应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2017年秋季学期

随机向量的数学期望和方差

- 矩阵随机变量$\mathbf{M} = (M_{i,j})_{m\times n}$.
- 期望为每个元素取期望：

$$\mathrm{E}(\mathbf{M}) = (\mathrm{E}M_{i,j})_{m\times n} = (\mu_{ij})_{m\times n}.$$

- 若A, B是常值矩阵，$A\mathbf{M}B$有意义，则

$$\mathrm{E}(A\mathbf{M}B) = A\cdot \mathrm{E}(\mathbf{M})\cdot B$$

- 随机向量$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$. 则协方差阵为

$$\Sigma_X = \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \mathrm{E}[(\mathbf{X}-\mu)(\mathbf{X}-\mu)^T]$$

- Σ_X对称非负定(半正定)。
- $\Sigma_X = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \mathrm{E}(\mathbf{X})\mathrm{E}(\mathbf{X})^T$.

随机向量的数学期望和方差

- 矩阵随机变量$\mathbf{M} = (M_{i,j})_{m\times n}$.
- 期望为每个元素取期望:

$$\mathrm{E}(\mathbf{M}) = (\mathrm{E}M_{i,j})_{m\times n} = (\mu_{ij})_{m\times n}.$$

- 若A, B是常值矩阵，$A\mathbf{M}B$有意义，则

$$\mathrm{E}(A\mathbf{M}B) = A \cdot \mathrm{E}(\mathbf{M}) \cdot B$$

- 随机向量$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$. 则协方差阵为

$$\Sigma_X = \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \mathrm{E}[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)^T]$$

- Σ_X对称非负定(半正定)。
- $\Sigma_X = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \mathrm{E}(\mathbf{X})\mathrm{E}(\mathbf{X})^T$.

随机向量的数学期望和方差

- 矩阵随机变量$\mathbf{M} = (M_{i,j})_{m\times n}$.
- 期望为每个元素取期望：

$$\mathrm{E}(\mathbf{M}) = (\mathrm{E}M_{i,j})_{m\times n} = (\mu_{ij})_{m\times n}.$$

- 若A, B是常值矩阵，$A\mathbf{M}B$有意义，则

$$\mathrm{E}(A\mathbf{M}B) = A\cdot\mathrm{E}(\mathbf{M})\cdot B$$

- 随机向量$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$. 则协方差阵为

$$\Sigma_X = \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \mathrm{E}[(\mathbf{X}-\mu)(\mathbf{X}-\mu)^T]$$

- Σ_X对称非负定(半正定)。
- $\Sigma_X = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \mathrm{E}(\mathbf{X})\mathrm{E}(\mathbf{X})^T$.

随机向量的数学期望和方差

- 矩阵随机变量$\mathbf{M} = (M_{i,j})_{m\times n}$.
- 期望为每个元素取期望：

$$\mathrm{E}(\mathbf{M}) = (\mathrm{E}M_{i,j})_{m\times n} = (\mu_{ij})_{m\times n}.$$

- 若A, B是常值矩阵，$A\mathbf{M}B$有意义，则

$$\mathrm{E}(A\mathbf{M}B) = A \cdot \mathrm{E}(\mathbf{M}) \cdot B$$

- 随机向量$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$. 则协方差阵为

$$\Sigma_X = \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \mathrm{E}[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)^T]$$

- Σ_X对称非负定(半正定)。
- $\Sigma_X = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \mathrm{E}(\mathbf{X})\mathrm{E}(\mathbf{X})^T$.

随机向量的数学期望和方差

- 矩阵随机变量$\mathbf{M} = (M_{i,j})_{m\times n}$.
- 期望为每个元素取期望：

$$\mathrm{E}(\mathbf{M}) = (\mathrm{E}M_{i,j})_{m\times n} = (\mu_{ij})_{m\times n}.$$

- 若A, B是常值矩阵，$A\mathbf{M}B$有意义，则

$$\mathrm{E}(A\mathbf{M}B) = A\cdot \mathrm{E}(\mathbf{M})\cdot B$$

- 随机向量$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$. 则协方差阵为

$$\Sigma_X = \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \mathrm{E}[(\mathbf{X}-\mu)(\mathbf{X}-\mu)^T]$$

- Σ_X对称非负定(半正定)。
- $\Sigma_X = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \mathrm{E}(\mathbf{X})\mathrm{E}(\mathbf{X})^T$.

随机向量的数学期望和方差

- 矩阵随机变量$\mathbf{M}=(M_{i,j})_{m\times n}$.
- 期望为每个元素取期望：

$$\mathrm{E}(\mathbf{M})=(\mathrm{E}M_{i,j})_{m\times n}=(\mu_{ij})_{m\times n}.$$

- 若A,B是常值矩阵，$A\mathbf{M}B$有意义，则

$$\mathrm{E}(A\mathbf{M}B)=A\cdot\mathrm{E}(\mathbf{M})\cdot B$$

- 随机向量$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$. 则协方差阵为

$$\Sigma_X=\mathrm{Var}(\mathbf{X})=\mathrm{E}[(\mathbf{X}-\mu)(\mathbf{X}-\mu)^T]$$

- Σ_X对称非负定(半正定)。
- $\Sigma_X=\mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)-\mathrm{E}(\mathbf{X})\mathrm{E}(\mathbf{X})^T$.

随机向量线性变换

- 若

$$\mathbf{Y} = \mathbf{a} + B\mathbf{X} \tag{4.4}$$

- 则有

$$\mathrm{E}\mathbf{Y} = \mathbf{a} + B\mathrm{E}\mathbf{X}, \qquad \mathrm{Var}(\mathbf{Y}) = B\Sigma_X B^T. \tag{4.5}$$

- 由(4.5), 对$Y = \alpha^T\mathbf{X}$, 有

$$0 \leq \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\alpha^T\mathbf{X}) = \alpha^T\mathrm{Var}(\mathbf{X})\alpha$$

所以随机向量协方差阵非负定。

随机向量线性变换

- 若

$$\mathbf{Y} = \mathbf{a} + B\mathbf{X} \tag{4.4}$$

- 则有

$$\mathrm{E}\mathbf{Y} = \mathbf{a} + B\mathrm{E}\mathbf{X}, \qquad \mathrm{Var}(\mathbf{Y}) = B\Sigma_X B^T. \tag{4.5}$$

- 由(4.5), 对 $Y = \alpha^T\mathbf{X}$, 有

$$0 \leq \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\alpha^T\mathbf{X}) = \alpha^T\mathrm{Var}(\mathbf{X})\alpha$$

所以随机向量协方差阵非负定。

随机向量线性变换

- 若

$$\mathbf{Y} = \mathbf{a} + B\mathbf{X} \tag{4.4}$$

- 则有

$$\mathrm{E}\mathbf{Y} = \mathbf{a} + B\mathrm{E}\mathbf{X}, \qquad \mathrm{Var}(\mathbf{Y}) = B\Sigma_X B^T. \tag{4.5}$$

- 由(4.5), 对 $Y = \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{X}$, 有

$$0 \leq \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{X}) = \boldsymbol{\alpha}^T\mathrm{Var}(\mathbf{X})\boldsymbol{\alpha}$$

所以随机向量协方差阵非负定。

多维正态分布

- 称随机向量$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)^T$ 服从m维(或多维)正态分布，如果存在m 维常数列向量$\boldsymbol{\mu}$，$m \times n$ 常数矩阵B 和iid的标准正态随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 使得$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + B\mathbf{X}$.
- 也称为多元正态分布。
- 这时$\mathrm{E}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu}$，$\Sigma = \mathrm{Var}(\mathbf{Y}) = BB^T$.

多维正态分布

- 称随机向量$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)^T$ 服从m维(或多维)正态分布，如果存在m 维常数列向量$\boldsymbol{\mu}$，$m \times n$ 常数矩阵B 和iid的标准正态随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 使得$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + B\mathbf{X}$.
- 也称为多元正态分布。
- 这时$\mathrm{E}\mathbf{Y} = \mu$，$\Sigma = \mathrm{Var}(\mathbf{Y}) = BB^T$.

多维正态分布

- 称随机向量$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)^T$ 服从m维(或多维)正态分布，如果存在m 维常数列向量$\boldsymbol{\mu}$，$m \times n$ 常数矩阵B 和iid的标准正态随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 使得$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + B\mathbf{X}$.
- 也称为多元正态分布。
- 这时$\mathrm{E}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu}$, $\Sigma = \mathrm{Var}(\mathbf{Y}) = BB^T$.

- 每个X_i的特征函数为

$$E\left(e^{itX_i}\right) = e^{-t^2/2}$$

- 随机向量$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$的特征函数为

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) =& \mathrm{E} e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{X}} = \mathrm{E}\prod_{i=1}^{n} e^{it_iX_i} \\ =& \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E} e^{it_iX_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{-t_j^2/2} = e^{-\mathbf{t}^T\mathbf{t}/2}\end{aligned}$$

(其中$\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)^T$。)

- 每个X_i的特征函数为

$$E\left(e^{itX_i}\right)=e^{-t^2/2}$$

- 随机向量$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$的特征函数为

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})=&\mathrm{E}e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{X}}=\mathrm{E}\prod_{i=1}^n e^{it_iX_i}\\=&\prod_{i=1}^n\mathrm{E}e^{it_iX_i}=\prod_{i=1}^n e^{-t_j^2/2}=e^{-\mathbf{t}^T\mathbf{t}/2}\end{aligned}$$

(其中$\mathbf{t}=(t_1,t_2,\dots,t_n)^T$。)

- 于是**Y**的特征函数为

$$
\begin{aligned}
\phi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) =& \mathrm{E} e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{Y}} \\
=& \mathrm{E} e^{i(\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}+\mathbf{t}^T B\mathbf{X})} \\
=& e^{i\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}} \mathrm{E} e^{i(\mathbf{t}^T B)\mathbf{X}} \\
=& e^{i\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}} e^{-i(\mathbf{t}^T B)(\mathbf{t}^T B)^T/2} \\
& (\text{注意}\mathrm{E} e^{i\mathbf{s}^T\mathbf{X}} = e^{-\mathbf{s}^T\mathbf{s}/2}, \text{令}\mathbf{s}^T = (\mathbf{t}^T B)) \\
=& \exp\left[i\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T B B^T\mathbf{t}\right] \\
=& \exp\left[i\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T \Sigma\mathbf{t}\right]. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

这是多维正态分布的等价定义。

- 多维正态分布记为$\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. $\mathbf{Y}$的分布完全由$\boldsymbol{\mu}, \Sigma$决定。
- 当$\Sigma > 0$(正定)时，$\mathbf{Y}$有密度

$$p(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

- 若$|\Sigma| = 0$，则Y的分量由两部分Y_1和Y_2组成，$\mathrm{Var}(Y_1) > 0$，Y_2为Y_1的线性组合。(递推证明)

