应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2017年秋季学期

最优线性预测

- 设$X_1, X_2, \dots, X_n, Y$为随机变量。考虑估计问题

$$L(Y|X_1, \dots, X_n) \triangleq \underset{\hat{Y}=a_0+a_1X_1+\cdots+a_nX_n}{\arg\min} \mathrm{E}(Y-\hat{Y})^2$$

  称$L(Y|X_1, \dots, X_n)$为Y关于$X_1, \dots, X_n$的最优线性估计。
- $L(Y|X_1, \dots, X_n)$是Y在空间$\mathcal{L}(1, X_1, \dots, X_n)$ 上的投影。
- 下面推导$L(Y|X_1, \dots, X_n)$的公式。

最优线性预测

- 设$X_1, X_2, \ldots, X_n, Y$为随机变量。考虑估计问题

$$L(Y|X_1,\ldots,X_n) \triangleq \mathop{\arg\min}_{\hat{Y}=a_0+a_1X_1+\cdots+a_nX_n} \mathrm{E}(Y-\hat{Y})^2$$

  称$L(Y|X_1,\ldots,X_n)$为Y关于$X_1,\ldots,X_n$的最优线性估计。
- $L(Y|X_1,\ldots,X_n)$是Y在空间$\mathcal{L}(1,X_1,\ldots,X_n)$ 上的投影。
- 下面推导$L(Y|X_1,\ldots,X_n)$的公式。

最优线性预测

- 设$X_1, X_2, \ldots, X_n, Y$为随机变量。考虑估计问题

$$L(Y|X_1,\ldots,X_n) \triangleq \mathop{\arg\min}_{\hat{Y}=a_0+a_1X_1+\cdots+a_nX_n} \mathrm{E}(Y-\hat{Y})^2$$

称$L(Y|X_1,\ldots,X_n)$为Y关于$X_1,\ldots,X_n$的最优线性估计。
- $L(Y|X_1,\ldots,X_n)$是Y在空间$\mathcal{L}(1, X_1,\ldots,X_n)$ 上的投影。
- 下面推导$L(Y|X_1,\ldots,X_n)$的公式。

最优线性估计公式

记$\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^T$，令$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{X}-\mathrm{E}\mathbf{X}$，$\eta=Y-\mathrm{E}Y$。设$\Sigma_{\mathbf{X}}\triangleq\mathrm{Var}(\mathbf{X})=\mathrm{Var}(\boldsymbol{\xi})$正定。记$\Sigma_{\mathbf{X},Y}=\mathrm{Cov}(\mathbf{X},Y)$.
对$a_0,a_1,\ldots,a_n\in R$，记$\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)^T$，有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\,(Y-(a_0+a_1X_1+\cdots+a_nX_n))^2\\
=&\mathrm{E}(\eta-(a_1\xi_1+\ldots a_n\xi_n))^2+(\mathrm{E}Y-a_0-\mathbf{a}^T\mathrm{E}\mathbf{X})^2
\end{aligned}
$$

已知$a_1,\ldots,a_n$后取$a_0=\mathrm{E}Y-\mathbf{a}^T\mathrm{E}\mathbf{X}$ 就可以使上式后一项为零，所以不妨设$\mathrm{E}X=0$，$\mathrm{E}Y=0$。

最优线性估计公式II

这时

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(Y-(a_1X_1+\dots a_nX_n))^2 \\ =&\mathrm{Var}(Y)+\mathbf{a}^T\Sigma_{\mathbf{X}}\mathbf{a}-2\mathbf{a}^T\Sigma_{\mathbf{X},Y} \end{aligned}$$

令关于**a**的导数等于零求得最小值点为

$$\mathbf{a}=\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}\Sigma_{\mathbf{X},Y}$$

估计误差的最小值为

$$\mathrm{E}(Y-\mathbf{aX})^2=\mathrm{Var}(Y)-\Sigma_{\mathbf{X},Y}^T\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}\Sigma_{\mathbf{X},Y}$$

当$|\Gamma_n|=0$时，最优线性估计也存在(详见第5章)。

平稳序列的最优线性预测

- 设$\{X_t\}$为零均值平稳列。考虑用$X_1,\ldots,X_n$的线性组合预测X_{n+1}。设$\Gamma_n>0$，则

$$
\begin{aligned}
&L(X_{n+1}|X_n,X_{n-1},\ldots,X_1)\\
=&\left[\mathrm{Var}(\begin{pmatrix}X_n\\ \vdots\\ X_1\end{pmatrix})^{-1}\mathrm{Cov}(\begin{pmatrix}X_n\\ \vdots\\ X_1\end{pmatrix},X_{n+1})\right]^T\begin{pmatrix}X_n\\ \vdots\\ X_1\end{pmatrix}\\
=&(\Gamma_n^{-1}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \cdots\\ \gamma_n\end{pmatrix})^T\begin{pmatrix}X_n\\ \cdots\\ X_1\end{pmatrix}\\
\triangleq&a_{n1}X_n+a_{n2}X_{n-1}+\cdots+a_{nn}X_1\\
\triangleq&\mathbf{a}_n^T(X_n,X_{n-1},\ldots,X_1)^T
\end{aligned}
$$

平稳序列的最优线性预测II

- Yule-Walker方程:

$$\Gamma_n \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

  简记为

$$\Gamma_n \mathbf{a}_n = \gamma_n$$

  方程的解$\mathbf{a}_n$ 称为$\{X_t\}$或$\{\gamma_k\}$的n阶Yuler-Walker系数。

-

$$L(X_{n+1}|X_n,\ldots,X_1) = \mathbf{a}_n^T (X_n,\ldots,X_1)^T$$

- 由平稳性

$$L(X_t|X_{t-1},\ldots,X_{t-n}) = \mathbf{a}_n^T (X_{t-1},\ldots,X_{t-n})^T$$

平稳序列的最优线性预测II

- Yule-Walker方程:

$$\Gamma_n \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

  简记为

$$\Gamma_n \mathbf{a}_n = \gamma_n$$

  方程的解$\mathbf{a}_n$ 称为$\{X_t\}$或$\{\gamma_k\}$的n阶Yuler-Walker系数。

- $$L(X_{n+1}|X_n, \ldots, X_1) = \mathbf{a}_n^T (X_n, \ldots, X_1)^T$$

- 由平稳性

$$L(X_t|X_{t-1}, \ldots, X_{t-n}) = \mathbf{a}_n^T (X_{t-1}, \ldots, X_{t-n})^T$$

