应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2017年秋季学期

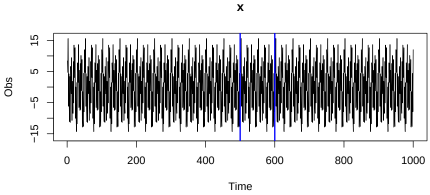
时域和频域

- 遍历的时间序列可以从一次实现的时间分布进行统计分析，称为时域分析。
- 平稳时间序列的二阶性质也可以从其频率分解来研究，称为频域分析。

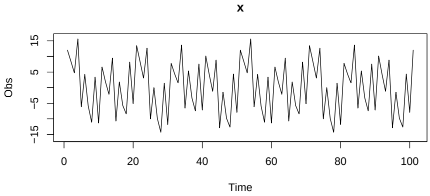
时域和频域

- 遍历的时间序列可以从一次实现的时间分布进行统计分析，称为时域分析。
- 平稳时间序列的二阶性质也可以从其频率分解来研究，称为频域分析。

时域

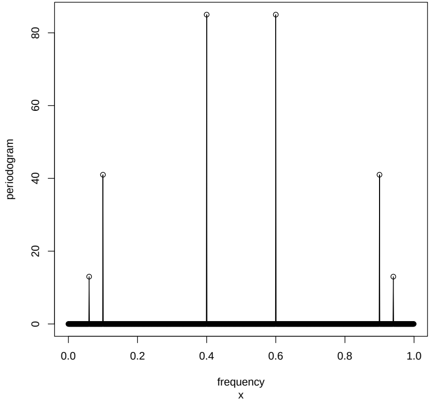


x
Obs
15
5
−5
−15
0
200
400
600
800
1000
Time

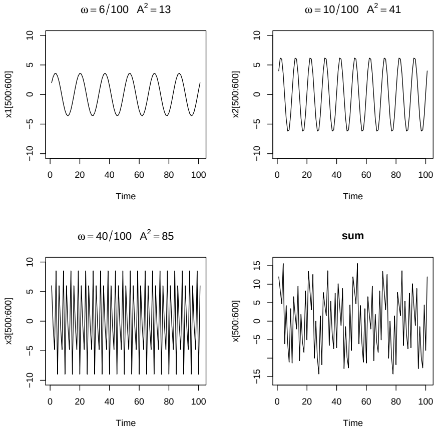


x
Obs
15
5
−5
−15
0
20
40
60
80
100
Time

频域（傅立叶变换后）

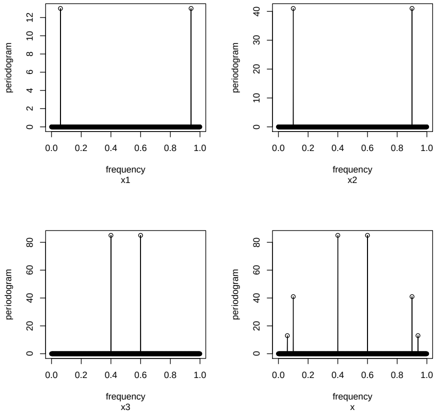


时域

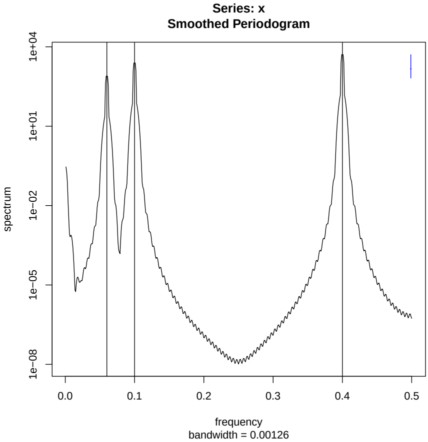


ω = 6/100   A² = 13
x1[500:600]
Time
ω = 10/100   A² = 41
x2[500:600]
Time
ω = 40/100   A² = 85
x3[500:600]
Time
sum
x[500:600]
Time

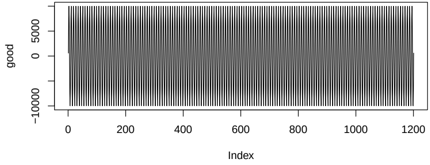
频域（离散傅立叶变换后）



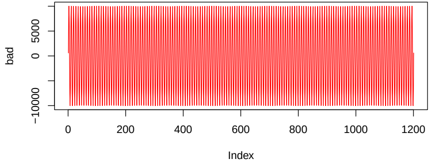
经验谱函数


Series: x
Smoothed Periodogram
spectrum
1e+04
1e+01
1e−02
1e−05
1e−08
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
frequency
bandwidth = 0.00126

电力马达数据：时域

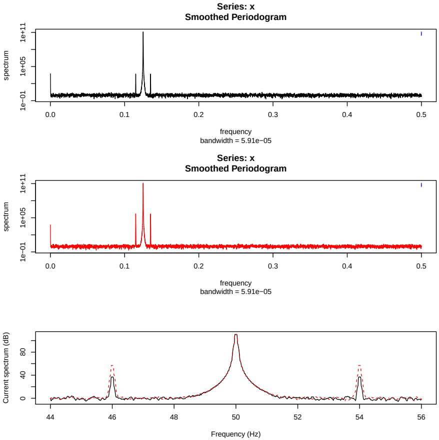


good
−10000
0
5000
0
200
400
600
800
1000
1200
Index



bad
−10000
0
5000
0
200
400
600
800
1000
1200
Index

电力马达数据：频域（经验谱函数）



谱函数定义

- 设平稳序列$\{X_t\}$ 有自协方差函数$\{\gamma_k\}$.
- 如果有$[-\pi,\pi]$上的单调不减右连续的函数$F(\lambda)$使得

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\, dF(\lambda), \quad F(-\pi)=0, \quad k\in\mathbb{Z}, \tag{7.1}$$

  则称$F(\lambda)$是$\{X_t\}$ 或$\{\gamma_k\}$的谱分布函数, 简称为谱函数;
- 如果有$[-\pi,\pi]$上的非负函数$f(\lambda)$使得

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)e^{ik\lambda}\, d\lambda, \quad k\in\mathbb{Z}, \tag{7.2}$$

  则称$f(\lambda)$是$\{X_t\}$ 或$\{\gamma_k\}$的谱密度函数或功率谱密度, 简称为谱密度或功率谱.
- 谱反映了平稳序列的相关结构。

谱函数定义

- 设平稳序列$\{X_t\}$有自协方差函数$\{\gamma_k\}$.
- 如果有$[-\pi,\pi]$上的单调不减右连续的函数$F(\lambda)$使得

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\, dF(\lambda), \quad F(-\pi)=0, \quad k\in\mathbb{Z}, \qquad (7.1)$$

则称$F(\lambda)$是$\{X_t\}$或$\{\gamma_k\}$的谱分布函数, 简称为谱函数;

- 如果有$[-\pi,\pi]$上的非负函数$f(\lambda)$使得

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda}\, d\lambda, \quad k\in\mathbb{Z}, \qquad (7.2)$$

则称$f(\lambda)$是$\{X_t\}$或$\{\gamma_k\}$的谱密度函数或功率谱密度, 简称为谱密度或功率谱.

- 谱反映了平稳序列的相关结构。

谱函数定义

- 设平稳序列$\{X_t\}$ 有自协方差函数$\{\gamma_k\}$.
- 如果有$[-\pi,\pi]$上的单调不减右连续的函数$F(\lambda)$使得

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\, dF(\lambda), \quad F(-\pi)=0, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad (7.1)$$

  则称$F(\lambda)$是$\{X_t\}$ 或$\{\gamma_k\}$的谱分布函数, 简称为谱函数;
- 如果有$[-\pi,\pi]$上的非负函数$f(\lambda)$使得

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda}\, d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad (7.2)$$

  则称$f(\lambda)$是$\{X_t\}$ 或$\{\gamma_k\}$的谱密度函数或功率谱密度, 简称为谱密度或功率谱.
- 谱反映了平稳序列的相关结构。

谱函数定义

- 设平稳序列$\{X_t\}$ 有自协方差函数$\{\gamma_k\}$.
- 如果有$[-\pi,\pi]$上的单调不减右连续的函数$F(\lambda)$使得

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\, dF(\lambda), \quad F(-\pi)=0, \quad k\in\mathbb{Z}, \qquad (7.1)$$

则称$F(\lambda)$是$\{X_t\}$ 或$\{\gamma_k\}$的谱分布函数, 简称为谱函数;

- 如果有$[-\pi,\pi]$上的非负函数$f(\lambda)$使得

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)e^{ik\lambda}\, d\lambda, \quad k\in\mathbb{Z}, \qquad (7.2)$$

则称$f(\lambda)$是$\{X_t\}$ 或$\{\gamma_k\}$的谱密度函数或功率谱密度, 简称为谱密度或功率谱.