- 多维正态分布记为$\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. $\mathbf{Y}$的分布完全由$\boldsymbol{\mu}, \Sigma$决定。
- 当$\Sigma > 0$(正定)时，$\mathbf{Y}$有密度

$$p(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

- 若$|\Sigma| = 0$，则Y的分量由两部分Y_1和Y_2组成，$\mathrm{Var}(Y_1) > 0$，Y_2为Y_1的线性组合。(递推证明)

- 多维正态分布记为$\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. $\mathbf{Y}$的分布完全由$\boldsymbol{\mu}, \Sigma$决定。
- 当$\Sigma > 0$(正定)时，$\mathbf{Y}$有密度

$$p(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

- 若$|\Sigma| = 0$，则Y的分量由两部分Y_1和Y_2组成，$\mathrm{Var}(Y_1) > 0$，Y_2为Y_1的线性组合。(递推证明)

多维正态分布的充要条件

- **定理4.1** $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..\xi_n)^T \sim N(\mu, \Sigma)$ 的充分必要条件是:
  对任何$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$
  $$Y = \mathbf{a}^T \xi \ \sim N(\mathbf{a}^T \mu, \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a}). \qquad (4.7)$$
- 定理4.1说明多维正态分布的任意线性组合是一元正态分布。
- 但是，这里的一元正态分布是推广的$N(\mu, \sigma^2)$，允许$\sigma^2 = 0$。

多维正态分布的充要条件

- **定理4.1** $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..\xi_n)^T \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 的充分必要条件是:
  对任何$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$Y = \mathbf{a}^T\boldsymbol{\xi} \sim \mathrm{N}(\mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a}). \tag{4.7}$$

- 定理4.1说明多维正态分布的任意线性组合是一元正态分布。
- 但是，这里的一元正态分布是推广的$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$，允许$\sigma^2 = 0$。

多维正态分布的充要条件

- **定理4.1** $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..\xi_n)^T \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 的充分必要条件是:
  对任何$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$Y = \mathbf{a}^T\boldsymbol{\xi} \ \sim \mathrm{N}(\mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a}). \tag{4.7}$$

- 定理4.1说明多维正态分布的任意线性组合是一元正态分布。
- 但是，这里的一元正态分布是推广的$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$，允许$\sigma^2 = 0$。

- 证明：必要性：由(4.6)得Y的特征函数为

$$
\begin{aligned}
\phi(t) =& \mathrm{E}\exp(itY) \\
=& \mathrm{E}\exp[it\mathbf{a}^T\xi] \\
=& \mathrm{E}\exp[i(t\mathbf{a}^T)\xi] \\
=& \exp\left[it\mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a}\right]
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

这是一元正态分布的特征函数，所以 $Y \sim \mathrm{N}(\mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a})$。

- 充分性：若(4.7)成立，则(4.8)成立，取$t=1$，对任意a有

$$
\mathrm{E}\exp(i\mathbf{a}^T\xi) = \exp\left(i\mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a}\right).
$$

即ξ的特征函数为(4.6)，于是ξ服从多维正态分布。

- 证明：必要性：由(4.6)得Y的特征函数为

$$
\begin{aligned}
\phi(t) =& \mathrm{E}\exp(itY) \\
=& \mathrm{E}\exp[it\mathbf{a}^T\xi] \\
=& \mathrm{E}\exp[i(t\mathbf{a}^T)\xi] \\
=& \exp\left[it\mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a}\right] \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

这是一元正态分布的特征函数，所以 $Y \sim \mathrm{N}(\mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a})$。

- 充分性：若(4.7)成立，则(4.8)成立，取$t=1$，对任意$\mathbf{a}$有

$$
\mathrm{E}\exp(i\mathbf{a}^T\xi) = \exp\left(i\mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a}\right).
$$

即ξ的特征函数为(4.6), 于是ξ服从多维正态分布。

正态平稳序列

- **定义4.2** 对于时间序列$\{X_t\}$, 如果对任何$n \geq 1$和$t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{Z}$, 有
- $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$服从多元正态分布,
- 则称$\{X_t\}$是正态时间序列.
- 特别当$\{X_t\}$还是平稳序列时, 又称为正态平稳序列.

正态平稳序列

- **定义4.2** 对于时间序列$\{X_t\}$, 如果对任何$n \geq 1$和$t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{Z}$, 有
- $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$服从多元正态分布,
- 则称$\{X_t\}$是正态时间序列.
- 特别当$\{X_t\}$还是平稳序列时, 又称为正态平稳序列.

正态平稳序列

- **定义4.2** 对于时间序列$\{X_t\}$, 如果对任何$n \geq 1$和$t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{Z}$, 有
- $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$服从多元正态分布,
- 则称$\{X_t\}$是正态时间序列.
- 特别当$\{X_t\}$还是平稳序列时, 又称为正态平稳序列.

正态平稳序列

- **定义4.2** 对于时间序列$\{X_t\}$, 如果对任何$n \geq 1$和$t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{Z}$, 有
- $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$服从多元正态分布,
- 则称$\{X_t\}$是正态时间序列.
- 特别当$\{X_t\}$还是平稳序列时, 又称为正态平稳序列.

正态平稳列

- $\{X_t : t \in \mathbb{N}_+\}$ 是正态时间序列$\Longleftrightarrow$ 对任何正整数m, $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$服从m维正态分布;
- $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是正态时间序列$\Longleftrightarrow$ 对任何正整数m, $(X_{-m}, X_{-m+1}, \ldots, X_m)$服从$2m+1$维正态分布.
- 正态分布对线性运算的封闭性为其理论研究提供了便利。

正态平稳列

- $\{X_t : t \in \mathbb{N}_+\}$ 是正态时间序列$\Longleftrightarrow$ 对任何正整数m, $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$服从m维正态分布;
- $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是正态时间序列$\Longleftrightarrow$ 对任何正整数m, $(X_{-m}, X_{-m+1}, \ldots, X_m)$服从$2m+1$维正态分布.
- 正态分布对线性运算的封闭性为其理论研究提供了便利。

正态平稳列

- $\{X_t : t \in \mathbb{N}_+\}$ 是正态时间序列$\Longleftrightarrow$ 对任何正整数m, $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$服从m维正态分布;
- $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是正态时间序列$\Longleftrightarrow$ 对任何正整数m, $(X_{-m}, X_{-m+1}, \ldots, X_m)$服从$2m+1$维正态分布.
- 正态分布对线性运算的封闭性为其理论研究提供了便利。

正态序列收敛定理

- **定理4.3** 如果正态序列$\xi_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2), n \in \mathbb{N}$ 依分布收敛到随机变量ξ, 则极限

$$\lim \mu_n = \mu, \ \lim \sigma_n^2 = \sigma^2$$

存在，且$\xi \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

- 证明参见王梓坤《随机过程论》P.18。

正态序列收敛定理

- **定理4.3** 如果正态序列$\xi_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2), n \in \mathbb{N}$ 依分布收敛到随机变量ξ, 则极限
$$\lim \mu_n = \mu, \ \lim \sigma_n^2 = \sigma^2$$
存在，且$\xi \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
- 证明参见王梓坤《随机过程论》P.18。

正态线性序列

- **定理4.4** $\{\varepsilon_t\}$是正态WN$(0,\sigma^2)$序列，实数列$\{a_j\}$绝对可和，则线性序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$$

是零均值正态平稳列，自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}, \; k \in \mathbb{Z} \tag{3.5}$$

- 证明：板书。
- 当$\{a_j\} \in l_2$时结论仍成立。

正态线性序列

- **定理4.4** $\{\varepsilon_t\}$是正态WN$(0,\sigma^2)$序列，实数列$\{a_j\}$绝对可和，则线性序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$$

是零均值正态平稳列，自协方差函数为

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}, \ k \in \mathbb{Z} \tag{3.5}$$

- 证明：板书。
- 当$\{a_j\} \in l_2$时结论仍成立。

正态线性序列

- **定理4.4** $\{\varepsilon_t\}$是正态WN$(0,\sigma^2)$序列，实数列$\{a_j\}$绝对可和，则线性序列

$$X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j}$$

是零均值正态平稳列，自协方差函数为

$$\gamma_k=\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_ja_{j+k},\ k\in\mathbb{Z} \tag{3.5}$$

- 证明：板书。
- 当$\{a_j\}\in l_2$时结论仍成立。

定理4.4证明

- 由§1.3知$\{X_t\}$是零均值平稳列，自协方差函数为(3.5)。
- 只要证明$\{X_t\}$是正态序列，只要证明$\forall m \in \mathbb{N}_+$，$\mathbf{X} = (X_{-m}, \ldots, X_0, \ldots, X_m)^T$服从多元正态分布。要使用定理4.1（多元正态与一元正态关系）和定理4.3（一元正态分布的依分布极限仍为正态分布）。
- 记$\Sigma = (\gamma_{|i-j|})_{i,j=-m,\ldots,m}$，来证明$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(0, \Sigma)$。
- 记

$$\eta_t(n) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{t-j}, \ t = -m, \ldots, m$$

这是X_t的部分和。由控制收敛定理可知

$$E|\eta_t(n) - X_t| \leq \sum_{|j|>n} |a_j| \sigma \to 0 (n \to \infty)$$

定理4.4证明

- 由§1.3知$\{X_t\}$是零均值平稳列，自协方差函数为(3.5)。
- 只要证明$\{X_t\}$是正态序列，只要证明$\forall m \in \mathbb{N}_+$，$\mathbf{X} = (X_{-m}, \ldots, X_0, \ldots, X_m)^T$服从多元正态分布。要使用定理4.1（多元正态与一元正态关系）和定理4.3（一元正态分布的依分布极限仍为正态分布）。
- 记$\Sigma = (\gamma_{|i-j|})_{i,j=-m,\ldots,m}$，来证明$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(0, \Sigma)$。
- 记

$$\eta_t(n) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t = -m, \ldots, m$$

这是X_t的部分和。由控制收敛定理可知

$$E|\eta_t(n) - X_t| \le \sum_{|j|>n} |a_j| \sigma \to 0 (n \to \infty)$$

定理4.4证明

- 由§1.3知$\{X_t\}$是零均值平稳列，自协方差函数为(3.5)。
- 只要证明$\{X_t\}$是正态序列，只要证明$\forall m \in \mathbb{N}_+$，$\mathbf{X} = (X_{-m}, \dots, X_0, \dots, X_m)^T$服从多元正态分布。要使用定理4.1（多元正态与一元正态关系）和定理4.3（一元正态分布的依分布极限仍为正态分布）。
- 记$\Sigma = (\gamma_{|i-j|})_{i,j=-m,\dots,m}$，来证明$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(0, \Sigma)$。
- 记

$$\eta_t(n) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t = -m, \dots, m$$

