- 说明最小序列的每个X_t都含有其他X_s中没有的信息。
- 可完全线性预测的平稳序列(某Γ_n不满秩)非最小序列。
- **定理1.4([7])** 设平稳序列$\{X_t\}$有谱密度$f(\lambda)$, 则$\{X_t\}$是最小序列的充分必要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} < \infty. \tag{1.10}$$

最小序列

- **定义1.2** 设$\{X_t: t \in \mathbb{Z}\}$是平稳序列. 用$H_x$表示$\{X_t\}$产生的Hilbert空间, 用$H_x(s)$表示由$\{X_t: t \neq s\}$产生的Hilbert空间. 如果

$$H_x \neq H_x(s)$$

对某个$s \in \mathbb{Z}$成立, 则称$\{X_t\}$是**最小序列**.
- 对平稳序列，可以证明对某个s成立$H_x(s) \neq H_x$则对所有的s成立$H_x(s) \neq H_x$。
- 说明最小序列的每个X_t都含有其他X_s中没有的信息。
- 可完全线性预测的平稳序列(某Γ_n不满秩)非最小序列。
- 定理1.4([7]) 设平稳序列$\{X_t\}$有谱密度$f(\lambda)$, 则$\{X_t\}$是最小序列的充分必要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} < \infty. \tag{1.10}$$

最小序列

- **定义1.2** 设$\{X_t: t \in \mathbb{Z}\}$是平稳序列. 用$H_x$表示$\{X_t\}$产生的Hilbert空间, 用$H_x(s)$表示由$\{X_t: t \neq s\}$产生的Hilbert空间. 如果

$$H_x \neq H_x(s)$$

对某个$s \in \mathbb{Z}$成立, 则称$\{X_t\}$是**最小序列**.
- 对平稳序列，可以证明对某个s成立$H_x(s) \neq H_x$则对所有的s成立$H_x(s) \neq H_x$。
- 说明最小序列的每个X_t都含有其他X_s中没有的信息。
- 可完全线性预测的平稳序列(某Γ_n不满秩)非最小序列。
- **定理1.4**([7]) 设平稳序列$\{X_t\}$有谱密度$f(\lambda)$, 则$\{X_t\}$是最小序列的充分必要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} < \infty. \qquad (1.10)$$

最小序列II

- 谱密度连续恒正的平稳列是最小序列。
- AR(p)序列是最小序列。
- 可逆的MA(q)序列的谱密度连续有正下界所以是最小序列。
- 单位圆上有根的MA(q)序列其谱密度$f(\lambda)$中有

$$|1 - e^{i(\lambda-\lambda_j)}|^2 = O(|\lambda - \lambda_j|^2)$$

成分所以其倒数不可积，因此不可逆的MA(q)序列不是最小序列。

最小序列II

- 谱密度连续恒正的平稳列是最小序列。
- AR(p)序列是最小序列。
- 可逆的MA(q)序列的谱密度连续有正下界所以是最小序列。
- 单位圆上有根的MA(q)序列其谱密度$f(\lambda)$中有

$$|1 - e^{i(\lambda - \lambda_j)}|^2 = O(|\lambda - \lambda_j|^2)$$

成分所以其倒数不可积，因此不可逆的MA(q)序列不是最小序列。

最小序列II

- 谱密度连续恒正的平稳列是最小序列。
- AR(p)序列是最小序列。
- 可逆的MA(q)序列的谱密度连续有正下界所以是最小序列。
- 单位圆上有根的MA(q)序列其谱密度$f(\lambda)$中有

$$|1 - e^{i(\lambda-\lambda_j)}|^2 = O(|\lambda - \lambda_j|^2)$$

成分所以其倒数不可积，因此不可逆的MA(q)序列不是最小序列。

最小序列II

- 谱密度连续恒正的平稳列是最小序列。
- AR(p)序列是最小序列。
- 可逆的MA(q)序列的谱密度连续有正下界所以是最小序列。
- 单位圆上有根的MA(q)序列其谱密度$f(\lambda)$中有

$$|1-e^{i(\lambda-\lambda_j)}|^2 = O(|\lambda-\lambda_j|^2)$$

成分所以其倒数不可积，因此不可逆的MA(q)序列不是最小序列。

MA(q)系数的计算

- MA(q)序列的系数$(b_1, b_2, \ldots, b_q)$及σ^2 可以被$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_q$ 唯一确定。

MA(q)系数的计算II

记

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{q\times 1} \tag{1.11}$$

$$\Omega_k = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_q & \gamma_{q+1} & \cdots & \gamma_{q+k-1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_q = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_q \end{pmatrix}$$

则有：

$$\mathbf{b}_q = \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{\gamma}_q - A\Pi C), \quad \sigma^2 = \gamma_0 - C^\tau \Pi C, \tag{1.12}$$

其中

$$\Pi = \lim_{k\to\infty} \Omega_k \Gamma_k^{-1} \Omega_k^T. \tag{1.13}$$

公式(1.12),(1.13)为以后用观测样本估计MA(q)模型的参数打下了基础.

MA(1)

- 可逆MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2), \quad |b| < 1$$

- 自协方差和自相关

$$\begin{cases} \gamma_0 = & \sigma^2(1+b^2) \\ \gamma_1 = & \sigma^2 b \\ \gamma_k = & 0, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_1 = & \frac{b}{1+b^2} \\ \rho_k = & 0, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

MA(1)

- 可逆MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2), \quad |b| < 1$$

- 自协方差和自相关

$$\begin{cases} \gamma_0 = & \sigma^2(1+b^2) \\ \gamma_1 = & \sigma^2 b \\ \gamma_k = & 0, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_1 = & \frac{b}{1+b^2} \\ \rho_k = & 0, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

MA(1) II

- 谱密度

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi}|1 + be^{i\lambda}|^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}(1 + b^2 + 2b\cos\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]
\end{aligned}
$$

- 偏相关系数不截尾:

$$
a_{k,k} = -\frac{(-b)^k(1-b^2)}{(1-b^{2k+2})}, \quad k \geq 1
$$

- 逆表示

$$
\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}(-b)^j X_{t-j}
$$

MA(1) II

- 谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1 + be^{i\lambda}|^2$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\pi}(1 + b^2 + 2b\cos\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 偏相关系数不截尾:

$$a_{k,k} = -\frac{(-b)^k(1-b^2)}{(1-b^{2k+2})}, \quad k \geq 1$$

- 逆表示

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}(-b)^j X_{t-j}$$

MA(1) II

- 谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1 + be^{i\lambda}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1 + b^2 + 2b\cos\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 偏相关系数不截尾:

$$a_{k,k} = -\frac{(-b)^k(1-b^2)}{(1-b^{2k+2})}, \quad k \geq 1$$

- 逆表示

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}(-b)^j X_{t-j}$$

MA(2)

- 可逆MA(2)

$$X_t = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2},\ \ t \in \mathbb{Z}$$

- $B(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 \neq 0,\ \ |z| \leq 1.$
- 可逆域:

$$\begin{aligned}&\{(b_1, b_2) : B(z) \neq 0, |z| \leq 1\}\\ =&\{(b_1, b_2) : b_2 \pm b_1 > -1, |b_2| < 1\}\end{aligned}$$

MA(2)

- 可逆MA(2)

$$X_t = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2},\ \ t \in \mathbb{Z}$$

- $B(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 \neq 0,\ \ |z| \leq 1.$
- 可逆域:

$$\begin{aligned}&\{(b_1, b_2) : B(z) \neq 0, |z| \leq 1\}\\ =&\{(b_1, b_2) : b_2 \pm b_1 > -1, |b_2| < 1\}\end{aligned}$$

MA(2)

- 可逆MA(2)

$$X_t = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2},\ \ t \in \mathbb{Z}$$

- $B(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 \neq 0,\ \ |z| \leq 1.$
- 可逆域:

$$\begin{aligned}&\{(b_1, b_2) : B(z) \neq 0, |z| \leq 1\}\\ =&\{(b_1, b_2) : b_2 \pm b_1 > -1, |b_2| < 1\}\end{aligned}$$

MA(2)II

- 自协方差

$$\begin{aligned}\gamma_0 =&\sigma^2(1+b_1^2+b_2^2)\\ \gamma_1 =&\sigma^2(b_1+b_1b_2)\\ \gamma_2 =&\sigma^2 b_2\\ \gamma_k =&0, \quad k>2\end{aligned}$$

- 自相关系数

$$\rho_1 = \frac{b_1+b_1b_2}{1+b_1^2+b_2^2}, \quad \rho_2 = \frac{b_2}{1+b_1^2+b_2^2}$$

$$\rho_k = 0, \quad k>2$$

- 谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1+b_1e^{i\lambda}+b_2e^{i2\lambda}|^2$$

MA(2)II

- 自协方差

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sigma^2(1 + b_1^2 + b_2^2) \\
\gamma_1 &= \sigma^2(b_1 + b_1 b_2) \\
\gamma_2 &= \sigma^2 b_2 \\
\gamma_k &= 0, \quad k > 2
\end{aligned}
$$