- 谱反映了平稳序列的相关结构。

谱函数与谱密度关系

- **定理7.1(Herglotz定理)** 平稳序列的谱函数是惟一存在的.
- (参见谢衷洁《时间序列分析》，北京大学出版社)
- 若$F(\lambda)$和$f(\lambda)$同时存在则

$$F(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda} f(s)ds \tag{7.3}$$

- 若$F(\lambda)$绝对连续则其几乎处处导数$F'(\lambda)$为谱密度。
- 若$F(\lambda)$是连续函数，除去有限点外导函数存在且连续则

$$f(\lambda)=\begin{cases} F'(\lambda) & \text{当}F'(\lambda)\text{存在} \\ 0 & \text{当}F'(\lambda)\text{不存在} \end{cases}$$

是谱密度。

谱函数与谱密度关系

- **定理7.1(Herglotz定理)** 平稳序列的谱函数是惟一存在的.
- (参见谢衷洁《时间序列分析》，北京大学出版社)
- 若$F(\lambda)$和$f(\lambda)$同时存在则

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(s)ds \qquad (7.3)$$

- 若$F(\lambda)$绝对连续则其几乎处处导数$F'(\lambda)$为谱密度。
- 若$F(\lambda)$是连续函数，除去有限点外导函数存在且连续则

$$f(\lambda) = \begin{cases} F'(\lambda) & \text{当}F'(\lambda)\text{存在} \\ 0 & \text{当}F'(\lambda)\text{不存在} \end{cases}$$

是谱密度。

谱函数与谱密度关系

- **定理7.1(Herglotz定理)** 平稳序列的谱函数是惟一存在的.
- (参见谢衷洁《时间序列分析》，北京大学出版社)
- 若$F(\lambda)$和$f(\lambda)$同时存在则

$$F(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda} f(s)ds \tag{7.3}$$

- 若$F(\lambda)$绝对连续则其几乎处处导数$F'(\lambda)$为谱密度。
- 若$F(\lambda)$是连续函数，除去有限点外导函数存在且连续则

$$f(\lambda)=\begin{cases} F'(\lambda) & 当F'(\lambda)存在 \\ 0 & 当F'(\lambda)不存在 \end{cases}$$

是谱密度。

谱函数与谱密度关系

- **定理7.1(Herglotz定理)** 平稳序列的谱函数是惟一存在的.
- (参见谢衷洁《时间序列分析》，北京大学出版社)
- 若$F(\lambda)$和$f(\lambda)$同时存在则

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(s)ds \tag{7.3}$$

- 若$F(\lambda)$绝对连续则其几乎处处导数$F'(\lambda)$为谱密度。
- 若$F(\lambda)$是连续函数，除去有限点外导函数存在且连续则

$$f(\lambda) = \begin{cases} F'(\lambda) & \text{当}F'(\lambda)\text{存在} \\ 0 & \text{当}F'(\lambda)\text{不存在} \end{cases}$$

是谱密度。

谱函数与谱密度关系

- **定理7.1(Herglotz定理)** 平稳序列的谱函数是惟一存在的.
- (参见谢衷洁《时间序列分析》，北京大学出版社)
- 若$F(\lambda)$和$f(\lambda)$同时存在则

$$F(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda} f(s)ds \tag{7.3}$$

- 若$F(\lambda)$绝对连续则其几乎处处导数$F'(\lambda)$为谱密度。
- 若$F(\lambda)$是连续函数，除去有限点外导函数存在且连续则

$$f(\lambda)=\begin{cases} F'(\lambda) & \text{当}F'(\lambda)\text{存在} \\ 0 & \text{当}F'(\lambda)\text{不存在} \end{cases}$$

是谱密度。

白噪声的谱密度

- 设$\{\varepsilon_t\}$为白噪声列WN(μ, σ^2)。
- 自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 显然，令

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 有

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 即白噪声列有常数谱密度。
- 反之，有常数谱密度的平稳列一定是白噪声列。

白噪声的谱密度

- 设$\{\varepsilon_t\}$为白噪声列WN(μ, σ^2)。
- 自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 显然，令

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 有

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 即白噪声列有常数谱密度。
- 反之，有常数谱密度的平稳列一定是白噪声列。

白噪声的谱密度

- 设$\{\varepsilon_t\}$为白噪声列WN(μ, σ^2)。
- 自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 显然，令

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 有

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 即白噪声列有常数谱密度。
- 反之，有常数谱密度的平稳列一定是白噪声列。

白噪声的谱密度

- 设$\{\varepsilon_t\}$为白噪声列WN(μ, σ^2)。
- 自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 显然，令

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 有

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 即白噪声列有常数谱密度。
- 反之，有常数谱密度的平稳列一定是白噪声列。

白噪声的谱密度

- 设$\{\varepsilon_t\}$为白噪声列WN(μ, σ^2)。
- 自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 显然，令

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 有

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 即白噪声列有常数谱密度。
- 反之，有常数谱密度的平稳列一定是白噪声列。

白噪声的谱密度

- 设$\{\varepsilon_t\}$为白噪声列WN(μ, σ^2)。
- 自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 显然，令

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 有

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 即白噪声列有常数谱密度。
- 反之，有常数谱密度的平稳列一定是白噪声列。

线性平稳列的谱密度

- **定理7.2** 如果$\{\varepsilon_t\}$ 是WN$(0,\sigma^2)$, 实数列$\{a_j\}$平方可和, 则线性平稳序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

有谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\lambda} \right|^2 . \tag{7.4}$$

- **证明** §1.6例6.3已经证明$\{X_t\}$的自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}$$

- 由§1.6例6.4的(6.7)式有

$$\sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky} dy, \quad k \in \mathbb{Z}$$

其中

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\lambda} \right|^2$$

- 于是

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky} dy, \quad k \in \mathbb{Z}$$

即$f(\lambda)$是$\{X_t\}$的谱密度。

- **证明** §1.6例6.3已经证明$\{X_t\}$的自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}$$

- 由§1.6例6.4的(6.7)式有

$$\sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky} dy, \quad k \in \mathbb{Z}$$

其中

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\lambda} \right|^2$$

- 于是

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky} dy, \quad k \in \mathbb{Z}$$

即$f(\lambda)$是$\{X_t\}$的谱密度。

- **证明** §1.6例6.3已经证明$\{X_t\}$的自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}$$

- 由§1.6例6.4的(6.7)式有

$$\sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky} dy, \quad k \in \mathbb{Z}$$

其中

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\lambda} \right|^2$$

- 于是

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky} dy, \quad k \in \mathbb{Z}$$

即$f(\lambda)$是$\{X_t\}$的谱密度。

两正交序列的谱

- **定理7.3** 设$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$是相互正交的零均值平稳序列，c是常数，定义

$$Z_t = X_t + Y_t + c, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$分别有谱函数$F_X(\lambda)$ 和$F_Y(\lambda)$，则平稳序列$\{Z_t\}$ 有谱函数$F_Z(\lambda) = F_X(\lambda) + F_Y(\lambda)$.
2. 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$分别有谱密度$f_X(\lambda)$ 和$f_Y(\lambda)$，则$\{Z_t\}$ 有谱密度$f_Z(\lambda) = f_X(\lambda) + f_Y(\lambda)$.

