应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2017年秋季学期

AR(p)序列的自协方差

- 因为AR(p)的平稳解为

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

由线性平稳列性质知$\{X_t\}$为零均值，自协方差函数为

$$\gamma_k = \mathrm{E}(X_{t+k}X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.1}$$

AR(p)序列的自协方差II

- 设$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$，则$\psi_j = o(\rho^{-j})$，有

$$
\begin{aligned}
|\gamma_k| \leq & \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| \cdot |\psi_{j+k}| \leq \sigma^2 (\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2)^{1/2} (\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_{j+k}|^2)^{1/2} \\
\leq & c_0 (\sum_{j=k}^{\infty} \rho^{-2j})^{1/2} \leq c_1 \rho^{-k} \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

即$\{\gamma_k\}$负指数衰减。

- $\{X_t\}$序列前后的相关减少很快，称为时间序列的短记忆性。
- 特征根离单位圆越远$\{\gamma_k\}$衰减越快。

AR(p)序列的自协方差II

- 设$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$，则$\psi_j = o(\rho^{-j})$, 有

$$
\begin{aligned}
|\gamma_k| \leq & \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| \cdot |\psi_{j+k}| \leq \sigma^2 (\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2)^{1/2} (\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_{j+k}|^2)^{1/2} \\
\leq & c_0 (\sum_{j=k}^{\infty} \rho^{-2j})^{1/2} \leq c_1 \rho^{-k} \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

即$\{\gamma_k\}$负指数衰减。
- $\{X_t\}$序列前后的相关减少很快，称为时间序列的短记忆性。
- 特征根离单位圆越远$\{\gamma_k\}$衰减越快。

AR(p)序列的自协方差II

- 设$1<\rho<\min\{|z_j|\}$，则$\psi_j=o(\rho^{-j})$，有

$$|\gamma_k| \le \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|\cdot|\psi_{j+k}| \le \sigma^2 (\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2)^{1/2} (\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_{j+k}|^2)^{1/2}$$
$$\le c_0 (\sum_{j=k}^{\infty} \rho^{-2j})^{1/2} \le c_1 \rho^{-k} \qquad (3.2)$$

即$\{\gamma_k\}$负指数衰减。
- $\{X_t\}$序列前后的相关减少很快，称为时间序列的短记忆性。
- 特征根离单位圆越远$\{\gamma_k\}$衰减越快。

AR(p)的谱密度

- 由线性平稳列的谱密度公式得平稳解的谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{ij\lambda} \right|^2$$

- 而$\sum \psi_j z^j = 1/A(z)$所以

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|A(e^{i\lambda})|^2} \tag{3.3}$$

- $f(\lambda)$是一个恒正的偶函数。
- 如果$A(z)$有靠近单位圆的根$\rho_j e^{i\lambda_j}$则$|A(e^{i\lambda_j})|$会接近零，造成谱密度在$\lambda = \lambda_j$处有一个峰值。

AR(p)的谱密度

- 由线性平稳列的谱密度公式得平稳解的谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{ij\lambda} \right|^2$$

- 而$\sum \psi_j z^j = 1/A(z)$所以

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|A(e^{i\lambda})|^2} \tag{3.3}$$

- $f(\lambda)$是一个恒正的偶函数。
- 如果$A(z)$有靠近单位圆的根$\rho_j e^{i\lambda_j}$则$|A(e^{i\lambda_j})|$会接近零，造成谱密度在$\lambda = \lambda_j$处有一个峰值。

AR(p)的谱密度

- 由线性平稳列的谱密度公式得平稳解的谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j e^{ij\lambda}\right|^2$$

- 而$\sum \psi_j z^j = 1/A(z)$所以

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|A(e^{i\lambda})|^2} \tag{3.3}$$

- $f(\lambda)$是一个恒正的偶函数。
- 如果$A(z)$有靠近单位圆的根$\rho_j e^{i\lambda_j}$则$|A(e^{i\lambda_j})|$会接近零，造成谱密度在$\lambda = \lambda_j$处有一个峰值。

AR(p)的谱密度

- 由线性平稳列的谱密度公式得平稳解的谱密度

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j e^{ij\lambda}\right|^2$$

- 而$\sum\psi_j z^j=1/A(z)$所以

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|A(e^{i\lambda})|^2} \tag{3.3}$$

- $f(\lambda)$是一个恒正的偶函数。
- 如果$A(z)$有靠近单位圆的根$\rho_j e^{i\lambda_j}$则$|A(e^{i\lambda_j})|$会接近零，造成谱密度在$\lambda=\lambda_j$处有一个峰值。

谱密度的自协方差函数反演公式

- 谱密度的定义是满足
$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda$$
的非负可积函数。上式是一个Fourier级数系数的公式(差一个常数)。
- 在$\{\gamma_k\}$满足一定条件下$f(\lambda)$必存在且可表成$\{\gamma_k\}$的Fourier级数。
- **定理3.1** 如果平稳序列$\{X_t\}$的自协方差函数$\{\gamma_k\}$ 绝对可和: $\sum |\gamma_k| < \infty$, 则$\{X_t\}$有谱密度
$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\lambda}. \qquad (3.4)$$
由于谱密度是实值函数, 所以(3.4)还可以写成
$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos(k\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(k\lambda) \right].$$

