应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2017年秋季学期

推移算子

- 对任何时间序列$\{X_t\}$和无穷级数

$$\psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j z^j$$

- 只要级数

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j X_{t-j}$$

在某种意义下收敛(例如a.s.收敛，依概率收敛，均方收敛)，

推移算子

- 对任何时间序列$\{X_t\}$和无穷级数

$$\psi(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j z^j$$

- 只要级数

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j X_{t-j}$$

在某种意义下收敛(例如a.s.收敛，依概率收敛，均方收敛)，

推移算子II

- 就定义

$$\psi(\mathscr{B}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \mathscr{B}^j,$$

$$\psi(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \mathscr{B}^j X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j X_{t-j}. \qquad (1.1)$$

并且称$\mathscr{B}$是时间t的向后推移算子, 简称为推移算子.

- 显然$\mathscr{B}X_t = X_{t-1}$.
- $\mathscr{B}$确实是Hilbert空间$\overline{L}^2(X)$上的一个算子，这里我们只给出它的简单性质。

推移算子II

- 就定义

$$\psi(\mathscr{B}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \mathscr{B}^j,$$

$$\psi(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \mathscr{B}^j X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j X_{t-j}. \tag{1.1}$$

  并且称$\mathscr{B}$是时间t的向后推移算子，简称为推移算子.
- 显然$\mathscr{B}X_t = X_{t-1}$.
- $\mathscr{B}$确实是Hilbert空间$\overline{L}^2(X)$上的一个算子，这里我们只给出它的简单性质。

推移算子II

- 就定义

$$\psi(\mathscr{B}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \mathscr{B}^j,$$

$$\psi(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \mathscr{B}^j X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j X_{t-j}. \tag{1.1}$$

  并且称$\mathscr{B}$是时间t的向后推移算子, 简称为推移算子.
- 显然$\mathscr{B}X_t = X_{t-1}$.
- $\mathscr{B}$确实是Hilbert空间$\overline{L}^2(X)$上的一个算子，这里我们只给出它的简单性质。

推移算子的性质

1. 对和t无关的随机变量Y, 有$\mathscr{B}Y = Y$.
2. $\mathscr{B}^n(aX_t) = a\mathscr{B}^n X_t = aX_{t-n}$.
3. $\mathscr{B}^{n+m}X_t = \mathscr{B}^n(\mathscr{B}^m X_t) = X_{t-n-m}$.
4. 对多项式$\psi(z) = \sum_{j=0}^{p} c_j z^j$, 有$\psi(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=0}^{p} c_j X_{t-j}$.

推移算子的性质

1. 对和t无关的随机变量Y, 有$\mathscr{B}Y = Y$.
2. $\mathscr{B}^n(aX_t) = a\mathscr{B}^n X_t = aX_{t-n}$.
3. $\mathscr{B}^{n+m}X_t = \mathscr{B}^n(\mathscr{B}^m X_t) = X_{t-n-m}$.
4. 对多项式$\psi(z) = \sum_{j=0}^{p} c_j z^j$, 有$\psi(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=0}^{p} c_j X_{t-j}$.

推移算子的性质

1. 对和t无关的随机变量Y, 有$\mathscr{B}Y = Y$.
2. $\mathscr{B}^n(aX_t) = a\mathscr{B}^n X_t = aX_{t-n}$.
3. $\mathscr{B}^{n+m}X_t = \mathscr{B}^n(\mathscr{B}^m X_t) = X_{t-n-m}$.
4. 对多项式$\psi(z) = \sum_{j=0}^{p} c_j z^j$, 有$\psi(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=0}^{p} c_j X_{t-j}$.

推移算子的性质

1. 对和t无关的随机变量Y, 有$\mathscr{B}Y = Y$.
2. $\mathscr{B}^n(aX_t) = a\mathscr{B}^n X_t = aX_{t-n}$.
3. $\mathscr{B}^{n+m}X_t = \mathscr{B}^n(\mathscr{B}^m X_t) = X_{t-n-m}$.
4. 对多项式$\psi(z) = \sum_{j=0}^p c_j z^j$, 有$\psi(\mathscr{B})X_t = \sum_{j=0}^p c_j X_{t-j}$.

推移算子的性质II

5. 对于多项式$\psi(z)=\sum_{j=0}^{p}c_jz^j$ 和$\phi(z)=\sum_{j=0}^{q}d_jz^j$ 的乘积$A(z)=\psi(z)\phi(z)$, 有

$$A(\mathscr{B})X_t=\psi(\mathscr{B})[\phi(\mathscr{B})X_t]=\phi(\mathscr{B})[\psi(\mathscr{B})X_t].$$

6. 对于时间序列$\{X_t\}$, $\{Y_t\}$, 多项式$\psi(z)=\sum_{j=0}^{p}c_jz^j$, 和随机变量$U,V,W$, 有

$$\psi(\mathscr{B})(UX_t+VY_t+W)=U\psi(\mathscr{B})X_t+V\psi(\mathscr{B})Y_t+W\psi(1).$$

推移算子的性质II

5. 对于多项式$\psi(z)=\sum_{j=0}^{p} c_j z^j$ 和$\phi(z)=\sum_{j=0}^{q} d_j z^j$ 的乘积$A(z)=\psi(z)\phi(z)$, 有

$$A(\mathscr{B})X_t=\psi(\mathscr{B})[\phi(\mathscr{B})X_t]=\phi(\mathscr{B})[\psi(\mathscr{B})X_t].$$

6. 对于时间序列$\{X_t\}$, $\{Y_t\}$, 多项式$\psi(z)=\sum_{j=0}^{p} c_j z^j$, 和随机变量$U, V, W$, 有

$$\psi(\mathscr{B})(UX_t+VY_t+W)=U\psi(\mathscr{B})X_t+V\psi(\mathscr{B})Y_t+W\psi(1).$$

常系数齐次线性差分方程

- 给定p个实数$a_1, a_2, \cdots, a_p$, $a_p \neq 0$, 我们称

$$X_t - [a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_p X_{t-p}] = 0, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

为p阶齐次常系数线性差分方程, 简称为齐次差分方程.

- 满足(1.2)的实数列(或复数列)$\{X_t\}$称为(1.2)的解.
- 满足(1.2)的实值(或复值)时间序列$\{X_t\}$也称为(1.2)的解.

常系数齐次线性差分方程

- 给定p个实数$a_1, a_2, \cdots, a_p$, $a_p \neq 0$, 我们称

$$X_t - [a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_p X_{t-p}] = 0, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

为p阶齐次常系数线性差分方程, 简称为齐次差分方程.

- 满足(1.2)的实数列(或复数列)$\{X_t\}$称为(1.2)的解.
- 满足(1.2)的实值(或复值)时间序列$\{X_t\}$也称为(1.2)的解.

常系数齐次线性差分方程

- 给定p个实数$a_1, a_2, \cdots, a_p$, $a_p \neq 0$, 我们称

$$X_t - [a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \cdots + a_pX_{t-p}] = 0, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

为p阶齐次常系数线性差分方程, 简称为齐次差分方程.
- 满足(1.2)的实数列(或复数列)$\{X_t\}$称为(1.2)的解.
- 满足(1.2)的实值(或复值)时间序列$\{X_t\}$也称为(1.2)的解.