- **证明**：主要由

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k)$$

及谱函数和谱密度定义可得。

两正交序列的谱

- **定理7.3** 设$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$是相互正交的零均值平稳序列, c是常数, 定义

$$Z_t = X_t + Y_t + c, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$分别有谱函数$F_X(\lambda)$ 和$F_Y(\lambda)$, 则平稳序列$\{Z_t\}$ 有谱函数$F_Z(\lambda) = F_X(\lambda) + F_Y(\lambda)$.
2. 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$分别有谱密度$f_X(\lambda)$ 和$f_Y(\lambda)$, 则$\{Z_t\}$有谱密度$f_Z(\lambda) = f_X(\lambda) + f_Y(\lambda)$.

- 证明: 主要由

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k)$$

及谱函数和谱密度定义可得。

两正交序列的谱

- **定理7.3** 设$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$是相互正交的零均值平稳序列，c是常数，定义

$$Z_t = X_t + Y_t + c, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$分别有谱函数$F_X(\lambda)$ 和$F_Y(\lambda)$，则平稳序列$\{Z_t\}$ 有谱函数$F_Z(\lambda) = F_X(\lambda) + F_Y(\lambda)$.
2. 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$分别有谱密度$f_X(\lambda)$ 和$f_Y(\lambda)$，则$\{Z_t\}$ 有谱密度$f_Z(\lambda) = f_X(\lambda) + f_Y(\lambda)$.

- 证明：主要由

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k)$$

及谱函数和谱密度定义可得。

两正交序列的谱

- **定理7.3** 设$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$是相互正交的零均值平稳序列，c是常数，定义

$$Z_t = X_t + Y_t + c, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$分别有谱函数$F_X(\lambda)$ 和$F_Y(\lambda)$，则平稳序列$\{Z_t\}$ 有谱函数$F_Z(\lambda) = F_X(\lambda) + F_Y(\lambda)$.
2. 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$分别有谱密度$f_X(\lambda)$ 和$f_Y(\lambda)$，则$\{Z_t\}$ 有谱密度$f_Z(\lambda) = f_X(\lambda) + f_Y(\lambda)$.

- **证明**：主要由

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k)$$

及谱函数和谱密度定义可得。

线性滤波与谱

- 设平稳序列$\{X_t\}$有谱函数$F_X(\lambda)$和自协方差函数$\{\gamma_k\}$. $H = \{h_j\}$是一个绝对可和的保时线性滤波器(参见§1.3).
- 当输入过程是$\{X_t\}$时，输出过程是

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.a.s. \tag{7.5}$$

-

$$\gamma_Y(k) = \sum_{l,j=-\infty}^{\infty} h_l h_j \gamma(k+l-j). \tag{7.6}$$

求和意义为实数级数绝对收敛。

线性滤波与谱

- 设平稳序列$\{X_t\}$有谱函数$F_X(\lambda)$和自协方差函数$\{\gamma_k\}$. $H=\{h_j\}$是一个绝对可和的保时线性滤波器(参见§1.3).
- 当输入过程是$\{X_t\}$时，输出过程是

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.a.s. \tag{7.5}$$

-

$$\gamma_Y(k) = \sum_{l,j=-\infty}^{\infty} h_l h_j \gamma(k+l-j). \tag{7.6}$$

求和意义为实数级数绝对收敛。

线性滤波与谱

- 设平稳序列$\{X_t\}$有谱函数$F_X(\lambda)$和自协方差函数$\{\gamma_k\}$. $H=\{h_j\}$是一个绝对可和的保时线性滤波器(参见§1.3).
- 当输入过程是$\{X_t\}$时，输出过程是

$$Y_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j}, \quad t\in\mathbb{Z}.a.s. \tag{7.5}$$

-

$$\gamma_Y(k)=\sum_{l,j=-\infty}^{\infty} h_l h_j \gamma(k+l-j). \tag{7.6}$$

求和意义为实数级数绝对收敛。

线性滤波与谱II

- 由控制收敛定理

$$
\begin{aligned}
\gamma_Y(k) &= \sum_{l,j=-\infty}^{\infty} h_l h_j \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(k+l-j)\lambda)\ dF_X(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l,j=-\infty}^{\infty} h_l h_j \exp(i(l-j)\lambda) e^{ik\lambda}\ dF_X(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \exp(-ij\lambda) \right|^2 e^{ik\lambda}\ dF_X(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{-i\lambda})|^2 e^{ik\lambda}\ dF_X(\lambda), \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

- 其中

$$H(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j z^j, \quad |z| \le 1. \qquad (7.8)$$

线性滤波与谱II

- 由控制收敛定理

$$
\begin{aligned}
\gamma_Y(k) &= \sum_{l,j=-\infty}^{\infty} h_l h_j \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(k+l-j)\lambda)\ dF_X(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l,j=-\infty}^{\infty} h_l h_j \exp(i(l-j)\lambda) e^{ik\lambda}\ dF_X(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \exp(-ij\lambda) \right|^2 e^{ik\lambda}\ dF_X(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{-i\lambda})|^2 e^{ik\lambda}\ dF_X(\lambda), \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

- 其中

$$
H(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j z^j, \ |z| \le 1. \qquad (7.8)
$$

线性滤波与谱III

- 线性滤波输出$\{Y_t\}$的谱函数为

$$F_Y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |H(e^{-is})|^2 \, dF_X(s). \qquad (7.9)$$

- 当$\{X_t\}$有谱密度$f_X(\lambda)$时

$$F_Y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |H(e^{-is})|^2 f_X(s) \, ds. \qquad (7.10)$$

即$\{Y_t\}$谱密度为

$$f_Y(\lambda) = |H(e^{-i\lambda})|^2 f_X(\lambda) \qquad (7.11)$$

- 结论归纳成定理7.4.

线性滤波与谱III

- 线性滤波输出$\{Y_t\}$的谱函数为

$$F_Y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |H(e^{-is})|^2 \, dF_X(s). \tag{7.9}$$

- 当$\{X_t\}$有谱密度$f_X(\lambda)$时

$$F_Y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |H(e^{-is})|^2 f_X(s) \, ds. \tag{7.10}$$

即$\{Y_t\}$谱密度为

$$f_Y(\lambda) = |H(e^{-i\lambda})|^2 f_X(\lambda) \tag{7.11}$$

- 结论归纳成定理7.4.

线性滤波与谱III

- 线性滤波输出$\{Y_t\}$的谱函数为

$$F_Y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |H(e^{-is})|^2 \, dF_X(s). \tag{7.9}$$

- 当$\{X_t\}$有谱密度$f_X(\lambda)$时

$$F_Y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |H(e^{-is})|^2 f_X(s) \, ds. \tag{7.10}$$

即$\{Y_t\}$谱密度为

$$f_Y(\lambda) = |H(e^{-i\lambda})|^2 f_X(\lambda) \tag{7.11}$$

- 结论归纳成定理7.4.

定理7.4

- **定理7.4** 设$\{X_t\}$是平稳序列，$H=\{h_j\}$是绝对可和的保时线性滤波器，$\{Y_t\}$为滤波输出

$$Y_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j}, \quad t\in\mathbb{Z}.a.s. \qquad (7.5)$$

$H(z)$是滤波器H的特征多项式

$$H(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j z^j, \ |z|\le 1. \qquad (7.8)$$

- (1) 如果$\{X_t\}$有谱函数$F_X(\lambda)$, 则$\{Y_t\}$有谱函数

$$F_Y(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}|H(e^{-is})|^2\,dF_X(s). \qquad (7.9)$$

- (2) 如果$\{X_t\}$有谱密度$f_X(\lambda)$, 则$\{Y_t\}$有谱密度

$$f_Y(\lambda)=|H(e^{-i\lambda})|^2 f_X(\lambda) \qquad (7.11)$$

定理7.4

- **定理7.4** 设$\{X_t\}$是平稳序列，$H=\{h_j\}$是绝对可和的保时线性滤波器，$\{Y_t\}$为滤波输出

$$Y_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j}, \quad t\in\mathbb{Z}.a.s. \tag{7.5}$$

$H(z)$是滤波器H的特征多项式

$$H(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j z^j, \ |z|\le 1. \tag{7.8}$$

- (1) 如果$\{X_t\}$有谱函数$F_X(\lambda)$, 则$\{Y_t\}$有谱函数

$$F_Y(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}|H(e^{-is})|^2\, dF_X(s). \tag{7.9}$$