- 自相关系数

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{b_1 + b_1 b_2}{1 + b_1^2 + b_2^2}, \quad \rho_2 = \frac{b_2}{1 + b_1^2 + b_2^2} \\
\rho_k &= 0, \quad k > 2
\end{aligned}
$$

- 谱密度

$$
f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1 + b_1 e^{i\lambda} + b_2 e^{i2\lambda}|^2
$$

MA(2)II

- 自协方差

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sigma^2(1+b_1^2+b_2^2) \\
\gamma_1 &= \sigma^2(b_1+b_1 b_2) \\
\gamma_2 &= \sigma^2 b_2 \\
\gamma_k &= 0, \quad k>2
\end{aligned}
$$

- 自相关系数

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{b_1+b_1 b_2}{1+b_1^2+b_2^2}, \quad \rho_2 = \frac{b_2}{1+b_1^2+b_2^2} \\
\rho_k &= 0, \quad k>2
\end{aligned}
$$

- 谱密度

$$
f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1+b_1 e^{i\lambda}+b_2 e^{i2\lambda}|^2
$$

MA(2)实际例子

- MA(2)的实际例子：

$$X_t = \varepsilon_t - 0.36\varepsilon_{t-1} + 0.85\varepsilon_{t-2}$$

- 特征根为$1.084652e^{\pm i1.374297}$。
-

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sigma^2(1 + b_1^2 + b_2^2) &&= 7.4084 \\
\gamma_1 &= \sigma^2(b_1 + b_1 b_2) &&= -2.664 \\
\gamma_2 &= \sigma^2 b_2 &&= 3.4 \\
\gamma_k & &&= 0, \quad k > 2
\end{aligned}$$

- $(\rho_1, \rho_2) = (-0.3596, 0, 4589))$.
- 谱密度及系数的求解见演示。

MA(2)实际例子

- MA(2)的实际例子：

$$X_t = \varepsilon_t - 0.36\varepsilon_{t-1} + 0.85\varepsilon_{t-2}$$

- 特征根为$1.084652e^{\pm i1.374297}$。
-

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sigma^2(1+b_1^2+b_2^2) &&= 7.4084 \\
\gamma_1 &= \sigma^2(b_1+b_1 b_2) &&= -2.664 \\
\gamma_2 &= \sigma^2 b_2 &&= 3.4 \\
\gamma_k & &&= 0, \quad k > 2
\end{aligned}$$

- $(\rho_1, \rho_2) = (-0.3596, 0, 4589))$.
- 谱密度及系数的求解见演示。

MA(2)实际例子

- MA(2)的实际例子：

$$X_t = \varepsilon_t - 0.36\varepsilon_{t-1} + 0.85\varepsilon_{t-2}$$

- 特征根为$1.084652e^{\pm i1.374297}$。
-

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sigma^2(1 + b_1^2 + b_2^2) &&= 7.4084 \\
\gamma_1 &= \sigma^2(b_1 + b_1 b_2) &&= -2.664 \\
\gamma_2 &= \sigma^2 b_2 &&= 3.4 \\
\gamma_k & &&= 0, \quad k > 2
\end{aligned}$$

- $(\rho_1, \rho_2) = (-0.3596, 0, 4589))$.
- 谱密度及系数的求解见演示。

MA(2)实际例子

- MA(2)的实际例子：

$$X_t = \varepsilon_t - 0.36\varepsilon_{t-1} + 0.85\varepsilon_{t-2}$$

- 特征根为$1.084652e^{\pm i1.374297}$。
-

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sigma^2(1+b_1^2+b_2^2) &&= 7.4084 \\
\gamma_1 &= \sigma^2(b_1+b_1b_2) &&= -2.664 \\
\gamma_2 &= \sigma^2 b_2 &&= 3.4 \\
\gamma_k & &&= 0, \quad k>2
\end{aligned}$$

- $(\rho_1, \rho_2) = (-0.3596, 0, 4589))$.
- 谱密度及系数的求解见演示。

MA(2)实际例子

- MA(2)的实际例子：

$$X_t = \varepsilon_t - 0.36\varepsilon_{t-1} + 0.85\varepsilon_{t-2}$$

- 特征根为$1.084652e^{\pm i1.374297}$。
-

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sigma^2(1 + b_1^2 + b_2^2) &&= 7.4084 \\
\gamma_1 &= \sigma^2(b_1 + b_1 b_2) &&= -2.664 \\
\gamma_2 &= \sigma^2 b_2 &&= 3.4 \\
\gamma_k & &&= 0, \quad k > 2
\end{aligned}$$

- $(\rho_1, \rho_2) = (-0.3596, 0, 4589))$.
- 谱密度及系数的求解见演示。

ARMA模型

- **定义2.1** 设$\{\varepsilon_t\}$ 是WN$(0,\sigma^2)$, 实系数多项式$A(z)$和$B(z)$没有公共根, 满足$b_0=1$, $a_pb_q\neq 0$ 和

$$A(z)=1-\sum_{j=1}^{p}a_jz^j\neq 0, |z|\leq 1,$$

$$B(z)=\sum_{j=0}^{q}b_jz^j\neq 0,\ |z|<1, \qquad (2.1)$$

就称差分方程:

$$X_t=\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}+\sum_{j=0}^{q}b_j\varepsilon_{t-j},\quad t\in\mathbb{Z}, \qquad (2.2)$$

是一个自回归滑动平均模型, 简称为ARMA(p,q)模型. 称满足(2.2)的平稳序列$\{X_t\}$为平稳解或ARMA(p,q)序列.

ARMA模型平稳解

- 模型写成

$$A(\mathscr{B})X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

- $A^{-1}(z)B(z)$在$|z| < \rho$解析$(1 < \rho < \min\{|z_j|\}$, $\{z_j\}$为$A(z)$的所有根)，可以Taylor展开

$$\Psi(z) \triangleq A^{-1}(z)B(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \quad |z| \le \rho \tag{2.4}$$

- 易见$\psi_j = o(\rho^{-j})$, $A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ 是线性平稳列。两边用$A(\mathscr{B})$作用，根据§2.2补充的引理1，2知

$$A(\mathscr{B})\Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t = A(\mathscr{B})A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t$$

即$\Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t$是ARMA$(p,q)$模型(2.2)的解。

ARMA模型平稳解

- 模型写成

$$A(\mathscr{B})X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

- $A^{-1}(z)B(z)$在$|z| < \rho$ 解析$(1 < \rho < \min\{|z_j|\}$, $\{z_j\}$为$A(z)$的所有根)，可以Taylor展开

$$\Psi(z) \triangleq A^{-1}(z)B(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \quad |z| \le \rho \tag{2.4}$$

- 易见$\psi_j = o(\rho^{-j})$, $A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ 是线性平稳列。两边用$A(\mathscr{B})$作用，根据§2.2补充的引理1，2知

$$A(\mathscr{B})\Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t = A(\mathscr{B})A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t$$

即$\Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t$是ARMA$(p, q)$模型(2.2)的解。

ARMA模型平稳解

- 模型写成

$$A(\mathscr{B})X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

- $A^{-1}(z)B(z)$在$|z| < \rho$ 解析$(1 < \rho < \min\{|z_j|\}$, $\{z_j\}$为$A(z)$的所有根)，可以Taylor展开

$$\Psi(z) \triangleq A^{-1}(z)B(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \quad |z| \leq \rho \tag{2.4}$$

- 易见$\psi_j = o(\rho^{-j})$, $A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ 是线性平稳列。两边用$A(\mathscr{B})$作用，根据§2.2补充的引理1，2知

$$A(\mathscr{B})\Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t = A(\mathscr{B})A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t$$

即$\Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t$是ARMA$(p,q)$模型(2.2)的解。

ARMA模型平稳解II

- 反之，若$\{Y_t\}$是(2.2)的一个平稳解，在(2.2)两边作用$A^{-1}(\mathscr{B})$即得

$$A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})Y_t = Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t$$

- 即

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t \qquad (2.6)$$

是ARMA(p,q)模型(2.2)的唯一平稳解。
- 称(2.6)中的$\{\psi_j\}$为$\{X_t\}$的Wold系数。
- **定理2.1** 由(2.6)定义的平稳序列$\{X_t\}$是ARMA(p,q)模型(2.2)的惟一平稳解.

ARMA模型平稳解II

- 反之，若$\{Y_t\}$是(2.2)的一个平稳解，在(2.2)两边作用$A^{-1}(\mathscr{B})$即得

$$A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})Y_t = Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t$$

- 即

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t \qquad (2.6)$$

是ARMA(p,q)模型(2.2)的唯一平稳解。

- 称(2.6)中的$\{\psi_j\}$为$\{X_t\}$的Wold系数。
- **定理2.1**　由(2.6)定义的平稳序列$\{X_t\}$是ARMA(p,q)模型(2.2)的惟一平稳解.