齐次线性差分方程的解

- (1.2)的解$\{X_t\}$可以由它的p个初值$X_0, X_1, \cdots, X_{p-1}$逐步递推得到:

$$X_t = [a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_p X_{t-p}], \quad t \geq p,$$
$$X_{t-p} = \frac{1}{a_p}[x_t - a_1 X_{t-1} - \cdots - a_{p-1} X_{t-p+1}], \ t - p < 0$$

- 若初值是随机变量则递推得到的$\{X_t\}$是时间序列。
- 用推移算子把差分方程写成

$$A(\mathscr{B}) X_t = 0, \ t \in \mathbb{Z}, \ 其中\ A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j. \quad (1.3)$$

- $A(z)$称为差分方程(1.2)的特征多项式。
- 解有线性性质: $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$是解则

$$\xi X_t + \eta Y_t$$

也是解。

齐次线性差分方程的解

- (1.2)的解$\{X_t\}$可以由它的p个初值$X_0, X_1, \cdots, X_{p-1}$逐步递推得到:

$$X_t = [a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_p X_{t-p}], \quad t \geq p,$$

$$X_{t-p} = \frac{1}{a_p}[x_t - a_1 X_{t-1} - \cdots - a_{p-1} X_{t-p+1}], \ t - p < 0$$

- 若初值是随机变量则递推得到的$\{X_t\}$是时间序列。
- 用推移算子把差分方程写成

$$A(\mathscr{B})X_t = 0, \ t \in \mathbb{Z}, \ 其中\ A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j. \quad (1.3)$$

- $A(z)$称为差分方程(1.2)的特征多项式。
- 解有线性性质: $\{X_t\}, \{Y_t\}$是解则

$$\xi X_t + \eta Y_t$$

也是解。

齐次线性差分方程的解

- (1.2)的解$\{X_t\}$可以由它的p个初值$X_0, X_1, \cdots, X_{p-1}$逐步递推得到:

$$X_t = [a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_p X_{t-p}], \quad t \geq p,$$
$$X_{t-p} = \frac{1}{a_p}[x_t - a_1 X_{t-1} - \cdots - a_{p-1} X_{t-p+1}], \ t - p < 0$$

- 若初值是随机变量则递推得到的$\{X_t\}$是时间序列。
- 用推移算子把差分方程写成

$$A(\mathscr{B})X_t = 0, \ t \in \mathbb{Z}, \text{ 其中 } A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j. \quad (1.3)$$

- $A(z)$称为差分方程(1.2)的特征多项式。
- 解有线性性质: $\{X_t\}, \{Y_t\}$是解则

$$\xi X_t + \eta Y_t$$

也是解。

齐次线性差分方程的解

- (1.2)的解$\{X_t\}$可以由它的p个初值$X_0, X_1, \cdots, X_{p-1}$逐步递推得到:

$$X_t = [a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_p X_{t-p}], \quad t \geq p,$$
$$X_{t-p} = \frac{1}{a_p}[x_t - a_1 X_{t-1} - \cdots - a_{p-1} X_{t-p+1}], \ t - p < 0$$

- 若初值是随机变量则递推得到的$\{X_t\}$是时间序列。
- 用推移算子把差分方程写成

$$A(\mathscr{B})X_t = 0, \ t \in \mathbb{Z}, \ \text{其中} \ A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j. \quad (1.3)$$

- $A(z)$称为差分方程(1.2)的特征多项式。
- 解有线性性质: $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$是解则

$$\xi X_t + \eta Y_t$$

也是解。

齐次线性差分方程的解

- (1.2)的解$\{X_t\}$可以由它的p个初值$X_0, X_1, \cdots, X_{p-1}$逐步递推得到:

$$X_t = [a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_p X_{t-p}], \quad t \geq p,$$
$$X_{t-p} = \frac{1}{a_p}[x_t - a_1 X_{t-1} - \cdots - a_{p-1} X_{t-p+1}], \ t - p < 0$$

- 若初值是随机变量则递推得到的$\{X_t\}$是时间序列。
- 用推移算子把差分方程写成

$$A(\mathscr{B}) X_t = 0, \ t \in \mathbb{Z}, \ \text{其中} \ A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j. \quad (1.3)$$

- $A(z)$称为差分方程(1.2)的特征多项式。
- 解有线性性质: $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$是解则

$$\xi X_t + \eta Y_t$$

也是解。

差分方程基础解

- 设多项式$A(z)$有k 个互不相同的零点$z_1, z_2, \cdots, z_k$，其中z_j是$r(j)$重零点.
- 可以证明对每一z_j有

$$A(\mathscr{B})t^l z_j^{-t} = 0, \ \ l = 0, 1, \ldots, r(j) - 1 \tag{1.4}$$

- 证明:

$$A(z) = \prod_{j=1}^{k} (1 - z_j^{-1} z)^{r(j)}$$

$$A(\mathscr{B}) = \prod_{j=1}^{k} (1 - z_j^{-1} \mathscr{B})^{r(j)}$$

差分方程基础解

- 设多项式$A(z)$有k 个互不相同的零点$z_1, z_2, \cdots, z_k$，其中z_j是$r(j)$重零点.
- 可以证明对每一z_j有

$$A(\mathscr{B})t^l z_j^{-t} = 0,\ \ l = 0, 1, \ldots, r(j) - 1 \qquad (1.4)$$

- 证明:

$$A(z) = \prod_{j=1}^{k}(1 - z_j^{-1}z)^{r(j)}$$

$$A(\mathscr{B}) = \prod_{j=1}^{k}(1 - z_j^{-1}\mathscr{B})^{r(j)}$$

差分方程基础解

- 设多项式$A(z)$有k 个互不相同的零点$z_1, z_2, \cdots, z_k$，其中z_j是$r(j)$重零点.
- 可以证明对每一z_j有

$$A(\mathscr{B})t^l z_j^{-t} = 0,\ \ l = 0, 1, \ldots, r(j) - 1 \qquad (1.4)$$

- 证明:

$$A(z) = \prod_{j=1}^{k}(1 - z_j^{-1}z)^{r(j)}$$

$$A(\mathscr{B}) = \prod_{j=1}^{k}(1 - z_j^{-1}\mathscr{B})^{r(j)}$$

基础解II

只要证明

$$(1-z_j^{-1}\mathscr{B})^{l+1}(t^l z_j^{-t})=0,\ \ l=0,1,\ldots,r(j)-1 \qquad (1.5)$$

归纳法。$l=0$时

$$(1-z_j^{-1}\mathscr{B})z_j^{-t}=z_j^{-t}-z_j^{-1}z_j^{-(t-1)}=0$$

设对$0\le l\le m-1$已经证明

$$(1-z_j^{-1}\mathscr{B})^{l+1}t^l z_j^{-t}=0$$

基础解II

只要证明

$$(1 - z_j^{-1}\mathscr{B})^{l+1}(t^l z_j^{-t}) = 0, \ \ l = 0, 1, \dots, r(j) - 1 \qquad (1.5)$$