- (2) 如果$\{X_t\}$有谱密度$f_X(\lambda)$, 则$\{Y_t\}$有谱密度

$$f_Y(\lambda)=|H(e^{-i\lambda})|^2 f_X(\lambda) \tag{7.11}$$

定理7.4

- **定理7.4** 设$\{X_t\}$是平稳序列，$H=\{h_j\}$是绝对可和的保时线性滤波器，$\{Y_t\}$为滤波输出

$$Y_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}h_jX_{t-j},\quad t\in\mathbb{Z}.a.s. \tag{7.5}$$

$H(z)$是滤波器H的特征多项式

$$H(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}h_jz^j,\ |z|\le 1. \tag{7.8}$$

- (1) 如果$\{X_t\}$有谱函数$F_X(\lambda)$, 则$\{Y_t\}$有谱函数

$$F_Y(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}|H(e^{-is})|^2\,dF_X(s). \tag{7.9}$$

- (2) 如果$\{X_t\}$有谱密度$f_X(\lambda)$, 则$\{Y_t\}$有谱密度

$$f_Y(\lambda)=|H(e^{-i\lambda})|^2f_X(\lambda) \tag{7.11}$$

简单的离散谱序列

- 随机变量ξ,η。$E\xi=0, E\eta=0$; $E(\xi\eta)=0$, $E\xi^2=E\eta^2=\sigma^2$。常数$\lambda_0\in(0,\pi]$。
-
$$Z_t=\xi\cos(\lambda_0 t)+\eta\sin(\lambda_0 t), t\in\mathbb{N}_+ \tag{8.1}$$
- 写成极坐标表示:
$$A=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\quad \cos\theta=\frac{\xi}{A}, \sin\theta=\frac{\eta}{A} \tag{8.2}$$
$$Z_t=A\cos(t\lambda_0-\theta) \tag{8.3}$$
- 其实现是一个相位为$-\theta$的角频率为λ_0的余弦函数的离散采样，表现并不随机，随机性表现在多个实现样本。

简单的离散谱序列

- 随机变量ξ, η。$E\xi = 0, E\eta = 0$; $E(\xi\eta) = 0$, $E\xi^2 = E\eta^2 = \sigma^2$。常数$\lambda_0 \in (0, \pi]$。
-
$$Z_t = \xi \cos(\lambda_0 t) + \eta \sin(\lambda_0 t), t \in \mathbb{N}_+ \tag{8.1}$$
- 写成极坐标表示:
$$A = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \cos\theta = \frac{\xi}{A}, \sin\theta = \frac{\eta}{A} \tag{8.2}$$
$$Z_t = A\cos(t\lambda_0 - \theta) \tag{8.3}$$
- 其实现是一个相位为$-\theta$的角频率为λ_0的余弦函数的离散采样，表现并不随机，随机性表现在多个实现样本。

简单的离散谱序列

- 随机变量ξ, η。$E\xi = 0, E\eta = 0$; $E(\xi\eta) = 0$, $E\xi^2 = E\eta^2 = \sigma^2$。常数$\lambda_0 \in (0, \pi]$。
- $$Z_t = \xi\cos(\lambda_0 t) + \eta\sin(\lambda_0 t), t \in \mathbb{N}_+ \tag{8.1}$$
- 写成极坐标表示:

$$A = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \cos\theta = \frac{\xi}{A}, \ \sin\theta = \frac{\eta}{A} \tag{8.2}$$

$$Z_t = A\cos(t\lambda_0 - \theta) \tag{8.3}$$

- 其实现是一个相位为$-\theta$的角频率为λ_0的余弦函数的离散采样，表现并不随机，随机性表现在多个实现样本。

简单的离散谱序列

- 随机变量ξ,η。$E\xi=0, E\eta=0$; $E(\xi\eta)=0$, $E\xi^2=E\eta^2=\sigma^2$。常数$\lambda_0\in(0,\pi]$。
-

$$Z_t=\xi\cos(\lambda_0 t)+\eta\sin(\lambda_0 t), t\in\mathbb{N}_+ \tag{8.1}$$

- 写成极坐标表示:

$$A=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\quad \cos\theta=\frac{\xi}{A}, \sin\theta=\frac{\eta}{A} \tag{8.2}$$

$$Z_t=A\cos(t\lambda_0-\theta) \tag{8.3}$$

- 其实现是一个相位为$-\theta$的角频率为λ_0的余弦函数的离散采样，表现并不随机，随机性表现在多个实现样本。

- $\{Z_t\}$定义

$$Z_t = A\cos(t\lambda_0 - \theta) \tag{8.3}$$

- 易见$\mathrm{E}Z_t = 0$。
- 自协方差函数为

$$\begin{aligned}
\gamma_{t-s} =& \mathrm{E}(Z_t Z_s) \\
=& \Big[\mathrm{E}(\xi^2)\cos(t\lambda_0)\cos(s\lambda_0) + \mathrm{E}(\eta^2)\sin(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0) \\
& + \mathrm{E}(\xi\eta)\cos(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0) + \mathrm{E}(\xi\eta)\cos(s\lambda_0)\sin(t\lambda_0)\Big] \\
=& \sigma^2\left[\cos(t\lambda_0)\cos(s\lambda_0) + \sin(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0)\right] + 0 + 0 \\
& (\text{注意}\xi,\eta\text{正交}) \\
=& \sigma^2\cos((t-s)\lambda_0)
\end{aligned}$$

- 所以(8.3)定义的$\{Z_t\}$平稳，有自协方差函数$\{\gamma_k\}$。

- $\{Z_t\}$定义

$$Z_t = A\cos(t\lambda_0 - \theta) \tag{8.3}$$

- 易见$\mathrm{E}Z_t = 0$。
- 自协方差函数为

$$\begin{aligned}\gamma_{t-s} =& \mathrm{E}(Z_t Z_s)\\ =& \Big[\mathrm{E}(\xi^2)\cos(t\lambda_0)\cos(s\lambda_0) + \mathrm{E}(\eta^2)\sin(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0)\\ & + \mathrm{E}(\xi\eta)\cos(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0) + \mathrm{E}(\xi\eta)\cos(s\lambda_0)\sin(t\lambda_0)\Big]\\ =& \sigma^2\left[\cos(t\lambda_0)\cos(s\lambda_0) + \sin(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0)\right] + 0 + 0\\ & (\text{注意}\xi,\eta\text{正交})\\ =& \sigma^2\cos((t-s)\lambda_0)\end{aligned}$$

- 所以(8.3)定义的$\{Z_t\}$平稳，有自协方差函数$\{\gamma_k\}$。

- $\{Z_t\}$定义

$$Z_t = A\cos(t\lambda_0 - \theta) \tag{8.3}$$

- 易见$\mathrm{E}Z_t = 0$。
- 自协方差函数为

$$\begin{aligned}
\gamma_{t-s} =& \mathrm{E}(Z_t Z_s) \\
=& \Big[\mathrm{E}(\xi^2)\cos(t\lambda_0)\cos(s\lambda_0) + \mathrm{E}(\eta^2)\sin(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0) \\
& + \mathrm{E}(\xi\eta)\cos(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0) + \mathrm{E}(\xi\eta)\cos(s\lambda_0)\sin(t\lambda_0)\Big] \\
=& \sigma^2\left[\cos(t\lambda_0)\cos(s\lambda_0) + \sin(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0)\right] + 0 + 0 \\
& \text{(注意}\xi,\eta\text{正交)} \\
=& \sigma^2\cos((t-s)\lambda_0)
\end{aligned}$$