这是X_t的部分和。由控制收敛定理可知

$$E|\eta_t(n) - X_t| \le \sum_{|j|>n} |a_j| \sigma \to 0 (n \to \infty)$$

定理4.4证明

- 由§1.3知$\{X_t\}$是零均值平稳列，自协方差函数为(3.5)。
- 只要证明$\{X_t\}$是正态序列，只要证明$\forall m \in \mathbb{N}_+$，$\mathbf{X} = (X_{-m}, \ldots, X_0, \ldots, X_m)^T$服从多元正态分布。要使用定理4.1（多元正态与一元正态关系）和定理4.3（一元正态分布的依分布极限仍为正态分布）。
- 记$\Sigma = (\gamma_{|i-j|})_{i,j=-m,\ldots,m}$，来证明$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(0, \Sigma)$。
- 记

$$\eta_t(n) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t = -m, \ldots, m$$

这是X_t的部分和。由控制收敛定理可知

$$E|\eta_t(n) - X_t| \leq \sum_{|j|>n} |a_j| \sigma \to 0 (n \to \infty)$$

- 对$\forall \mathbf{b} = (b_{-m}, \ldots, b_0, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^{2m+1}$，记

$$Y = \mathbf{b}^T \mathbf{X} = \sum_{t=-m}^{m} b_t X_t$$

$$\eta(n) = \sum_{t=-m}^{m} b_t \eta_t(n)$$

- 则当$n \to \infty$时

$$E|\eta(n) - Y| \le \sum_{t=-m}^{m} |b_t| \cdot E|\eta_t(n) - X_t| \to 0$$

- 即$\eta(n) \xrightarrow{L_1} Y$，于是$\eta(n) \xrightarrow{d} Y$，由定理4.1知$\eta(n)$服从正态分布，由定理4.3知$Y$服从正态分布，易见$EY = 0$，

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\sum_{t=-m}^{m} b_t X_t) = \mathbf{b}^T \Sigma \mathbf{b}$$

即有$Y \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{b}^T \Sigma \mathbf{b})$，从而由定理4.1可知$\mathbf{X}$服从多元正态分布，从而$\{X_t\}$为正态序列。

- 对$\forall \mathbf{b} = (b_{-m}, \ldots, b_0, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^{2m+1}$，记

$$Y = \mathbf{b}^T\mathbf{X} = \sum_{t=-m}^{m} b_t X_t$$

$$\eta(n) = \sum_{t=-m}^{m} b_t \eta_t(n)$$

- 则当$n \to \infty$时

$$E|\eta(n) - Y| \leq \sum_{t=-m}^{m} |b_t| \cdot E|\eta_t(n) - X_t| \to 0$$

- 即$\eta(n) \xrightarrow{L_1} Y$，于是$\eta(n) \xrightarrow{d} Y$，由定理4.1知$\eta(n)$服从正态分布，由定理4.3知$Y$服从正态分布，易见$EY = 0$,

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\sum_{t=-m}^{m} b_t X_t) = \mathbf{b}^T \Sigma \mathbf{b}$$

即有$Y \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{b}^T\Sigma\mathbf{b})$，从而由定理4.1可知$\mathbf{X}$服从多元正态分布，从而$\{X_t\}$为正态序列。

- 对$\forall \mathbf{b} = (b_{-m}, \dots, b_0, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^{2m+1}$，记

$$Y = \mathbf{b}^T \mathbf{X} = \sum_{t=-m}^{m} b_t X_t$$

$$\eta(n) = \sum_{t=-m}^{m} b_t \eta_t(n)$$

- 则当$n \to \infty$时

$$E|\eta(n) - Y| \le \sum_{t=-m}^{m} |b_t| \cdot E|\eta_t(n) - X_t| \to 0$$

- 即$\eta(n) \xrightarrow{L_1} Y$，于是$\eta(n) \xrightarrow{d} Y$，由定理4.1知$\eta(n)$服从正态分布，由定理4.3知$Y$服从正态分布，易见$EY = 0$，

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\sum_{t=-m}^{m} b_t X_t) = \mathbf{b}^T \Sigma \mathbf{b}$$

即有$Y \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{b}^T \Sigma \mathbf{b})$，从而由定理4.1可知$\mathbf{X}$服从多元正态分布，从而$\{X_t\}$为正态序列。

严平稳序列

- 随机向量同分布：联合分布函数相同。
- 时间序列$\{X_t\}$与$\{Y_t\}$同分布：$\forall n \in \mathbb{N}_+$和$t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$, $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$与$(Y(t_1), \dots, Y(t_n))^T$同分布。
- 严平稳：$\{X_t\}$对$\forall n \in \mathbb{N}_+$和$k \in \mathbb{Z}$都有

$$(X_1, X_2, \dots, X_n)^T \text{ 和 } (X_{1+k}, X_{2+k}, \dots, X_{n+k})^T \text{ 同分布.}$$

- 即：分布平移不变。
- 对任多元函数$\phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 有

$$\{Y_t = \phi(X_{t+1}, \dots, X_{t+m}),\ t \in \mathbb{Z}\}$$

仍是严平稳列。

严平稳序列

- 随机向量同分布：联合分布函数相同。
- 时间序列$\{X_t\}$与$\{Y_t\}$同分布：$\forall n \in \mathbb{N}_+$和$t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$，$(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T$与$(Y(t_1), \ldots, Y(t_n))^T$同分布。
- 严平稳：$\{X_t\}$对$\forall n \in \mathbb{N}_+$和$k \in \mathbb{Z}$都有

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)^T \text{ 和 } (X_{1+k}, X_{2+k}, \ldots, X_{n+k})^T \text{ 同分布.}$$

- 即：分布平移不变。
- 对任多元函数$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 有

$$\{Y_t = \phi(X_{t+1}, \ldots, X_{t+m}),\ t \in \mathbb{Z}\}$$

仍是严平稳列。

严平稳序列

- 随机向量同分布：联合分布函数相同。
- 时间序列$\{X_t\}$与$\{Y_t\}$同分布：$\forall n \in \mathbb{N}_+$和$t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$, $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$与$(Y(t_1), \dots, Y(t_n))^T$同分布。
- 严平稳：$\{X_t\}$对$\forall n \in \mathbb{N}_+$和$k \in \mathbb{Z}$都有

$$(X_1, X_2, \dots, X_n)^T \text{ 和 } (X_{1+k}, X_{2+k}, \dots, X_{n+k})^T \text{ 同分布.}$$

- 即：分布平移不变。
- 对任多元函数$\phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 有

$$\{Y_t = \phi(X_{t+1}, \dots, X_{t+m}),\ t \in \mathbb{Z}\}$$

仍是严平稳列。

严平稳序列

- 随机向量同分布：联合分布函数相同。
- 时间序列$\{X_t\}$与$\{Y_t\}$同分布：$\forall n \in \mathbb{N}_+$和$t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$, $(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T$与$(Y(t_1), \ldots, Y(t_n))^T$同分布。
- 严平稳：$\{X_t\}$对$\forall n \in \mathbb{N}_+$和$k \in \mathbb{Z}$都有

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)^T \text{ 和 } (X_{1+k}, X_{2+k}, \ldots, X_{n+k})^T \text{ 同分布.}$$

- 即：分布平移不变。
- 对任多元函数$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 有

$$\{Y_t = \phi(X_{t+1}, \ldots, X_{t+m}),\ t \in \mathbb{Z}\}$$

仍是严平稳列。

严平稳序列

- 随机向量同分布：联合分布函数相同。
- 时间序列$\{X_t\}$与$\{Y_t\}$同分布：$\forall n \in \mathbb{N}_+$和$t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$, $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$与$(Y(t_1), \dots, Y(t_n))^T$同分布。
- 严平稳：$\{X_t\}$对$\forall n \in \mathbb{N}_+$和$k \in \mathbb{Z}$都有

$$(X_1, X_2, \dots, X_n)^T \text{ 和 } (X_{1+k}, X_{2+k}, \dots, X_{n+k})^T \text{ 同分布.}$$

- 即：分布平移不变。
- 对任多元函数$\phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 有

$$\{Y_t = \phi(X_{t+1}, \dots, X_{t+m}),\ t \in \mathbb{Z}\}$$

仍是严平稳列。

严平稳与宽平稳

- 二阶矩有限的严平稳为宽平稳。
- 宽平稳一般不是严平稳。
- 正态平稳列既是宽平稳也是严平稳。
- 平稳序列=宽平稳序列=弱平稳序列。
- 严平稳序列=强平稳序列。

严平稳与宽平稳

- 二阶矩有限的严平稳为宽平稳。
- 宽平稳一般不是严平稳。
- 正态平稳列既是宽平稳也是严平稳。
- 平稳序列=宽平稳序列=弱平稳序列。
- 严平稳序列=强平稳序列。

严平稳与宽平稳

- 二阶矩有限的严平稳为宽平稳。
- 宽平稳一般不是严平稳。
- 正态平稳列既是宽平稳也是严平稳。
- 平稳序列=宽平稳序列=弱平稳序列。
- 严平稳序列=强平稳序列。

严平稳与宽平稳

- 二阶矩有限的严平稳为宽平稳。
- 宽平稳一般不是严平稳。
- 正态平稳列既是宽平稳也是严平稳。
- 平稳序列=宽平稳序列=弱平稳序列。
- 严平稳序列=强平稳序列。

严平稳与宽平稳

- 二阶矩有限的严平稳为宽平稳。
- 宽平稳一般不是严平稳。
- 正态平稳列既是宽平稳也是严平稳。
- 平稳序列=宽平稳序列=弱平稳序列。
- 严平稳序列=强平稳序列。

遍历性

- 时间序列一般只有一条轨道。
- 要用时间序列$\{X_t\}$的一次实现$x_1, x_2, \dots$推断$\{X_t(\omega), t \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}$的统计性质.
- 遍历性可以保证从一条轨道可以推断整体的统计性质。
- 如果严平稳序列是遍历的，从它的一次实现$x_1, x_2, \dots$ 就可以推断出这个严平稳序列的所有有限维分布:

$$
\begin{aligned}
&F(x_1, x_2, \dots, x_m) \\
=&P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_m \le x_m), \quad m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

有遍历性的严平稳序列被称作严平稳遍历序列.
- 严平稳遍历的严格定义依赖于用测度论叙述的保测变换、不变集、不变随机变量概念，详见王梓坤《随机过程通论》第197–204页（北京师范大学出版社，1996）。

遍历性

- 时间序列一般只有一条轨道。
- 要用时间序列$\{X_t\}$的一次实现$x_1, x_2, \ldots$推断$\{X_t(\omega), t \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}$的统计性质.
- 遍历性可以保证从一条轨道可以推断整体的统计性质。
- 如果严平稳序列是遍历的，从它的一次实现$x_1, x_2, \ldots$ 就可以推断出这个严平稳序列的所有有限维分布:

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ = & P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_m \le x_m), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

  有遍历性的严平稳序列被称作严平稳遍历序列.
- 严平稳遍历的严格定义依赖于用测度论叙述的保测变换、不变集、不变随机变量概念，详见王梓坤《随机过程通论》第197–204页（北京师范大学出版社，1996）。