ARMA模型平稳解II

- 反之，若$\{Y_t\}$是(2.2)的一个平稳解，在(2.2)两边作用$A^{-1}(\mathscr{B})$即得

$$A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})Y_t = Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t$$

- 即

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t \qquad (2.6)$$

是ARMA(p,q)模型(2.2)的唯一平稳解。

- 称(2.6)中的$\{\psi_j\}$为$\{X_t\}$的Wold系数。
- **定理2.1** 由(2.6)定义的平稳序列$\{X_t\}$是ARMA(p,q)模型(2.2)的惟一平稳解.

ARMA模型平稳解II

- 反之，若$\{Y_t\}$是(2.2)的一个平稳解，在(2.2)两边作用$A^{-1}(\mathscr{B})$即得

$$A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})Y_t = Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t$$

- 即

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \Psi(\mathscr{B})\varepsilon_t \tag{2.6}$$

是ARMA(p, q)模型(2.2)的唯一平稳解。
- 称(2.6)中的$\{\psi_j\}$为$\{X_t\}$的Wold系数。
- **定理2.1** 由(2.6)定义的平稳序列$\{X_t\}$是ARMA(p, q)模型(2.2)的惟一平稳解.

ARMA模型方程的通解

- 模型(2.2)的任意解可以写成

$$Y_t = X_t + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} V_{l,j} t^l \rho_j^{-t} \cos(\lambda_j t - \theta_{l,j}), t \in \mathbb{Z}, \tag{2.7}$$

其中$\{X_t\}$为平稳解(2.6)，$z_1, z_2, \ldots, z_k$为$A(z)$的全体互不相同的零点，$z_j = \rho_j e^{i\lambda_j}$ 有重数$r(j)$. 随机变量$V_{j,l}, \theta_{l,j}$ 由$Y_0 - X_0, Y_1 - X_1, \ldots, Y_{p-1} - X_{p-1}$惟一决定.

ARMA模型的模拟生成

-
$$|Y_t - X_t| \le \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} |V_{l,j}| t^l \rho_j^{-t}, t \to \infty \qquad (2.8)$$

- 可以据此模拟ARMA模型：取初值$Y_{-(p-1)} = \cdots = Y_{-1} = Y_0 = 0$，递推得
$$Y_t = \sum_{j=1}^{p} a_j Y_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, t = 1, 2, \ldots, m+n$$
当m较大时取后一段$Y_t, t = m+1, m+2, \ldots, m+n$作为ARMA$(p, q)$模型的模拟数据。
- 当$A(z)$有靠近单位圆的根时m要取得较大。

ARMA模型的模拟生成

- $$|Y_t - X_t| \le \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} |V_{l,j}| t^l \rho_j^{-t}, t \to \infty \qquad (2.8)$$

- 可以据此模拟ARMA模型：取初值$Y_{-(p-1)} = \cdots = Y_{-1} = Y_0 = 0$，递推得

$$Y_t = \sum_{j=1}^{p} a_j Y_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, t = 1, 2, \ldots, m+n$$

当m较大时取后一段$Y_t, t = m+1, m+2, \ldots, m+n$作为ARMA$(p, q)$模型的模拟数据。

- 当$A(z)$有靠近单位圆的根时m要取得较大。

ARMA模型的模拟生成

- $$|Y_t - X_t| \le \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} |V_{l,j}| t^l \rho_j^{-t}, t \to \infty \qquad (2.8)$$
- 可以据此模拟ARMA模型：取初值$Y_{-(p-1)} = \cdots = Y_{-1} = Y_0 = 0$，递推得
$$Y_t = \sum_{j=1}^{p} a_j Y_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, t = 1, 2, \ldots, m+n$$
当m较大时取后一段$Y_t, t = m+1, m+2, \ldots, m+n$作为ARMA$(p, q)$模型的模拟数据。
- 当$A(z)$有靠近单位圆的根时m要取得较大。

ARMA序列的自协方差函数

- $\{\gamma_k\}$可由Wold系数表示:

$$\gamma_k = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

- 由于$\psi_j = o(\rho^{-j}), j \to \infty$，由(2.10)可得$\gamma_k = o(\rho^{-j}), j \to \infty$。

ARMA序列的自协方差函数

- $\{\gamma_k\}$可由Wold系数表示:

$$\gamma_k = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

- 由于$\psi_j = o(\rho^{-j}), j \to \infty$，由(2.10)可得$\gamma_k = o(\rho^{-j}), j \to \infty$。

ARMA序列的Wold系数递推公式

- 记$b_j=0, j<0$或$j>q$，$b_0=1$；$\psi_j=0, j<0$。
- 由参数$\mathbf{a}_p=(a_1,\ldots,a_p)^T$，$\mathbf{b}_p=(b_1,\ldots,b_q)^T$计算$\{\psi_j\}$时可以递推

$$\psi_j=\begin{cases}1, & j=0,\\ b_j+\sum_{j=1}^{p}a_k\psi_{j-k}, & j=1,2,\ldots\end{cases} \tag{2.11}$$

ARMA序列的Wold系数递推公式

- 记$b_j = 0, j < 0$或$j > q$，$b_0 = 1$；$\psi_j = 0, j < 0$。
- 由参数$\mathbf{a}_p = (a_1, \ldots, a_p)^T$，$\mathbf{b}_p = (b_1, \ldots, b_q)^T$计算$\{\psi_j\}$时可以递推

$$\psi_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ b_j + \sum_{j=1}^{p} a_k \psi_{j-k}, & j = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.11}$$

Wold系数递推公式的证明

- 记$A(z)=1-\sum_{j=1}^{p}a_j z^j=\sum_{j=0}^{p}\phi_j z^j$。注意

$$
\begin{aligned}
A(z)\Psi(z) &= \sum_{k=0}^{p}\phi_k z^k \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\phi_k\psi_{j-k}z^j = B(z)
\end{aligned}
$$

- 比较系数得

$$\sum_{k=0}^{p}\phi_k\psi_{j-k}=b_j,\quad j\geq 1$$

$$\psi_j=\sum_{k=1}^{p}a_k\psi_{j-k}+b_j,\quad j\geq 1$$

- 即(2.11)成立。

Wold系数递推公式的证明

- 记$A(z)=1-\sum_{j=1}^{p}a_jz^j=\sum_{j=0}^{p}\phi_jz^j$。注意

$$
\begin{aligned}
A(z)\Psi(z) &= \sum_{k=0}^{p}\phi_k z^k \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\phi_k\psi_{j-k}z^j = B(z)
\end{aligned}
$$

- 比较系数得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}\phi_k\psi_{j-k} &= b_j, \quad j \geq 1 \\
\psi_j &= \sum_{k=1}^{p}a_k\psi_{j-k} + b_j, \quad j \geq 1
\end{aligned}
$$

- 即(2.11)成立。

Wold系数递推公式的证明

- 记$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j = \sum_{j=0}^{p} \phi_j z^j$。注意

$$
\begin{aligned}
A(z)\Psi(z) &= \sum_{k=0}^{p} \phi_k z^k \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \phi_k \psi_{j-k} z^j = B(z)
\end{aligned}
$$

- 比较系数得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} \phi_k \psi_{j-k} &= b_j, \quad j \geq 1 \\
\psi_j = \sum_{k=1}^{p} a_k \psi_{j-k} &+ b_j, \quad j \geq 1
\end{aligned}
$$

- 即(2.11)成立。

可识别性

- 我们将证明：由ARMA(p,q)模型的自协方差函数$\{\gamma_k\}$可以决定ARMA(p,q) 模型的参数

$$(\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \sigma^2) = (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q, \sigma^2)$$

- 引理2.2　设$\{X_t\}$是(2.2)的平稳解. 如果又有白噪声$\{\eta_t\}$和实系数多项式$C(\mathscr{B})$,$D(\mathscr{B})$使得

$$C(\mathscr{B})X_t = D(\mathscr{B})\eta_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

成立, 则$C(z)$的阶数$\geq p$, $D(z)$的阶数$\geq q$.
- 这主要因为我们要求多项式$A(z)$和$B(z)$互素。证明略。

可识别性

- 我们将证明：由ARMA(p,q)模型的自协方差函数$\{\gamma_k\}$可以决定ARMA(p,q) 模型的参数

$$(\mathbf{a}^T,\mathbf{b}^T,\sigma^2)=(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_q,\sigma^2)$$

- **引理2.2** 设$\{X_t\}$是(2.2)的平稳解. 如果又有白噪声$\{\eta_t\}$和实系数多项式$C(\mathscr{B})$,$D(\mathscr{B})$使得

$$C(\mathscr{B})X_t=D(\mathscr{B})\eta_t,\quad t\in\mathbb{Z},$$

成立, 则$C(z)$的阶数$\geq p$, $D(z)$的阶数$\geq q$.
- 这主要因为我们要求多项式$A(z)$和$B(z)$互素。证明略。

可识别性

- 我们将证明：由ARMA(p,q)模型的自协方差函数$\{\gamma_k\}$可以决定ARMA(p,q) 模型的参数

$$(\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \sigma^2) = (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q, \sigma^2)$$