归纳法。$l = 0$时

$$(1 - z_j^{-1}\mathscr{B})z_j^{-t} = z_j^{-t} - z_j^{-1}z_j^{-(t-1)} = 0$$

设对$0 \le l \le m - 1$已经证明

$$(1 - z_j^{-1}\mathscr{B})^{l+1}t^l z_j^{-t} = 0$$

基础解II

只要证明

$$(1 - z_j^{-1}\mathscr{B})^{l+1}(t^l z_j^{-t}) = 0, \ \ l = 0, 1, \dots, r(j) - 1 \qquad (1.5)$$

归纳法。$l = 0$时

$$(1 - z_j^{-1}\mathscr{B})z_j^{-t} = z_j^{-t} - z_j^{-1}z_j^{-(t-1)} = 0$$

设对$0 \le l \le m - 1$已经证明

$$(1 - z_j^{-1}\mathscr{B})^{l+1}t^l z_j^{-t} = 0$$

基础解II

只要证明

$$(1-z_j^{-1}\mathscr{B})^{l+1}(t^l z_j^{-t})=0,\ \ l=0,1,\ldots,r(j)-1 \qquad (1.5)$$

归纳法。$l=0$时

$$(1-z_j^{-1}\mathscr{B})z_j^{-t}=z_j^{-t}-z_j^{-1}z_j^{-(t-1)}=0$$

设对$0\le l\le m-1$已经证明

$$(1-z_j^{-1}\mathscr{B})^{l+1}t^l z_j^{-t}=0$$

基础解III

则对$l=m$有

$$
\begin{aligned}
&(1-z_j^{-1}\mathscr{B})^{m+1} t^m z_j^{-t} \\
=&(1-z_j^{-1}\mathscr{B})^{m}(1-z_j^{-1}\mathscr{B})\left(t^m z_j^{-t}\right) \\
=&(1-z_j^{-1}\mathscr{B})^{m}\left(t^m z_j^{-t} - z_j^{-1}(t-1)^m z_j^{-(t-1)}\right) \\
=&(1-z_j^{-1}\mathscr{B})^{m}\left(t^m - (t-1)^m\right) z_j^{-t} \\
=&(1-z_j^{-1}\mathscr{B})^{m}\left(c_1 t^{m-1} + c_2 t^{m-2} + \cdots + c_m\right) z_j^{-t} \\
=&0
\end{aligned}
$$

于是(1.5)成立，从而(1.4)成立。把基础解线性组合可以得到齐次线性差分方程的通解。

齐次线性差分方程的通解

定理1.1 设$A(z)$有k 个互不相同的零点$z_1, z_2, \ldots, z_k$，其中z_j是$r(j)$重零点. 则

$$t^l z_j^{-t}, \quad l = 0, 1, \cdots, r(j)-1, \quad j = 1, 2, \cdots, k \tag{1.6}$$

是(1.2)的p个解; 而且, (1.2)的任何解$\{X_t\}$都可以写成这p个解的线性组合:

$$X_t = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} U_{l,j} t^l z_j^{-t}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.7}$$

其中的随机变量$U_{l,j}$可以由$\{X_t\}$的初值$X_0, X_1, \cdots, X_{p-1}$惟一决定. (1.7)称为齐次线性差分方程(1.2)的通解。此定理关于时间序列叙述，实际上对差分方程的复数或实数列解也是成立的。

证明见Brockwell and Davis(1987)。

齐次线性差分方程的通解

定理1.1 设$A(z)$有k 个互不相同的零点$z_1, z_2, \ldots, z_k$, 其中z_j是$r(j)$重零点. 则

$$t^l z_j^{-t}, \quad l = 0, 1, \cdots, r(j) - 1, \quad j = 1, 2, \cdots, k \tag{1.6}$$

是(1.2)的p个解; 而且, (1.2)的任何解$\{X_t\}$都可以写成这p个解的线性组合:

$$X_t = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} U_{l,j} t^l z_j^{-t}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.7}$$

其中的随机变量$U_{l,j}$可以由$\{X_t\}$的初值$X_0, X_1, \cdots, X_{p-1}$惟一决定. (1.7)称为齐次线性差分方程(1.2)的通解。此定理关于时间序列叙述，实际上对差分方程的复数或实数列解也是成立的。

证明见Brockwell and Davis(1987)。

齐次线性差分方程的通解II

- (1.7)中z_j可以是虚数。记

$$U_{l,j} = V_{l,j} e^{i\theta_{l,j}}, \quad z_j = \rho_j e^{i\lambda_j}$$

则

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(U_{l,j} t^l z_j^{-t}\right) =& \mathrm{Re}\left(V_{l,j} t^l \rho_j^{-t} e^{-i(\lambda_j t - \theta_{l,j})}\right) \\ =& V_{l,j} t^l \rho_j^{-t} \cos(\lambda_j t - \theta_{l,j}) \end{aligned}$$

- 差分方程(1.2)的实值解可以表示为

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} V_{l,j} t^l \rho_j^{-t} \cos(\lambda_j t - \theta_j), \quad t \in \mathbb{Z}$$

- $\{V_{l,j}, \theta_{l,j}\}$可以由初值$X_0, X_1, \ldots, X_{p-1}$唯一决定。

齐次线性差分方程的通解II

- (1.7)中z_j可以是虚数。记

$$U_{l,j} = V_{l,j} e^{i\theta_{l,j}}, \quad z_j = \rho_j e^{i\lambda_j}$$

则

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(U_{l,j} t^l z_j^{-t}\right) =& \mathrm{Re}\left(V_{l,j} t^l \rho_j^{-t} e^{-i(\lambda_j t - \theta_{l,j})}\right) \\ =& V_{l,j} t^l \rho_j^{-t} \cos(\lambda_j t - \theta_{l,j}) \end{aligned}$$

- 差分方程(1.2)的实值解可以表示为

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} V_{l,j} t^l \rho_j^{-t} \cos(\lambda_j t - \theta_j), \quad t \in \mathbb{Z}$$

- $\{V_{l,j}, \theta_{l,j}\}$可以由初值$X_0, X_1, \ldots, X_{p-1}$唯一决定。

齐次线性差分方程的通解II

- (1.7)中z_j可以是虚数。记

$$U_{l,j} = V_{l,j}e^{i\theta_{l,j}}, \quad z_j = \rho_j e^{i\lambda_j}$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(U_{l,j}t^l z_j^{-t}\right) =& \mathrm{Re}\left(V_{l,j}t^l \rho_j^{-t} e^{-i(\lambda_j t - \theta_{l,j})}\right) \\ =& V_{l,j}t^l\rho_j^{-t}\cos(\lambda_j t - \theta_{l,j})\end{aligned}$$

- 差分方程(1.2)的实值解可以表示为

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{r(j)-1} V_{l,j}t^l\rho_j^{-t}\cos(\lambda_j t - \theta_j), \quad t \in \mathbb{Z}$$