遍历性

- 时间序列一般只有一条轨道。
- 要用时间序列$\{X_t\}$的一次实现$x_1, x_2, \ldots$推断$\{X_t(\omega), t \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}$的统计性质.
- 遍历性可以保证从一条轨道可以推断整体的统计性质。
- 如果严平稳序列是遍历的, 从它的一次实现$x_1, x_2, \ldots$ 就可以推断出这个严平稳序列的所有有限维分布:

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ = & P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_m \le x_m), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

  有遍历性的严平稳序列被称作严平稳遍历序列.
- 严平稳遍历的严格定义依赖于用测度论叙述的保测变换、不变集、不变随机变量概念，详见王梓坤《随机过程通论》第197–204页（北京师范大学出版社，1996）。

遍历性

- 时间序列一般只有一条轨道。
- 要用时间序列$\{X_t\}$的一次实现$x_1, x_2, \ldots$推断$\{X_t(\omega), t \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}$的统计性质.
- 遍历性可以保证从一条轨道可以推断整体的统计性质。
- 如果严平稳序列是遍历的，从它的一次实现$x_1, x_2, \ldots$ 就可以推断出这个严平稳序列的所有有限维分布:

$$
\begin{aligned}
&F(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\
=&P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_m \le x_m), \quad m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

  有遍历性的严平稳序列被称作严平稳遍历序列.
- 严平稳遍历的严格定义依赖于用测度论叙述的保测变换、不变集、不变随机变量概念，详见王梓坤《随机过程通论》第197–204页（北京师范大学出版社，1996）。

遍历性

- 时间序列一般只有一条轨道。
- 要用时间序列$\{X_t\}$的一次实现$x_1, x_2, \ldots$推断$\{X_t(\omega), t \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}$的统计性质.
- 遍历性可以保证从一条轨道可以推断整体的统计性质。
- 如果严平稳序列是遍历的，从它的一次实现$x_1, x_2, \ldots$ 就可以推断出这个严平稳序列的所有有限维分布:

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ = & P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_m \le x_m), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

  有遍历性的严平稳序列被称作严平稳遍历序列.
- 严平稳遍历的严格定义依赖于用测度论叙述的保测变换、不变集、不变随机变量概念，详见王梓坤《随机过程通论》第197–204页（北京师范大学出版社，1996）。

遍历定理

定理5.1 如果$\{X_t\}$是严平稳遍历序列, 则有如下的结果:

1. 强大数律: 如果$E|X_1| < \infty$ 则
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_t = EX_1, a.s..$$
2. 对任何多元函数$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$,
$$Y_t = \phi(X_{t+1}, X_{t+2}, \cdots, X_{t+m})$$
是严平稳遍历序列.

线性平稳列的遍历定理

- **定理5.2** 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$，实数列$\{a_j\}$平方可和，则线性平稳序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

是严平稳遍历的。

- 这说明在独立白噪声条件下线性平稳列满足严平稳遍历条件。

线性平稳列的遍历定理

- **定理5.2** 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的$\mathrm{WN}(0,\sigma^2)$，实数列$\{a_j\}$平方可和，则线性平稳序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

是严平稳遍历的。
- 这说明在独立白噪声条件下线性平稳列满足严平稳遍历条件。

- 例5.1 对严平稳序列$\{X_t\}$，定义严平稳序列

$$\begin{aligned}Y_t =&I[X(t+t_1)\le y_1, X(t+t_2)\le y_2,\cdots,X(t+t_m)\le y_m],\\ &t\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- 这里$I[A]$是事件A的示性函数.
- 如果$\{X_t\}$是遍历的，由定理5.1 的(2)知道$\{Y_t\}$也是遍历的，并且有界.
- 利用定理5.1 的(1)(强大数律)得到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Y_t = EY_0\\ =&P(X(t_1)\le y_1, X(t_2)\le y_2,\cdots,X(t_m)\le y_m),\ a.s..\end{aligned}$$

- 这个例子说明，在几乎必然的意义下，$\{X_t\}$的每一次观测都可以决定$\{X_t\}$的有限维分布.

- 例5.1 对严平稳序列$\{X_t\}$，定义严平稳序列

$$Y_t = I[X(t+t_1)\le y_1, X(t+t_2)\le y_2, \cdots, X(t+t_m)\le y_m],\quad t\in\mathbb{Z}.$$

- 这里$I[A]$是事件A的示性函数.
- 如果$\{X_t\}$是遍历的，由定理5.1 的(2)知道$\{Y_t\}$也是遍历的，并且有界.
- 利用定理5.1 的(1)(强大数律)得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t = EY_0$$
$$= P(X(t_1)\le y_1, X(t_2)\le y_2, \cdots, X(t_m)\le y_m),\ a.s..$$

- 这个例子说明，在几乎必然的意义下，$\{X_t\}$的每一次观测都可以决定$\{X_t\}$的有限维分布.

- 例5.1 对严平稳序列$\{X_t\}$，定义严平稳序列

$$
\begin{aligned}
Y_t =& I[X(t+t_1) \le y_1, X(t+t_2) \le y_2, \cdots, X(t+t_m) \le y_m], \\
& t \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

- 这里$I[A]$是事件A的示性函数.
- 如果$\{X_t\}$是遍历的, 由定理5.1 的(2)知道$\{Y_t\}$也是遍历的, 并且有界.
- 利用定理5.1 的(1)(强大数律)得到

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t = EY_0 \\
=& P(X(t_1) \le y_1, X(t_2) \le y_2, \cdots, X(t_m) \le y_m), \ a.s..
\end{aligned}
$$

- 这个例子说明, 在几乎必然的意义下, $\{X_t\}$的每一次观测都可以决定$\{X_t\}$的有限维分布.

- 例5.1 对严平稳序列$\{X_t\}$，定义严平稳序列

$$Y_t = I[X(t+t_1) \le y_1, X(t+t_2) \le y_2, \cdots, X(t+t_m) \le y_m], \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- 这里$I[A]$是事件A的示性函数.
- 如果$\{X_t\}$是遍历的，由定理5.1 的(2)知道$\{Y_t\}$也是遍历的，并且有界.
- 利用定理5.1 的(1)(强大数律)得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t = EY_0$$
$$= P(X(t_1) \le y_1, X(t_2) \le y_2, \cdots, X(t_m) \le y_m), \quad a.s..$$

- 这个例子说明，在几乎必然的意义下，$\{X_t\}$的每一次观测都可以决定$\{X_t\}$的有限维分布.

- 例5.1 对严平稳序列$\{X_t\}$，定义严平稳序列

$$
\begin{aligned}
Y_t =& I[X(t+t_1) \le y_1, X(t+t_2) \le y_2, \cdots, X(t+t_m) \le y_m], \\
& t \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

- 这里$I[A]$是事件A的示性函数.
- 如果$\{X_t\}$是遍历的，由定理5.1 的(2)知道$\{Y_t\}$也是遍历的，并且有界.
- 利用定理5.1 的(1)(强大数律)得到

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t = EY_0 \\
=& P(X(t_1) \le y_1, X(t_2) \le y_2, \cdots, X(t_m) \le y_m), \ a.s..
\end{aligned}
$$

- 这个例子说明，在几乎必然的意义下，$\{X_t\}$的每一次观测都可以决定$\{X_t\}$的有限维分布.

平稳列导出的线性空间

- 设$\{X_t\}$是平稳序列。令

$$L^2(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j X(t_j) | a_j \in \mathbb{R}, t_j \in \mathbb{Z}, 1 \le j \le k, k \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- $\forall X, Y, Z \in L^2(X), a, b \in \mathbb{R}$有
  1. $X + Y = Y + X \in L^2(X)$, $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$;
  2. $0 \in L^2(X)$, $X + 0 = X$, $X + (-X) = 0 \in L^2(X)$;
  3. $a(X + Y) = aX + aY \in L^2(X)$, $(a + b)X = aX + bX$, $a(bX) = (ab)X$.
- 即$L^2(X)$是一个线性空间。

平稳列导出的线性空间

- 设$\{X_t\}$是平稳序列。令

$$L^2(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j X(t_j) | a_j \in \mathbb{R}, t_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq k, k \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- $\forall X, Y, Z \in L^2(X), a, b \in \mathbb{R}$有
  1. $X + Y = Y + X \in L^2(X)$, $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$;
  2. $0 \in L^2(X)$, $X + 0 = X$, $X + (-X) = 0 \in L^2(X)$;
  3. $a(X + Y) = aX + aY \in L^2(X)$, $(a + b)X = aX + bX$, $a(bX) = (ab)X$.
- 即$L^2(X)$是一个线性空间。

平稳列导出的线性空间

- 设$\{X_t\}$是平稳序列。令

$$L^2(X)=\left\{\sum_{j=1}^{k}a_jX(t_j)|a_j\in\mathbb{R},t_j\in\mathbb{Z},1\le j\le k,k\in\mathbb{N}_+\right\}$$

- $\forall X,Y,Z\in L^2(X),a,b\in\mathbb{R}$有
  1. $X+Y=Y+X\in L^2(X)$, $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$;
  2. $0\in L^2(X)$, $X+0=X$, $X+(-X)=0\in L^2(X)$;
  3. $a(X+Y)=aX+aY\in L^2(X)$, $(a+b)X=aX+bX$, $a(bX)=(ab)X$.
- 即$L^2(X)$是一个线性空间。

平稳列导出的线性空间

- 设$\{X_t\}$是平稳序列。令

$$L^2(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j X(t_j) | a_j \in \mathbb{R}, t_j \in \mathbb{Z}, 1 \le j \le k, k \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- $\forall X, Y, Z \in L^2(X), a, b \in \mathbb{R}$有
  1. $X + Y = Y + X \in L^2(X)$, $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$;
  2. $0 \in L^2(X)$, $X + 0 = X$, $X + (-X) = 0 \in L^2(X)$;
  3. $a(X + Y) = aX + aY \in L^2(X)$, $(a + b)X = aX + bX$, $a(bX) = (ab)X$.
- 即$L^2(X)$是一个线性空间。

平稳列导出的线性空间

- 设$\{X_t\}$是平稳序列。令

$$L^2(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j X(t_j) | a_j \in \mathbb{R}, t_j \in \mathbb{Z}, 1 \le j \le k, k \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- $\forall X, Y, Z \in L^2(X), a, b \in \mathbb{R}$有
  1. $X + Y = Y + X \in L^2(X)$, $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$;
  2. $0 \in L^2(X)$, $X + 0 = X$, $X + (-X) = 0 \in L^2(X)$;
  3. $a(X + Y) = aX + aY \in L^2(X)$, $(a + b)X = aX + bX$, $a(bX) = (ab)X$.
- 即$L^2(X)$是一个线性空间。

平稳列导出的线性空间

- 设$\{X_t\}$是平稳序列。令

$$L^2(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j X(t_j) | a_j \in \mathbb{R}, t_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq k, k \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- $\forall X, Y, Z \in L^2(X), a, b \in \mathbb{R}$有
  1. $X + Y = Y + X \in L^2(X)$, $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$;
  2. $0 \in L^2(X)$, $X + 0 = X$, $X + (-X) = 0 \in L^2(X)$;
  3. $a(X + Y) = aX + aY \in L^2(X)$, $(a + b)X = aX + bX$, $a(bX) = (ab)X$.
- 即$L^2(X)$是一个线性空间。