平稳序列的最优线性预测II

- Yule-Walker方程:

$$\Gamma_n \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

简记为

$$\Gamma_n \mathbf{a}_n = \gamma_n$$

方程的解$\mathbf{a}_n$ 称为$\{X_t\}$或$\{\gamma_k\}$的n阶Yuler-Walker系数。

- $$L(X_{n+1}|X_n, \ldots, X_1) = \mathbf{a}_n^T (X_n, \ldots, X_1)^T$$

- 由平稳性

$$L(X_t|X_{t-1}, \ldots, X_{t-n}) = \mathbf{a}_n^T (X_{t-1}, \ldots, X_{t-n})^T$$

平稳序列的最优线性预测III

- 最小的线性预测方差为

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^2 &\triangleq \mathrm{E}(X_{n+1} - (a_{n1}X_{n-1} + \dots a_{nn}X_1))^2 \\
&= \mathrm{Var}(X_{n+1}) - \gamma_n^T \Gamma_n \gamma_n \\
&= \gamma_0 - \gamma_n^T \mathbf{a}_n \\
&= \gamma_0 - a_{n1}\gamma_1 - \cdots - a_{nn}\gamma_n
\end{aligned}
$$

- 由平稳性

$$
\mathrm{E}(X_t - (a_{n1}X_{t-1} + \dots a_{nn}X_{t-n}))^2 = \sigma_n^2
$$

平稳序列的最优线性预测III

- 最小的线性预测方差为

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^2 \overset{\triangle}{=} & \mathrm{E}(X_{n+1} - (a_{n1}X_{n-1} + \dots a_{nn}X_1))^2 \\
= & \mathrm{Var}(X_{n+1}) - \gamma_n^T \Gamma_n \gamma_n \\
= & \gamma_0 - \gamma_n^T \mathbf{a}_n \\
= & \gamma_0 - a_{n1}\gamma_1 - \cdots - a_{nn}\gamma_n
\end{aligned}
$$

- 由平稳性

$$
\mathrm{E}(X_t - (a_{n1}X_{t-1} + \dots a_{nn}X_{t-n}))^2 = \sigma_n^2
$$

Yule-Walker系数的最小相位性

- 如果$\{\gamma_k\}$是某AR(p)序列的自协方差函数，则p阶的Yuler-Walker方程解出的Yule-Walker系数就是AR模型的自回归系数，所以满足最小相位性：

$$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j \neq 0, \quad 对|z| \leq 1$$

Yule-Walker系数的最小相位性II

- 对于一般的平稳列有：
- **定理4.1** 如果实数列$\gamma_k, k=0,1,\ldots,n$使得

$$\Gamma_{n+1} \triangleq \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} > 0$$

则解出的n阶Yuler-Walker系数$\mathbf{a}_n$满足最小相位条件：

$$1-\sum_{j=1}^{n} a_{nj} z^j \neq 0, \quad |z| \leq 1.$$

- 证明自学。
- 线性平稳列的自协方差列正定，所以其任意n阶Yuler-Walker系数都满足最小相位条件。

Yule-Walker系数的最小相位性II

- 对于一般的平稳列有：
- **定理4.1** 如果实数列$\gamma_k, k=0,1,\ldots,n$使得

$$\Gamma_{n+1} \triangleq \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} > 0$$

则解出的n阶Yuler-Walker系数$\mathbf{a}_n$满足最小相位条件：

$$1-\sum_{j=1}^{n} a_{nj} z^j \neq 0, \quad |z| \leq 1.$$

- 证明自学。
- 线性平稳列的自协方差列正定，所以其任意n阶Yuler-Walker系数都满足最小相位条件。

Yule-Walker系数的最小相位性II

- 对于一般的平稳列有：
- **定理4.1**　如果实数列$\gamma_k, k = 0, 1, \ldots, n$使得

$$\Gamma_{n+1} \triangleq \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} > 0$$

则解出的n阶Yuler-Walker系数$\mathbf{a}_n$满足最小相位条件：

$$1 - \sum_{j=1}^{n} a_{nj} z^j \neq 0, \quad |z| \leq 1.$$

- 证明自学。
- 线性平稳列的自协方差列正定，所以其任意n阶Yuler-Walker系数都满足最小相位条件。

Yule-Walker系数的最小相位性II

- 对于一般的平稳列有：
- **定理4.1** 如果实数列$\gamma_k, k = 0, 1, \ldots, n$使得

$$\Gamma_{n+1} \triangleq \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} > 0$$

则解出的n阶Yuler-Walker系数$\mathbf{a}_n$满足最小相位条件：

$$1 - \sum_{j=1}^{n} a_{nj} z^j \neq 0, \quad |z| \leq 1.$$

- 证明自学。
- 线性平稳列的自协方差列正定，所以其任意n阶Yuler-Walker系数都满足最小相位条件。

Levinson递推公式

定理4.2 如果Γ_{n+1}正定，则$\gamma_k, k=0,1,\ldots,n$的$1,2,\ldots,n,n+1$阶Yuler-Walker系数$\{a_{ij}, i=1,\ldots,n+1, j=1,\ldots,i\}$ 和均方误差σ_k^2可以如下递推计算：

$$\begin{aligned}
\sigma_0^2 &= \gamma_0 \\
a_{1,1} &= \gamma_1/\gamma_0 \\
\sigma_k^2 &= \sigma_{k-1}^2(1-a_{k,k}^2) \\
a_{k+1,k+1} &= \frac{\gamma_{k+1}-a_{k,1}\gamma_k-a_{k,2}\gamma_{k-1}-\cdots-a_{k,k}\gamma_1}{\gamma_0-a_{k,1}\gamma_1-a_{k,2}\gamma_2-\cdots-a_{k,k}\gamma_k} \\
a_{k+1,j} &= a_{k,j}-a_{k+1,k+1}a_{k,k+1-j}, \quad 1\le j\le k
\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中

$$\sigma_k^2 = \mathrm{E}(X_{k+1}-(a_{k,1}X_{k-1}+\cdots+a_{k,k}X_1))^2 \tag{4.5}$$