- **引理2.2** 设$\{X_t\}$是(2.2)的平稳解. 如果又有白噪声$\{\eta_t\}$和实系数多项式$C(\mathscr{B})$,$D(\mathscr{B})$使得

$$C(\mathscr{B})X_t = D(\mathscr{B})\eta_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

成立，则$C(z)$的阶数$\geq p$, $D(z)$的阶数$\geq q$.
- 这主要因为我们要求多项式$A(z)$和$B(z)$互素。证明略。

ARMA序列的Y-W方程

- ARMA模型的平稳解为

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

所以

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{t+k} X_t) = 0, \quad k > 0$$

ARMA序列的Y-W方程II

- 类似AR模型可推导ARMA模型的Y-W方程：在模型方程两边同乘以X_{t-k}求期望得

$$\mathrm{E}(X_t X_{t-k}) = \sum_{j=1}^{p} a_j \mathrm{E}(X_{t-j} X_{t-k}) + \sum_{j=0}^{q} b_j \mathrm{E}(\varepsilon_{t-j} X_{t-k})$$

即

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \mathrm{E}(\varepsilon_{t-j} \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l \varepsilon_{t-k-l}) \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \psi_{j-k} \sigma^2, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- 当$k > q$时$\psi_{j-k} = 0, j = 0, 1, \dots, q$，上式为

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j}, \quad k \geq q+1$$

ARMA序列的Y-W方程II

- 类似AR模型可推导ARMA模型的Y-W方程：在模型方程两边同乘以X_{t-k}求期望得

$$\mathrm{E}(X_t X_{t-k}) = \sum_{j=1}^{p} a_j \mathrm{E}(X_{t-j} X_{t-k}) + \sum_{j=0}^{q} b_j \mathrm{E}(\varepsilon_{t-j} X_{t-k})$$

即

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \mathrm{E}(\varepsilon_{t-j} \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l \varepsilon_{t-k-l}) \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \psi_{j-k} \sigma^2, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- 当$k > q$时$\psi_{j-k} = 0, j = 0, 1, \dots, q$，上式为

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j}, \quad k \geq q+1$$

ARMA序列的Y-W方程III

- 总之

$$\gamma_k - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=\max(0,k)}^{q} b_j \psi_{j-k}, & k < q \\ \sigma^2 b_q, & k = q \\ 0 & k > q \end{cases} \tag{2.14}$$

- 对$k > q$的Y-W方程可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \gamma_{q+1} \\ \gamma_{q+2} \\ \vdots \\ \gamma_{q+p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_q & \gamma_{q-1} & \cdots & \gamma_{q-p+1} \\ \gamma_{q+1} & \gamma_q & \cdots & \gamma_{q-p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{q+p-1} & \gamma_{q+p-2} & \cdots & \gamma_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

ARMA序列的Y-W方程III

- 总之

$$\gamma_k - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=\max(0,k)}^{q} b_j \psi_{j-k}, & k < q \\ \sigma^2 b_q, & k = q \\ 0 & k > q \end{cases} \tag{2.14}$$

- 对$k > q$的Y-W方程可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \gamma_{q+1} \\ \gamma_{q+2} \\ \vdots \\ \gamma_{q+p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_q & \gamma_{q-1} & \cdots & \gamma_{q-p+1} \\ \gamma_{q+1} & \gamma_q & \cdots & \gamma_{q-p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{q+p-1} & \gamma_{q+p-2} & \cdots & \gamma_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

ARMA序列的Y-W方程III

- 把系数矩阵记为$\Gamma_{p,q}$:

$$\Gamma_{p,q} = (\gamma_{|q+i-j|})_{i,j=1,2,\dots,p}$$
$$= \begin{bmatrix} \gamma_q & \gamma_{q-1} & \cdots & \gamma_{q-p+1} \\ \gamma_{q+1} & \gamma_q & \cdots & \gamma_{q-p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{q+p-1} & \gamma_{q+p-2} & \cdots & \gamma_q \end{bmatrix}$$

- 只要$\Gamma_{p,q}$可逆则可解出$a_1, \dots, a_p$。

ARMA序列的Y-W方程III

- 把系数矩阵记为$\Gamma_{p,q}$:

$$\Gamma_{p,q} = (\gamma_{|q+i-j|})_{i,j=1,2,\ldots,p}$$
$$= \begin{bmatrix} \gamma_q & \gamma_{q-1} & \cdots & \gamma_{q-p+1} \\ \gamma_{q+1} & \gamma_q & \cdots & \gamma_{q-p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{q+p-1} & \gamma_{q+p-2} & \cdots & \gamma_q \end{bmatrix}$$

- 只要$\Gamma_{p,q}$可逆则可解出$a_1, \ldots, a_p$。

ARMA序列的Y-W方程IV

- 解出$a_1, \ldots, a_p$后令

$$Y_t = A(\mathscr{B})X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

- 则$\{Y_t\}$是一个MA(q)序列，其自协方差函数为q步截尾，且

$$\begin{aligned}\gamma_Y(k) =& \mathrm{E}(Y_t Y_{t-k}) \\ =& \sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \phi_j \phi_l \mathrm{E}(X_{t-j}X_{t-l}) \\ =& \sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \phi_j \phi_l \gamma_{k+l-j}, \quad 0 \le k \le q\end{aligned}$$

- 可以用§3.1的方法唯一解出$b_1, \ldots, b_q, \sigma^2$。
- 于是，只要$\Gamma_{p,q}$可逆, 则ARMA(p, q)序列的自协方差函数和ARMA(p, q)模型的参数$(\mathbf{a}_p^T, \mathbf{b}_q^T, \sigma^2)$ 相互惟一决定。

ARMA序列的Y-W方程IV

- 解出$a_1, \ldots, a_p$后令

$$Y_t = A(\mathscr{B})X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

- 则$\{Y_t\}$是一个MA(q)序列，其自协方差函数为q步截尾，且

$$\begin{aligned}\gamma_y(k) =& \mathrm{E}(Y_t Y_{t-k}) \\ =& \sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \phi_j \phi_l \mathrm{E}(X_{t-j}X_{t-l}) \\ =& \sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \phi_j \phi_l \gamma_{k+l-j}, \quad 0 \le k \le q\end{aligned}$$

- 可以用§3.1的方法唯一解出$b_1, \ldots, b_q, \sigma^2$。
- 于是，只要$\Gamma_{p,q}$可逆, 则ARMA(p, q)序列的自协方差函数和ARMA(p, q)模型的参数$(\mathbf{a}_p^T, \mathbf{b}_q^T, \sigma^2)$ 相互惟一决定。

ARMA序列的Y-W方程IV

- 解出$a_1,\ldots,a_p$后令

$$Y_t=A(\mathscr{B})X_t=B(\mathscr{B})\varepsilon_t,\quad t\in\mathbb{Z}$$

- 则$\{Y_t\}$是一个MA(q)序列，其自协方差函数为q步截尾，且

$$\begin{aligned}\gamma_y(k)=&\mathrm{E}(Y_tY_{t-k})\\=&\sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p}\phi_j\phi_l\mathrm{E}(X_{t-j}X_{t-l})\\=&\sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p}\phi_j\phi_l\gamma_{k+l-j},\quad 0\le k\le q\end{aligned}$$

- 可以用 § 3.1的方法唯一解出$b_1,\ldots,b_q,\sigma^2$。
- 于是，只要$\Gamma_{p,q}$可逆, 则ARMA(p,q)序列的自协方差函数和ARMA(p,q)模型的参数$(\mathbf{a}_p^T,\mathbf{b}_q^T,\sigma^2)$ 相互惟一决定。

ARMA序列的Y-W方程IV

- 解出$a_1, \ldots, a_p$后令

$$Y_t = A(\mathscr{B})X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

- 则$\{Y_t\}$是一个MA(q)序列，其自协方差函数为q步截尾，且

$$\begin{aligned}\gamma_y(k) =& \mathrm{E}(Y_t Y_{t-k}) \\ =& \sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \phi_j \phi_l \mathrm{E}(X_{t-j}X_{t-l}) \\ =& \sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \phi_j \phi_l \gamma_{k+l-j}, \quad 0 \le k \le q\end{aligned}$$

- 可以用 § 3.1的方法唯一解出$b_1, \ldots, b_q, \sigma^2$。
- 于是，只要$\Gamma_{p,q}$可逆, 则ARMA(p, q)序列的自协方差函数和ARMA(p, q)模型的参数$(\mathbf{a}_p^T, \mathbf{b}_q^T, \sigma^2)$ 相互惟一决定。

ARMA模型中AR部分的参数求解

- 如果$\Gamma_{p,q}$可逆则由(2.15)可以解出$a_1, \ldots, a_p$。
- **定理2.3** 设$\{\gamma_k\}$为ARMA(p, q)序列$\{X_t\}$的自协方差函数列,则$m \geq p$时$\Gamma_{m,q}$可逆。

证明: 用反证法然后由引理2.2导出矛盾。

ARMA模型中AR部分的参数求解

- 如果$\Gamma_{p,q}$可逆则由(2.15)可以解出$a_1, \ldots, a_p$。
- **定理2.3**　设$\{\gamma_k\}$为ARMA(p, q)序列$\{X_t\}$ 的自协方差函数列,则$m \geq p$时$\Gamma_{m,q}$可逆。