- $\{V_{l,j}, \theta_{l,j}\}$可以由初值$X_0, X_1, \ldots, X_{p-1}$唯一决定。

通解的收敛性

- 如果差分方程的特征多项式$A(z)$的根都在单位圆外: $|z_j| > 1, \quad j = 1, 2, \ldots, k$, 或$A(z) \neq 0, \quad \forall |z| \leq 1$,
- 取$1 < \alpha < \min\{|z_j| : j = 1, \ldots, k\}$，则

$$t^l |z_j|^{-t} = t^l (\alpha/|z_j|)^t \alpha^{-t} = o(\alpha^{-t})$$

- 于是方程的任意解X_t满足

$$|X_t| = o(\alpha^{-t}) \quad a.s., \ t \to \infty \tag{1.9}$$

- 称X_t以负指数阶收敛到零。

通解的收敛性

- 如果差分方程的特征多项式$A(z)$的根都在单位圆外:
  $|z_j| > 1, \quad j = 1, 2, \ldots, k$, 或$A(z) \neq 0, \quad \forall |z| \leq 1$,
- 取$1 < \alpha < \min\{|z_j| : j = 1, \ldots, k\}$，则

$$t^l |z_j|^{-t} = t^l (\alpha/|z_j|)^t \alpha^{-t} = o(\alpha^{-t})$$

- 于是方程的任意解X_t满足

$$|X_t| = o(\alpha^{-t}) \quad a.s., \ t \to \infty \qquad (1.9)$$

- 称X_t以负指数阶收敛到零。

通解的收敛性

- 如果差分方程的特征多项式$A(z)$的根都在单位圆外: $|z_j| > 1, \quad j = 1, 2, \ldots, k$, 或$A(z) \neq 0, \quad \forall |z| \leq 1$,
- 取$1 < \alpha < \min\{|z_j| : j = 1, \ldots, k\}$，则

$$t^l |z_j|^{-t} = t^l (\alpha/|z_j|)^t \alpha^{-t} = o(\alpha^{-t})$$

- 于是方程的任意解X_t满足

$$|X_t| = o(\alpha^{-t}) \quad a.s., \ t \to \infty \tag{1.9}$$

- 称X_t以负指数阶收敛到零。

通解的收敛性

- 如果差分方程的特征多项式$A(z)$的根都在单位圆外:
$|z_j| > 1, \quad j = 1, 2, \ldots, k$, 或$A(z) \neq 0, \quad \forall |z| \leq 1$,
- 取$1 < \alpha < \min\{|z_j| : j = 1, \ldots, k\}$，则

$$t^l |z_j|^{-t} = t^l (\alpha / |z_j|)^t \alpha^{-t} = o(\alpha^{-t})$$

- 于是方程的任意解X_t满足

$$|X_t| = o(\alpha^{-t}) \quad a.s., \ t \to \infty \tag{1.9}$$

- 称X_t以负指数阶收敛到零。

通解的收敛性II

- 如果特征多项式有单位根$z_j = \exp(i\lambda_j)$，则方程有一个周期解

$$X_t = a\cos(\lambda_j t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

- 如果单位圆内有根$z_j = \rho_j \exp(i\lambda_j), \rho_j < 1$，则方程有一个爆炸解（发散解）

$$X_t = a\left(\frac{1}{\rho_j}\right)^t \cos(\lambda_j t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

通解的收敛性II

- 如果特征多项式有单位根$z_j = \exp(i\lambda_j)$，则方程有一个周期解

$$X_t = a\cos(\lambda_j t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

- 如果单位圆内有根$z_j = \rho_j \exp(i\lambda_j), \rho_j < 1$，则方程有一个爆炸解（发散解）

$$X_t = a\left(\frac{1}{\rho_j}\right)^t \cos(\lambda_j t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

非齐次线性差分方程及其通解

- 设$\{Y_t\}$为实值时间序列。

$$A(\mathscr{B})X_t = Y_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.10}$$

- 满足(1.10)的时间序列$\{X_t\}$称为(1.10)的解。
- 如果有(1.10)的某个解(称为特解)$\{X_t^{(0)}\}$，则通解可以写成

$$X_t = X_t^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} U_{l,j} t^l z_j^{-t}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.11}$$

非齐次线性差分方程及其通解

- 设$\{Y_t\}$为实值时间序列。

$$A(\mathscr{B})X_t = Y_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.10}$$

- 满足(1.10)的时间序列$\{X_t\}$称为(1.10)的解。
- 如果有(1.10)的某个解(称为特解)$\{X_t^{(0)}\}$，则通解可以写成

$$X_t = X_t^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} U_{l,j} t^l z_j^{-t}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.11}$$

非齐次线性差分方程及其通解

- 设$\{Y_t\}$为实值时间序列。

$$A(\mathscr{B})X_t = Y_t, \quad t \in \mathbb{Z} \qquad (1.10)$$

- 满足(1.10)的时间序列$\{X_t\}$称为(1.10)的解。
- 如果有(1.10)的某个解(称为特解)$\{X_t^{(0)}\}$，则通解可以写成

$$X_t = X_t^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} U_{l,j} t^l z_j^{-t}, \quad t \in \mathbb{Z} \qquad (1.11)$$

AR(1)例子

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- 从初值X_0出发。a越小，初值影响减小越快。
- $|a|$接近于1时，初值和前面的ε_{t-j}影响减小越慢，序列振荡。
- 只要$|a| < 1$，序列最终可以稳定下来。称系统(2.1)是稳定的。
- 如果$a = \pm 1$则序列振荡越来越大，呈爆炸型。
- $|a| > 1$时序列也不能稳定。$|a| \geq 1$时称(2.1)是非稳定的．（演示）

AR(1)例子

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- 从初值X_0出发。a越小，初值影响减小越快。
- $|a|$接近于1时，初值和前面的ε_{t-j}影响减小越慢，序列振荡。
- 只要$|a| < 1$，序列最终可以稳定下来。称系统(2.1)是稳定的。
- 如果$a = \pm 1$则序列振荡越来越大，呈爆炸型。
- $|a| > 1$时序列也不能稳定。$|a| \geq 1$时称(2.1)是非稳定的.（演示）

AR(1)例子

-
$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- 从初值X_0出发。a越小，初值影响减小越快。
- $|a|$接近于1时，初值和前面的ε_{t-j}影响减小越慢，序列振荡。
- 只要$|a| < 1$，序列最终可以稳定下来。称系统(2.1)是稳定的。
- 如果$a = \pm 1$则序列振荡越来越大，呈爆炸型。
- $|a| > 1$时序列也不能稳定。$|a| \geq 1$时称(2.1)是非稳定的．（演示）

AR(1)例子

-

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$

- 从初值X_0出发。a越小，初值影响减小越快。
- $|a|$接近于1时，初值和前面的ε_{t-j}影响减小越慢，序列振荡。
- 只要$|a| < 1$，序列最终可以稳定下来。称系统(2.1)是稳定的。
- 如果$a = \pm 1$则序列振荡越来越大，呈爆炸型。
- $|a| > 1$时序列也不能稳定。$|a| \geq 1$时称(2.1)是非稳定的．（演示）

AR(1)例子

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- 从初值X_0出发。a越小，初值影响减小越快。
- $|a|$接近于1时，初值和前面的ε_{t-j}影响减小越慢，序列振荡。
- 只要$|a| < 1$，序列最终可以稳定下来。称系统(2.1)是稳定的。
- 如果$a = \pm 1$则序列振荡越来越大，呈爆炸型。
- $|a| > 1$时序列也不能稳定。$|a| \geq 1$时称(2.1)是非稳定的.（演示）

AR(1)例子

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- 从初值X_0出发。a越小，初值影响减小越快。
- $|a|$接近于1时，初值和前面的ε_{t-j}影响减小越慢，序列振荡。
- 只要$|a| < 1$，序列最终可以稳定下来。称系统(2.1)是稳定的。
- 如果$a = \pm 1$则序列振荡越来越大，呈爆炸型。
- $|a| > 1$时序列也不能稳定。$|a| \geq 1$时称(2.1)是非稳定的.（演示）