谱密度的自协方差函数反演公式

- 谱密度的定义是满足

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda$$

的非负可积函数。上式是一个Fourier级数系数的公式(差一个常数)。

- 在$\{\gamma_k\}$满足一定条件下$f(\lambda)$必存在且可表成$\{\gamma_k\}$的Fourier级数。
- **定理3.1** 如果平稳序列$\{X_t\}$的自协方差函数$\{\gamma_k\}$ 绝对可和: $\sum |\gamma_k| < \infty$, 则$\{X_t\}$有谱密度

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\lambda}. \tag{3.4}$$

由于谱密度是实值函数, 所以(3.4)还可以写成

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos(k\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(k\lambda) \right].$$

谱密度的自协方差函数反演公式

- 谱密度的定义是满足
$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda$$
的非负可积函数。上式是一个Fourier级数系数的公式(差一个常数)。
- 在$\{\gamma_k\}$满足一定条件下$f(\lambda)$必存在且可表成$\{\gamma_k\}$的Fourier级数。
- **定理3.1** 如果平稳序列$\{X_t\}$的自协方差函数$\{\gamma_k\}$ 绝对可和: $\sum |\gamma_k| < \infty$, 则$\{X_t\}$有谱密度
$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\lambda}. \tag{3.4}$$
由于谱密度是实值函数, 所以(3.4)还可以写成
$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos(k\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(k\lambda)\right].$$

定理3.1证明

证明: 因为$\{\gamma_k\}$绝对可和所以(3.4)右边绝对一致收敛，$f(\lambda)$连续。于是积分与级数可交换：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)e^{ij\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda}\, d\lambda = \gamma_j.$$

定理3.1证明II

还要验证$f(\lambda)$非负。若$X_1,\ldots,X_N$为$\{X_t\}$的观测值，

$$I_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{j=1}^{N}X_je^{ij\lambda}\right|^2,\quad \lambda\in[-\pi,\pi]$$

称为$X_1,\ldots,X_N$的周期图。

定理3.1证明III

令$f_N(\lambda) = \mathrm{E} I_N(\lambda)$，则$f_N(\lambda) \geq 0$，于是

$$
\begin{aligned}
0 \leq f_N(\lambda) &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{k-j} e^{-i(k-j)\lambda} \\
&= \frac{1}{2\pi N} \sum_{m=1-N}^{N-1} (N - |m|) \gamma_m e^{-im\lambda} \qquad (*) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1-N}^{N-1} \gamma_m e^{-im\lambda} - \frac{1}{2\pi N} \sum_{m=1-N}^{N-1} |m| \gamma_m e^{-im\lambda}.
\end{aligned}
$$

由Kronecker引理知后一项趋于0，于是

$$
f(\lambda) = \lim_{N\to\infty} f_N(\lambda) \geq 0.
$$

附注：(*)式的二重求和的简化

- $$\frac{1}{2\pi N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{k-j}e^{-i(k-j)\lambda}$$
$$=\frac{1}{2\pi N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=k-N}^{k-1}\gamma_m e^{-im\lambda} \quad (\text{令}m=k-j)$$
- 交换m与k的求和次序。因为关于m的条件为
$$k-N \le m \le k-1$$
所以$k \le m+N$, $k \ge m+1$，求和变为
- $$\frac{1}{2\pi N}\sum_{m=1-N}^{N-1}\sum_{k=\max(m+1,1)}^{k=\min(m+N,N)}\gamma_m e^{-im\lambda}$$

附注：(*)式的二重求和的简化

- $$\frac{1}{2\pi N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{k-j}e^{-i(k-j)\lambda}$$
  $$=\frac{1}{2\pi N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=k-N}^{k-1}\gamma_m e^{-im\lambda} \quad (令m=k-j)$$
- 交换m与k的求和次序。因为关于m的条件为
  $$k-N\le m\le k-1$$
  所以$k\le m+N$, $k\ge m+1$，求和变为
- $$\frac{1}{2\pi N}\sum_{m=1-N}^{N-1}\sum_{k=\max(m+1,1)}^{k=\min(m+N,N)}\gamma_m e^{-im\lambda}$$

附注：(*)式的二重求和的简化

- $$\frac{1}{2\pi N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{k-j}e^{-i(k-j)\lambda}$$
$$=\frac{1}{2\pi N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=k-N}^{k-1}\gamma_m e^{-im\lambda}\quad(\text{令}m=k-j)$$
- 交换m与k的求和次序。因为关于m的条件为
$$k-N\le m\le k-1$$
所以$k\le m+N$, $k\ge m+1$，求和变为
- $$\frac{1}{2\pi N}\sum_{m=1-N}^{N-1}\sum_{k=\max(m+1,1)}^{k=\min(m+N,N)}\gamma_m e^{-im\lambda}$$

- $$\frac{1}{2\pi N}\sum_{m=1-N}^{N-1}\sum_{k=\max(m+1,1)}^{k=\min(m+N,N)}\gamma_m e^{-im\lambda}$$
- 因为$m \geq 0$时k的求和
从$m+1$到N有$N-m$项，$m < 0$时k的求和
从1到$m+N = N-|m|$有$N-|m|$项，所以求和变为
$$\frac{1}{2\pi N}\sum_{m=1-N}^{N-1}(N-|m|)\gamma_m e^{-im\lambda}$$

- $$\frac{1}{2\pi N}\sum_{m=1-N}^{N-1}\sum_{k=\max(m+1,1)}^{k=\min(m+N,N)}\gamma_m e^{-im\lambda}$$