证明:　用反证法然后由引理2.2导出矛盾。

ARMA模型中AR部分的参数求解

- 如果$\Gamma_{p,q}$可逆则由(2.15)可以解出$a_1, \ldots, a_p$。
- **定理2.3** 设$\{\gamma_k\}$为ARMA(p, q)序列$\{X_t\}$ 的自协方差函数列,则$m \geq p$时$\Gamma_{m,q}$可逆。

证明: 用反证法然后由引理2.2导出矛盾。

ARMA模型中AR部分的参数求解

- 如果$\Gamma_{p,q}$可逆则由(2.15)可以解出$a_1, \ldots, a_p$。
- **定理2.3** 设$\{\gamma_k\}$为ARMA(p,q)序列$\{X_t\}$ 的自协方差函数列,则$m \geq p$时$\Gamma_{m,q}$可逆。

证明: 用反证法然后由引理2.2导出矛盾。

ARMA模型中AR部分的参数求解证明(续)

设$\Gamma_{m,q}$($m \times q$矩阵)不满秩，则存在$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1})^T \neq 0$使得$\Gamma_{m,q}\boldsymbol{\beta} = 0$，即

$$\sum_{l=0}^{m-1} \beta_l \gamma_{q+k-l} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{2.18}$$

注意当$k \geq m$时$q + k - l > q$，所以这时$\gamma_{q+k-l} = \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{q+k-l-j}$，所以取$k = m$有

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{m-1} \beta_l \, \gamma_{q+k-l} &= \sum_{l=0}^{m-1} \beta_l \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{q+k-l-j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_j \sum_{l=0}^{m-1} \beta_l \, \gamma_{q+(k-j)-l} \\ &= 0 \quad (\text{由(2.18)及}0 \leq k - j = m - j \leq m - 1)\end{aligned}$$

ARMA模型中AR部分的参数求解证明(续II)

递推得上式当$k > m$时也成立。因此

$$\sum_{l=0}^{m-1} \beta_l \, \gamma_{q+k-l} = 0, \quad k \geq 0.$$

令$Y_t = \sum_{l=0}^{m-1} \beta_l X_{t-l}$则$\{Y_t\}$是零均值平稳列，利用

$$\mathrm{E}(Y_t X_{t-q-k}) = \sum_{l=0}^{m-1} \beta_l \gamma_{q+k-l} = 0, \quad k \geq 0$$

可知$\{Y_t\}$的自协方差$q-1$步截尾:

$$\mathrm{E}(Y_t Y_{t-q-k}) = 0, \quad k \geq 0$$

$\{Y_t\}$是MA(q')($q' \leq q-1$)序列，存在$\{\eta_t\} \sim \mathrm{WN}(0, s^2)$使得

$$\sum_{l=0}^{m-1} \beta_l X_{t-l} = \sum_{j=0}^{q'} d_j \eta_{t-j}$$

与引理2.2矛盾。 □

ARMA模型的一个充分条件

- **定理2.4** 设零均值平稳序列$\{X_t\}$有自协方差函数$\{\gamma_k\}$. 又设实数$a_1, a_2, \cdots, a_p$ $(a_p \neq 0)$ 使得$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j$ 满足最小相位条件, 另外

$$\gamma_k - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} = \begin{cases} c \neq 0, & k = q, \\ 0, & k > q, \end{cases} \qquad (2.19)$$

则$\{X_t\}$是一个ARMA(p', q')序列, 其中$p' \leq p$, $q' \leq q$.

定理2.4证明

证明: 设$Y_t = A(\mathscr{B})X_t = X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}$. 则$\{Y_t\}$是零均值平稳序列, 满足

$$\mathrm{E}(Y_t X_{t-k}) = \gamma_k - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} = \begin{cases} c \neq 0, & k = q, \\ 0, & k > q. \end{cases}$$

所以有

$$\begin{aligned} \gamma_y(k) =& \mathrm{E}(Y_t Y_{t-k}) = \mathrm{E}\Big[Y_t(X_{t-k} - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-k-j})\Big] \\ =& \begin{cases} c \neq 0, & k = q, \\ 0, & k > q. \end{cases} \end{aligned}$$

说明$\{Y_t\}$的自协方差函数是q后截尾的.

定理2.4证明II

由定理1.3知道, $\{Y_t\}$为一个MA(q)序列, 即存在单位圆内没有根的q阶实系数多项式$B(z)$使得$B(0) = b_0 = 1$ 和

$$A(\mathscr{B})X_t = Y_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.20}$$

其中$\{\varepsilon_t\}$ 是WN$(0, \sigma^2)$.
如果$A(z)$和$B(z)$没有公因子, 上述模型就是所需要的ARMA(p, q)模型. 否则设公因子是$C(z)$, 则有$A(z) = C(z)A'(z)$, $B(z) = C(z)B'(z)$. 这时(2.20)变成

$$C(\mathscr{B})A'(\mathscr{B})X_t = C(\mathscr{B})B'(\mathscr{B})\varepsilon_t.$$

两边乘$C^{-1}(\mathscr{B})$(显然$C(z)$也满足最小相位条件) 后得到所需ARMA(p', q')模型: $A'(\mathscr{B})X_t = B'(\mathscr{B})\varepsilon_t$. □

有理谱密度

- 由于ARMA序列的$\{\gamma_k\}$绝对可和，以及平稳解的线性序列表达式，可得ARMA(p,q)序列(2.6)有谱密度

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{-ik\lambda} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j e^{ij\lambda}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{B(e^{i\lambda})}{A(e^{i\lambda})}\right|^2 \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

形如(2.21)的谱密度被称为**有理谱密度**.

可逆的ARMA模型

- **定义2.2** 在ARMA(p,q)模型的定义2.1 中,如果进一步要求$B(z)$在单位圆上无根:

$$B(z)=1+\sum_{j=1}^{q} b_j z^j \neq 0, |z| \leq 1 \qquad (2.22)$$

则称ARMA(p,q)模型(2.2)为可逆的ARMA模型, 称相应的平稳解为可逆的ARMA(p,q)序列.

可逆的ARMA模型II

- 对于可逆的ARMA(p,q)模型(2.3) 由于$B^{-1}(z)A(z)$在$\{z:|z|\le\rho\}$ $(\rho>1)$ 内解析, 所以有Taylor展式:

$$B^{-1}(z)A(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j z^j,\quad |z|\le\rho, \tag{2.23}$$

其中$|\varphi_j|=o(\rho^{-j})$,当$j\to\infty$,从而可以定义$B^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j\mathscr{B}^j$. 在(2.3)两边乘以$B^{-1}(\mathscr{B})$, 得到:

$$\varepsilon_t=B^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})X_t=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j X_{t-j},\quad t\in\mathbb{Z}. \tag{2.24}$$

(2.24)是(2.6) 的逆转形式, 表明可逆ARMA(p,q)序列和它的噪声序列可以相互线性表示.

ARMA例2.1

- ARMA(4,2):

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -0.9, \quad a_2 = -1.4, \\
a_3 &= -0.7, \quad a_4 = -0.6; \\
b_1 &= 0.5, \quad b_2 = -0.4.
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

- $A(z)$的根为$1.1380e^{\pm 2.2062i}$, $1.1344e^{\pm 1.4896i}$, $B(z)$的两个实根为$2.3252, -1.0752$。
- 此时间序列有两个频率成分。(演示)

ARMA例2.1

- ARMA(4,2):

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -0.9, \quad a_2 = -1.4, \\
a_3 &= -0.7, \quad a_4 = -0.6; \\
b_1 &= 0.5, \quad b_2 = -0.4.
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

- $A(z)$的根为$1.1380e^{\pm 2.2062i}$, $1.1344e^{\pm 1.4896i}$, $B(z)$的两个实根为$2.3252, -1.0752$。
- 此时间序列有两个频率成分。(演示)

ARMA例2.1

- ARMA(4,2):

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.9, \quad a_2 = -1.4, \\ a_3 &= -0.7, \quad a_4 = -0.6; \\ b_1 &= 0.5, \quad b_2 = -0.4. \end{aligned} \tag{2.25}$$

- $A(z)$的根为$1.1380e^{\pm 2.2062i}$, $1.1344e^{\pm 1.4896i}$, $B(z)$的两个实根为$2.3252, -1.0752$。
- 此时间序列有两个频率成分。(演示)

广义ARMA模型

- 设$A(z)=1-\sum_{j=1}^{p}a_jz^j$, $B(z)=1+\sum_{j=1}^{q}b_jz^j$ 是两个没有公共根的实系数多项式, $a_pb_q\neq 0$, $\{\varepsilon_t\}$是WN$(0,\sigma^2)$. 如果不对$A(z)$, $B(z)$的根做任何其他限制, 则称差分方程:

$$A(\mathscr{B})X_t=B(\mathscr{B})\varepsilon_t,\quad t\in\mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

为广义ARMA(p,q)模型,称满足(3.1)的$\{X_t\}$为广义ARMA(p,q)序列.