$L^2(X)$的内积

- 定义$\langle X, Y\rangle = E(XY)$,
- 则

$$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle$$
$$\langle aX + bY, Z\rangle = a\langle X, Z\rangle + b\langle Y, Z\rangle$$

- $\langle X, X\rangle \geq 0$, 并且$\langle X, X\rangle = 0$当且仅当$X = 0$, a.s., 所以$L^2(X)$ 又是内积空间.
- 内积有Schwarz不等式(习题6.2)

$$| < X, Y > | \leq [< X, X >< Y, Y >]^{1/2}$$

- 但我们还需要对无穷线性组合的封闭性。需要极限的概念。

$L^2(X)$的内积

- 定义$\langle X, Y\rangle = E(XY)$，
- 则

$$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle$$
$$\langle aX + bY, Z\rangle = a\langle X, Z\rangle + b\langle Y, Z\rangle$$

- $\langle X, X\rangle \geq 0$, 并且$\langle X, X\rangle = 0$当且仅当$X = 0$, a.s., 所以$L^2(X)$ 又是内积空间.
- 内积有Schwarz不等式(习题6.2)

$$| < X, Y > | \leq [< X, X >< Y, Y >]^{1/2}$$

- 但我们还需要对无穷线性组合的封闭性。需要极限的概念。

$L^2(X)$的内积

- 定义$\langle X, Y\rangle = E(XY)$，
- 则

$$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle$$
$$\langle aX + bY, Z\rangle = a\langle X, Z\rangle + b\langle Y, Z\rangle$$

- $\langle X, X\rangle \geq 0$, 并且$\langle X, X\rangle = 0$当且仅当$X = 0$, a.s., 所以$L^2(X)$ 又是内积空间.
- 内积有Schwarz不等式(习题6.2)

$$| < X, Y > | \leq [< X, X >< Y, Y >]^{1/2}$$

- 但我们还需要对无穷线性组合的封闭性。需要极限的概念。

$L^2(X)$的内积

- 定义$\langle X, Y\rangle = E(XY)$，
- 则

$$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle$$
$$\langle aX + bY, Z\rangle = a\langle X, Z\rangle + b\langle Y, Z\rangle$$

- $\langle X, X\rangle \geq 0$, 并且$\langle X, X\rangle = 0$当且仅当$X = 0$, a.s., 所以$L^2(X)$ 又是内积空间.
- 内积有Schwarz不等式(习题6.2)

$$| < X, Y > | \leq [< X, X >< Y, Y >]^{1/2}$$

- 但我们还需要对无穷线性组合的封闭性。需要极限的概念。

$L^2(X)$的内积

- 定义$\langle X, Y\rangle = E(XY)$，
- 则

$$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle$$
$$\langle aX + bY, Z\rangle = a\langle X, Z\rangle + b\langle Y, Z\rangle$$

- $\langle X, X\rangle \geq 0$, 并且$\langle X, X\rangle = 0$当且仅当$X = 0$, a.s., 所以$L^2(X)$ 又是内积空间.
- 内积有Schwarz不等式(习题6.2)

$$| < X, Y > | \leq [< X, X >< Y, Y >]^{1/2}$$

- 但我们还需要对无穷线性组合的封闭性。需要极限的概念。

$L^2(X)$上的距离

- 定义模
$$\|X\| = (\langle X, X\rangle)^{1/2}$$
- 距离
$$\|X-Y\| = (\langle X-Y, X-Y\rangle)^{1/2}$$
- 则$\|X-Y\| = \|Y-X\| \geq 0$，且$\|X-Y\| = 0$当且仅当$X = Y$, a.s.
- Schwarz不等式可以写成
$$|<X, Y>| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$
- 三角不等式(用Schwarz不等式可证明)：
$$\|X-Y\| \leq \|X-Z\| + \|Z-Y\|$$
- $L^2 = \{Y : \mathrm{E}Y^2 < \infty\}$也是内积空间和距离空间，$L^2(X)$是$L^2$的子空间。

$L^2(X)$上的距离

- 定义模
$$\|X\| = (\langle X, X\rangle)^{1/2}$$
- 距离
$$\|X - Y\| = (\langle X - Y, X - Y\rangle)^{1/2}$$
- 则$\|X - Y\| = \|Y - X\| \geq 0$, 且$\|X - Y\| = 0$当且仅当$X = Y$, a.s.
- Schwarz不等式可以写成
$$|< X, Y >| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$
- 三角不等式(用Schwarz不等式可证明):
$$\|X - Y\| \leq \|X - Z\| + \|Z - Y\|$$
- $L^2 = \{Y : \mathrm{E}Y^2 < \infty\}$也是内积空间和距离空间，$L^2(X)$是$L^2$的子空间。

$L^2(X)$上的距离

- 定义模
$$\|X\| = (\langle X, X\rangle)^{1/2}$$
- 距离
$$\|X - Y\| = (\langle X - Y, X - Y\rangle)^{1/2}$$
- 则$\|X - Y\| = \|Y - X\| \geq 0$, 且$\|X - Y\| = 0$当且仅当$X = Y$, a.s.
- Schwarz不等式可以写成
$$|< X, Y >| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$
- 三角不等式(用Schwarz不等式可证明):
$$\|X - Y\| \leq \|X - Z\| + \|Z - Y\|$$
- $L^2 = \{Y : \mathrm{E}Y^2 < \infty\}$也是内积空间和距离空间，$L^2(X)$是$L^2$的子空间。

$L^2(X)$上的距离

- 定义模
$$\|X\| = (\langle X, X \rangle)^{1/2}$$
- 距离
$$\|X - Y\| = (\langle X - Y, X - Y \rangle)^{1/2}$$
- 则$\|X - Y\| = \|Y - X\| \geq 0$, 且$\|X - Y\| = 0$当且仅当$X = Y$, a.s.
- Schwarz不等式可以写成
$$| < X, Y > | \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$
- 三角不等式(用Schwarz不等式可证明):
$$\|X - Y\| \leq \|X - Z\| + \|Z - Y\|$$
- $L^2 = \{Y : \mathrm{E}Y^2 < \infty\}$也是内积空间和距离空间，$L^2(X)$是$L^2$的子空间。

$L^2(X)$上的距离

- 定义模
$$\|X\| = (\langle X, X\rangle)^{1/2}$$
- 距离
$$\|X-Y\| = (\langle X-Y, X-Y\rangle)^{1/2}$$
- 则$\|X-Y\| = \|Y-X\| \geq 0$，且$\|X-Y\| = 0$当且仅当$X = Y$, a.s.
- Schwarz不等式可以写成
$$|<X, Y>| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$
- 三角不等式(用Schwarz不等式可证明)：
$$\|X-Y\| \leq \|X-Z\| + \|Z-Y\|$$
- $L^2 = \{Y : \mathrm{E}Y^2 < \infty\}$也是内积空间和距离空间，$L^2(X)$是$L^2$的子空间。

$L^2(X)$上的距离

- 定义模
$$\|X\| = (\langle X, X\rangle)^{1/2}$$
- 距离
$$\|X - Y\| = (\langle X - Y, X - Y\rangle)^{1/2}$$
- 则$\|X - Y\| = \|Y - X\| \geq 0$，且$\|X - Y\| = 0$当且仅当$X = Y$, a.s.
- Schwarz不等式可以写成
$$| < X, Y > | \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$
- 三角不等式(用Schwarz不等式可证明)：
$$\|X - Y\| \leq \|X - Z\| + \|Z - Y\|$$
- $L^2 = \{Y : \mathrm{E}Y^2 < \infty\}$也是内积空间和距离空间，$L^2(X)$是$L^2$的子空间。

L^2中的极限

- 对有限维空间，定义了内积已经足够。
- 对无穷维空间，要考虑极限问题。
- **定义6.1** 对$\xi_n \in L^2$, $\xi_0 \in L^2$:
  - (1) 如果$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi_0\| = 0$, 则称$\xi_n$在$L^2$中(或均方)收敛到$\xi_0$, 记做$\xi_n \xrightarrow{\text{m.s.}} \xi_0$或$\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi_0$.
  - (2) 如果当n, $m \to \infty$时, $\|\xi_n - \xi_m\| \to 0$, 则称$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列或Cauchy列.

L^2中的极限

- 对有限维空间，定义了内积已经足够。
- 对无穷维空间，要考虑极限问题。
- **定义6.1** 对$\xi_n \in L^2$, $\xi_0 \in L^2$:
  - (1) 如果$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi_0\| = 0$, 则称$\xi_n$在$L^2$中(或均方)收敛到$\xi_0$, 记做$\xi_n \xrightarrow{\text{m.s.}} \xi_0$或$\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi_0$.
  - (2) 如果当n, $m \to \infty$时, $\|\xi_n - \xi_m\| \to 0$, 则称$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列或Cauchy列.

L^2中的极限

- 对有限维空间，定义了内积已经足够。
- 对无穷维空间，要考虑极限问题。
- **定义6.1** 对$\xi_n \in L^2$, $\xi_0 \in L^2$:
  - (1) 如果$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi_0\| = 0$, 则称$\xi_n$在$L^2$中(或均方)收敛到$\xi_0$, 记做$\xi_n \stackrel{\text{m.s.}}{\to} \xi_0$或$\xi_n \stackrel{L^2}{\to} \xi_0$.
  - (2) 如果当n, $m \to \infty$时, $\|\xi_n - \xi_m\| \to 0$, 则称$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列或Cauchy列.

L^2中的极限

- 对有限维空间，定义了内积已经足够。
- 对无穷维空间，要考虑极限问题。
- **定义6.1** 对$\xi_n \in L^2$, $\xi_0 \in L^2$:
  - (1) 如果$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi_0\| = 0$, 则称$\xi_n$在$L^2$中(或均方)收敛到$\xi_0$, 记做$\xi_n \xrightarrow{\text{m.s.}} \xi_0$或$\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi_0$.
  - (2) 如果当n, $m \to \infty$时, $\|\xi_n - \xi_m\| \to 0$, 则称$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列或Cauchy列.

L^2中的极限

- 对有限维空间，定义了内积已经足够。
- 对无穷维空间，要考虑极限问题。
- **定义6.1** 对$\xi_n \in L^2$, $\xi_0 \in L^2$:
  - (1) 如果$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi_0\| = 0$, 则称$\xi_n$在$L^2$中(或均方)收敛到$\xi_0$, 记做$\xi_n \overset{\text{m.s.}}{\to} \xi_0$或$\xi_n \overset{L^2}{\to} \xi_0$.
  - (2) 如果当n, $m \to \infty$时, $\|\xi_n - \xi_m\| \to 0$, 则称$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列或Cauchy列.