是用$X_k, X_{k-1},\ldots,X_1$预测X_{k+1}的均方误差。

Levinson公式的记忆方法

- 回忆§2.3中的

$$\gamma_k - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} = 0, \quad k \geq 1 \qquad (\dagger)$$

$$\sigma^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{0-j} \qquad (\ddagger)$$

- 在$a_{k+1,k+1}$的递推公式中，想象$p = k, a_j = a_{k,j}, j = 1, \ldots, p$
  - 则递推公式分子是$(\dagger)$的左边(用$k+1$代替k)。
  - 分母是$(\ddagger)$的右边。
- $a_{k+1,j}, 1 \leq j \leq k$的公式为

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,1} \\ \vdots \\ a_{k+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,k} \end{pmatrix} - a_{k+1,k+1} \begin{pmatrix} a_{k,k} \\ \vdots \\ a_{k,1} \end{pmatrix}$$

Levinson公式的记忆方法

- 回忆§2.3中的

$$\gamma_k - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} = 0, \quad k \geq 1 \qquad (\dagger)$$

$$\sigma^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{0-j} \qquad (\ddagger)$$

- 在$a_{k+1,k+1}$的递推公式中，想象$p = k, a_j = a_{k,j}, j = 1, \ldots, p$
  - 则递推公式分子是($\dagger$)的左边(用$k+1$代替k)。
  - 分母是($\ddagger$)的右边。
- $a_{k+1,j}, 1 \leq j \leq k$的公式为

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,1} \\ \vdots \\ a_{k+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,k} \end{pmatrix} - a_{k+1,k+1} \begin{pmatrix} a_{k,k} \\ \vdots \\ a_{k,1} \end{pmatrix}$$

Levinson公式的记忆方法

- 回忆§2.3中的

$$\gamma_k - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} = 0, \quad k \geq 1 \tag{†}$$

$$\sigma^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{0-j} \tag{‡}$$

- 在$a_{k+1,k+1}$的递推公式中，想象$p = k, a_j = a_{k,j}, j = 1, \ldots, p$
  - 则递推公式分子是(†)的左边(用$k+1$代替k)。
  - 分母是(‡)的右边。
- $a_{k+1,j}, 1 \leq j \leq k$的公式为

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,1} \\ \vdots \\ a_{k+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,k} \end{pmatrix} - a_{k+1,k+1} \begin{pmatrix} a_{k,k} \\ \vdots \\ a_{k,1} \end{pmatrix}$$

Levinson公式的记忆方法

- 回忆§2.3中的

$$\gamma_k - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} = 0, \quad k \geq 1 \qquad (\dagger)$$

$$\sigma^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{0-j} \qquad (\ddagger)$$

- 在$a_{k+1,k+1}$的递推公式中，想象$p = k, a_j = a_{k,j}, j = 1, \ldots, p$
  - 则递推公式分子是$(\dagger)$的左边(用$k+1$代替k)。
  - 分母是$(\ddagger)$的右边。
- $a_{k+1,j}, 1 \leq j \leq k$的公式为

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,1} \\ \vdots \\ a_{k+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,k} \end{pmatrix} - a_{k+1,k+1} \begin{pmatrix} a_{k,k} \\ \vdots \\ a_{k,1} \end{pmatrix}$$

Levinson公式的记忆方法

- 回忆§2.3中的

$$\gamma_k - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{k-j} = 0, \quad k \geq 1 \qquad (\dagger)$$

$$\sigma^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{0-j} \qquad (\ddagger)$$

- 在$a_{k+1,k+1}$的递推公式中，想象$p = k, a_j = a_{k,j}, j = 1, \ldots, p$
  - 则递推公式分子是($\dagger$)的左边(用$k+1$代替k)。
  - 分母是($\ddagger$)的右边。
- $a_{k+1,j}, 1 \leq j \leq k$的公式为

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,1} \\ \vdots \\ a_{k+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,k} \end{pmatrix} - a_{k+1,k+1} \begin{pmatrix} a_{k,k} \\ \vdots \\ a_{k,1} \end{pmatrix}$$

- 关于σ_k^2:

$$
\begin{aligned}
\sigma_k^2 =& E[X_{k+1} - \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k]^2 \\
=& E[(X_{k+1} - \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k) X_{k+1}] - E[(X_{k+1} - \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k) \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k] \\
=& \gamma_0 - \mathbf{a}_k^T (\gamma_1 \ \ \ldots \gamma_k)^T - 0 \\
=& \gamma_0 - a_{k,1}\gamma_1 - \cdots - a_{k,k}\gamma_k
\end{aligned}
$$

- 这是$a_{k+1,k+1}$的递推公式的分母，所以$a_{k+1,k+1}$的递推公式也可以写成

$$
a_{k+1,k+1} = \frac{\gamma_{k+1} - a_{k,1}\gamma_k - a_{k,2}\gamma_{k-1} - \cdots - a_{k,k}\gamma_1}{\sigma_k^2}
$$

- 注意σ_k^2是用k个预报第$k+1$个的均方误差。

- 关于σ_k^2:

$$\begin{aligned}\sigma_k^2 =& E[X_{k+1} - \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k]^2 \\ =& E[(X_{k+1} - \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k)X_{k+1}] - E[(X_{k+1} - \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k)\mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k] \\ =& \gamma_0 - \mathbf{a}_k^T (\gamma_1 \ \ldots \gamma_k)^T - 0 \\ =& \gamma_0 - a_{k,1}\gamma_1 - \cdots - a_{k,k}\gamma_k\end{aligned}$$