AR(1)的差分方程及平稳解

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- $A(z) = 1 - az$是差分方程(2.1)的特征多项式。$z_1 = \frac{1}{a}$是特征根。
- 稳定的充分必要条件是$|a| < 1$，或$|z_1| > 1$，即特征根都在单位圆外。

AR(1)的差分方程及平稳解

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- $A(z) = 1 - az$是差分方程(2.1)的特征多项式。$z_1 = \frac{1}{a}$是特征根。
- 稳定的充分必要条件是$|a| < 1$，或$|z_1| > 1$，即特征根都在单位圆外。

AR(1)的差分方程及平稳解

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- $A(z) = 1 - az$是差分方程(2.1)的特征多项式。$z_1 = \frac{1}{a}$是特征根。
- 稳定的充分必要条件是$|a| < 1$，或$|z_1| > 1$，即特征根都在单位圆外。

AR(1)的差分方程及平稳解II

- 当$|a| < 1$时下面的线性序列有定义:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

-

$$\begin{aligned} aX_{t-1} + \varepsilon_t =& a\sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-1-j} + \varepsilon_t \\ =& \sum_{i=1}^{\infty} a^i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (i = j+1) \\ =& X_t \end{aligned}$$

- 于是平稳序列(2.2)是非齐次差分方程(2.1)的解，称为平稳解。

AR(1)的差分方程及平稳解II

- 当$|a| < 1$时下面的线性序列有定义:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

-

$$\begin{aligned} aX_{t-1} + \varepsilon_t =& a\sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-1-j} + \varepsilon_t \\ =& \sum_{i=1}^{\infty} a^i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (i = j+1) \\ =& X_t \end{aligned}$$

- 于是平稳序列(2.2)是非齐次差分方程(2.1)的解，称为平稳解。

AR(1)的差分方程及平稳解II

- 当$|a| < 1$时下面的线性序列有定义:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

- $$\begin{aligned} aX_{t-1} + \varepsilon_t =& a \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-1-j} + \varepsilon_t \\ =& \sum_{i=1}^{\infty} a^i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (i = j+1) \\ =& X_t \end{aligned}$$

- 于是平稳序列(2.2)是非齐次差分方程(2.1)的解，称为平稳解。

AR(1)的差分方程及平稳解III

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- (2.1)的通解为
$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}, + \xi a^t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- 当$t \to \infty$时(2.1)的所有解a.s.收敛到平稳解(2.2)。收敛速度是负指数速度$|a|^t$。
- 平稳解可以看成系统(2.1)处于稳定状态的情况。
- 特征根$\frac{1}{a}$离单位圆越远，稳定性越好。

AR(1)的差分方程及平稳解III

-

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$

- (2.1)的通解为

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}, + \xi a^t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

- 当$t \to \infty$时(2.1)的所有解a.s.收敛到平稳解(2.2)。收敛速度是负指数速度$|a|^t$。
- 平稳解可以看成系统(2.1)处于稳定状态的情况。
- 特征根$\frac{1}{a}$离单位圆越远，稳定性越好。

AR(1)的差分方程及平稳解III

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- (2.1)的通解为
$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}, + \xi a^t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- 当$t \to \infty$时(2.1)的所有解a.s.收敛到平稳解(2.2)。收敛速度是负指数速度$|a|^t$。
- 平稳解可以看成系统(2.1)处于稳定状态的情况。
- 特征根$\frac{1}{a}$离单位圆越远，稳定性越好。

AR(1)的差分方程及平稳解III

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- (2.1)的通解为
$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}, + \xi a^t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- 当$t \to \infty$时(2.1)的所有解a.s.收敛到平稳解(2.2)。收敛速度是负指数速度$|a|^t$。
- 平稳解可以看成系统(2.1)处于稳定状态的情况。
- 特征根$\frac{1}{a}$离单位圆越远，稳定性越好。

AR(1)的差分方程及平稳解III

- $$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$
- (2.1)的通解为
$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-j}, + \xi a^t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- 当$t \to \infty$时(2.1)的所有解a.s.收敛到平稳解(2.2)。收敛速度是负指数速度$|a|^t$。
- 平稳解可以看成系统(2.1)处于稳定状态的情况。
- 特征根$\frac{1}{a}$离单位圆越远，稳定性越好。

AR(p)模型

- **定义2.1**(*AR*(p)模型) 如果$\{\varepsilon_t\}$是白噪声WN$(0,\sigma^2)$，实数$a_1, a_2, \ldots, a_p$ ($a_p \neq 0$) 使得多项式$A(z)$的零点都在单位圆外:

$$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j \neq 0, \ |z| \leq 1, \tag{2.4}$$

则称p阶差分方程

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

是一个p阶自回归模型，简称为AR(p)模型.

AR(p)模型II

- 满足AR(p)模型(2.5)的平稳时间序列$\{X_t\}$称为(2.5)的平稳解或AR(p)序列.
- 称$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_p)^T$ 是AR(p)模型的自回归系数.
- 称条件(2.4) 是稳定性条件或最小相位条件.
- $A(z)$称为模型(2.5)的特征多项式。模型可写成

$$A(\mathscr{B})X_t = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.6}$$

AR(p)模型II

- 满足AR(p)模型(2.5)的平稳时间序列$\{X_t\}$称为(2.5)的平稳解或AR(p)序列.
- 称$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_p)^T$ 是AR(p)模型的自回归系数.
- 称条件(2.4) 是稳定性条件或最小相位条件.
- $A(z)$称为模型(2.5)的特征多项式。模型可写成

$$A(\mathscr{B})X_t = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.6}$$

AR(p)模型II

- 满足AR(p)模型(2.5)的平稳时间序列$\{X_t\}$称为(2.5)的平稳解或AR(p)序列.
- 称$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_p)^T$ 是AR(p)模型的自回归系数.
- 称条件(2.4) 是稳定性条件或最小相位条件.
- $A(z)$称为模型(2.5)的特征多项式。模型可写成

$$A(\mathscr{B})X_t = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.6}$$

AR(p)模型II

- 满足AR(p)模型(2.5)的平稳时间序列$\{X_t\}$称为(2.5)的平稳解或AR(p)序列.
- 称$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_p)^T$ 是AR(p)模型的自回归系数.
- 称条件(2.4) 是稳定性条件或最小相位条件.
- $A(z)$称为模型(2.5)的特征多项式。模型可写成

$$A(\mathscr{B})X_t = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.6}$$

AR(p)的平稳解

- 设多项式$A(z)$的互异根是$z_1, z_2, .., z_k$.
- 取$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$.
- $A^{-1}(z) = 1/A(z)$ 是$\{z : |z| \le \rho\}$内的解析函数.
- 从而有Taylor级数

$$A^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \ |z| \le \rho. \tag{2.7}$$

- 由级数(2.7)在$z = \rho$的收敛性得到$|\psi_j \rho^j| \to 0$, 当$j \to \infty$.
- 于是由

$$\psi_j = o(\rho^{-j}), \quad 当\ j \to \infty \tag{2.8}$$

知道$\{\psi_j\}$绝对可和. 而且, $\min\{|z_j|\}$越大, ψ_j趋于零越快.