广义ARMA模型(续)

- 如果$A(z)$在单位圆上没有根, 则有$0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$使得复变函数$B(z)/A(z)$在圆环

$$D = \{z: \ \rho_1 \le |z| \le \rho_2\} \tag{3.2}$$

内解析.

- 于是$B(z)/A(z)$有Laurent级数展开

$$A^{-1}(z)B(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j, \ z \in D, \tag{3.3}$$

- 存在$\rho > 1$使$c_j = o(\rho^{-|j|}), j \to \pm\infty$。
- 这样, 从(3.1)可以得到惟一的平稳解

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

广义ARMA模型(续)

- 如果$A(z)$在单位圆上没有根, 则有$0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$使得复变函数$B(z)/A(z)$在圆环

$$D = \{z:\ \rho_1 \le |z| \le \rho_2\} \tag{3.2}$$

内解析.

- 于是$B(z)/A(z)$有Laurent级数展开

$$A^{-1}(z)B(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j,\ z \in D, \tag{3.3}$$

- 存在$\rho > 1$使$c_j = o(\rho^{-|j|}), j \to \pm\infty$。
- 这样, 从(3.1)可以得到惟一的平稳解

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

广义ARMA模型(续)

- 如果$A(z)$在单位圆上没有根，则有$0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$使得复变函数$B(z)/A(z)$在圆环

$$D = \{z : \ \rho_1 \le |z| \le \rho_2\} \tag{3.2}$$

内解析.

- 于是$B(z)/A(z)$有Laurent级数展开

$$A^{-1}(z)B(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j, \ z \in D, \tag{3.3}$$

- 存在$\rho > 1$使$c_j = o(\rho^{-|j|}), j \to \pm\infty$。
- 这样，从(3.1)可以得到惟一的平稳解

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

广义ARMA模型(续)

- 如果$A(z)$在单位圆上没有根, 则有$0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$使得复变函数$B(z)/A(z)$在圆环

$$D = \{z:\ \rho_1 \le |z| \le \rho_2\} \tag{3.2}$$

内解析.

- 于是$B(z)/A(z)$有Laurent级数展开

$$A^{-1}(z)B(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j,\ z \in D, \tag{3.3}$$

- 存在$\rho > 1$使$c_j = o(\rho^{-|j|}), j \to \pm\infty$。
- 这样, 从(3.1)可以得到惟一的平稳解

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})B(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

广义ARMA模型(续2)

- 如果$A(z)$在单位圆内有根，由(3.4)定义的平稳序列是白噪声的双边无穷滑动和。
- 这个平稳序列不是合理的，因为t时的观测受到了t以后的干扰的影响.
- 再由差分方程的理论知道，这时(2.2)的其他解都随着时间的增加而加速振荡. 为此，人们把这时的广义ARMA模型称为爆炸模型.

广义ARMA模型(续2)

- 如果$A(z)$在单位圆内有根，由(3.4)定义的平稳序列是白噪声的双边无穷滑动和。
- 这个平稳序列不是合理的，因为t时的观测受到了t以后的干扰的影响.
- 再由差分方程的理论知道，这时(2.2)的其他解都随着时间的增加而加速振荡. 为此，人们把这时的广义ARMA模型称为爆炸模型.

广义ARMA模型(续2)

- 如果$A(z)$在单位圆内有根, 由(3.4)定义的平稳序列是白噪声的双边无穷滑动和。
- 这个平稳序列不是合理的, 因为t时的观测受到了t以后的干扰的影响.
- 再由差分方程的理论知道, 这时(2.2)的其他解都随着时间的增加而加速振荡. 为此, 人们把这时的广义ARMA模型称为爆炸模型.

求和ARIMA(p, d, q)模型

- ARIMA(p, d, q)模型是AR部分有单位特征根（即1）的广义ARMA模型，d为单位特征根的重数。
- 除了单位根以外，要求AR部分根都在单位圆外，MA部分单位圆内没有根。
- ARIMA(p, d, q)序列是d阶差分后服从ARMA(p, q)模型的非平稳时间序列。
- 设d是一个正整数, 如果

$$Y_t = (1 - \mathscr{B})^d X_t = \sum_{k=0}^{d} C_d^k (-1)^k X_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

是一个ARMA(p, q)序列, 则称$\{X_t\}$是一个求和自回归滑动平均(p, d, q)序列. 简称为ARIMA(p, d, q)序列, 其中C_d^k是二项式系数.

求和ARIMA(p, d, q)模型

- ARIMA(p, d, q)模型是AR部分有单位特征根（即1）的广义ARMA模型，d为单位特征根的重数。
- 除了单位根以外，要求AR部分根都在单位圆外，MA部分单位圆内没有根。
- ARIMA(p, d, q)序列是d阶差分后服从ARMA(p, q)模型的非平稳时间序列。
- 设d是一个正整数，如果

$$Y_t = (1 - \mathscr{B})^d X_t = \sum_{k=0}^{d} C_d^k (-1)^k X_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

是一个ARMA(p, q)序列，则称$\{X_t\}$是一个求和自回归滑动平均(p, d, q)序列．简称为ARIMA(p, d, q)序列，其中C_d^k是二项式系数．

求和ARIMA(p,d,q)模型

- ARIMA(p,d,q)模型是AR部分有单位特征根（即1）的广义ARMA模型，d为单位特征根的重数。
- 除了单位根以外，要求AR部分根都在单位圆外，MA部分单位圆内没有根。
- ARIMA(p,d,q)序列是d阶差分后服从ARMA(p,q)模型的非平稳时间序列。
- 设d是一个正整数，如果

$$Y_t=(1-\mathscr{B})^d X_t=\sum_{k=0}^{d} C_d^k(-1)^k X_{t-k},\quad t\in\mathbb{Z},\quad (3.5)$$

是一个ARMA(p,q)序列，则称$\{X_t\}$是一个求和自回归滑动平均(p,d,q)序列，简称为ARIMA(p,d,q)序列，其中C_d^k是二项式系数.

求和ARIMA(p,d,q)模型

- ARIMA(p,d,q)模型是AR部分有单位特征根（即1）的广义ARMA模型，d为单位特征根的重数。
- 除了单位根以外，要求AR部分根都在单位圆外，MA部分单位圆内没有根。
- ARIMA(p,d,q)序列是d阶差分后服从ARMA(p,q)模型的非平稳时间序列。
- 设d是一个正整数, 如果

$$Y_t = (1-\mathscr{B})^d X_t = \sum_{k=0}^{d} C_d^k (-1)^k X_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

是一个ARMA(p,q)序列, 则称$\{X_t\}$是一个求和自回归滑动平均(p,d,q)序列. 简称为ARIMA(p,d,q)序列, 其中C_d^k是二项式系数.

例3.1：ARIMA$(p,1,q)$

- 例3.1　考虑ARIMA$(p,1,q)$。
- 这时$d=1$,
$$Y_t=(1-\mathscr{B})X_t=X_t-X_{t-1}$$
为一个ARMA(p,q) 序列.
- 给定初值X_0后，有
$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1}+Y_t \\ &= X_{t-2}+Y_{t-1}+Y_t \\ &= \cdots \\ &= X_0+Y_1+Y_2+\cdots+Y_t \\ &= X_0+\sum_{j=1}^{t} Y_j,\quad t\ge 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$
- (3.7)是
$$(1-\mathscr{B})X_t=Y_t$$
的解，也是其通解。

例3.1：ARIMA$(p, 1, q)$

- 例3.1 考虑ARIMA$(p, 1, q)$。
- 这时$d = 1$,

$$Y_t = (1 - \mathscr{B})X_t = X_t - X_{t-1}$$

为一个ARMA(p, q) 序列.

- 给定初值X_0后，有

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + Y_t \\ &= X_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t \\ &= \cdots \\ &= X_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_t \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^{t} Y_j, \quad t \geq 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

- (3.7)是

$$(1 - \mathscr{B})X_t = Y_t$$

的解，也是其通解。

例3.1：ARIMA$(p,1,q)$

- 例3.1　考虑ARIMA$(p,1,q)$。
- 这时$d=1$,

$$Y_t = (1-\mathscr{B})X_t = X_t - X_{t-1}$$

为一个ARMA(p,q) 序列.

- 给定初值X_0后，有

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + Y_t \\ &= X_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t \\ &= \cdots \\ &= X_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_t \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^{t} Y_j, \quad t \geq 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

- (3.7)是

$$(1-\mathscr{B})X_t = Y_t$$

的解，也是其通解。

例3.1：ARIMA$(p, 1, q)$

- 例3.1　考虑ARIMA$(p, 1, q)$。
- 这时$d = 1$,

$$Y_t = (1 - \mathscr{B})X_t = X_t - X_{t-1}$$

为一个ARMA(p, q) 序列.