Hilbert空间

- **定理6.1** 如果$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列, 则(在a.s.的意义下)有惟一的$\xi \in L^2$使得$\xi_n \xrightarrow{\text{m.s.}} \xi$.
- 证明略。（同学们自学）
- 完备的内积空间: 每个基本列都有极限在空间内的内积空间。又称Hilbert空间。
- L^2是Hilbert空间。
- 用$\overline{L}^2(X)$表示L^2中包含$L^2(X)$的最小闭子空间，则$\overline{L}^2(X)$ 是Hilbert空间，称为由平稳序列$\{X_t\}$生成的Hilbert空间。

Hilbert空间

- **定理6.1** 如果$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列, 则(在a.s.的意义下)有惟一的$\xi \in L^2$使得$\xi_n \overset{m.s.}{\to} \xi$.
- 证明略。（同学们自学）
- 完备的内积空间: 每个基本列都有极限在空间内的内积空间。又称Hilbert空间。
- L^2是Hilbert空间。
- 用$\overline{L}^2(X)$表示L^2中包含$L^2(X)$的最小闭子空间，则$\overline{L}^2(X)$ 是Hilbert空间，称为由平稳序列$\{X_t\}$生成的Hilbert空间。

Hilbert空间

- **定理6.1** 如果$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列，则(在a.s.的意义下)有惟一的$\xi \in L^2$使得$\xi_n \xrightarrow{m.s.} \xi$.
- 证明略。（同学们自学）
- 完备的内积空间：每个基本列都有极限在空间内的内积空间。又称Hilbert空间。
- L^2是Hilbert空间。
- 用$\overline{L}^2(X)$表示L^2中包含$L^2(X)$的最小闭子空间，则$\overline{L}^2(X)$ 是Hilbert空间，称为由平稳序列$\{X_t\}$生成的Hilbert空间。

Hilbert空间

- **定理6.1** 如果$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列，则(在a.s.的意义下)有惟一的$\xi \in L^2$使得$\xi_n \xrightarrow{\text{m.s.}} \xi$.
- 证明略。（同学们自学）
- 完备的内积空间：每个基本列都有极限在空间内的内积空间。又称Hilbert空间。
- L^2是Hilbert空间。
- 用$\overline{L}^2(X)$表示L^2中包含$L^2(X)$的最小闭子空间，则$\overline{L}^2(X)$ 是Hilbert空间，称为由平稳序列$\{X_t\}$生成的Hilbert空间。

Hilbert空间

- **定理6.1** 如果$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列，则(在a.s.的意义下)有惟一的$\xi \in L^2$使得$\xi_n \xrightarrow{\text{m.s.}} \xi$.
- 证明略。（同学们自学）
- 完备的内积空间：每个基本列都有极限在空间内的内积空间。又称Hilbert空间。
- L^2是Hilbert空间。
- 用$\bar{L}^2(X)$表示L^2中包含$L^2(X)$的最小闭子空间，则$\bar{L}^2(X)$ 是Hilbert空间，称为由平稳序列$\{X_t\}$生成的Hilbert空间。

内积的连续性

- **定理6.2** (内积的连续性) 在内积空间中，如果$\|\xi_n - \xi\| \to 0$, $\|\eta_n - \eta\| \to 0$ 则有
  (1) $\|\xi_n\| \to \|\xi\|$,
  (2) $\langle \xi_n, \eta_n \rangle \to \langle \xi, \eta \rangle$.
- 注意：由(2)当然有

$$\langle \xi_n, \eta \rangle \to \langle \xi, \eta \rangle$$

内积的连续性

- **定理6.2** (内积的连续性) 在内积空间中，如果$\|\xi_n - \xi\| \to 0$, $\|\eta_n - \eta\| \to 0$ 则有

  (1) $\|\xi_n\| \to \|\xi\|$,

  (2) $\langle \xi_n, \eta_n \rangle \to \langle \xi, \eta \rangle$.

- 注意：由(2)当然有

$$\langle \xi_n, \eta \rangle \to \langle \xi, \eta \rangle$$

内积的连续性

- **定理6.2** (内积的连续性) 在内积空间中，如果$\|\xi_n-\xi\|\to 0$, $\|\eta_n-\eta\|\to 0$ 则有
  (1) $\|\xi_n\|\to\|\xi\|$,
  (2) $\langle\xi_n,\eta_n\rangle\to\langle\xi,\eta\rangle$.
- 注意：由(2)当然有

$$\langle\xi_n,\eta\rangle\to\langle\xi,\eta\rangle$$

内积的连续性

- **定理6.2** (内积的连续性) 在内积空间中，如果$\|\xi_n-\xi\|\to 0$, $\|\eta_n-\eta\|\to 0$ 则有
  (1) $\|\xi_n\|\to\|\xi\|$,
  (2) $\langle \xi_n,\eta_n\rangle\to\langle \xi,\eta\rangle$.
- 注意：由(2)当然有

$$\langle \xi_n,\eta\rangle\to\langle \xi,\eta\rangle$$

定理6.2证明

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \big|\,\|\xi_n\| - \|\xi\|\,\big| \\
& \le \|\xi_n - \xi\| \to 0 \ (n \to \infty) \\
(2)\quad & |\langle \xi_n, \eta_n \rangle - \langle \xi, \eta \rangle| \\
& = |\langle \xi_n, \eta_n - \eta \rangle + \langle \xi_n - \xi, \eta \rangle| \\
& \le |\langle \xi_n, \eta_n - \eta \rangle| + |\langle \xi_n - \xi, \eta \rangle| \\
& \le \|\xi_n\| \cdot \|\eta_n - \eta\| + \|\xi_n - \xi\| \cdot \|\eta\| \\
& \to 0 \ (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

例6.1(n维欧式空间)

- $\mathbb{R}^n$是线性空间，定义内积$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ 则为内积空间。
- $\mathbb{R}^n$是完备的内积空间。
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$ 为欧氏模。
- 有限维：由n个元素（n维向量）组成基。

例6.1(n维欧式空间)

- $\mathbb{R}^n$是线性空间，定义内积$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ 则为内积空间。
- $\mathbb{R}^n$是完备的内积空间。
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$ 为欧氏模。
- 有限维：由n个元素（n维向量）组成基。

例6.1(n维欧式空间)

- $\mathbb{R}^n$是线性空间，定义内积$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ 则为内积空间。
- $\mathbb{R}^n$是完备的内积空间。
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$ 为欧氏模。
- 有限维：由n个元素（n维向量）组成基。

例6.1(n维欧式空间)

- $\mathbb{R}^n$是线性空间，定义内积$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ 则为内积空间。
- $\mathbb{R}^n$是完备的内积空间。
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$ 为欧氏模。
- 有限维：由n个元素（n维向量）组成基。

随机变量的n维Hilbert空间

- 设$\{X_t\}$是零均值平稳列，$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$。
- 令$L_n = \mathrm{sp}\{X_1, \ldots, X_n\} = \{\mathbf{a}^T\mathbf{X} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$
- 则L_n是Hilbert空间，称为由$\mathbf{X}$生成的Hilbert空间。
- L_n是线性空间和内积空间易验证，下面证明其完备性。

随机变量的n维Hilbert空间

- 设$\{X_t\}$是零均值平稳列，$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$。
- 令$L_n = \mathrm{sp}\{X_1, \ldots, X_n\} = \{\mathbf{a}^T\mathbf{X} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$
- 则L_n是Hilbert空间，称为由$\mathbf{X}$生成的Hilbert空间。
- L_n是线性空间和内积空间易验证，下面证明其完备性。

随机变量的n维Hilbert空间

- 设$\{X_t\}$是零均值平稳列，$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$。
- 令$L_n = \mathrm{sp}\{X_1, \ldots, X_n\} = \{\mathbf{a}^T\mathbf{X} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$
- 则L_n是Hilbert空间，称为由$\mathbf{X}$生成的Hilbert空间。
- L_n是线性空间和内积空间易验证，下面证明其完备性。

随机变量的n维Hilbert空间

- 设$\{X_t\}$是零均值平稳列，$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$。
- 令$L_n = \text{sp}\{X_1, \ldots, X_n\} = \{\mathbf{a}^T\mathbf{X} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$
- 则L_n是Hilbert空间，称为由$\mathbf{X}$生成的Hilbert空间。
- L_n是线性空间和内积空间易验证，下面证明其完备性。

L_n的完备性证明

- 先设$\{X_t\}$是标准白噪声WN$(0,1)$。
- 对任何线性组合$\xi_k = \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}$, 只要

$$\|\xi_k - \xi_m\|^2 = \|\mathbf{a}_k^T \mathbf{X} - \mathbf{a}_m^T \mathbf{X}\|^2 = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_m)^T (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_m) \to 0,$$

- 由例6.1知道有$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}| \to 0$$

- 当$k \to \infty$, 取$\xi = \mathbf{a}^T \mathbf{X}$ 时,

$$\|\xi_k - \xi\|^2 = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a})^T (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}) \to 0.$$

- 可见$\{X_t\}$是标准白噪声WN$(0,1)$时L_n 是完备的.

L_n的完备性证明

- 先设$\{X_t\}$是标准白噪声WN(0,1)。
- 对任何线性组合$\xi_k = \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}$，只要

$$\|\xi_k - \xi_m\|^2 = \|\mathbf{a}_k^T\mathbf{X} - \mathbf{a}_m^T\mathbf{X}\|^2 = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_m)^T(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_m) \to 0,$$

- 由例6.1知道有$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}| \to 0$$

- 当$k \to \infty$，取$\xi = \mathbf{a}^T\mathbf{X}$ 时，

$$\|\xi_k - \xi\|^2 = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a})^T(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}) \to 0.$$

- 可见$\{X_t\}$是标准白噪声WN(0,1)时L_n 是完备的.

L_n的完备性证明

- 先设$\{X_t\}$是标准白噪声WN$(0,1)$。
- 对任何线性组合$\xi_k = \mathbf{a}_k^T\mathbf{X}$，只要

$$\|\xi_k - \xi_m\|^2 = \|\mathbf{a}_k^T\mathbf{X} - \mathbf{a}_m^T\mathbf{X}\|^2 = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_m)^T(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_m) \to 0,$$

- 由例6.1知道有$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}| \to 0$$

- 当$k \to \infty$，取$\xi = \mathbf{a}^T\mathbf{X}$ 时，

$$\|\xi_k - \xi\|^2 = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a})^T(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}) \to 0.$$

- 可见$\{X_t\}$是标准白噪声WN$(0,1)$时L_n 是完备的.

L_n的完备性证明

- 先设$\{X_t\}$是标准白噪声WN$(0,1)$。
- 对任何线性组合$\xi_k = \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}$, 只要

$$\|\xi_k - \xi_m\|^2 = \|\mathbf{a}_k^T \mathbf{X} - \mathbf{a}_m^T \mathbf{X}\|^2 = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_m)^T (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_m) \to 0,$$

- 由例6.1知道有$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}| \to 0$$

- 当$k \to \infty$, 取$\xi = \mathbf{a}^T \mathbf{X}$ 时,

$$\|\xi_k - \xi\|^2 = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a})^T (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}) \to 0.$$

- 可见$\{X_t\}$是标准白噪声WN$(0,1)$时L_n 是完备的.