- 因为$m \geq 0$时k的求和
从$m+1$到N有$N-m$项，$m<0$时k的求和
从1到$m+N=N-|m|$有$N-|m|$项，所以求和变为

$$\frac{1}{2\pi N}\sum_{m=1-N}^{N-1}(N-|m|)\gamma_m e^{-im\lambda}$$

AR(p)谱密度的自协方差函数表示

推论3.2 AR(p)的平稳解序列$\{X_t\}$有谱密度

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{-ik\lambda} = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|A(e^{i\lambda})|^2}.$$

白噪声列与平稳解的关系

- $A(\mathscr{B})X_t = \varepsilon_t$的平稳解为

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

- 对$k \geq 1$由控制收敛定理得

$$\mathrm{E}(X_t \varepsilon_{t+k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathrm{E}(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+k}) = 0$$

即X_t与未来的输入不相关。

- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立白噪声则X_t与未来的输入独立。

白噪声列与平稳解的关系

- $A(\mathscr{B})X_t = \varepsilon_t$的平稳解为

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

- 对$k \geq 1$由控制收敛定理得

$$\mathrm{E}(X_t \varepsilon_{t+k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathrm{E}(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+k}) = 0$$

即X_t与未来的输入不相关。

- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立白噪声则X_t与未来的输入独立。

白噪声列与平稳解的关系

- $A(\mathscr{B})X_t = \varepsilon_t$的平稳解为

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

- 对$k \geq 1$由控制收敛定理得

$$\mathrm{E}(X_t \varepsilon_{t+k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathrm{E}(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+k}) = 0$$

即X_t与未来的输入不相关。
- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立白噪声则X_t与未来的输入独立。

Yule-Walker方程

- 对$n \geq p$, 把$X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+n-1}$的递推式写成矩阵形式得
-

$$\begin{pmatrix} X_t \\ X_{t+1} \\ \vdots \\ X_{t+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{t-1} & X_{t-2} & \cdots & X_{t-n} \\ X_t & X_{t-1} & \cdots & X_{t+1-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{t+n-2} & X_{t+n-3} & \cdots & X_{t-1} \end{pmatrix} \mathbf{a}_n + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t+n-1} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

- 其中

$$\mathbf{a}_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})^T \triangleq (a_1, a_2, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)^T$$

Yule-Walker方程

- 对$n \geq p$, 把$X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+n-1}$的递推式写成矩阵形式得
-

$$
\begin{pmatrix} X_t \\ X_{t+1} \\ \vdots \\ X_{t+n-1} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} X_{t-1} & X_{t-2} & \cdots & X_{t-n} \\ X_t & X_{t-1} & \cdots & X_{t+1-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{t+n-2} & X_{t+n-3} & \cdots & X_{t-1} \end{pmatrix} \mathbf{a}_n + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t+n-1} \end{pmatrix}, \tag{3.6}
$$

- 其中

$$
\mathbf{a}_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})^T \triangleq (a_1, a_2, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)^T
$$

Yule-Walker方程

- 对$n \geq p$, 把$X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+n-1}$的递推式写成矩阵形式得
- $$\begin{pmatrix} X_t \\ X_{t+1} \\ \vdots \\ X_{t+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{t-1} & X_{t-2} & \cdots & X_{t-n} \\ X_t & X_{t-1} & \cdots & X_{t+1-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{t+n-2} & X_{t+n-3} & \cdots & X_{t-1} \end{pmatrix} \mathbf{a}_n + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t+n-1} \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$
- 其中
$$\mathbf{a}_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})^T \triangleq (a_1, a_2, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)^T$$

Yule-Walker方程II

- 定义$\{X_t\}$的自协方差矩阵

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \boldsymbol{\gamma}_n = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

- 在(3.6)两边同时乘上X_{t-1}后取数学期望，利用X_t与未来输入的不相关性有

$$\gamma_n = \Gamma_n \mathbf{a}_n, \quad n \geq p. \tag{*}$$

Yule-Walker方程II

- 定义$\{X_t\}$的自协方差矩阵

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \boldsymbol{\gamma}_n = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

- 在(3.6)两边同时乘上X_{t-1}后取数学期望, 利用X_t与未来输入的不相关性有

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \Gamma_n \mathbf{a}_n, \quad n \geq p. \tag{*}$$

Yule-Walker方程III

- 对$n \geq p$由(*)最后一行可得

$$\gamma_n = a_1\gamma_{n-1} + a_2\gamma_{n-2} + \cdots + a_p\gamma_{n-p}, \quad n \geq p$$

- 对(*)考虑$n = p$，有

$$\begin{cases} \gamma_1 = a_1\gamma_{1-1} + a_2\gamma_{1-2} + \cdots + a_p\gamma_{1-p} \\ \gamma_2 = a_1\gamma_{2-1} + a_2\gamma_{2-2} + \cdots + a_p\gamma_{2-p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_p = a_1\gamma_{p-1} + a_2\gamma_{p-2} + \cdots + a_p\gamma_{p-p} \end{cases}$$

即

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

- 总之有

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}, \quad k \geq 1$$

自协方差列$\{\gamma_k\}$在$k \geq 1$时满足AR(p)模型的齐次差分方程

$$A(\mathscr{B})\gamma_k = 0, \quad k \geq 1$$

Yule-Walker方程III

- 对$n \geq p$由(*)最后一行可得

$$\gamma_n = a_1\gamma_{n-1} + a_2\gamma_{n-2} + \cdots + a_p\gamma_{n-p}, \quad n \geq p$$