AR(p)的平稳解

- 设多项式$A(z)$的互异根是$z_1, z_2, .., z_k$.
- 取$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$.
- $A^{-1}(z) = 1/A(z)$ 是$\{z : |z| \le \rho\}$内的解析函数.
- 从而有Taylor级数

$$A^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \ |z| \le \rho. \tag{2.7}$$

- 由级数(2.7)在$z = \rho$的收敛性得到$|\psi_j \rho^j| \to 0$, 当$j \to \infty$.
- 于是由

$$\psi_j = o(\rho^{-j}), \quad 当\ j \to \infty \tag{2.8}$$

知道$\{\psi_j\}$绝对可和. 而且, $\min\{|z_j|\}$越大, ψ_j趋于零越快.

AR(p)的平稳解

- 设多项式$A(z)$的互异根是$z_1, z_2, .., z_k$.
- 取$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$.
- $A^{-1}(z) = 1/A(z)$ 是$\{z : |z| \le \rho\}$内的解析函数.
- 从而有Taylor级数

$$A^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \ |z| \le \rho. \tag{2.7}$$

- 由级数(2.7)在$z = \rho$的收敛性得到$|\psi_j \rho^j| \to 0$, 当$j \to \infty$.
- 于是由

$$\psi_j = o(\rho^{-j}), \quad 当\ j \to \infty \tag{2.8}$$

知道$\{\psi_j\}$绝对可和. 而且, $\min\{|z_j|\}$越大, ψ_j趋于零越快.

AR(p)的平稳解

- 设多项式$A(z)$的互异根是$z_1, z_2, .., z_k$.
- 取$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$.
- $A^{-1}(z) = 1/A(z)$ 是$\{z : |z| \le \rho\}$内的解析函数.
- 从而有Taylor级数

$$A^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \ \ |z| \le \rho. \tag{2.7}$$

- 由级数(2.7)在$z = \rho$的收敛性得到$|\psi_j \rho^j| \to 0$, 当$j \to \infty$.
- 于是由

$$\psi_j = o(\rho^{-j}), \quad 当\ j \to \infty \tag{2.8}$$

知道$\{\psi_j\}$绝对可和. 而且, $\min\{|z_j|\}$越大, ψ_j趋于零越快.

AR(p)的平稳解

- 设多项式$A(z)$的互异根是$z_1, z_2, .., z_k$.
- 取$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$.
- $A^{-1}(z) = 1/A(z)$ 是$\{z : |z| \le \rho\}$内的解析函数.
- 从而有Taylor级数

$$A^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \ |z| \le \rho. \tag{2.7}$$

- 由级数(2.7)在$z = \rho$的收敛性得到$|\psi_j \rho^j| \to 0$, 当$j \to \infty$.
- 于是由

$$\psi_j = o(\rho^{-j}), \quad 当\ j \to \infty \tag{2.8}$$

知道$\{\psi_j\}$绝对可和. 而且, $\min\{|z_j|\}$越大, ψ_j趋于零越快.

AR(p)的平稳解

- 设多项式$A(z)$的互异根是$z_1, z_2, .., z_k$.
- 取$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$.
- $A^{-1}(z) = 1/A(z)$ 是$\{z : |z| \le \rho\}$内的解析函数.
- 从而有Taylor级数

$$A^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \ |z| \le \rho. \qquad (2.7)$$

- 由级数(2.7)在$z = \rho$的收敛性得到$|\psi_j \rho^j| \to 0$, 当$j \to \infty$.
- 于是由

$$\psi_j = o(\rho^{-j}), \quad 当\ j \to \infty \qquad (2.8)$$

知道$\{\psi_j\}$绝对可和. 而且, $\min\{|z_j|\}$越大, ψ_j趋于零越快.

AR(p)的平稳解II

- 令

$$A^{-1}(\mathscr{B}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathscr{B}^j.$$

- 如果$\{X_t\}$是(2.6)的平稳解，则形式地

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- 可见平稳解如果存在必然为

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \qquad (2.9)$$

- $\{\psi_j\}$称为平稳序列$\{X_t\}$的Wold系数。
- (*)式不严格，我们给出两个引理把(*)严格化。

AR(p)的平稳解II

- 令

$$A^{-1}(\mathscr{B}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathscr{B}^j.$$

- 如果$\{X_t\}$是(2.6)的平稳解，则形式地

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- 可见平稳解如果存在必然为

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \qquad (2.9)$$

- $\{\psi_j\}$称为平稳序列$\{X_t\}$的Wold系数。
- (*)式不严格，我们给出两个引理把(*)严格化。

AR(p)的平稳解II

- 令
$$A^{-1}(\mathscr{B}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathscr{B}^j.$$
- 如果$\{X_t\}$是(2.6)的平稳解，则形式地
$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$
- 可见平稳解如果存在必然为
$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \qquad (2.9)$$
- $\{\psi_j\}$称为平稳序列$\{X_t\}$的Wold系数。
- (*)式不严格，我们给出两个引理把(*)严格化。

AR(p)的平稳解II

- 令

$$A^{-1}(\mathscr{B}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathscr{B}^j.$$

- 如果$\{X_t\}$是(2.6)的平稳解，则形式地

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- 可见平稳解如果存在必然为

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \qquad (2.9)$$

- $\{\psi_j\}$称为平稳序列$\{X_t\}$的Wold系数。
- (*)式不严格，我们给出两个引理把(*)严格化。

AR(p)的平稳解II

- 令

$$A^{-1}(\mathscr{B}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathscr{B}^j.$$

- 如果$\{X_t\}$是(2.6)的平稳解，则形式地

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- 可见平稳解如果存在必然为

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \qquad (2.9)$$

- $\{\psi_j\}$称为平稳序列$\{X_t\}$的Wold系数。
- (*)式不严格，我们给出两个引理把(*)严格化。

线性滤波的交换率

引理1： 设$\{a_k\}$, $\{b_j\}$为两个绝对可和的实数列，则实数列

$$d_m = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j b_{m-j}$$

绝对可和，记

$$A(z) = \sum_k a_k z^k, \quad B(z) = \sum_j b_j z^j, \quad D(z) = \sum_m d_m z^m$$

(1) 若$\{y_t\}$为有界的数列：$|y_t| \le M, t \in \mathbb{Z}$，则

$$A(\mathscr{B})[B(\mathscr{B})y_t] = B(\mathscr{B})[A(\mathscr{B})y_t] = D(\mathscr{B})y_t$$

(2) 若$\{X_t\}$为平稳列，则

$$A(\mathscr{B})[B(\mathscr{B})X_t] = B(\mathscr{B})[A(\mathscr{B})X_t] = D(\mathscr{B})X_t, \text{ a.s.}$$

证明

- **证明** 首先，上述的$\{a_k\}$, $\{b_j\}$绝对可和保证了$\{d_m\}$也绝对可和：

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} |d_m| &\le \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j||b_{m-j}| \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_j||b_{m-j}| \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} |b_{m-j}| \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k| < \infty\end{aligned}$$