- 这是$a_{k+1,k+1}$的递推公式的分母，所以$a_{k+1,k+1}$的递推公式也可以写成

$$a_{k+1,k+1} = \frac{\gamma_{k+1} - a_{k,1}\gamma_k - a_{k,2}\gamma_{k-1} - \cdots - a_{k,k}\gamma_1}{\sigma_k^2}$$

- 注意σ_k^2是用k个预报第$k+1$个的均方误差。

- 关于σ_k^2:

$$
\begin{aligned}
\sigma_k^2 =& E[X_{k+1} - \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k]^2 \\
=& E[(X_{k+1} - \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k) X_{k+1}] - E[(X_{k+1} - \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k) \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k] \\
=& \gamma_0 - \mathbf{a}_k^T (\gamma_1 \ \ \ldots \gamma_k)^T - 0 \\
=& \gamma_0 - a_{k,1}\gamma_1 - \cdots - a_{k,k}\gamma_k
\end{aligned}
$$

- 这是$a_{k+1,k+1}$的递推公式的分母，所以$a_{k+1,k+1}$的递推公式也可以写成

$$
a_{k+1,k+1} = \frac{\gamma_{k+1} - a_{k,1}\gamma_k - a_{k,2}\gamma_{k-1} - \cdots - a_{k,k}\gamma_1}{\sigma_k^2}
$$

- 注意σ_k^2是用k个预报第$k+1$个的均方误差。

Levinson递推顺序

- 用Levinson递推公式计算各阶Yuler-Walker系数和

$$\sigma_k^2 = E[X_{k+1} - a_{k,1}X_k - a_{k,2}X_{k-1} - \cdots - a_{k,k}X_1]^2$$

次序应为

- 初值(不用历史资料预报X_1):

$$\sigma_0^2 = E[X_1 - 0]^2 = \gamma_0$$

- $k+1=1$(用X_1预报X_2):

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \gamma_1/\gamma_0 \\ \sigma_1^2 &= E[X_2 - a_{1,1}X_1]^2 \\ &= \sigma_0^2(1 - a_{1,1}^2) \end{aligned}$$

Levinson递推顺序

- 用Levinson递推公式计算各阶Yuler-Walker系数和

$$\sigma_k^2 = E[X_{k+1} - a_{k,1}X_k - a_{k,2}X_{k-1} - \cdots - a_{k,k}X_1]^2$$

次序应为

- 初值(不用历史资料预报X_1)：

$$\sigma_0^2 = E[X_1 - 0]^2 = \gamma_0$$

- $k+1=1$(用X_1预报X_2):

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \gamma_1/\gamma_0 \\ \sigma_1^2 &= E[X_2 - a_{1,1}X_1]^2 \\ &= \sigma_0^2(1 - a_{1,1}^2) \end{aligned}$$

Levinson递推顺序

- 用Levinson递推公式计算各阶Yuler-Walker系数和

$$\sigma_k^2 = E[X_{k+1} - a_{k,1}X_k - a_{k,2}X_{k-1} - \cdots - a_{k,k}X_1]^2$$

次序应为

- 初值(不用历史资料预报X_1):

$$\sigma_0^2 = E[X_1 - 0]^2 = \gamma_0$$

- $k+1=1$(用X_1预报X_2):

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \gamma_1/\gamma_0 \\ \sigma_1^2 &= E[X_2 - a_{1,1}X_1]^2 \\ &= \sigma_0^2(1 - a_{1,1}^2) \end{aligned}$$

- $k+1=2$(用X_1, X_2预报X_3):

$$
\begin{aligned}
a_{2,2} &= \frac{\gamma_2 - a_{1,1}\gamma_1}{\sigma_1^2} \\
a_{2,1} &= a_{1,1} - a_{2,2}a_{1,1} \\
\sigma_2^2 &= E[X_3 - a_{2,1}X_2 - X_{2,2}X_1]^2 \\
&= \sigma_1^2(1 - a_{2,2}^2)
\end{aligned}
$$

- $k+1=3$(用X_1, X_2, X_3预报X_4):

$$
\begin{aligned}
a_{3,3} &= \frac{\gamma_3 - a_{2,1}\gamma_2 - a_{2,2}\gamma_1}{\sigma_2^2} \\
a_{3,1} &= a_{2,1} - a_{3,3}a_{2,2} \\
a_{3,2} &= a_{2,2} - a_{3,3}a_{2,1} \\
\sigma_3^2 &= E[X_4 - a_{3,1}X_3 - a_{3,2}X_2 - a_{3,3}X_3]^2 \\
&= \sigma_2^2(1 - a_{3,3}^2)
\end{aligned}
$$

- ····················

- $k+1=2$(用X_1, X_2预报X_3):

$$\begin{aligned} a_{2,2} &= \frac{\gamma_2 - a_{1,1}\gamma_1}{\sigma_1^2} \\ a_{2,1} &= a_{1,1} - a_{2,2}a_{1,1} \\ \sigma_2^2 &= E[X_3 - a_{2,1}X_2 - X_{2,2}X_1]^2 \\ &= \sigma_1^2(1 - a_{2,2}^2) \end{aligned}$$

- $k+1=3$(用X_1, X_2, X_3预报X_4):

$$\begin{aligned} a_{3,3} &= \frac{\gamma_3 - a_{2,1}\gamma_2 - a_{2,2}\gamma_1}{\sigma_2^2} \\ a_{3,1} &= a_{2,1} - a_{3,3}a_{2,2} \\ a_{3,2} &= a_{2,2} - a_{3,3}a_{2,1} \\ \sigma_3^2 &= E[X_4 - a_{3,1}X_3 - a_{3,2}X_2 - a_{3,3}X_3]^2 \\ &= \sigma_2^2(1 - a_{3,3}^2) \end{aligned}$$

- ....