- 对(*)考虑$n = p$，有

$$\begin{cases} \gamma_1 = a_1\gamma_{1-1} + a_2\gamma_{1-2} + \cdots + a_p\gamma_{1-p} \\ \gamma_2 = a_1\gamma_{2-1} + a_2\gamma_{2-2} + \cdots + a_p\gamma_{2-p} \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_p = a_1\gamma_{p-1} + a_2\gamma_{p-2} + \cdots + a_p\gamma_{p-p} \end{cases}$$

即

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

- 总之有

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}, \quad k \geq 1$$

自协方差列$\{\gamma_k\}$在$k \geq 1$时满足AR(p)模型的齐次差分方程

$$A(\mathscr{B})\gamma_k = 0, \quad k \geq 1$$

Yule-Walker方程III

- 对$n \geq p$由(*)最后一行可得

$$\gamma_n = a_1\gamma_{n-1} + a_2\gamma_{n-2} + \cdots + a_p\gamma_{n-p}, \quad n \geq p$$

- 对(*)考虑$n = p$，有

$$\begin{cases} \gamma_1 = & a_1\gamma_{1-1} + a_2\gamma_{1-2} + \cdots + a_p\gamma_{1-p} \\ \gamma_2 = & a_1\gamma_{2-1} + a_2\gamma_{2-2} + \cdots + a_p\gamma_{2-p} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ \gamma_p = & a_1\gamma_{p-1} + a_2\gamma_{p-2} + \cdots + a_p\gamma_{p-p} \end{cases}$$

即

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p$$

- 总之有

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}, \qquad k \geq 1$$

自协方差列$\{\gamma_k\}$在$k \geq 1$时满足AR(p)模型的齐次差分方程

$$A(\mathscr{B})\gamma_k = 0, \qquad k \geq 1$$

Yule-Walker方程IV

- 对γ_0，

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 =& \mathrm{E} X_t^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t\right)^2 \\
=& \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}\right)^2 + \mathrm{E}\varepsilon_t^2 \\
=& \mathbf{a}_n^T \Gamma_n \mathbf{a}_n + \sigma^2 \\
=& \mathbf{a}_n^T \gamma_n + \sigma^2, \quad n \geq p \\
=& a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \cdots + a_p\gamma_p + \sigma^2
\end{aligned}
$$

Yule-Walker方程V

- **定理3.3(Yule-Walker方程)** AR(p)序列的自协方差函数满足

$$\gamma_n = \Gamma_n \mathbf{a}_n, \quad \gamma_0 = \gamma_n^T \mathbf{a}_n + \sigma^2, \quad n \ge p, \tag{3.9}$$

- 即

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}, \quad k \ge 1 \tag{†}$$

$$\begin{aligned} A(\mathscr{B})\gamma_k &= 0, \quad k \ge 1 \\ A(\mathscr{B})\gamma_0 &= \gamma_0 - a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 - \cdots - a_p\gamma_p = \sigma^2 \end{aligned} \tag{‡}$$

- 特别地，当$n = p$时

$$\Gamma_p \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} \tag{3.9'}$$

Yule-Walker方程V

- **定理3.3(Yule-Walker方程)** AR(p)序列的自协方差函数满足

$$\gamma_n = \Gamma_n \mathbf{a}_n, \quad \gamma_0 = \gamma_n^T \mathbf{a}_n + \sigma^2, \quad n \geq p, \tag{3.9}$$

- 即

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}, \quad k \geq 1 \tag{$\dagger$}$$

$$A(\mathscr{B})\gamma_k = 0, \quad k \geq 1$$

$$A(\mathscr{B})\gamma_0 = \gamma_0 - a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 - \cdots - a_p\gamma_p = \sigma^2 \tag{$\ddagger$}$$

- 特别地，当$n = p$时

$$\Gamma_p \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} \tag{3.9'}$$

Yule-Walker方程V

- **定理3.3(Yule-Walker方程)** AR(p)序列的自协方差函数满足

$$\gamma_n = \Gamma_n \mathbf{a}_n, \quad \gamma_0 = \gamma_n^T \mathbf{a}_n + \sigma^2, \quad n \geq p, \tag{3.9}$$

- 即

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}, \quad k \geq 1 \tag{$\dagger$}$$

$$A(\mathscr{B})\gamma_k = 0, \quad k \geq 1$$

$$A(\mathscr{B})\gamma_0 = \gamma_0 - a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 - \cdots - a_p\gamma_p = \sigma^2 \tag{$\ddagger$}$$

- 特别地，当$n = p$时

$$\Gamma_p \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} \tag{3.9'}$$

Yule-Walker方程VI

记$\phi_0 = 1, \phi_1 = -a_1, \dots, \phi_p = -a_p$,
则$A(z) = \sum_{j=0}^{p} \phi_j z^j$，AR模型可写成$\sum_{j=0}^{p} \phi_j X_{t-j} = \varepsilon_t$。
Yule-Walker方程可写成