L_n的完备性证明

- 先设$\{X_t\}$是标准白噪声WN(0,1)。
- 对任何线性组合$\xi_k = \mathbf{a}_k^T\mathbf{X}$，只要

$$\|\xi_k-\xi_m\|^2 = \|\mathbf{a}_k^T\mathbf{X}-\mathbf{a}_m^T\mathbf{X}\|^2 = (\mathbf{a}_k-\mathbf{a}_m)^T(\mathbf{a}_k-\mathbf{a}_m) \to 0,$$

- 由例6.1知道有$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}| \to 0$$

- 当$k \to \infty$，取$\xi = \mathbf{a}^T\mathbf{X}$ 时，

$$\|\xi_k - \xi\|^2 = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a})^T(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}) \to 0.$$

- 可见$\{X_t\}$是标准白噪声WN(0,1)时L_n 是完备的.

L_n的完备性证明(续)

- 对一般的零均值平稳序列，可以设协方差阵$\Gamma = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$的秩是$m$, $m \le n$.
- 对Γ做特征值分解得

$$\begin{aligned}\Gamma =& P^T \Lambda P \\ \Lambda =& \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}\end{aligned}$$

- 令

$$\begin{aligned}A =& \text{diag}\{\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_m^{-1/2}, 1, \dots, 1\} \triangleq \Lambda^{-1/2} \\ \mathbf{Y} =& AP\mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = P^T A^{-1} \mathbf{Y}\end{aligned}$$

- 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathbf{Y}) =& AP\mathrm{Var}(\mathbf{X})P^T A = APP^T \Lambda PP^T A \\ =& \text{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}\end{aligned}$$

- 因此$Y_1, \dots, Y_m$是某零均值白噪声列的某段。$\mathbf{X}$的线性组合即$Y_1, \dots, Y_m$的线性组合。
- 因此L_n是完备的。

L_n的完备性证明(续)

- 对一般的零均值平稳序列，可以设协方差阵$\Gamma = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$的秩是$m$，$m \leq n$.
- 对Γ做特征值分解得

$$\begin{aligned}\Gamma =& P^T \Lambda P \\ \Lambda =& \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}\end{aligned}$$

- 令

$$\begin{aligned}A =& \mathrm{diag}\{\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_m^{-1/2}, 1, \dots, 1\} \triangleq \Lambda^{-1/2} \\ \mathbf{Y} =& AP\mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = P^T A^{-1} \mathbf{Y}\end{aligned}$$

- 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathbf{Y}) =& AP\mathrm{Var}(\mathbf{X})P^T A = APP^T \Lambda PP^T A \\ =& \mathrm{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}\end{aligned}$$

- 因此$Y_1, \dots, Y_m$是某零均值白噪声列的某段。$\mathbf{X}$的线性组合即$Y_1, \dots, Y_m$的线性组合。
- 因此L_n是完备的。

L_n的完备性证明(续)

- 对一般的零均值平稳序列，可以设协方差阵$\Gamma = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$的秩是$m$, $m \leq n$.
- 对Γ做特征值分解得

$$\begin{aligned}\Gamma =& P^T \Lambda P \\ \Lambda =& \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}\end{aligned}$$

- 令

$$\begin{aligned}A =& \mathrm{diag}\{\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_m^{-1/2}, 1, \dots, 1\} \triangleq \Lambda^{-1/2} \\ \mathbf{Y} =& AP\mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = P^T A^{-1} \mathbf{Y}\end{aligned}$$

- 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathbf{Y}) =& AP\mathrm{Var}(\mathbf{X})P^T A = APP^T \Lambda PP^T A \\ =& \mathrm{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}\end{aligned}$$

- 因此$Y_1, \dots, Y_m$是某零均值白噪声列的某段。$\mathbf{X}$的线性组合即$Y_1, \dots, Y_m$的线性组合。
- 因此L_n是完备的。

L_n的完备性证明(续)

- 对一般的零均值平稳序列，可以设协方差阵$\Gamma = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$的秩是$m$，$m \leq n$.
- 对Γ做特征值分解得

$$
\begin{aligned}
\Gamma =& P^T \Lambda P \\
\Lambda =& \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}
\end{aligned}
$$

- 令

$$
\begin{aligned}
A =& \mathrm{diag}\{\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_m^{-1/2}, 1, \dots, 1\} \triangleq \Lambda^{-1/2} \\
\mathbf{Y} =& AP\mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = P^T A^{-1} \mathbf{Y}
\end{aligned}
$$

- 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathbf{Y}) =& AP\mathrm{Var}(\mathbf{X})P^T A = APP^T \Lambda PP^T A \\
=& \mathrm{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}
\end{aligned}
$$

- 因此$Y_1, \dots, Y_m$是某零均值白噪声列的某段。$\mathbf{X}$的线性组合即$Y_1, \dots, Y_m$的线性组合。
- 因此L_n是完备的。

L_n的完备性证明(续)

- 对一般的零均值平稳序列，可以设协方差阵$\Gamma = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$的秩是$m$，$m \leq n$.
- 对Γ做特征值分解得

$$\begin{aligned}\Gamma =& P^T \Lambda P \\ \Lambda =& \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}\end{aligned}$$

- 令

$$\begin{aligned}A =& \mathrm{diag}\{\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_m^{-1/2}, 1, \dots, 1\} \triangleq \Lambda^{-1/2} \\ \mathbf{Y} =& AP\mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = P^T A^{-1} \mathbf{Y}\end{aligned}$$

- 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathbf{Y}) =& AP\mathrm{Var}(\mathbf{X})P^T A = APP^T \Lambda PP^T A \\ =& \mathrm{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}\end{aligned}$$

- 因此$Y_1, \dots, Y_m$是某零均值白噪声列的某段。$\mathbf{X}$的线性组合即$Y_1, \dots, Y_m$的线性组合。
- 因此L_n是完备的。

L_n的完备性证明(续)

- 对一般的零均值平稳序列，可以设协方差阵$\Gamma = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$的秩是$m$, $m \le n$.
- 对Γ做特征值分解得

$$
\begin{aligned}
\Gamma =& P^T \Lambda P \\
\Lambda =& \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}
\end{aligned}
$$

- 令

$$
\begin{aligned}
A =& \mathrm{diag}\{\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_m^{-1/2}, 1, \dots, 1\} \triangleq \Lambda^{-1/2} \\
\mathbf{Y} =& AP\mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = P^T A^{-1} \mathbf{Y}
\end{aligned}
$$

- 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathbf{Y}) =& AP\mathrm{Var}(\mathbf{X})P^T A = APP^T \Lambda PP^T A \\
=& \mathrm{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}
\end{aligned}
$$

- 因此$Y_1, \dots, Y_m$是某零均值白噪声列的某段。$\mathbf{X}$的线性组合即$Y_1, \dots, Y_m$的线性组合。
- 因此L_n是完备的。

L^2意义下的线性序列

- 考虑L^2中的零均值白噪声列$\{\varepsilon_t\}$，设$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$.
- 设$\{a_j\} \in l_2$.
- 令

$$\xi_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

- 则$\xi_n(t) \in L^2$。对$m < n$，当$m \to \infty$时

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \|\sum_{m<|j|\le n} a_j \varepsilon_{t-j}\|^2$$
$$= \sigma^2 \sum_{m<|j|\le n} a_j^2 \le \sigma^2 \sum_{|j|>m} a_j^2 \to 0$$

- 由L^2完备性知存在$X_t \in L^2$使得$\xi_n(t) \xrightarrow{\text{m.s.}} X_t$。

L^2意义下的线性序列

- 考虑L^2中的零均值白噪声列$\{\varepsilon_t\}$, 设$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$.
- 设$\{a_j\} \in l_2$.
- 令

$$\xi_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{t-j}, \ t \in \mathbb{Z}$$

- 则$\xi_n(t) \in L^2$。对$m < n$，当$m \to \infty$时

$$\begin{aligned} \|\xi_n - \xi_m\|^2 =& \| \sum_{m<|j|\le n} a_j \varepsilon_{t-j} \|^2 \\ =& \sigma^2 \sum_{m<|j|\le n} a_j^2 \le \sigma^2 \sum_{|j|>m} a_j^2 \to 0 \end{aligned}$$

- 由L^2完备性知存在$X_t \in L^2$使得$\xi_n(t) \overset{\text{m.s.}}{\to} X_t$。

L^2意义下的线性序列

- 考虑L^2中的零均值白噪声列$\{\varepsilon_t\}$，设$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$.
- 设$\{a_j\} \in l_2$.
- 令
$$\xi_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{t-j}, \ t \in \mathbb{Z}$$
- 则$\xi_n(t) \in L^2$。对$m < n$，当$m \to \infty$时
$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \|\sum_{m<|j|\le n} a_j \varepsilon_{t-j}\|^2$$
$$= \sigma^2 \sum_{m<|j|\le n} a_j^2 \le \sigma^2 \sum_{|j|>m} a_j^2 \to 0$$
- 由L^2完备性知存在$X_t \in L^2$使得$\xi_n(t) \xrightarrow{\text{m.s.}} X_t$。

L^2意义下的线性序列

- 考虑L^2中的零均值白噪声列$\{\varepsilon_t\}$，设$\mathrm{Var}(\varepsilon_t)=\sigma^2$.
- 设$\{a_j\}\in l_2$.
- 令

$$\xi_n(t)=\sum_{j=-n}^{n}a_j\varepsilon_{t-j},\ t\in\mathbb{Z}$$

- 则$\xi_n(t)\in L^2$。对$m<n$，当$m\to\infty$时

$$\begin{aligned}\|\xi_n-\xi_m\|^2=&\|\sum_{m<|j|\le n}a_j\varepsilon_{t-j}\|^2\\ =&\sigma^2\sum_{m<|j|\le n}a_j^2\le\sigma^2\sum_{|j|>m}a_j^2\to 0\end{aligned}$$

- 由L^2完备性知存在$X_t\in L^2$使得$\xi_n(t)\overset{\text{m.s.}}{\to}X_t$。

L^2意义下的线性序列

- 考虑L^2中的零均值白噪声列$\{\varepsilon_t\}$，设$\mathrm{Var}(\varepsilon_t)=\sigma^2$.
- 设$\{a_j\}\in l_2$.
- 令

$$\xi_n(t)=\sum_{j=-n}^{n} a_j\varepsilon_{t-j},\ t\in\mathbb{Z}$$

- 则$\xi_n(t)\in L^2$。对$m<n$，当$m\to\infty$时

$$\begin{aligned}\|\xi_n-\xi_m\|^2=&\|\sum_{m<|j|\le n} a_j\varepsilon_{t-j}\|^2\\ =&\sigma^2\sum_{m<|j|\le n} a_j^2\le\sigma^2\sum_{|j|>m} a_j^2\to 0\end{aligned}$$