- 所以(8.3)定义的$\{Z_t\}$平稳，有自协方差函数$\{\gamma_k\}$。

- $\{Z_t\}$定义

$$Z_t = A\cos(t\lambda_0 - \theta) \tag{8.3}$$

- 易见$\mathrm{E}Z_t = 0$。
- 自协方差函数为

$$\begin{aligned}
\gamma_{t-s} =& \mathrm{E}(Z_t Z_s) \\
=& \Big[\mathrm{E}(\xi^2)\cos(t\lambda_0)\cos(s\lambda_0) + \mathrm{E}(\eta^2)\sin(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0) \\
& + \mathrm{E}(\xi\eta)\cos(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0) + \mathrm{E}(\xi\eta)\cos(s\lambda_0)\sin(t\lambda_0)\Big] \\
=& \sigma^2\left[\cos(t\lambda_0)\cos(s\lambda_0) + \sin(t\lambda_0)\sin(s\lambda_0)\right] + 0 + 0 \\
& \text{(注意}\xi,\eta\text{正交)} \\
=& \sigma^2\cos((t-s)\lambda_0)
\end{aligned}$$

- 所以(8.3)定义的$\{Z_t\}$平稳，有自协方差函数$\{\gamma_k\}$。

简单离散谱序列的谱函数

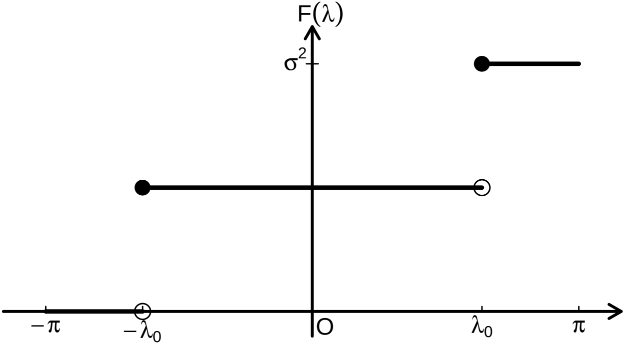
- 现

$$\gamma_k = \sigma^2 \cos(k\lambda_0),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

- 若$\lambda_0 \neq \pi$，谱函数为

$$F(\lambda) = \sigma^2[0.5 I_{[-\lambda_0,\pi]}(\lambda) + 0.5 I_{[\lambda_0,\pi]}(\lambda)]$$

- 图



简单离散谱序列的谱函数

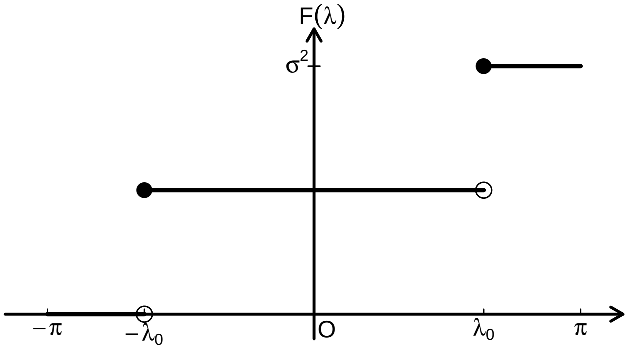
- 现

$$\gamma_k = \sigma^2 \cos(k\lambda_0), \ \ k \in \mathbb{Z}$$

- 若$\lambda_0 \neq \pi$，谱函数为

$$F(\lambda) = \sigma^2[0.5 I_{[-\lambda_0,\pi]}(\lambda) + 0.5 I_{[\lambda_0,\pi]}(\lambda)]$$

- 图



简单离散谱序列的谱函数

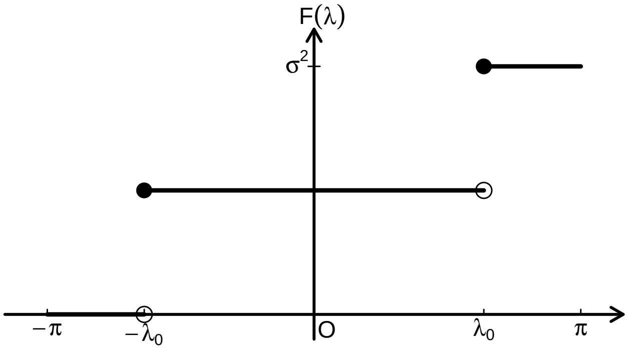
- 现

$$\gamma_k = \sigma^2 \cos(k\lambda_0),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

- 若$\lambda_0 \neq \pi$, 谱函数为

$$F(\lambda) = \sigma^2[0.5 I_{[-\lambda_0,\pi]}(\lambda) + 0.5 I_{[\lambda_0,\pi]}(\lambda)]$$

- 图



- 这样的阶梯函数形式的谱函数表示在$[-\pi,\pi]$上的一个测度，此测度仅在$-\lambda_0$和λ_0两个点上有质量$\sigma^2/2$。
- 由积分与测度的关系可知

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2}[e^{-ik\lambda_0} + e^{ik\lambda_0}] = \gamma_k$$

- 若$\lambda_0 = \pi$, 则$\gamma_k = \sigma^2\cos(k\pi)$,

$$F(\lambda) = \sigma^2 I_{\{\pi\}}(\lambda), \ \lambda \in [-\pi,\pi]$$

- 这样的阶梯函数形式的谱函数表示在$[-\pi, \pi]$上的一个测度，此测度仅在$-\lambda_0$和λ_0两个点上有质量$\sigma^2/2$。
- 由积分与测度的关系可知

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2}[e^{-ik\lambda_0} + e^{ik\lambda_0}] = \gamma_k$$

- 若$\lambda_0 = \pi$，则$\gamma_k = \sigma^2 \cos(k\pi)$，

$$F(\lambda) = \sigma^2 I_{\{\pi\}}(\lambda), \ \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 这样的阶梯函数形式的谱函数表示在$[-\pi, \pi]$上的一个测度，此测度仅在$-\lambda_0$和λ_0两个点上有质量$\sigma^2/2$。
- 由积分与测度的关系可知

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2}[e^{-ik\lambda_0} + e^{ik\lambda_0}] = \gamma_k$$

- 若$\lambda_0 = \pi$, 则$\gamma_k = \sigma^2 \cos(k\pi)$,

$$F(\lambda) = \sigma^2 I_{\{\pi\}}(\lambda), \ \lambda \in [-\pi, \pi]$$

离散谱

- 阶梯函数的谱函数称为**离散谱函数**，相应的平稳序列称为**离散谱序列**。
- 离散谱函数对应$[-\pi,\pi]$上一个只取离散点的测度。
- 离散谱函数没有对应的谱密度，但是可以逼近。令

$$f_n(\lambda) = n\sigma^2 I_{[-\lambda_0,-\lambda_0+1/(2n)]\cup[\lambda_0-1/(2n),\lambda_0]}(\lambda)$$
$$F_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_n(u)du$$

- 则f_n是一个仅在两个长度为$\frac{1}{2n}$的小区间上非零的分段函数。
- $F_n(\lambda)$为连续的折线函数，仅在上述两个小区间上为线性增函数，在其它位置为水平线。
- 有极限

$$F_n(\lambda) \to F(\lambda),\ \lambda \neq \pm\lambda_0,\ n \to \infty.$$

离散谱

- 阶梯函数的谱函数称为**离散谱函数**，相应的平稳序列称为**离散谱序列**。
- 离散谱函数对应$[-\pi,\pi]$上一个只取离散点的测度。
- 离散谱函数没有对应的谱密度，但是可以逼近。令

$$f_n(\lambda) = n\sigma^2 I_{[-\lambda_0, -\lambda_0+1/(2n)]\cup[\lambda_0-1/(2n), \lambda_0]}(\lambda)$$

$$F_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_n(u)du$$

- 则f_n是一个仅在两个长度为$\frac{1}{2n}$的小区间上非零的分段函数。
- $F_n(\lambda)$为连续的折线函数，仅在上述两个小区间上为线性增函数，在其它位置为水平线。
- 有极限

$$F_n(\lambda) \to F(\lambda),\ \lambda \neq \pm\lambda_0,\ n \to \infty.$$

离散谱

- 阶梯函数的谱函数称为**离散谱函数**，相应的平稳序列称为**离散谱序列**。
- 离散谱函数对应$[-\pi,\pi]$上一个只取离散点的测度。
- 离散谱函数没有对应的谱密度，但是可以逼近。令

$$f_n(\lambda) = n\sigma^2 I_{[-\lambda_0,-\lambda_0+1/(2n)]\cup[\lambda_0-1/(2n),\lambda_0]}(\lambda)$$