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

自协方差函数的周期性

- 对$k<0$定义$\psi_k=0$。
- **推论3.4** AR(p)序列的自协方差函数$\{\gamma_k\}$满足和AR(p)模型$A(\mathscr{B})X_t=\varepsilon_t$相应的差分方程

$$\gamma_k-(a_1\gamma_{k-1}+a_2\gamma_{k-2}+\cdots+a_p\gamma_{k-p})=\sigma^2\psi_{-k},\quad k\in\mathbb{Z}$$

- 证明: $k\ge 0$时即定理结论。对$k<0$,

$$\begin{aligned}&\gamma_k-(a_1\gamma_{k-1}+a_2\gamma_{k-2}+\cdots+a_p\gamma_{k-p})\\ =&\mathrm{E}\left[X_{t-k}(X_t-\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j})\right]\\ =&\mathrm{E}(X_{t-k}\varepsilon_t)=\mathrm{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-k-j}\varepsilon_t\right]=\sigma^2\psi_{-k}\quad\square\end{aligned}$$

自协方差函数的周期性

- 对$k<0$定义$\psi_k=0$。
- **推论3.4**　AR(p)序列的自协方差函数$\{\gamma_k\}$满足和AR(p)模型$A(\mathscr{B})X_t=\varepsilon_t$相应的差分方程

$$\gamma_k-(a_1\gamma_{k-1}+a_2\gamma_{k-2}+\cdots+a_p\gamma_{k-p})=\sigma^2\psi_{-k},\quad k\in\mathbb{Z}$$

- 证明：　$k\geq 0$时即定理结论。对$k<0$，

$$\begin{aligned}&\gamma_k-(a_1\gamma_{k-1}+a_2\gamma_{k-2}+\cdots+a_p\gamma_{k-p})\\=&\mathrm{E}\left[X_{t-k}(X_t-\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j})\right]\\=&\mathrm{E}(X_{t-k}\varepsilon_t)=\mathrm{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-k-j}\varepsilon_t\right]=\sigma^2\psi_{-k}\quad\square\end{aligned}$$

自协方差函数的周期性

- 对$k<0$定义$\psi_k=0$。
- **推论3.4** AR(p)序列的自协方差函数$\{\gamma_k\}$满足和AR(p)模型$A(\mathscr{B})X_t=\varepsilon_t$相应的差分方程

$$\gamma_k-(a_1\gamma_{k-1}+a_2\gamma_{k-2}+\cdots+a_p\gamma_{k-p})=\sigma^2\psi_{-k},\qquad k\in\mathbb{Z}$$

- **证明**: $k\geq 0$时即定理结论。对$k<0$,

$$\begin{aligned}
&\gamma_k-(a_1\gamma_{k-1}+a_2\gamma_{k-2}+\cdots+a_p\gamma_{k-p})\\
=&\mathrm{E}\left[X_{t-k}(X_t-\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j})\right]\\
=&\mathrm{E}(X_{t-k}\varepsilon_t)=\mathrm{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-k-j}\varepsilon_t\right]=\sigma^2\psi_{-k}\qquad\square
\end{aligned}$$

自协方差函数的周期性II

- 设$A(z)$有p个互异根$z_j = \rho_j e^{i\lambda_j}, j = 1, \ldots, p$，可以证明（略）

$$
\begin{aligned}
\gamma_t =& A^{-1}(\mathscr{B})\sigma^2\psi_{-t} \\
=& \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} c_j A^{-1}(z_j^{-1}) z_j^{-t} \\
=& \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} A_j \rho_j^{-t} \cos(\lambda_j t + \theta_j), \quad t \geq 0 \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

- 可见如果$\{z_j\}$中有靠近单位圆的复根则$\{\gamma_k\}$的衰减振荡特性会显现出来。

自协方差函数的周期性II

- 设$A(z)$有p个互异根$z_j = \rho_j e^{i\lambda_j}, j = 1, \ldots, p$，可以证明（略）

$$
\begin{aligned}
\gamma_t =& A^{-1}(\mathscr{B})\sigma^2 \psi_{-t} \\
=& \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} c_j A^{-1}(z_j^{-1}) z_j^{-t} \\
=& \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} A_j \rho_j^{-t} \cos(\lambda_j t + \theta_j), \quad t \geq 0 \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

- 可见如果$\{z_j\}$中有靠近单位圆的复根则$\{\gamma_k\}$的衰减振荡特性会显现出来。

例3.1

- AR(4)模型1:

$$z_1, z_2 = 1.09e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.098e^{\pm i2\pi/3}$$

周期为$2\pi/(\pi/3) = 6$和$2\pi/(2\pi/3) = 3$。

- AR(4)模型2:

$$z_1, z_2 = 1.264e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.273e^{\pm i2\pi/3}$$

- AR(4)模型3:

$$z_1, z_2 = 1.635e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.647e^{\pm i2\pi/3}$$

- 见演示: AR roots demo。

例3.1

- AR(4)模型1:

$$z_1, z_2 = 1.09e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.098e^{\pm i2\pi/3}$$

周期为$2\pi/(\pi/3) = 6$和$2\pi/(2\pi/3) = 3$。

- AR(4)模型2:

$$z_1, z_2 = 1.264e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.273e^{\pm i2\pi/3}$$

- AR(4)模型3:

$$z_1, z_2 = 1.635e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.647e^{\pm i2\pi/3}$$

- 见演示: AR roots demo。

例3.1

- AR(4)模型1:

$$z_1, z_2 = 1.09e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.098e^{\pm i2\pi/3}$$