- $k+1=2$(用X_1, X_2预报X_3):

$$\begin{aligned} a_{2,2} &= \frac{\gamma_2 - a_{1,1}\gamma_1}{\sigma_1^2} \\ a_{2,1} &= a_{1,1} - a_{2,2}a_{1,1} \\ \sigma_2^2 &= E[X_3 - a_{2,1}X_2 - X_{2,2}X_1]^2 \\ &= \sigma_1^2(1 - a_{2,2}^2) \end{aligned}$$

- $k+1=3$(用X_1, X_2, X_3预报X_4):

$$\begin{aligned} a_{3,3} &= \frac{\gamma_3 - a_{2,1}\gamma_2 - a_{2,2}\gamma_1}{\sigma_2^2} \\ a_{3,1} &= a_{2,1} - a_{3,3}a_{2,2} \\ a_{3,2} &= a_{2,2} - a_{3,3}a_{2,1} \\ \sigma_3^2 &= E[X_4 - a_{3,1}X_3 - a_{3,2}X_2 - a_{3,3}X_3]^2 \\ &= \sigma_2^2(1 - a_{3,3}^2) \end{aligned}$$

- ....

计算次序为

k	$a_{k,j}$				σ_k^2
0					σ_0^2
1	$a_{1,1}$				σ_1^2
2	$a_{2,2}$	$a_{2,1}$			σ_2^2
3	$a_{3,3}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$		σ_3^2
4	$a_{4,4}$	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	σ_4^2
$\vdots$	$\cdots\cdots$				$\vdots$

偏相关系数

- **定义4.1** 如果Γ_n正定，称$a_{n,n}$为$\{X_t\}$或$\{\gamma_k\}$的n阶偏(自)相关系数。
-
$$a_{n,n} = \mathrm{Corr}[X_1 - L(X_1|X_2,\ldots,X_n), \\ X_{n+1} - L(X_{n+1}|X_2,\ldots,X_n)]$$
- 即$a_{n,n}$为X_1和X_{n+1}扣除$X_2,\ldots,X_n$的线性影响后的相关系数。

偏相关系数

- **定义4.1** 如果Γ_n正定，称$a_{n,n}$为$\{X_t\}$或$\{\gamma_k\}$的n阶偏(自)相关系数。
-
$$a_{n,n} = \mathrm{Corr}[X_1 - L(X_1|X_2,\ldots,X_n),\\ X_{n+1} - L(X_{n+1}|X_2,\ldots,X_n)]$$
- 即$a_{n,n}$为X_1和X_{n+1}扣除$X_2,\ldots,X_n$的线性影响后的相关系数。

偏相关系数

- **定义4.1**　如果Γ_n正定，称$a_{n,n}$为$\{X_t\}$或$\{\gamma_k\}$的n阶偏(自)相关系数。
- $$\begin{aligned} a_{n,n} = \text{Corr}[X_1 - L(X_1|X_2,\ldots,X_n), \\ X_{n+1} - L(X_{n+1}|X_2,\ldots,X_n)] \end{aligned}$$
- 即$a_{n,n}$为X_1和X_{n+1}扣除$X_2,\ldots,X_n$的线性影响后的相关系数。

AR序列的偏相关系数

- 设$\{X_t\}$是AR(p)序列。其自协方差函数正定。
- 由Yule-Walker方程(3.9)知其n阶($n \geq p$)Y-W系数为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_n &= (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)^T \\
&= (a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})^T, \quad n \geq p
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

- 其偏相关系数满足

$$
a_{n,n} = \begin{cases} a_p \neq 0, & n = p \\ 0, & n > p \end{cases} \tag{4.7}
$$

称为偏相关系数p后截尾。
- 反之，如果一个零均值平稳列偏相关系数p后截尾，则它必是AR(p)序列。
- 偏相关截尾隐含要求自协方差列正定。

AR序列的偏相关系数

- 设$\{X_t\}$是AR(p)序列。其自协方差函数正定。
- 由Yule-Walker方程(3.9)知其n阶($n \geq p$)Y-W系数为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)^T \\ &= (a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})^T, \quad n \geq p \end{aligned} \tag{4.6}$$

- 其偏相关系数满足

$$a_{n,n} = \begin{cases} a_p \neq 0, & n = p \\ 0, & n > p \end{cases} \tag{4.7}$$

称为偏相关系数p后截尾。

- 反之，如果一个零均值平稳列偏相关系数p后截尾，则它必是AR(p)序列。
- 偏相关截尾隐含要求自协方差列正定。

AR序列的偏相关系数

- 设$\{X_t\}$是AR(p)序列。其自协方差函数正定。
- 由Yule-Walker方程(3.9)知其n阶($n \geq p$)Y-W系数为

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_n =&(a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)^T \\ =&(a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})^T, \quad n \geq p \qquad (4.6)\end{aligned}$$

- 其偏相关系数满足

$$a_{n,n} = \begin{cases} a_p \neq 0, & n = p \\ 0, & n > p \end{cases} \qquad (4.7)$$

称为偏相关系数p后截尾。

- 反之，如果一个零均值平稳列偏相关系数p后截尾，则它必是AR(p)序列。
- 偏相关截尾隐含要求自协方差列正定。

AR序列的偏相关系数

- 设$\{X_t\}$是AR(p)序列。其自协方差函数正定。
- 由Yule-Walker方程(3.9)知其n阶($n \geq p$)Y-W系数为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)^T \\ &= (a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})^T, \quad n \geq p \end{aligned} \tag{4.6}$$

- 其偏相关系数满足

$$a_{n,n} = \begin{cases} a_p \neq 0, & n = p \\ 0, & n > p \end{cases} \tag{4.7}$$