$$F_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_n(u)du$$

- 则f_n是一个仅在两个长度为$\frac{1}{2n}$的小区间上非零的分段函数。
- $F_n(\lambda)$为连续的折线函数，仅在上述两个小区间上为线性增函数，在其它位置为水平线。
- 有极限

$$F_n(\lambda) \to F(\lambda),\ \lambda \neq \pm\lambda_0,\ n \to \infty.$$

离散谱

- 阶梯函数的谱函数称为**离散谱函数**，相应的平稳序列称为**离散谱序列**。
- 离散谱函数对应$[-\pi,\pi]$上一个只取离散点的测度。
- 离散谱函数没有对应的谱密度，但是可以逼近。令

$$f_n(\lambda) = n\sigma^2 I_{[-\lambda_0, -\lambda_0+1/(2n)] \cup [\lambda_0 - 1/(2n), \lambda_0]}(\lambda)$$

$$F_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_n(u) du$$

- 则f_n是一个仅在两个长度为$\frac{1}{2n}$的小区间上非零的分段函数。
- $F_n(\lambda)$为连续的折线函数，仅在上述两个小区间上为线性增函数，在其它位置为水平线。
- 有极限

$$F_n(\lambda) \to F(\lambda), \ \lambda \neq \pm\lambda_0, \ n \to \infty.$$

离散谱

- 阶梯函数的谱函数称为**离散谱函数**，相应的平稳序列称为**离散谱序列**。
- 离散谱函数对应$[-\pi,\pi]$上一个只取离散点的测度。
- 离散谱函数没有对应的谱密度，但是可以逼近。令

$$f_n(\lambda) = n\sigma^2 I_{[-\lambda_0,-\lambda_0+1/(2n)]\cup[\lambda_0-1/(2n),\lambda_0]}(\lambda)$$
$$F_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_n(u)du$$

- 则f_n是一个仅在两个长度为$\frac{1}{2n}$的小区间上非零的分段函数。
- $F_n(\lambda)$为连续的折线函数，仅在上述两个小区间上为线性增函数，在其它位置为水平线。
- 有极限

$$F_n(\lambda) \to F(\lambda),\ \lambda \neq \pm\lambda_0,\ n \to \infty.$$

离散谱

- 阶梯函数的谱函数称为**离散谱函数**，相应的平稳序列称为**离散谱序列**。
- 离散谱函数对应$[-\pi, \pi]$上一个只取离散点的测度。
- 离散谱函数没有对应的谱密度，但是可以逼近。令

$$f_n(\lambda) = n\sigma^2 I_{[-\lambda_0, -\lambda_0+1/(2n)]\cup[\lambda_0-1/(2n), \lambda_0]}(\lambda)$$

$$F_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_n(u)du$$

- 则f_n是一个仅在两个长度为$\frac{1}{2n}$的小区间上非零的分段函数。
- $F_n(\lambda)$为连续的折线函数，仅在上述两个小区间上为线性增函数，在其它位置为水平线。
- 有极限

$$F_n(\lambda) \to F(\lambda),\ \lambda \neq \pm\lambda_0,\ n \to \infty.$$

- $f_n(\lambda)$是某平稳列的谱密度。
- 当$n \to \infty$时

$$
\begin{aligned}
g_k(n) \triangleq & \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_n(\lambda) d\lambda \\
= & n\sigma^2 \left(\int_{-\lambda_0}^{-\lambda_0+\frac{1}{2n}} e^{ik\lambda} d\lambda + \int_{\lambda_0-\frac{1}{2n}}^{\lambda_0} e^{ik\lambda} d\lambda \right) \\
= & 2n\sigma^2 \int_{\lambda_0-\frac{1}{2n}}^{\lambda_0} \cos(k\lambda) d\lambda \\
& \text{(sin在关于原点对称的区间积分为零)} \\
= & 2n\sigma^2 \cos(k(\lambda_0+\alpha_n)) \cdot \frac{1}{2n} \quad \text{(积分中值定理)} \\
= & \sigma^2 \cos(k\lambda_0 + k\alpha_n) \\
\to & \sigma^2 \cos(k\lambda_0) = \gamma_k, \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$

- 其中数列$\{\alpha_n\}$满足$\alpha_n \in (-\frac{1}{2n}, 0), n \in \mathbb{N}_+$。

- $f_n(\lambda)$是某平稳列的谱密度。
- 当$n \to \infty$时

$$
\begin{aligned}
g_k(n) &\triangleq \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_n(\lambda) d\lambda \\
&= n\sigma^2 \left(\int_{-\lambda_0}^{-\lambda_0+\frac{1}{2n}} e^{ik\lambda} d\lambda + \int_{\lambda_0-\frac{1}{2n}}^{\lambda_0} e^{ik\lambda} d\lambda \right) \\
&= 2n\sigma^2 \int_{\lambda_0-\frac{1}{2n}}^{\lambda_0} \cos(k\lambda) d\lambda \\
&\qquad (\sin\text{在关于原点对称的区间积分为零}) \\
&= 2n\sigma^2 \cos(k(\lambda_0+\alpha_n)) \cdot \frac{1}{2n} \quad (\text{积分中值定理}) \\
&= \sigma^2 \cos(k\lambda_0 + k\alpha_n) \\
&\to \sigma^2 \cos(k\lambda_0) = \gamma_k,\ \ n \to \infty
\end{aligned}
$$

- 其中数列$\{\alpha_n\}$满足$\alpha_n \in (-\frac{1}{2n}, 0), n \in \mathbb{N}_+$。

- $f_n(\lambda)$是某平稳列的谱密度。
- 当$n \to \infty$时

$$
\begin{aligned}
g_k(n) \triangleq & \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_n(\lambda) d\lambda \\
= & n\sigma^2 \left(\int_{-\lambda_0}^{-\lambda_0+\frac{1}{2n}} e^{ik\lambda} d\lambda + \int_{\lambda_0-\frac{1}{2n}}^{\lambda_0} e^{ik\lambda} d\lambda \right) \\
= & 2n\sigma^2 \int_{\lambda_0-\frac{1}{2n}}^{\lambda_0} \cos(k\lambda) d\lambda \\
& \quad (\sin\text{在关于原点对称的区间积分为零}) \\
= & 2n\sigma^2 \cos(k(\lambda_0+\alpha_n)) \cdot \frac{1}{2n} \quad (\text{积分中值定理}) \\
= & \sigma^2 \cos(k\lambda_0 + k\alpha_n) \\
\to & \sigma^2 \cos(k\lambda_0) = \gamma_k, \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$

- 其中数列$\{\alpha_n\}$满足$\alpha_n \in (-\frac{1}{2n}, 0), n \in \mathbb{N}_+$。

- 当n很大时，$f_n(\lambda)$对应的平稳列和$\{Z_t\}$的表现已经很接近，其轨道表现为近似周期函数形式。
- 推广来看，如果某平稳列的谱密度在某处有很高的峰，则此序列的轨道在峰对应的频率(角频率)处应该表现出周期性。
- 设ω为角频率，f为频率，T为周期，则

$$\omega = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f}$$

- 考察数据的周期性变化是谱密度估计的重要应用之一。

- 当n很大时，$f_n(\lambda)$对应的平稳列和$\{Z_t\}$的表现已经很接近，其轨道表现为近似周期函数形式。
- 推广来看，如果某平稳列的谱密度在某处有很高的峰，则此序列的轨道在峰对应的频率(角频率)处应该表现出周期性。
- 设ω为角频率，f为频率，T为周期，则

$$\omega = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f}$$

- 考察数据的周期性变化是谱密度估计的重要应用之一。

- 当n很大时，$f_n(\lambda)$对应的平稳列和$\{Z_t\}$的表现已经很接近，其轨道表现为近似周期函数形式。
- 推广来看，如果某平稳列的谱密度在某处有很高的峰，则此序列的轨道在峰对应的频率(角频率)处应该表现出周期性。
- 设ω为角频率，f为频率，T为周期，则

$$\omega = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f}$$

- 考察数据的周期性变化是谱密度估计的重要应用之一。

- 当n很大时，$f_n(\lambda)$对应的平稳列和$\{Z_t\}$的表现已经很接近，其轨道表现为近似周期函数形式。
- 推广来看，如果某平稳列的谱密度在某处有很高的峰，则此序列的轨道在峰对应的频率(角频率)处应该表现出周期性。
- 设ω为角频率，f为频率，T为周期，则

$$\omega = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f}$$

- 考察数据的周期性变化是谱密度估计的重要应用之一。

多个频率成分的离散谱序列

- 实际中的离散谱序列经常会有多个频率成分。
- 设有2p个随机变量$\xi_k, \eta_k, k = 1, \ldots, p$, 所有2$p$个两两正交，满足

$$E\xi_j = E\eta_j = 0, \quad E\xi_j^2 = E\eta_j^2 = \sigma_j^2 \tag{8.6}$$

- 设$\lambda_j \in (0, \pi], j = 1, \ldots, p$，定义

$$\begin{aligned} Z_t &= \sum_{j=1}^{p} [\xi_j \cos(\lambda_j t) + \eta_j \sin(\lambda_j t)] \\ &= \sum_{j=1}^{p} A_j \cos(\lambda_j t - \theta_j), \quad t \in \mathbb{N}_+ \end{aligned} \tag{8.7}$$