- 由L^2完备性知存在$X_t\in L^2$使得$\xi_n(t)\xrightarrow{\text{m.s.}} X_t$。

L^2线性序列的平稳性

- 记$\xi_n(t)$在L^2中的极限X_t为

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j},\ t \in \mathbb{Z}$$

- 来证明$\{X_t\}$平稳。由L^2中内积连续性得

$$\mathrm{E}X_t = \lim_{n\to\infty} \langle \xi_n(t), 1 \rangle = \lim_n \mathrm{E}\xi_n(t) = 0$$

- 以及

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X_t X_{t+k} &= \lim_n \langle \xi_n(t), \xi_n(t+k) \rangle \\
&= \lim_n \langle \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{t-j}, \sum_{l=-n}^{n} a_l \varepsilon_{t+k-l} \rangle \\
&= \lim_n \sum_{j=-n}^{n} \sum_{l=-n}^{n} a_j a_l \delta_{k-l+j} \sigma^2 \\
&= \sigma^2 \sum^{\infty} a_j a_{j+k} \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

L^2线性序列的平稳性

- 记$\xi_n(t)$在L^2中的极限X_t为

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \ \ t \in \mathbb{Z}$$

- 来证明$\{X_t\}$平稳。由L^2中内积连续性得

$$\mathrm{E}X_t = \lim_{n\to\infty} \langle \xi_n(t), 1 \rangle = \lim_n \mathrm{E}\xi_n(t) = 0$$

- 以及

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X_t X_{t+k} =& \lim_n \langle \xi_n(t), \xi_n(t+k) \rangle \\
=& \lim_n \langle \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{t-j}, \sum_{l=-n}^{n} a_l \varepsilon_{t+k-l} \rangle \\
=& \lim_n \sum_{j=-n}^{n} \sum_{l=-n}^{n} a_j a_l \delta_{k-l+j} \sigma^2 \\
=& \sigma^2 \sum^{\infty} a_j a_{j+k}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

L^2线性序列的平稳性

- 记$\xi_n(t)$在L^2中的极限X_t为

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j},\ \ t \in \mathbb{Z}$$

- 来证明$\{X_t\}$平稳。由L^2中内积连续性得

$$\mathrm{E}X_t = \lim_{n\to\infty} \langle \xi_n(t), 1\rangle = \lim_n \mathrm{E}\xi_n(t) = 0$$

- 以及

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X_t X_{t+k} &= \lim_n \langle \xi_n(t), \xi_n(t+k)\rangle \\
&= \lim_n \langle \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{t-j}, \sum_{l=-n}^{n} a_l \varepsilon_{t+k-l}\rangle \\
&= \lim_n \sum_{j=-n}^{n} \sum_{l=-n}^{n} a_j a_l \delta_{k-l+j} \sigma^2 \\
&= \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k} \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

复值随机变量

- $Z = X + iY$称为复值随机变量。$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}X + i\mathrm{E}Y$.
- $$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathrm{E}\left((Z_1 - \mathrm{E}Z_1)(Z_2 - \mathrm{E}Z_2)^*\right)$$
- $$\mathrm{Cov}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \mathrm{E}\left((\mathbf{Z}_1 - \mathrm{E}\mathbf{Z}_1)(\mathbf{Z}_2 - \mathrm{E}\mathbf{Z}_2)^*\right)$$

  $\mathbf{Z}^*$表示$\mathbf{Z}$的共轭转置。

复值随机变量

- $Z = X + iY$称为复值随机变量。$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}X + i\mathrm{E}Y$.
- $$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathrm{E}\left((Z_1 - \mathrm{E}Z_1)(Z_2 - \mathrm{E}Z_2)^*\right)$$
- $$\mathrm{Cov}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \mathrm{E}\left((\mathbf{Z}_1 - \mathrm{E}\mathbf{Z}_1)(\mathbf{Z}_2 - \mathrm{E}\mathbf{Z}_2)^*\right)$$
  $\mathbf{Z}^*$表示$\mathbf{Z}$的共轭转置。

复值随机变量

- $Z = X + iY$称为复值随机变量。$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}X + i\mathrm{E}Y$.
- $$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathrm{E}\left((Z_1 - \mathrm{E}Z_1)(Z_2 - \mathrm{E}Z_2)^*\right)$$
- $$\mathrm{Cov}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \mathrm{E}\left((\mathbf{Z}_1 - \mathrm{E}\mathbf{Z}_1)(\mathbf{Z}_2 - \mathrm{E}\mathbf{Z}_2)^*\right)$$

  $\mathbf{Z}^*$表示$\mathbf{Z}$的共轭转置。

复值随机变量Hilbert空间

- $\mathrm{E}|Z|^2 = \mathrm{E}X^2 + \mathrm{E}Y^2 < \infty$时称$Z$是二阶矩有限的复随机变量。
- 所有二阶矩有限复随机变量的集合H在定义内积$< X, Y >= E(X\bar{Y})$后构成Hilbert空间。

复值随机变量Hilbert空间

- $\mathrm{E}|Z|^2 = \mathrm{E}X^2 + \mathrm{E}Y^2 < \infty$时称$Z$是二阶矩有限的复随机变量。
- 所有二阶矩有限复随机变量的集合H在定义内积$< X, Y >= E(X\bar{Y})$后构成Hilbert空间。

复值时间序列

- 复值随机变量的序列$\{Z_n\}$称为复时间序列.
- 若$\mathrm{E}Z_n = \mu$, $\mathrm{Cov}(Z_n, Z_m) = \gamma_{n-m}$，$\forall n, m \in \mathbb{Z}$, 则称$\{Z_n\}$是复值平稳序列。
- $\gamma_{-k} = \gamma_k^*$.
- 若复值零均值平稳列$\{\varepsilon_t\}$满足

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_m) = \sigma^2 \delta_{n-m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

则称$\{\varepsilon_t\}$为复值零均值白噪声。

复值时间序列

- 复值随机变量的序列$\{Z_n\}$称为复时间序列.
- 若$\mathrm{E}Z_n = \mu$, $\mathrm{Cov}(Z_n, Z_m) = \gamma_{n-m}$，$\forall n, m \in \mathbb{Z}$, 则称$\{Z_n\}$是复值平稳序列。
- $\gamma_{-k} = \gamma_k^*$.
- 若复值零均值平稳列$\{\varepsilon_t\}$满足

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_m) = \sigma^2 \delta_{n-m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

则称$\{\varepsilon_t\}$为复值零均值白噪声。

复值时间序列

- 复值随机变量的序列$\{Z_n\}$称为复时间序列.
- 若$\mathrm{E}Z_n = \mu$, $\mathrm{Cov}(Z_n, Z_m) = \gamma_{n-m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, 则称$\{Z_n\}$是复值平稳序列。
- $\gamma_{-k} = \gamma_k^*$.
- 若复值零均值平稳列$\{\varepsilon_t\}$满足

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_m) = \sigma^2 \delta_{n-m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

则称$\{\varepsilon_t\}$为复值零均值白噪声。

复值时间序列

- 复值随机变量的序列$\{Z_n\}$称为复时间序列.
- 若$\mathrm{E}Z_n = \mu$, $\mathrm{Cov}(Z_n, Z_m) = \gamma_{n-m}$，$\forall n, m \in \mathbb{Z}$, 则称$\{Z_n\}$是复值平稳序列。
- $\gamma_{-k} = \gamma_k^*$.
- 若复值零均值平稳列$\{\varepsilon_t\}$满足

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_m) = \sigma^2\delta_{n-m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

  则称$\{\varepsilon_t\}$为复值零均值白噪声。

例6.4

- 设 $Y \sim \mathrm{U}[-\pi, \pi]$。
- 定义

$$\varepsilon_n = e^{inY}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 则

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\varepsilon_n &= \delta_n \\ \mathrm{E}(\varepsilon_n \bar{\varepsilon}_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)y}\, dy \\ &= \delta_{n-m} \end{aligned}$$

例6.4

- 设 $Y \sim \mathrm{U}[-\pi, \pi]$。
- 定义

$$\varepsilon_n = e^{inY}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 则

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\varepsilon_n &= \delta_n \\ \mathrm{E}(\varepsilon_n \bar{\varepsilon}_m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)y}\, dy \\ &= \delta_{n-m} \end{aligned}$$

例6.4

- 设$Y \sim \mathrm{U}[-\pi, \pi]$。
- 定义

$$\varepsilon_n = e^{inY}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 则

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\varepsilon_n &= \delta_n \\ \mathrm{E}(\varepsilon_n \bar{\varepsilon}_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)y}\, dy \\ &= \delta_{n-m} \end{aligned}$$

- 对于平方可和的实数列$\{a_j\}$，定义

$$Z_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i(n-j)Y}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 由内积的连续性得到

$$\mathrm{E} Z_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathrm{E}\varepsilon_n = a_0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z_n \bar{Z}_m) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \mathrm{E}(\varepsilon_{n-j} \bar{\varepsilon}_{m-k}) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \delta_{n-m-j+k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_{k+n-m}
\end{aligned}$$

- 这说明$\{Z_n\}$是复值平稳列。

- 对于平方可和的实数列$\{a_j\}$, 定义

$$Z_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i(n-j)Y}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 由内积的连续性得到

$$\mathrm{E} Z_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathrm{E} \varepsilon_n = a_0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z_n \bar{Z}_m) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \mathrm{E}(\varepsilon_{n-j} \bar{\varepsilon}_{m-k}) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \delta_{n-m-j+k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_{k+n-m}
\end{aligned}$$

- 这说明$\{Z_n\}$是复值平稳列。

- 对于平方可和的实数列$\{a_j\}$，定义

$$Z_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i(n-j)Y}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 由内积的连续性得到

$$\mathrm{E} Z_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathrm{E} \varepsilon_n = a_0$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z_n \bar{Z}_m) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \mathrm{E}(\varepsilon_{n-j} \bar{\varepsilon}_{m-k}) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \delta_{n-m-j+k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_{k+n-m} \end{aligned}$$

- 这说明$\{Z_n\}$是复值平稳列。

- 另一方面，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(Z_n\bar{Z}_m)\\
=&\mathrm{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i(n-j)Y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-i(m-k)Y}\right]\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i(n-j)y}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-i(m-k)y}\right)\, dy\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-ijy}\right|^2 e^{i(n-m)y}\, dy
\end{aligned}
$$

- 即

$$
\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-ijy}\right|^2 e^{iky}\, dy.
$$

- 另一方面，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(Z_n\bar{Z}_m)\\
=&\mathrm{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i(n-j)Y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-i(m-k)Y}\right]\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i(n-j)y}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-i(m-k)y}\right)\,dy\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-ijy}\right|^2 e^{i(n-m)y}\,dy
\end{aligned}
$$

- 即

$$
\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-ijy}\right|^2 e^{iky}\,dy.
$$

- 定义

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-ij\lambda}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\lambda}\right|^2$$

- 就得到公式

$$\sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky}\, dy \qquad (6.7)$$

- 定义

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-ij\lambda} \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\lambda} \right|^2$$

- 就得到公式

$$\sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky} \, dy \qquad (6.7)$$