称为偏相关系数p后截尾。

- 反之，如果一个零均值平稳列偏相关系数p后截尾，则它必是AR(p)序列。
- 偏相关截尾隐含要求自协方差列正定。

AR序列的偏相关系数

- 设$\{X_t\}$是AR(p)序列。其自协方差函数正定。
- 由Yule-Walker方程(3.9)知其n阶($n \geq p$)Y-W系数为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)^T \\ &= (a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})^T, \quad n \geq p \end{aligned} \tag{4.6}$$

- 其偏相关系数满足

$$a_{n,n} = \begin{cases} a_p \neq 0, & n = p \\ 0, & n > p \end{cases} \tag{4.7}$$

称为偏相关系数p后截尾。

- 反之，如果一个零均值平稳列偏相关系数p后截尾，则它必是AR(p)序列。
- 偏相关截尾隐含要求自协方差列正定。

AR序列的充要条件

- **定理4.3** 零均值平稳列$\{X_t\}$是AR(p)序列的充分必要条件是，它的偏相关系数$\{a_{n,n}\}$ p后截尾。
- 证明只要证明充分性。
- 记$(a_{p,1},\ldots,a_{p,p})=(a_1,\ldots,a_p)$，令$\varepsilon_t=X_t-\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}$，只要证明$\{\varepsilon_t\}$是白噪声。
- 最小相位性由定理4.1给出。

AR序列的充要条件

- **定理4.3** 零均值平稳列$\{X_t\}$是AR(p)序列的充分必要条件是，它的偏相关系数$\{a_{n,n}\}$ p后截尾。
- 证明只要证明充分性。
- 记$(a_{p,1},\ldots,a_{p,p})=(a_1,\ldots,a_p)$，令$\varepsilon_t=X_t-\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}$，只要证明$\{\varepsilon_t\}$是白噪声。
- 最小相位性由定理4.1给出。

AR序列的充要条件

- **定理4.3** 零均值平稳列$\{X_t\}$是AR(p)序列的充分必要条件是，它的偏相关系数$\{a_{n,n}\}$ p后截尾。
- 证明只要证明充分性。
- 记$(a_{p,1},\ldots,a_{p,p})=(a_1,\ldots,a_p)$，
  令$\varepsilon_t=X_t-\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}$，只要证明$\{\varepsilon_t\}$是白噪声。
- 最小相位性由定理4.1给出。

AR序列的充要条件

- **定理4.3**　零均值平稳列$\{X_t\}$是AR(p)序列的充分必要条件是，它的偏相关系数$\{a_{n,n}\}$ p后截尾。
- 证明只要证明充分性。
- 记$(a_{p,1},\ldots,a_{p,p})=(a_1,\ldots,a_p)$，令$\varepsilon_t=X_t-\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}$，只要证明$\{\varepsilon_t\}$是白噪声。
- 最小相位性由定理4.1给出。

定理4.3证明I

证明： 记$\mathbf{a}_p = (a_{p,1}, \ldots, a_{p,p}) = (a_1, \ldots, a_p)$，由Levinson公式和$a_{p+k,p+k} = 0 (k > 0)$得

$$
\begin{aligned}
a_{p+1,j} &= a_{p,j} - a_{p+1,p+1} a_{p,p+1-j} = a_j, & 1 \le j \le p \\
a_{p+k,j} &= a_{p+k-1,j} = \cdots = a_{p,j} = a_j, & k \ge 2, 1 \le j \le p \\
a_{p+k,j} &= a_{p+k-1,j} = 0 & p < j \le p+k
\end{aligned}
$$

即$n \ge p$时

$$
\mathbf{a}_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n}) = (a_1, a_2, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)
$$

定理4.3证明II

注意$\mathbf{a}_n$是Y-W方程的解，即

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

可写成

$$\begin{aligned} \gamma_k =& a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p} \\ =& \sum_{j=1}^{p} a_j\gamma_{k-j}, \quad k \geq 1 \end{aligned} \tag{*}$$

定理4.3证明III

$$\begin{aligned}\gamma_k =& a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p} \\ =& \sum_{j=1}^{p} a_j\gamma_{k-j}, \quad k \geq 1 \end{aligned} \tag{*}$$

由定理4.1知$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j$满足最小相位条件。令

$$\varepsilon_t = X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

则$\{\varepsilon_t\}$是平稳序列，满足$\mathrm{E}\varepsilon_t = 0$，$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_p^2 > 0$。下面只要证明$\{\varepsilon_t\}$是白噪声。

定理4.3证明IV

$\forall t > s$有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\varepsilon_t X_s) =& \mathrm{E}\left[\left(X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}\right) X_s\right] \\
=& \gamma_{t-s} - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{t-s-j} \\
=& 0 \qquad (\text{由}(*))
\end{aligned}
$$

所以$t > s$时

$$
\mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = \mathrm{E}\left[\varepsilon_t \left(X_s - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{s-j}\right)\right] = 0
$$

即$\{\varepsilon_t\}$是$\mathrm{WN}(0, \sigma_p^2)$，且$a_1, a_2, \ldots, a_p$满足最小相位条件。
证毕。

本节内容的应用意义

- 有了观测样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$可以估计样本自协方差函数:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})$$

- 有了$\{\hat{\gamma}_k\}$可以计算各阶偏相关系数的估计$\{a_{k,k}\}$。
- 如果发现样本偏相关系数呈现截尾性则可以拟合AR模型。
- 定理4.1保证当$\hat{\Gamma}_{p+1}$正定时得到的模型系数满足最小相位条件。
- 最小相位条件保证系统是稳定的，预测有意义。
- 真实模型为AR(p)时$\hat{\Gamma}_{p+1}$ a.s.正定。

本节内容的应用意义

- 有了观测样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$可以估计样本自协方差函数:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})$$

- 有了$\{\hat{\gamma}_k\}$可以计算各阶偏相关系数的估计$\{a_{k,k}\}$。
- 如果发现样本偏相关系数呈现截尾性则可以拟合AR模型。
- 定理4.1保证当$\hat{\Gamma}_{p+1}$正定时得到的模型系数满足最小相位条件。
- 最小相位条件保证系统是稳定的，预测有意义。
- 真实模型为AR(p)时$\hat{\Gamma}_{p+1}$ a.s.正定。