- 其轨道表现为有p个频率成分的非随机函数。

多个频率成分的离散谱序列

- 实际中的离散谱序列经常会有多个频率成分。
- 设有$2p$个随机变量$\xi_k, \eta_k, k = 1, \ldots, p$, 所有$2p$个两两正交，满足

$$E\xi_j = E\eta_j = 0, \quad E\xi_j^2 = E\eta_j^2 = \sigma_j^2 \tag{8.6}$$

- 设$\lambda_j \in (0, \pi], j = 1, \ldots, p$，定义

$$\begin{aligned} Z_t &= \sum_{j=1}^{p} [\xi_j \cos(\lambda_j t) + \eta_j \sin(\lambda_j t)] \\ &= \sum_{j=1}^{p} A_j \cos(\lambda_j t - \theta_j), \quad t \in \mathbb{N}_+ \end{aligned} \tag{8.7}$$

- 其轨道表现为有p个频率成分的非随机函数。

多个频率成分的离散谱序列

- 实际中的离散谱序列经常会有多个频率成分。
- 设有2p个随机变量$\xi_k, \eta_k, k = 1, \ldots, p$, 所有2$p$个两两正交，满足

$$E\xi_j = E\eta_j = 0, \quad E\xi_j^2 = E\eta_j^2 = \sigma_j^2 \tag{8.6}$$

- 设$\lambda_j \in (0, \pi], j = 1, \ldots, p$，定义

$$\begin{aligned} Z_t &= \sum_{j=1}^{p} [\xi_j \cos(\lambda_j t) + \eta_j \sin(\lambda_j t)] \\ &= \sum_{j=1}^{p} A_j \cos(\lambda_j t - \theta_j), \quad t \in \mathbb{N}_+ \end{aligned} \tag{8.7}$$

- 其轨道表现为有p个频率成分的非随机函数。

多个频率成分的离散谱序列

- 实际中的离散谱序列经常会有多个频率成分。
- 设有$2p$个随机变量$\xi_k, \eta_k, k = 1, \ldots, p$, 所有$2p$个两两正交，满足

$$E\xi_j = E\eta_j = 0, \quad E\xi_j^2 = E\eta_j^2 = \sigma_j^2 \tag{8.6}$$

- 设$\lambda_j \in (0, \pi], j = 1, \ldots, p$，定义

$$\begin{aligned} Z_t &= \sum_{j=1}^{p} [\xi_j \cos(\lambda_j t) + \eta_j \sin(\lambda_j t)] \\ &= \sum_{j=1}^{p} A_j \cos(\lambda_j t - \theta_j), \quad t \in \mathbb{N}_+ \end{aligned} \tag{8.7}$$

- 其轨道表现为有p个频率成分的非随机函数。

离散谱函数

- $\{Z_t\}$为零均值平稳列,

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{p} \sigma_j^2 \cos(k\lambda_j), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8.9}$$

- 设所有$\lambda_j \neq \pi$, 这时谱函数为

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\sigma_j^2}{2} \left[I_{[-\lambda_j,\pi]}(\lambda) + I_{[\lambda_j,\pi]}(\lambda) \right], \ \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 此谱函数表现为在$\pm\lambda_j$处有跳跃$\frac{\sigma_j^2}{2}$的阶梯函数，表明谱的能量集中在这$2p$个频率上。

离散谱函数

- $\{Z_t\}$为零均值平稳列,

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{p} \sigma_j^2 \cos(k\lambda_j), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8.9}$$

- 设所有$\lambda_j \neq \pi$, 这时谱函数为

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\sigma_j^2}{2} \left[I_{[-\lambda_j,\pi]}(\lambda) + I_{[\lambda_j,\pi]}(\lambda) \right], \ \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 此谱函数表现为在$\pm\lambda_j$处有跳跃$\frac{\sigma_j^2}{2}$的阶梯函数，表明谱的能量集中在这$2p$个频率上。

离散谱函数

- $\{Z_t\}$为零均值平稳列，

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{p} \sigma_j^2 \cos(k\lambda_j), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8.9}$$

- 设所有$\lambda_j \neq \pi$，这时谱函数为

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\sigma_j^2}{2} \left[I_{[-\lambda_j,\pi]}(\lambda) + I_{[\lambda_j,\pi]}(\lambda) \right], \ \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 此谱函数表现为在$\pm\lambda_j$处有跳跃$\frac{\sigma_j^2}{2}$的阶梯函数，表明谱的能量集中在这$2p$个频率上。

一般离散谱序列

- 离散谱序列可以由可列个简单的离散谱序列叠加而成。
- 设$\xi_j, \eta_k, (j, k = 1, 2, \ldots)$两两正交，满足

$$E\xi_j = E\eta_j = 0, \quad E\xi_j^2 = E\eta_j^2 = \sigma_j^2 \tag{8.6}$$

且

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty \tag{8.10}$$

- 设$\lambda_j \in (0, \pi], j = 1, 2, \ldots$。

一般离散谱序列

- 离散谱序列可以由可列个简单的离散谱序列叠加而成。
- 设$\xi_j, \eta_k, (j, k = 1, 2, \dots)$两两正交，满足

$$E\xi_j = E\eta_j = 0, \quad E\xi_j^2 = E\eta_j^2 = \sigma_j^2 \tag{8.6}$$

且

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty \tag{8.10}$$

- 设$\lambda_j \in (0, \pi], j = 1, 2, \dots$。

一般离散谱序列

- 离散谱序列可以由可列个简单的离散谱序列叠加而成。
- 设$\xi_j, \eta_k, (j, k = 1, 2, \ldots)$两两正交，满足

$$E\xi_j = E\eta_j = 0, \quad E\xi_j^2 = E\eta_j^2 = \sigma_j^2 \tag{8.6}$$

且

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty \tag{8.10}$$

- 设$\lambda_j \in (0, \pi], j = 1, 2, \ldots$。

- 定义

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} [\xi_j \cos(\lambda_j t) + \eta_j \sin(\lambda_j t)] \quad t \in \mathbb{N}_+ \qquad (8.11)$$

- 改写为

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} [\sigma_j \cos(t\lambda_j)(\xi_j/\sigma_j) + \sigma_j \sin(t\lambda_j)(\eta_j/\sigma_j)], \qquad (8.12)$$

- 其中$\{\xi_j/\sigma_j\}$和$\{\eta_j/\sigma_j\}$为$WN(0,1)$，级数中组合系数平方可和：

$$\sum_{j=1}^{\infty} [(\sigma_j \cos(t\lambda_j))^2 + (\sigma_j \sin(t\lambda_j))^2] = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$$

- 所以级数(8.12)的右端均方收敛。

- 定义

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty}[\xi_j \cos(\lambda_j t) + \eta_j \sin(\lambda_j t)] \quad t \in \mathbb{N}_+ \qquad (8.11)$$

- 改写为

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sigma_j \cos(t\lambda_j)(\xi_j/\sigma_j) + \sigma_j \sin(t\lambda_j)(\eta_j/\sigma_j)\right], \qquad (8.12)$$