证明II

- 其次，若所有$a_k = 0 (k < 0)$, $b_j = 0 (j < 0)$，则

$$d_m = \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_{m-j}$$

这时$A(z)$, $B(z)$，$D(z)$在$|z| \leq 1$绝对一致收敛。

- 如果不满足这样的条件，若$a_k, k < 0$和$b_j, j < 0$满足一些条件，$A(z)$、$B(z)$、$D(z)$可以在包含单位圆的圆环内解析。

证明II

- 其次，若所有$a_k = 0 (k < 0)$, $b_j = 0 (j < 0)$，则
$$d_m = \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_{m-j}$$
这时$A(z)$, $B(z)$，$D(z)$在$|z| \le 1$绝对一致收敛。
- 如果不满足这样的条件，若$a_k, k < 0$和$b_j, j < 0$满足一些条件，$A(z)$、$B(z)$、$D(z)$可以在包含单位圆的圆环内解析。

证明III

- 比如, 如果存在$0 < \nu < 1$使得

$$a_k = o(\nu^{-k}), \quad k < 0$$

则取$\nu < \nu_1$，对$\nu_1 \le |z| \le 1$有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{0} |a_k z^k| &= \sum_{k=-\infty}^{0} |a_k| \cdot |z|^k \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{0} |a_k| \cdot \nu_1^k \le \sum_{k=-\infty}^{0} c_1 \nu^{-k} \cdot \nu_1^k \\
&= c_1 \sum_{k=-\infty}^{0} c_1 \left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^{-k} < \infty
\end{aligned}$$

- 所以，$A(z)$, $B(z)$, $D(z)$在双边的时候也可以是有意义的。本定理的证明不需要$A(z)$、$B(z)$、$D(z)$的级数收敛性。

证明III

- 比如, 如果存在$0<\nu<1$使得

$$a_k=o(\nu^{-k}),\quad k<0$$

则取$\nu<\nu_1$，对$\nu_1\le|z|\le 1$有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{0}|a_k z^k|=\sum_{k=-\infty}^{0}|a_k|\cdot|z|^k\\
\le&\sum_{k=-\infty}^{0}|a_k|\cdot\nu_1^k\le\sum_{k=-\infty}^{0}c_1\nu^{-k}\cdot\nu_1^k\\
=&c_1\sum_{k=-\infty}^{0}c_1\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^{-k}<\infty
\end{aligned}$$

- 所以，$A(z)$, $B(z)$, $D(z)$在双边的时候也可以是有意义的。本定理的证明不需要$A(z)$、$B(z)$、$D(z)$的级数收敛性。

证明IV

(1)

$$\sum_k \sum_j |a_k||b_j||y_{t-k-j}|$$

$$\le M(\sum_k |a_k|)(\sum_j |b_j|) < \infty \qquad (*1)$$

所以

$$A(\mathscr{B})B(\mathscr{B})y_t = \sum_k a_k \sum_j b_j y_{t-k-j}$$

$$= \sum_k \sum_j a_k b_j y_{t-k-j}$$

$$= \sum_k \sum_m a_k b_{m-k} y_{t-m} \quad (\text{令} m = k + j,\ j = m - k)$$

$$= \sum_m \sum_k a_k b_{m-k} y_{t-m} \quad (\text{无穷级数次序交换用到}(*1)\text{式})$$

$$= \sum_m d_m y_{t-m}$$

证明V

(2)　定义允许取$+\infty$值的随机变量

$$V = \sum_k \sum_j |a_k||b_j||X_{t-k-j}|$$

则

$$\mathrm{E}V \leq \sqrt{\mathrm{E}(X_1^2)}(\sum_k |a_k|)(\sum_j |b_j|) < +\infty$$

所以

$$0 \leq V < +\infty, \quad \text{a.s.}$$

因此以概率1成立：

$$\sum_k a_k \sum_j b_j X_{t-k-j} \quad \text{绝对收敛}$$

级数可交换次序，同上可证明

$$A(\mathscr{B})B(\mathscr{B})X_t = B(\mathscr{B})A(\mathscr{B})X_t = D(\mathscr{B})X_t$$

线性滤波的逆

引理2 设实系数多项式$A(z)=\sum_{j=0}^{p}\phi_j z^j$满足最小相位条件:

$$A(z)\neq 0,\quad \forall |z|\leq 1$$

则存在$\delta>0$使

$$A^{-1}(z)\triangleq \frac{1}{A(z)}=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j z^j,\quad |z|\leq 1+\delta$$

且有

(1) 若$\{y_t\}$为有界数列，则

$$y_t=A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})y_t=A(\mathscr{B})A^{-1}(\mathscr{B})y_t$$

(2) 若$\{X_t\}$为平稳列，则

$$X_t=A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})X_t=A(\mathscr{B})A^{-1}(\mathscr{B})X_t,\quad \text{a.s.}$$

引理2证明

证明： 设多项式$A(z)$的根为$z_1, \ldots, z_p$，取

$$1 < 1 + \delta < \min_j |z_j|$$

则$A(z)$在$|z| \leq 1 + \delta$无零点，$A^{-1}(z)$在$|z| \leq 1 + \delta$解析，可以展开为Taylor级数

$$A^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j, \quad |z| \leq 1 + \delta$$

由于$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j (1+\delta)^j$收敛所以$\psi_j (1+\delta)^j \to 0$当$j \to \infty$，即$\psi_j = o((1+\delta)^{-j})$ $(j \to \infty)$。由此知$\{\psi_j\}$绝对可和。定义$\phi_j = 0$, 对$j < 0$或$j > p$，定义$\psi_j = 0$对$j < 0$，注意到

$$A(z) A^{-1}(z) = 1$$

令$d_0 = 1, d_m = 0$对$m \neq 0$，由引理1可得所需结论。

AR(p)的平稳解及通解定理

定理2.1

1. 由(2.9)定义的时间序列$\{X_t\}$是AR(p)模型(2.5)的唯一(a.s.意义)平稳解；
2. AR(p)的模型的通解有如下形式

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} U_{l,j} t^l z_j^{-t}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

AR(p)的平稳解及通解定理

定理2.1

1. 由(2.9)定义的时间序列$\{X_t\}$是AR(p)模型(2.5)的唯一(a.s.意义)平稳解；
2. AR(p)的模型的通解有如下形式

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} U_{l,j} t^l z_j^{-t}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

定理2.1证明

- $$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.9}$$
- 由引理2知(2.9)是平稳序列，且(2.9)定义的$\{X_t\}$满足
  $$A(\mathscr{B})X_t = A(\mathscr{B})A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \varepsilon_t$$
  即(2.9)定义的$\{X_t\}$是模型(2.5)的解。
- 再来证明(2.9)是唯一的平稳解。
- 如果(2.5)另有平稳解$\{Y_t\}$，则$A(\mathscr{B})Y_t = \varepsilon_t$，由引理2得
  $$Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = X_t.$$
  即平稳解唯一。
- 由非齐次线性常系数差分方程的知识立即可得定理的第二条结论。

定理2.1证明

- $$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \qquad (2.9)$$
- 由引理2知(2.9)是平稳序列，且(2.9)定义的$\{X_t\}$满足
  $$A(\mathscr{B})X_t = A(\mathscr{B})A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \varepsilon_t$$
  即(2.9)定义的$\{X_t\}$是模型(2.5)的解。
- 再来证明(2.9)是唯一的平稳解。
- 如果(2.5)另有平稳解$\{Y_t\}$，则$A(\mathscr{B})Y_t = \varepsilon_t$，由引理2得
  $$Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = X_t.$$
  即平稳解唯一。
- 由非齐次线性常系数差分方程的知识立即可得定理的第二条结论。