周期为$2\pi/(\pi/3) = 6$和$2\pi/(2\pi/3) = 3$。

- AR(4)模型2:

$$z_1, z_2 = 1.264e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.273e^{\pm i2\pi/3}$$

- AR(4)模型3:

$$z_1, z_2 = 1.635e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.647e^{\pm i2\pi/3}$$

- 见演示: AR roots demo。

例3.1

- AR(4)模型1:

$$z_1, z_2 = 1.09e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.098e^{\pm i2\pi/3}$$

周期为$2\pi/(\pi/3) = 6$和$2\pi/(2\pi/3) = 3$。

- AR(4)模型2:

$$z_1, z_2 = 1.264e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.273e^{\pm i2\pi/3}$$

- AR(4)模型3:

$$z_1, z_2 = 1.635e^{\pm i\pi/3}, \quad z_3, z_4 = 1.647e^{\pm i2\pi/3}$$

- 见演示：AR roots demo。

自协方差函数的正定性

- AR(p)平稳解唯一故自协方差函数可被自回归系数和白噪声方差唯一决定。
- 反之，若Γ_p正定则根据Yule-Walker方程可以从$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$解出$a_1, \ldots, a_p, \sigma^2$:

$$\mathbf{a}_p = \Gamma_p^{-1}\gamma_p, \quad \sigma^2 = \gamma_0 - \gamma_p^T \Gamma_p^{-1}\gamma_p. \tag{3.13}$$

- **定理3.5** 设Γ_n是平稳序列$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵，$\gamma_0 > 0$。
  1. 如果$\{X_t\}$的谱密度$f(\lambda)$存在，则对$n \geq 1$，Γ_n正定；
  2. 如果$\lim_{k\to\infty}\gamma_k = 0$，则对$n \geq 1$，$\Gamma_n$正定。

自协方差函数的正定性

- AR(p)平稳解唯一故自协方差函数可被自回归系数和白噪声方差唯一决定。
- 反之，若Γ_p正定则根据Yule-Walker方程可以从$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$解出$a_1, \ldots, a_p, \sigma^2$:

$$\mathbf{a}_p = \Gamma_p^{-1} \boldsymbol{\gamma}_p, \quad \sigma^2 = \gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}_p^T \Gamma_p^{-1} \boldsymbol{\gamma}_p. \tag{3.13}$$

- **定理3.5** 设Γ_n是平稳序列$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵，$\gamma_0 > 0$。
  1. 如果$\{X_t\}$的谱密度$f(\lambda)$存在，则对$n \geq 1$，Γ_n正定；
  2. 如果$\lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0$，则对$n \geq 1$，$\Gamma_n$正定。

自协方差函数的正定性

- AR(p)平稳解唯一故自协方差函数可被自回归系数和白噪声方差唯一决定。
- 反之，若Γ_p正定则根据Yule-Walker方程可以从$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$解出$a_1, \dots, a_p, \sigma^2$:

$$\mathbf{a}_p = \Gamma_p^{-1} \boldsymbol{\gamma}_p, \quad \sigma^2 = \gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}_p^T \Gamma_p^{-1} \boldsymbol{\gamma}_p. \tag{3.13}$$

- **定理3.5** 设Γ_n是平稳序列$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵，$\gamma_0 > 0$。
  1. 如果$\{X_t\}$的谱密度$f(\lambda)$存在，则对$n \geq 1$，Γ_n正定；
  2. 如果$\lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0$，则对$n \geq 1$，$\Gamma_n$正定。

自协方差函数的正定性

- AR(p)平稳解唯一故自协方差函数可被自回归系数和白噪声方差唯一决定。
- 反之，若Γ_p正定则根据Yule-Walker方程可以从$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$解出$a_1, \ldots, a_p, \sigma^2$:

$$\mathbf{a}_p = \Gamma_p^{-1} \gamma_p, \quad \sigma^2 = \gamma_0 - \gamma_p^T \Gamma_p^{-1} \gamma_p. \tag{3.13}$$

- **定理3.5** 设Γ_n是平稳序列$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵，$\gamma_0 > 0$。
  1. 如果$\{X_t\}$的谱密度$f(\lambda)$存在，则对$n \geq 1$，Γ_n正定；
  2. 如果$\lim_{k \to \infty} \gamma_k = 0$，则对$n \geq 1$，$\Gamma_n$正定。

自协方差函数的正定性

- AR(p)平稳解唯一故自协方差函数可被自回归系数和白噪声方差唯一决定。
- 反之，若Γ_p正定则根据Yule-Walker方程可以从$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$解出$a_1, \ldots, a_p, \sigma^2$:

$$\mathbf{a}_p = \Gamma_p^{-1}\boldsymbol{\gamma}_p, \quad \sigma^2 = \gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}_p^T \Gamma_p^{-1} \boldsymbol{\gamma}_p. \tag{3.13}$$

- **定理3.5** 设Γ_n是平稳序列$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵，$\gamma_0 > 0$。
  1. 如果$\{X_t\}$的谱密度$f(\lambda)$存在，则对$n \geq 1$，Γ_n正定；
  2. 如果$\lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0$，则对$n \geq 1$，$\Gamma_n$正定。