- 其中$\{\xi_j/\sigma_j\}$和$\{\eta_j/\sigma_j\}$为$WN(0,1)$，级数中组合系数平方可和：

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[(\sigma_j \cos(t\lambda_j))^2 + (\sigma_j \sin(t\lambda_j))^2\right] = \sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j^2 < \infty$$

- 所以级数(8.12)的右端均方收敛。

- 定义

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} [\xi_j \cos(\lambda_j t) + \eta_j \sin(\lambda_j t)] \quad t \in \mathbb{N}_+ \qquad (8.11)$$

- 改写为

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} [\sigma_j \cos(t\lambda_j)(\xi_j/\sigma_j) + \sigma_j \sin(t\lambda_j)(\eta_j/\sigma_j)] , \qquad (8.12)$$

- 其中$\{\xi_j/\sigma_j\}$和$\{\eta_j/\sigma_j\}$为$WN(0,1)$，级数中组合系数平方可和：

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[(\sigma_j \cos(t\lambda_j))^2 + (\sigma_j \sin(t\lambda_j))^2\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$$

- 所以级数(8.12)的右端均方收敛。

- 定义

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} [\xi_j \cos(\lambda_j t) + \eta_j \sin(\lambda_j t)] \quad t \in \mathbb{N}_+ \qquad (8.11)$$

- 改写为

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} [\sigma_j \cos(t\lambda_j)(\xi_j/\sigma_j) + \sigma_j \sin(t\lambda_j)(\eta_j/\sigma_j)], \qquad (8.12)$$

- 其中$\{\xi_j/\sigma_j\}$和$\{\eta_j/\sigma_j\}$为$WN(0,1)$，级数中组合系数平方可和：

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[(\sigma_j \cos(t\lambda_j))^2 + (\sigma_j \sin(t\lambda_j))^2\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$$

- 所以级数(8.12)的右端均方收敛。

- 由L^2中内积的连续性, 对$\forall t, s \in \mathbb{Z}$有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z_t) =& \mathrm{E}(Z_t \cdot 1) \\
=& \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}[\xi_j \cos(\lambda_j t) + \eta_j \sin(\lambda_j t)] \\
=& 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z_t Z_s) =& \lim_{n\to\infty} E\Big\{ \sum_{j=1}^{n} [\xi_j \cos(\lambda_j t) + \eta_j \sin(\lambda_j t)] \\
& \cdot \sum_{j=1}^{n} [\xi_j \cos(\lambda_j s) + \eta_j \sin(\lambda_j s)] \Big\} \\
=& \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \cos[(t-s)\lambda_j] \\
=& \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \cos[(t-s)\lambda_j]
\end{aligned}
$$

- 所以，由可列个简单离散谱序列叠加得到的序列(8.11)是零均值平稳列。
- 它由可列个正弦波和余弦波叠加构成。
- 有自协方差函数

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \cos(k\lambda_j), \ k \in \mathbb{Z} \tag{8.13}$$

- 谱函数为

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{2} \left[I_{[-\lambda_j,\pi]}(\lambda) + I_{[\lambda_j,\pi]}(\lambda) \right], \ \lambda \in [-\pi, \pi] \tag{8.14}$$

是一个有可列个跳跃点的阶梯函数，在$\pm\lambda_j$有跳跃$\sigma_j^2/2$，对应于$[-\pi,\pi]$的一个离散测度。
- 如果某个$\lambda_j = \pi$，它对$F(\lambda)$的贡献应该写成$\sigma_j I_{\{\pi\}}(\lambda)$。

- 所以，由可列个简单离散谱序列叠加得到的序列(8.11)是零均值平稳列。
- 它由可列个正弦波和余弦波叠加构成。
- 有自协方差函数

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \cos(k\lambda_j), \ k \in \mathbb{Z} \tag{8.13}$$

- 谱函数为

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{2} \left[I_{[-\lambda_j,\pi]}(\lambda) + I_{[\lambda_j,\pi]}(\lambda) \right], \ \lambda \in [-\pi, \pi] \tag{8.14}$$

是一个有可列个跳跃点的阶梯函数，在$\pm\lambda_j$有跳跃$\sigma_j^2/2$，对应于$[-\pi,\pi]$的一个离散测度。
- 如果某个$\lambda_j = \pi$，它对$F(\lambda)$的贡献应该写成$\sigma_j I_{\{\pi\}}(\lambda)$。

- 所以，由可列个简单离散谱序列叠加得到的序列(8.11)是零均值平稳列。
- 它由可列个正弦波和余弦波叠加构成。
- 有自协方差函数

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \cos(k\lambda_j), \ \ k \in \mathbb{Z} \tag{8.13}$$

- 谱函数为

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{2} \left[I_{[-\lambda_j,\pi]}(\lambda) + I_{[\lambda_j,\pi]}(\lambda) \right], \ \lambda \in [-\pi, \pi] \tag{8.14}$$

是一个有可列个跳跃点的阶梯函数，在$\pm\lambda_j$有跳跃$\sigma_j^2/2$，对应于$[-\pi,\pi]$的一个离散测度。
- 如果某个$\lambda_j = \pi$，它对$F(\lambda)$的贡献应该写成$\sigma_j I_{\{\pi\}}(\lambda)$。

- 所以，由可列个简单离散谱序列叠加得到的序列(8.11)是零均值平稳列。
- 它由可列个正弦波和余弦波叠加构成。
- 有自协方差函数

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \cos(k\lambda_j), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{8.13}$$

- 谱函数为

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{2} \left[I_{[-\lambda_j,\pi]}(\lambda) + I_{[\lambda_j,\pi]}(\lambda) \right], \quad \lambda \in [-\pi, \pi] \tag{8.14}$$

是一个有可列个跳跃点的阶梯函数，在$\pm\lambda_j$有跳跃$\sigma_j^2/2$，对应于$[-\pi,\pi]$的一个离散测度。
- 如果某个$\lambda_j = \pi$，它对$F(\lambda)$的贡献应该写成$\sigma_j I_{\{\pi\}}(\lambda)$。

- 所以，由可列个简单离散谱序列叠加得到的序列(8.11)是零均值平稳列。
- 它由可列个正弦波和余弦波叠加构成。
- 有自协方差函数

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \cos(k\lambda_j), \ k \in \mathbb{Z} \tag{8.13}$$

- 谱函数为

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{2} \left[I_{[-\lambda_j,\pi]}(\lambda) + I_{[\lambda_j,\pi]}(\lambda) \right], \ \lambda \in [-\pi, \pi] \tag{8.14}$$

是一个有可列个跳跃点的阶梯函数，在$\pm\lambda_j$有跳跃$\sigma_j^2/2$，对应于$[-\pi,\pi]$的一个离散测度。
- 如果某个$\lambda_j = \pi$，它对$F(\lambda)$的贡献应该写成$\sigma_j I_{\{\pi\}}(\lambda)$。

调和模型

- 尽管离散谱序列是随机的，但它的每一次观测是确定的三角函数相加在整数点上的取值。
- 实际工作中也经常把这样的模型看作非随机的，这时

$$Z_t = \sum_{j=1}^{p} A_j \cos(\lambda_j t + \theta_j), \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中A_j, θ_j非随机。
- 称这样的模型为调和模型(harmonic model)。

调和模型

- 尽管离散谱序列是随机的，但它的每一次观测是确定的三角函数相加在整数点上的取值。
- 实际工作中也经常把这样的模型看作非随机的，这时

$$Z_t = \sum_{j=1}^{p} A_j \cos(\lambda_j t + \theta_j), \ t \in \mathbb{Z}$$

其中A_j, θ_j非随机。

- 称这样的模型为调和模型(harmonic model)。

调和模型

- 尽管离散谱序列是随机的，但它的每一次观测是确定的三角函数相加在整数点上的取值。
- 实际工作中也经常把这样的模型看作非随机的，这时

$$Z_t = \sum_{j=1}^{p} A_j \cos(\lambda_j t + \theta_j), \ \ t \in \mathbb{Z}$$

其中A_j, θ_j非随机。
- 称这样的模型为**调和模型**(harmonic model)。