本节内容的应用意义

- 有了观测样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$可以估计样本自协方差函数:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})$$

- 有了$\{\hat{\gamma}_k\}$可以计算各阶偏相关系数的估计$\{a_{k,k}\}$。
- 如果发现样本偏相关系数呈现截尾性则可以拟合AR模型。
- 定理4.1保证当$\hat{\Gamma}_{p+1}$正定时得到的模型系数满足最小相位条件。
- 最小相位条件保证系统是稳定的，预测有意义。
- 真实模型为AR(p)时$\hat{\Gamma}_{p+1}$ a.s.正定。

本节内容的应用意义

- 有了观测样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$可以估计样本自协方差函数:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})$$

- 有了$\{\hat{\gamma}_k\}$可以计算各阶偏相关系数的估计$\{a_{k,k}\}$。
- 如果发现样本偏相关系数呈现截尾性则可以拟合AR模型。
- 定理4.1保证当$\hat{\Gamma}_{p+1}$正定时得到的模型系数满足最小相位条件。
- 最小相位条件保证系统是稳定的，预测有意义。
- 真实模型为AR(p)时$\hat{\Gamma}_{p+1}$ a.s.正定。

本节内容的应用意义

- 有了观测样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$可以估计样本自协方差函数:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})$$

- 有了$\{\hat{\gamma}_k\}$可以计算各阶偏相关系数的估计$\{a_{k,k}\}$。
- 如果发现样本偏相关系数呈现截尾性则可以拟合AR模型。
- 定理4.1保证当$\hat{\Gamma}_{p+1}$正定时得到的模型系数满足最小相位条件。
- 最小相位条件保证系统是稳定的，预测有意义。
- 真实模型为AR(p)时$\hat{\Gamma}_{p+1}$ a.s.正定。

本节内容的应用意义

- 有了观测样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$可以估计样本自协方差函数:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})$$

- 有了$\{\hat{\gamma}_k\}$可以计算各阶偏相关系数的估计$\{a_{k,k}\}$。
- 如果发现样本偏相关系数呈现截尾性则可以拟合AR模型。
- 定理4.1保证当$\hat{\Gamma}_{p+1}$正定时得到的模型系数满足最小相位条件。
- 最小相位条件保证系统是稳定的，预测有意义。
- 真实模型为AR(p)时$\hat{\Gamma}_{p+1}$ a.s.正定。

例5.1

$|a| < 1$, AR(1)模型

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
$$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$

有平稳解

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}$$

自协方差函数

$$\gamma_0 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j} = \frac{\sigma^2}{1 - a^2}$$
$$\gamma_k = a\gamma_{k-1} = \cdots = a^k \gamma_0, \quad k \geq 1 \qquad (5.2)$$

例5.1 II

自相关系数

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = a^k \tag{1}$$

谱密度

$$\begin{aligned} f(\lambda) =& \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - ae^{i\lambda}|^2} & (2) \\ =& \frac{\sigma^2}{2\pi} [1 + a^2 - 2a\cos\lambda]^{-2}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi] & (3) \end{aligned}$$

例5.1 演示

演示: $a=\pm0.85$时序列的演示。

比较:

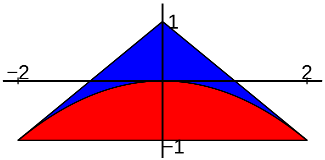
$a=0.85$	$a=-0.85$
(1) 数据表现出趋势性, 相邻的数据差别不大;	(1) 数据上下摆动，趋势性不明显;
(2) (1)中的现象在$\{\rho_k\}$得到体现: 相邻随机变量正相关	(2) (1)中的现象在$\{\rho_k\}$得到体现: 相邻随机变量负相关
(3) ρ_k 单调减少趋于0	(3)ρ_k 正负交替趋于0
(4) 谱密度的能量集中在低频, $f(\lambda)<f(0),\lambda\in(0,\pi]$, 数据无周期现象, 周期$T=\frac{2\pi}{0}=\infty$	(4) 谱密度能量集中在高频, $f(\lambda)<f(\pi),\lambda\in[0,\pi)$, 数据有周期现象, 周期$T=\frac{2\pi}{\pi}=2$
(5) 偏相关系数$a_{1,1}=0.85$, $a_{k,k}=0$, 当$k>1$	(5) 偏相关系数$a_{1,1}=-0.85$, $a_{k,k}=0$, 当$k>1$
(6) 随a接近于0, 以更快的速度收敛到0	(6) 上述性质随a接近-1变得更明显, 随a接近0变得不明显

AR(2): 稳定性条件

$$
\begin{aligned}
X_t =& a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \\
A(z) =& 1 - a_1 z - a_2 z^2 \neq 0, |z| \leq 1
\end{aligned}
$$

稳定性条件为：

$$
a_2 \pm a_1 < 1, \quad |a_2| < 1
$$



(蓝色：实根；红色：复根)

AR(2): 自相关系数

- 设$A(z)$的根为$z_1 = b_1 e^{i\lambda_1}$, $z_2 = b_2 e^{i\lambda_2}$。
- 由Y-W方程

$$
\begin{aligned}
\rho_0 &= 1, \\
\rho_1 &= \frac{a_1}{1 - a_2} \\
\rho_k &= a_1 \rho_{k-1} + a_2 \rho_{k-2}, \quad k \geq 1
\end{aligned}
$$

- $a_{11} = \rho_1$, $\quad a_{2,2} = a_2$, $\quad a_{k,k} = 0 (k \geq 3)$。

AR(2): 自相关系数

- 设$A(z)$的根为$z_1 = b_1 e^{i\lambda_1}$，$z_2 = b_2 e^{i\lambda_2}$。
- 由Y-W方程

$$
\begin{aligned}
\rho_0 =& 1, \\
\rho_1 =& \frac{a_1}{1 - a_2} \\
\rho_k =& a_1 \rho_{k-1} + a_2 \rho_{k-2}, \quad k \geq 1
\end{aligned}
$$