引理

引理: 对实平稳列$\{X_t\}$，设其自协方差阵为Γ_n, $n \in \mathbb{N}$; 设其谱函数为$F(\lambda)$。对$\forall \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in R^n$ 有

$$\mathbf{b}^T \Gamma_n \mathbf{b} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j e^{ij\lambda} \right|^2 dF(\lambda)$$

若$\{X_t\}$有谱密度$f(\lambda)$则

$$\mathbf{b}^T \Gamma_n \mathbf{b} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j e^{ij\lambda} \right|^2 f(\lambda) d\lambda$$

引理证明

证明:

$$\mathbf{b}^T\Gamma_n\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_j b_k \gamma_{j-k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_j b_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} dF(\lambda)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_j b_k e^{ij\lambda} e^{-ik\lambda} dF(\lambda)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j e^{ij\lambda} \right|^2 dF(\lambda) \quad \square$$

定理3.5证明

(1) 对$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$，$\sum_{j=1}^n b_j z^{j-1}$ 至多有$n-1$个零点。$\gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda > 0$, 于是

$$\mathbf{b}^T \Gamma_n \mathbf{b} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j e^{ij\lambda} \right|^2 f(\lambda) d\lambda > 0$$

定理3.5证明II

(2) 用反证法。设Γ_n正定, $\det(\Gamma_{n+1})=0$和$EX_t=0$ (非零均值情况只要减去均值). 定义

$$\mathbf{X}_n=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$$

对任何实向量$\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T\neq 0$ 有

$$E(\mathbf{b}^T\mathbf{X}_n)^2=\mathbf{b}^T\Gamma_n\mathbf{b}>0,$$

且由$|\Gamma_{n+1}|=0$知存在$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_{n+1})^T\neq 0$, $a_{n+1}\neq 0$使得

$$E(\mathbf{a}^T\mathbf{X}_{n+1})^2=\mathbf{a}^T\Gamma_{n+1}\mathbf{a}=0.$$

于是

$$\mathbf{a}^T\mathbf{X}_{n+1}=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_{n+1}X_{n+1}=0$$

a.s.成立, X_{n+1}可以由$\mathbf{X}_n$线性表示:

$$X_{n+1}=-\frac{a_n}{a_{n+1}}X_n-\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}X_{n-1}-\cdots-\frac{a_1}{a_{n+1}}X_1,\quad \text{a.s.},$$

定理3.5证明III

利用$\{X_t\}$的平稳性知道

$$X_t = -\frac{a_n}{a_{n+1}}X_{t-1} - \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}X_{t-2} - \cdots - \frac{a_1}{a_{n+1}}X_{t-n}, \quad \text{a.s.}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

递推知对任何$k \geq 1$, X_{n+k} 可以由$X_1, X_2, \ldots, X_n$线性表示，即有实向量$\boldsymbol{\alpha} \triangleq \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \triangleq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$ 使得

$$X_{n+k} = (\boldsymbol{\alpha}^{(k)})^T \mathbf{X}.$$

X_{n+k}被$\mathbf{X}$线性表示，说明X_{n+k}与$X_1, \ldots, X_n$有强的相关，而定理假设是$\gamma_k \to 0$，又说明X_{n+k}与$X_1, \ldots, X_n$的相关性要趋于零，这就会有矛盾，下面把矛盾严格表述。

定理3.5证明IV

用$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_n$ 表示Γ_n的特征值, 则有正交矩阵T使得

$$T\Gamma_n T^T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

用$|\boldsymbol{\alpha}^{(k)}|$ 表示$\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$的欧氏模, 则有

$$\begin{aligned}\gamma_0 =& \mathrm{E}X_{n+k}^2 = \mathrm{E}((\boldsymbol{\alpha}^{(k)})^T \mathbf{X})^2 = (\boldsymbol{\alpha}^{(k)})^T \Gamma_n \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \\ =& ((\boldsymbol{\alpha}^{(k)})^T T^T)(T\Gamma_n T^T)(T\boldsymbol{\alpha}^{(k)}) \\ \geq& \lambda_1 (T\boldsymbol{\alpha}^{(k)})^T (T\boldsymbol{\alpha}^{(k)}) = \lambda_1 |\boldsymbol{\alpha}^{(k)}|^2.\end{aligned}$$

即有$|\boldsymbol{\alpha}^{(k)}| \leq \sqrt{\gamma_0/\lambda_1} < \infty$.

定理3.5证明V

另一方面

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 =& \mathrm{E}((\boldsymbol{\alpha}^{(k)})^T \mathbf{X} \cdot X_{n+k}) = (\boldsymbol{\alpha}^{(k)})^T E(\mathbf{X} X_{n+k}) \\
=& (\boldsymbol{\alpha}^{(k)})^T (\gamma_{n+k-1}, \gamma_{n+k-2}, \cdots, \gamma_k)^T \\
\le& |\boldsymbol{\alpha}^{(k)}| \left(\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{j+k}^2 \right)^{1/2} \\
\le& (\gamma_0/\lambda_1)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{k+j}^2 \right)^{1/2} \\
\to& 0. \quad \text{当} k \to \infty
\end{aligned}
$$

这与$\gamma_0 > 0$矛盾，故$\det(\Gamma_{n+1}) = 0$不成立. □

线性平稳序列的自协方差的正定性

- **推论3.6** (系数平方可和的)线性平稳序列的自协方差阵总是正定的。称其自协方差函数$\{\gamma_j, j \in \mathbb{Z}\}$是正定序列。
- 有限个频率的离散谱序列的轨道具有周期性，可以用有限个历史值的线性组合无误差地预报整个序列。

线性平稳序列的自协方差的正定性

- **推论3.6**　(系数平方可和的)线性平稳序列的自协方差阵总是正定的。称其自协方差函数$\{\gamma_j, j \in \mathbb{Z}\}$是正定序列。
- 有限个频率的离散谱序列的轨道具有周期性，可以用有限个历史值的线性组合无误差地预报整个序列。

随机变量的线性相关性和线性预测

- 对于方差有限的随机变量$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, 如果有不全为零的常数$b_1, \ldots, b_n$使得

$$\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j) = 0,$$

则称随机变量$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是**线性相关**的，否则称为**线性无关**的.