定理2.1证明

- $$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \qquad (2.9)$$
- 由引理2知(2.9)是平稳序列，且(2.9)定义的$\{X_t\}$满足
  $$A(\mathscr{B})X_t = A(\mathscr{B})A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \varepsilon_t$$
  即(2.9)定义的$\{X_t\}$是模型(2.5)的解。
- 再来证明(2.9)是唯一的平稳解。
- 如果(2.5)另有平稳解$\{Y_t\}$，则$A(\mathscr{B})Y_t = \varepsilon_t$，由引理2得
  $$Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = X_t.$$
  即平稳解唯一。
- 由非齐次线性常系数差分方程的知识立即可得定理的第二条结论。

定理2.1证明

- $$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.9}$$
- 由引理2知(2.9)是平稳序列，且(2.9)定义的$\{X_t\}$满足
$$A(\mathscr{B})X_t = A(\mathscr{B})A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \varepsilon_t$$
即(2.9)定义的$\{X_t\}$是模型(2.5)的解。
- 再来证明(2.9)是唯一的平稳解。
- 如果(2.5)另有平稳解$\{Y_t\}$，则$A(\mathscr{B})Y_t = \varepsilon_t$，由引理2得
$$Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = X_t.$$
即平稳解唯一。
- 由非齐次线性常系数差分方程的知识立即可得定理的第二条结论。

定理2.1证明

- $$X_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}, \quad t\in\mathbb{Z}, \tag{2.9}$$
- 由引理2知(2.9)是平稳序列，且(2.9)定义的$\{X_t\}$满足
  $$A(\mathscr{B})X_t = A(\mathscr{B})A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = \varepsilon_t$$
  即(2.9)定义的$\{X_t\}$是模型(2.5)的解。
- 再来证明(2.9)是唯一的平稳解。
- 如果(2.5)另有平稳解$\{Y_t\}$，则$A(\mathscr{B})Y_t=\varepsilon_t$，由引理2得
  $$Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})A(\mathscr{B})Y_t = A^{-1}(\mathscr{B})\varepsilon_t = X_t.$$
  即平稳解唯一。
- 由非齐次线性常系数差分方程的知识立即可得定理的第二条结论。

Wold系数的递推公式

- 记$a_0=-1$则$A(z)=-\sum_{j=0}^{p}a_jz^j$，

$$1=A(z)A^{-1}(z)=-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{p}a_j\psi_{m-j}\right)z^m$$

- 故$\psi_0=1$, $\sum_{j=0}^{p}a_j\psi_{m-j}=0$, $m>0$。
- 于是

$$\begin{cases}\psi_0=1, & \\ \psi_m=\sum_{j=1}^{p}a_j\psi_{m-j}, & m=1,2,\dots \\ \psi_m=0, & m<0\end{cases}$$

Wold系数的递推公式

- 记$a_0 = -1$则$A(z) = -\sum_{j=0}^{p} a_j z^j$,

$$1 = A(z)A^{-1}(z) = -\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{p} a_j \psi_{m-j}\right) z^m$$

- 故$\psi_0 = 1$, $\sum_{j=0}^{p} a_j \psi_{m-j} = 0$, $m > 0$。
- 于是

$$\begin{cases} \psi_0 = 1, & \\ \psi_m = \sum_{j=1}^{p} a_j \psi_{m-j}, & m = 1, 2, \dots \\ \psi_m = 0, & m < 0 \end{cases}$$

Wold系数的递推公式

- 记$a_0 = -1$则$A(z) = -\sum_{j=0}^{p} a_j z^j$，

$$1 = A(z)A^{-1}(z) = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{p} a_j \psi_{m-j} \right) z^m$$

- 故$\psi_0 = 1$, $\sum_{j=0}^{p} a_j \psi_{m-j} = 0$, $m > 0$。
- 于是

$$\begin{cases} \psi_0 = 1, & \\ \psi_m = \sum_{j=1}^{p} a_j \psi_{m-j}, & m = 1, 2, \ldots \\ \psi_m = 0, & m < 0 \end{cases}$$

通解与平稳解的关系

- AR(p)的通解$\{Y_t\}$与平稳解有如下关系

$$|Y_t - X_t| = \left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} U_{l,j} t^l z_j^{-t} \right| = o(\rho^{-t}), \text{a.s. } t \to \infty$$

其中$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$。
- 根离单位圆越远，稳定下来的速度越快。
- 可以用此事实作为模拟产生AR(p)序列的理论基础。

通解与平稳解的关系

- AR(p)的通解$\{Y_t\}$与平稳解有如下关系

$$|Y_t - X_t| = \left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{r(j)-1} U_{l,j} t^l z_j^{-t} \right| = o(\rho^{-t}), \text{a.s. } t \to \infty$$

  其中$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$。
- 根离单位圆越远，稳定下来的速度越快。
- 可以用此事实作为模拟产生AR(p)序列的理论基础。

通解与平稳解的关系

- AR(p)的通解$\{Y_t\}$与平稳解有如下关系

$$|Y_t - X_t| = \left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{r(j)-1} U_{l,j} t^l z_j^{-t}\right| = o(\rho^{-t}), \text{a.s. } t \to \infty$$

  其中$1 < \rho < \min\{|z_j|\}$。
- 根离单位圆越远，稳定下来的速度越快。
- 可以用此事实作为模拟产生AR(p)序列的理论基础。

AR序列的模拟

- 取$x_{1-p} = \cdots = x_0 = 0$，生成$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.
- 迭代得到$x_t = \varepsilon_t + \sum_{j=0}^{p} a_j x_{t-j}, j = 1, 2, \ldots, n_0 + n$。
- 取$y_t = x_{t+n_0}, t = 1, 2, \ldots, n$.
- n_0取50即可，但特征根接近单位圆时要取大的n_0。

AR序列的模拟

- 取$x_{1-p} = \cdots = x_0 = 0$，生成$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.
- 迭代得到$x_t = \varepsilon_t + \sum_{j=0}^{p} a_j x_{t-j}, j = 1, 2, \ldots, n_0 + n$。
- 取$y_t = x_{t+n_0}, t = 1, 2, \ldots, n$.
- n_0取50即可，但特征根接近单位圆时要取大的n_0。

AR序列的模拟

- 取$x_{1-p} = \cdots = x_0 = 0$，生成$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.
- 迭代得到$x_t = \varepsilon_t + \sum_{j=0}^{p} a_j x_{t-j}, j = 1, 2, \ldots, n_0 + n$。
- 取$y_t = x_{t+n_0}, t = 1, 2, \ldots, n$.
- n_0取50即可，但特征根接近单位圆时要取大的n_0。

AR序列的模拟

- 取$x_{1-p} = \cdots = x_0 = 0$，生成$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.
- 迭代得到$x_t = \varepsilon_t + \sum_{j=0}^{p} a_j x_{t-j}, j = 1, 2, \ldots, n_0 + n$。
- 取$y_t = x_{t+n_0}, t = 1, 2, \ldots, n$.
- n_0取50即可，但特征根接近单位圆时要取大的n_0。