- 给定初值X_0后，有

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + Y_t \\ &= X_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t \\ &= \cdots \\ &= X_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_t \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^{t} Y_j, \ \ t \geq 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

- (3.7)是

$$(1 - \mathscr{B})X_t = Y_t$$

的解，也是其通解。

- 如果$\{Y_t\}$是相应的ARMA(p,q)模型的通解，则(3.7)也是相应的ARIMA$(p,1,q)$模型的通解。
- 所以,求和ARIMA$(p,1,q)$序列不是平稳序列.
- 对正整数d, 求和ARIMA(p,d,q)序列也都不是平稳序列.

- 如果$\{Y_t\}$是相应的ARMA(p, q)模型的通解，则(3.7)也是相应的ARIMA$(p, 1, q)$模型的通解。
- 所以,求和ARIMA$(p, 1, q)$序列不是平稳序列.
- 对正整数d, 求和ARIMA(p, d, q)序列也都不是平稳序列.

- 如果$\{Y_t\}$是相应的ARMA(p,q)模型的通解，则(3.7)也是相应的ARIMA$(p,1,q)$模型的通解。
- 所以,求和ARIMA$(p,1,q)$序列不是平稳序列.
- 对正整数d, 求和ARIMA(p,d,q)序列也都不是平稳序列.

例3.2：ARIMA$(p,2,q)$

- 例3.2　考虑ARIMA$(p,2,q)$。
- 这时$d=2$，
$$Y_t=(1-\mathscr{B})^2X_t=X_t-2X_{t-1}+X_{t-2}$$
为一个ARMA(p,q) 序列.
- 给定初值X_{-1},X_0后，有
$$X_t-X_{t-1}=X_{t-1}-X_{t-2}+Y_t,\ \ t\ge 1$$
- 两边对$t=1,2,\ldots,n_1$求和得
$$X_{n_1}-X_0=X_{n_1-1}-X_{-1}+\sum_{i=1}^{n_1}Y_i$$
- 整理后得
$$X_{n_1}-X_{n_1-1}=X_0-X_{-1}+\sum_{i=1}^{n_1}Y_i$$

例3.2：ARIMA$(p,2,q)$

- 例3.2 考虑ARIMA$(p,2,q)$。
- 这时$d=2$,

$$Y_t=(1-\mathscr{B})^2X_t=X_t-2X_{t-1}+X_{t-2}$$

为一个ARMA(p,q) 序列.

- 给定初值X_{-1},X_0后，有

$$X_t-X_{t-1}=X_{t-1}-X_{t-2}+Y_t,\ \ t\geq 1$$

- 两边对$t=1,2,\ldots,n_1$求和得

$$X_{n_1}-X_0=X_{n_1-1}-X_{-1}+\sum_{i=1}^{n_1}Y_i$$

- 整理后得

$$X_{n_1}-X_{n_1-1}=X_0-X_{-1}+\sum_{i=1}^{n_1}Y_i$$

例3.2：ARIMA$(p, 2, q)$

- 例3.2 考虑ARIMA$(p, 2, q)$。
- 这时$d = 2$,

$$Y_t = (1 - \mathscr{B})^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

为一个ARMA(p, q) 序列.

- 给定初值X_{-1}, X_0后，有

$$X_t - X_{t-1} = X_{t-1} - X_{t-2} + Y_t,\ \ t \geq 1$$

- 两边对$t = 1, 2, \ldots, n_1$求和得

$$X_{n_1} - X_0 = X_{n_1-1} - X_{-1} + \sum_{i=1}^{n_1} Y_i$$

- 整理后得

$$X_{n_1} - X_{n_1-1} = X_0 - X_{-1} + \sum_{i=1}^{n_1} Y_i$$

例3.2：ARIMA$(p,2,q)$

- 例3.2 考虑ARIMA$(p,2,q)$。
- 这时$d=2$,

$$Y_t=(1-\mathscr{B})^2X_t=X_t-2X_{t-1}+X_{t-2}$$

为一个ARMA(p,q) 序列.

- 给定初值X_{-1},X_0后，有

$$X_t-X_{t-1}=X_{t-1}-X_{t-2}+Y_t,\ \ t\ge 1$$

- 两边对$t=1,2,\ldots,n_1$求和得

$$X_{n_1}-X_0=X_{n_1-1}-X_{-1}+\sum_{i=1}^{n_1}Y_i$$

- 整理后得

$$X_{n_1}-X_{n_1-1}=X_0-X_{-1}+\sum_{i=1}^{n_1}Y_i$$

例3.2：ARIMA$(p, 2, q)$

- 例3.2　考虑ARIMA$(p, 2, q)$。
- 这时$d = 2$,

$$Y_t = (1-\mathscr{B})^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

为一个ARMA(p, q) 序列.
- 给定初值X_{-1}, X_0后，有

$$X_t - X_{t-1} = X_{t-1} - X_{t-2} + Y_t, \ \ t \geq 1$$

- 两边对$t = 1, 2, \ldots, n_1$求和得

$$X_{n_1} - X_0 = X_{n_1-1} - X_{-1} + \sum_{i=1}^{n_1} Y_i$$

- 整理后得

$$X_{n_1} - X_{n_1-1} = X_0 - X_{-1} + \sum_{i=1}^{n_1} Y_i$$

- 整理后得

$$X_{n_1} - X_{n_1-1} = X_0 - X_{-1} + \sum_{i=1}^{n_1} Y_i$$

- 两边再对$n_1 = 1, 2, \ldots, t$求和，得

$$X_t - X_0 = t(X_0 - X_{-1}) + \sum_{n_1=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_1} Y_i, \ t \geq q$$

- 或

$$X_t = X_0 + t(X_0 - X_{-1}) + \sum_{n_1=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_1} Y_i, \ t \geq q \qquad (3.8)$$

- 整理后得

$$X_{n_1} - X_{n_1-1} = X_0 - X_{-1} + \sum_{i=1}^{n_1} Y_i$$

- 两边再对$n_1 = 1, 2, \ldots, t$求和，得

$$X_t - X_0 = t(X_0 - X_{-1}) + \sum_{n_1=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_1} Y_i, \ t \geq q$$

- 或

$$X_t = X_0 + t(X_0 - X_{-1}) + \sum_{n_1=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_1} Y_i, \ t \geq q \quad (3.8)$$

- 整理后得

$$X_{n_1} - X_{n_1-1} = X_0 - X_{-1} + \sum_{i=1}^{n_1} Y_i$$

- 两边再对$n_1 = 1, 2, \ldots, t$求和，得

$$X_t - X_0 = t(X_0 - X_{-1}) + \sum_{n_1=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_1} Y_i, \ t \geq q$$

- 或

$$X_t = X_0 + t(X_0 - X_{-1}) + \sum_{n_1=1}^{t} \sum_{i=1}^{n_1} Y_i, \ t \geq q \qquad (3.8)$$

- 一般地，设$\{X_t\}$为ARIMA(p,d,q)序列，$(1-\mathscr{B})^d X_t = Y_t$，模型通解为

$$X_t = C_0 + C_1 t + \cdots + C_{d-1} t^{d-1} + \sum_{n_{d-1}=1}^{t} \cdots \sum_{n_1=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} Y_j.$$

- 实际问题中有许多数据经过一或两次差分后会稳定下来. 差分运算是对数据进行预处理的常用方法之一.

- 一般地，设$\{X_t\}$为ARIMA(p,d,q)序列，$(1-\mathscr{B})^d X_t = Y_t$，模型通解为

$$X_t = C_0 + C_1 t + \cdots + C_{d-1} t^{d-1} + \sum_{n_{d-1}=1}^{t} \cdots \sum_{n_1=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} Y_j.$$

- 实际问题中有许多数据经过一或两次差分后会稳定下来. 差分运算是对数据进行预处理的常用方法之一.

单位根过程

- ARIMA$(p, 1, q)$模型称为单位根过程，相应的时间序列被称为单位根序列。
- 单位根过程与有一个AR部分特征根$|z_j| > 1$ 但$|z_j|$十分接近于1的平稳ARMA序列很难区分。
- 单位根过程与带有线性趋势的模型不同。单位根过程数据没有固定走势，可以称为随机趋势。带有线性趋势的模型减去线性趋势后就平稳了，单位根过程减去任何线性趋势都不平稳。

单位根过程

- ARIMA$(p, 1, q)$模型称为单位根过程，相应的时间序列被称为单位根序列。
- 单位根过程与有一个AR部分特征根$|z_j| > 1$ 但$|z_j|$十分接近于1的平稳ARMA序列很难区分。
- 单位根过程与带有线性趋势的模型不同。单位根过程数据没有固定走势，可以称为随机趋势。带有线性趋势的模型减去线性趋势后就平稳了，单位根过程减去任何线性趋势都不平稳。

单位根过程

- ARIMA$(p, 1, q)$模型称为单位根过程，相应的时间序列被称为单位根序列。
- 单位根过程与有一个AR部分特征根$|z_j| > 1$ 但$|z_j|$十分接近于1的平稳ARMA序列很难区分。
- 单位根过程与带有线性趋势的模型不同。单位根过程数据没有固定走势，可以称为随机趋势。带有线性趋势的模型减去线性趋势后就平稳了，单位根过程减去任何线性趋势都不平稳。