- 线性相关时，存在常数b_0使得$\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j = b_0$ a.s.成立.
- 并且当$b_n \neq 0$时，Y_n可以由$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$线性表示:

$$Y_n = a_0 + a_1 Y_{n-1} + \cdots + a_{n-1} Y_1$$

这时我们称Y_n可以由$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$ **完全线性预测**.

随机变量的线性相关性和线性预测

- 对于方差有限的随机变量$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, 如果有不全为零的常数$b_1, \ldots, b_n$使得

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) = 0,$$

则称随机变量$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是**线性相关**的, 否则称为**线性无关**的.

- 线性相关时, 存在常数b_0使得$\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j = b_0$ a.s.成立.
- 并且当$b_n \neq 0$时, Y_n可以由$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$线性表示:

$$Y_n = a_0 + a_1 Y_{n-1} + \cdots + a_{n-1} Y_1$$

这时我们称Y_n可以由$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$ **完全线性预测**.

随机变量的线性相关性和线性预测

- 对于方差有限的随机变量$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, 如果有不全为零的常数$b_1, \ldots, b_n$使得

$$\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j) = 0,$$

则称随机变量$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是**线性相关**的, 否则称为**线性无关**的.

- 线性相关时, 存在常数b_0使得$\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j = b_0$ a.s.成立.
- 并且当$b_n \neq 0$时, Y_n可以由$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$线性表示:

$$Y_n = a_0 + a_1 Y_{n-1} + \cdots + a_{n-1} Y_1$$

这时我们称Y_n可以由$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$ **完全线性预测**.

平稳序列的可完全预测性

- 对于平稳序列$\{X_t\}$，$X_{t-1},\ldots,X_{t-n}$的一个带截距的线性组合为$b_1X_{t-1}+\ldots b_nX_{t-n}-b_0$，这$n$个变量线性无关当且仅当

$$\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} b_jX_{t-j}-b_0)=\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} b_jX_{t-j})$$
$$=\mathbf{b}\Gamma_n\mathbf{b}>0$$

即Γ_n正定。

- 反之，若Γ_n正定而Γ_{n+1}不满秩，则X_t可以被$X_{t-1},\ldots,X_{t-n}$完全线性预测。
- 线性平稳列不能完全线性预测。
- 有限个频率成分的离散谱序列可完全线性预测（书中定理3.7）。

平稳序列的可完全预测性

- 对于平稳序列$\{X_t\}$，$X_{t-1},\ldots,X_{t-n}$的一个带截距的线性组合为$b_1X_{t-1}+\ldots b_nX_{t-n}-b_0$，这$n$个变量线性无关当且仅当

$$\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} b_jX_{t-j}-b_0)=\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} b_jX_{t-j})$$

$$=\mathbf{b}\Gamma_n\mathbf{b}>0$$

即Γ_n正定。

- 反之，若Γ_n正定而Γ_{n+1}不满秩，则X_t可以被$X_{t-1},\ldots,X_{t-n}$完全线性预测。
- 线性平稳列不能完全线性预测。
- 有限个频率成分的离散谱序列可完全线性预测（书中定理3.7）。

平稳序列的可完全预测性

- 对于平稳序列$\{X_t\}$，$X_{t-1},\ldots,X_{t-n}$的一个带截距的线性组合为$b_1X_{t-1}+\ldots b_nX_{t-n}-b_0$，这$n$个变量线性无关当且仅当

$$\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} b_jX_{t-j}-b_0)=\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} b_jX_{t-j})$$
$$=\mathbf{b}\Gamma_n\mathbf{b}>0$$

  即Γ_n正定。
- 反之，若Γ_n正定而Γ_{n+1}不满秩，则X_t可以被$X_{t-1},\ldots,X_{t-n}$完全线性预测。
- 线性平稳列不能完全线性预测。
- 有限个频率成分的离散谱序列可完全线性预测（书中定理3.7）。

平稳序列的可完全预测性

- 对于平稳序列$\{X_t\}$，$X_{t-1},\ldots,X_{t-n}$的一个带截距的线性组合为$b_1X_{t-1}+\ldots b_nX_{t-n}-b_0$，这$n$个变量线性无关当且仅当

$$\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} b_jX_{t-j}-b_0)=\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} b_jX_{t-j})$$
$$=\mathbf{b}\Gamma_n\mathbf{b}>0$$

  即Γ_n正定。
- 反之，若Γ_n正定而Γ_{n+1}不满秩，则X_t可以被$X_{t-1},\ldots,X_{t-n}$完全线性预测。
- 线性平稳列不能完全线性预测。
- 有限个频率成分的离散谱序列可完全线性预测（书中定理3.7）。