- $a_{11} = \rho_1, \quad a_{2,2} = a_2, \quad a_{k,k} = 0 (k \geq 3)$。

AR(2): 自相关系数

- 设$A(z)$的根为$z_1 = b_1 e^{i\lambda_1}$, $z_2 = b_2 e^{i\lambda_2}$。
- 由Y-W方程

$$
\begin{aligned}
\rho_0 =& 1, \\
\rho_1 =& \frac{a_1}{1 - a_2} \\
\rho_k =& a_1 \rho_{k-1} + a_2 \rho_{k-2}, \quad k \geq 1
\end{aligned}
$$

- $a_{11} = \rho_1, \quad a_{2,2} = a_2, \quad a_{k,k} = 0 (k \geq 3)$。

AR(2)例子: 稳定域和允许域

- $$\mathscr{A} = \{(a_1, a_2) : a_2 \pm a_1 < 1, |a_2| < 1\}$$

  称为AR(2)的稳定域。
- 从Y-W方程可以用ρ_1, ρ_2表示a_1, a_2:

$$a_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad a_2 = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

- 反之有

$$\rho_1 = \frac{a_1}{1-a_2}, \quad \rho_2 = a_2 + \frac{a_1^2}{1-a_2}$$

- $(a_1, a_2) \in \mathscr{A} \iff (\rho_1, \rho_2) \in$

$$\mathscr{C} = \{(\rho_1, \rho_2) : \rho_1^2 < (1+\rho_2)/2, |\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1\}$$

- $\mathscr{C}$称为AR(2)的允许域。

AR(2)例子: 稳定域和允许域

- $$\mathscr{A} = \{(a_1, a_2) : a_2 \pm a_1 < 1, |a_2| < 1\}$$
  称为AR(2)的稳定域。
- 从Y-W方程可以用ρ_1, ρ_2表示a_1, a_2:
  $$a_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad a_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$
- 反之有
  $$\rho_1 = \frac{a_1}{1-a_2}, \quad \rho_2 = a_2 + \frac{a_1^2}{1-a_2}$$
- $(a_1, a_2) \in \mathscr{A} \iff (\rho_1, \rho_2) \in$
  $$\mathscr{C} = \{(\rho_1, \rho_2) : \rho_1^2 < (1+\rho_2)/2, |\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1\}$$
- $\mathscr{C}$称为AR(2)的允许域。

AR(2)例子: 稳定域和允许域

- $$\mathscr{A} = \{(a_1, a_2) : a_2 \pm a_1 < 1, |a_2| < 1\}$$

  称为AR(2)的稳定域。
- 从Y-W方程可以用ρ_1, ρ_2表示a_1, a_2:

$$a_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad a_2 = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

- 反之有

$$\rho_1 = \frac{a_1}{1-a_2}, \quad \rho_2 = a_2 + \frac{a_1^2}{1-a_2}$$

- $(a_1, a_2) \in \mathscr{A} \iff (\rho_1, \rho_2) \in$

$$\mathscr{C} = \{(\rho_1, \rho_2) : \rho_1^2 < (1+\rho_2)/2, |\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1\}$$

- $\mathscr{C}$称为AR(2)的允许域。

AR(2)例子: 稳定域和允许域

- $$\mathscr{A} = \{(a_1, a_2) : a_2 \pm a_1 < 1, |a_2| < 1\}$$
  称为AR(2)的稳定域。
- 从Y-W方程可以用ρ_1, ρ_2表示a_1, a_2:
  $$a_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad a_2 = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$
- 反之有
  $$\rho_1 = \frac{a_1}{1-a_2}, \quad \rho_2 = a_2 + \frac{a_1^2}{1-a_2}$$
- $(a_1, a_2) \in \mathscr{A} \iff (\rho_1, \rho_2) \in$
  $$\mathscr{C} = \{(\rho_1, \rho_2) : \rho_1^2 < (1+\rho_2)/2, |\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1\}$$
- $\mathscr{C}$称为AR(2)的允许域。

AR(2)例子: 稳定域和允许域

- $$\mathscr{A} = \{(a_1, a_2) : a_2 \pm a_1 < 1, |a_2| < 1\}$$
  称为AR(2)的稳定域。
- 从Y-W方程可以用ρ_1, ρ_2表示a_1, a_2:
  $$a_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad a_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$
- 反之有
  $$\rho_1 = \frac{a_1}{1-a_2}, \quad \rho_2 = a_2 + \frac{a_1^2}{1-a_2}$$
- $(a_1, a_2) \in \mathscr{A} \iff (\rho_1, \rho_2) \in$
  $$\mathscr{C} = \{(\rho_1, \rho_2) : \rho_1^2 < (1+\rho_2)/2, |\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1\}$$
- $\mathscr{C}$称为AR(2)的允许域。

AR(2)的谱密度与特征根

- 特征根与系数有如下关系

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 = (1 - \frac{z}{z_1})(1 - \frac{z}{z_2})$$

$$a_1 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}, \quad a_2 = -\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}$$

$$z_1 z_2 = \frac{1}{(-a_2)}, \quad z_1 + z_2 = \frac{a_1}{(-a_2)}$$

-

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|a_2||e^{i\lambda} - b_1 e^{i\lambda_1}|^2 \cdot |e^{i\lambda} - b_2 e^{i\lambda_2}|^2}$$

AR(2)的谱密度与特征根

- 特征根与系数有如下关系

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 = (1 - \frac{z}{z_1})(1 - \frac{z}{z_2})$$

$$a_1 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}, \quad a_2 = -\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}$$

$$z_1 z_2 = \frac{1}{(-a_2)}, \quad z_1 + z_2 = \frac{a_1}{(-a_2)}$$

-

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|a_2||e^{i\lambda} - b_1 e^{i\lambda_1}|^2 \cdot |e^{i\lambda} - b_2 e^{i\lambda_2}|^2}$$