长记忆和短记忆

- ARMA序列自协方差函数负指数衰减，是短记忆的。
- 离散谱序列自协方差不衰减到0，是长记忆的。
- 其它的平稳序列如何区分长记忆还是短记忆？若存在$d < \frac{1}{2}$，使得

$$\gamma_k \sim k^{2d-1}, \quad k \to \infty$$

则称相应的序列为长记忆序列。
- 即$\gamma_k \sim \frac{1}{k^\alpha}, \alpha > 0$，$\gamma_k$以幂函数速度趋于零。

长记忆和短记忆

- ARMA序列自协方差函数负指数衰减，是短记忆的。
- 离散谱序列自协方差不衰减到0，是长记忆的。
- 其它的平稳序列如何区分长记忆还是短记忆？若存在$d < \frac{1}{2}$，使得

$$\gamma_k \sim k^{2d-1}, \ k \to \infty$$

则称相应的序列为长记忆序列。
- 即$\gamma_k \sim \frac{1}{k^\alpha}, \alpha > 0$，$\gamma_k$以幂函数速度趋于零。

长记忆和短记忆

- ARMA序列自协方差函数负指数衰减，是短记忆的。
- 离散谱序列自协方差不衰减到0，是长记忆的。
- 其它的平稳序列如何区分长记忆还是短记忆？若存在$d < \frac{1}{2}$，使得

$$\gamma_k \sim k^{2d-1}, \ k \to \infty$$

  则称相应的序列为长记忆序列。
- 即$\gamma_k \sim \frac{1}{k^\alpha}, \alpha > 0$, γ_k以幂函数速度趋于零。

长记忆和短记忆

- ARMA序列自协方差函数负指数衰减，是短记忆的。
- 离散谱序列自协方差不衰减到0，是长记忆的。
- 其它的平稳序列如何区分长记忆还是短记忆？若存在$d < \frac{1}{2}$, 使得

$$\gamma_k \sim k^{2d-1}, \ k \to \infty$$

  则称相应的序列为长记忆序列。
- 即$\gamma_k \sim \frac{1}{k^\alpha}, \alpha > 0$, γ_k以幂函数速度趋于零。

长记忆序列

- 对于$d \neq 0$，$d \in (-0.5, 0.5)$, $(1-z)^{-d}$有Taylor展开公式

$$(1-z)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j, \ |z| \leq 1, \qquad (3.13)$$

- 其中

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} = \frac{d(d+1)\dots(d+j-1)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots$$

- 用Stirling公式

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} e^{1-x}(x-1)^{x-0.5}, \ x \to +\infty$$

可证明

$$\pi_j \sim j^{d-1}, \ j \to +\infty$$

- 所以$\{\pi_j\}$平方可和。

长记忆序列

- 对于$d \neq 0$，$d \in (-0.5, 0.5)$, $(1-z)^{-d}$有Taylor展开公式

$$(1-z)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j, \ |z| \leq 1, \qquad (3.13)$$

- 其中

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} = \frac{d(d+1)\ldots(d+j-1)}{j!}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

- 用Stirling公式

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} e^{1-x}(x-1)^{x-0.5}, \ x \to +\infty$$

可证明

$$\pi_j \sim j^{d-1}, \ j \to +\infty$$

- 所以$\{\pi_j\}$平方可和。

长记忆序列

- 对于$d \neq 0$，$d \in (-0.5, 0.5)$, $(1-z)^{-d}$有Taylor展开公式

$$(1-z)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j, \ |z| \leq 1, \tag{3.13}$$

- 其中

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} = \frac{d(d+1)\ldots(d+j-1)}{j!}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

- 用Stirling公式

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} e^{1-x}(x-1)^{x-0.5}, \ x \to +\infty$$

可证明

$$\pi_j \sim j^{d-1}, \ j \to +\infty$$

- 所以$\{\pi_j\}$平方可和。

长记忆序列

- 对于$d \neq 0$，$d \in (-0.5, 0.5)$, $(1-z)^{-d}$有Taylor展开公式

$$(1-z)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j, \ |z| \leq 1, \qquad (3.13)$$

- 其中

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} = \frac{d(d+1)\dots(d+j-1)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots$$

- 用Stirling公式

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} e^{1-x}(x-1)^{x-0.5}, \ x \to +\infty$$

可证明

$$\pi_j \sim j^{d-1}, \ j \to +\infty$$

- 所以$\{\pi_j\}$平方可和。

长记忆序列

- 定义线性平稳序列

$$X_t = (1-\mathscr{B})^{-d}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.16}$$

- 则$\{X_t\}$是模型

$$(1-\mathscr{B})^{d} X_t = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{3.17}$$

的惟一平稳解. 人们称(3.17)是ARFIMA$(0, d, 0)$模型.

- 谱密度为

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j e^{ij\lambda}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|1-e^{i\lambda}\right|^{-2d} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|2\sin(\lambda/2)|^{2d}}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi] \end{aligned} \tag{3.18}$$

长记忆序列

- 定义线性平稳序列

$$X_t = (1-\mathscr{B})^{-d}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.16}$$

- 则$\{X_t\}$是模型

$$(1-\mathscr{B})^{d} X_t = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{3.17}$$

的惟一平稳解. 人们称(3.17)是ARFIMA$(0, d, 0)$模型.

- 谱密度为

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j e^{ij\lambda}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|1-e^{i\lambda}\right|^{-2d}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|2\sin(\lambda/2)|^{2d}}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi] \tag{3.18}$$

长记忆序列

- 定义线性平稳序列

$$X_t = (1-\mathscr{B})^{-d}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j\varepsilon_{t-j}, \quad t\in\mathbb{Z}. \tag{3.16}$$

- 则$\{X_t\}$是模型

$$(1-\mathscr{B})^d X_t = \varepsilon_t, \quad t\in\mathbb{Z}, \tag{3.17}$$

的惟一平稳解. 人们称(3.17)是ARFIMA$(0,d,0)$模型.

- 谱密度为

$$\begin{aligned} f(\lambda) =& \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j e^{ij\lambda}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|1-e^{i\lambda}\right|^{-2d} \\ =& \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|2\sin(\lambda/2)|^{2d}}, \quad \lambda\in[-\pi,\pi] \end{aligned} \tag{3.18}$$

长记忆序列(续II)

- 对ARFIMA(0,d,0)序列,

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda = \frac{\sigma^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\lambda)}{[2\sin(\lambda/2)]^{2d}} d\lambda \\ &= \frac{\sigma^2 \Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(d)\Gamma(1-d)}, \quad k \in \mathbb{N}_+ \qquad (3.19) \\ \rho_k &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1-d)\Gamma(d)}\end{aligned}$$

- 对$k=1$有

$$d = \frac{\rho_1}{1+\rho_1}$$

长记忆序列(续II)

- 对ARFIMA(0,d,0)序列,

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda = \frac{\sigma^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\lambda)}{[2\sin(\lambda/2)]^{2d}} d\lambda$$

$$= \frac{\sigma^2 \Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(d)\Gamma(1-d)}, \quad k \in \mathbb{N}_+ \qquad (3.19)$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1-d)\Gamma(d)}$$

- 对$k=1$有

$$d = \frac{\rho_1}{1+\rho_1}$$

长记忆序列(续III)

- 由Sterling公式可证明

$$\gamma_k \sim k^{2d-1}\frac{\sigma^2\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)}, \quad 当\ k \to \infty. \tag{3.20}$$

即长记忆。

- 当$d \in (-0.5, 0)$时

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\gamma_k| < \infty.$$

- 当$d \in (0, 0.5)$时

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\gamma_k| = \infty.$$

长记忆序列(续III)

- 由Sterling公式可证明

$$\gamma_k \sim k^{2d-1} \frac{\sigma^2 \Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)}, \quad \text{当 } k \to \infty. \qquad (3.20)$$

即长记忆。

- 当$d \in (-0.5, 0)$时

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| < \infty.$$

- 当$d \in (0, 0.5)$时

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| = \infty.$$

长记忆序列(续III)

- 由Sterling公式可证明

$$\gamma_k \sim k^{2d-1}\frac{\sigma^2\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)}, \quad \text{当 } k \to \infty. \tag{3.20}$$

即长记忆。

- 当$d \in (-0.5, 0)$时

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| < \infty.$$

- 当$d \in (0, 0.5)$时

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| = \infty.$$

长记忆序列(续IV)

- 用Levinson递推公式和归纳法可得ARFIMA(0,d,0)的偏相关函数满足

$$a_{k,k} = \frac{d}{k-d}, k = 1, 2, \ldots$$

也可以用于d的估计。

ARFIMA(p, d, q)模型

- 类似可定义ARFIMA(p, d, q)模型。
- 一般ARFIMA(p, d, q)的讨论略过。

ARFIMA(p, d, q)模型

- 类似可定义ARFIMA(p, d, q)模型。
- 一般ARFIMA(p, d, q)的讨论略过。