应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2017年秋季学期

平稳序列——引言

- 序列分解中趋势和季节部分一般可以用非随机函数描述（但也可以用随机模型）。
- 随机项通常是平稳的。表现：水平没有明显变化；方差没有明显变化；相关性结构不随时间变化。
- 很多平稳序列可以用历史值预报。
- 记号:
  - $\mathbb{Z}$—所有整数的集合； 。
  - $\mathbb{N}_+$—所有正整数的集合； 。
  - $\mathbb{N}$—表示$\mathbb{Z}$或$\mathbb{N}_+$。

平稳序列——引言

- 序列分解中趋势和季节部分一般可以用非随机函数描述（但也可以用随机模型）。
- 随机项通常是平稳的。表现：水平没有明显变化；方差没有明显变化；相关性结构不随时间变化。
- 很多平稳序列可以用历史值预报。
- 记号:
  - $\mathbb{Z}$—所有整数的集合；。
  - $\mathbb{N}_+$—所有正整数的集合；。
  - $\mathbb{N}$—表示$\mathbb{Z}$或$\mathbb{N}_+$。

平稳序列——引言

- 序列分解中趋势和季节部分一般可以用非随机函数描述（但也可以用随机模型）。
- 随机项通常是平稳的。表现：水平没有明显变化；方差没有明显变化；相关性结构不随时间变化。
- 很多平稳序列可以用历史值预报。
- 记号:
  - $\mathbb{Z}$—所有整数的集合；。
  - $\mathbb{N}_+$—所有正整数的集合；。
  - $\mathbb{N}$—表示$\mathbb{Z}$或$\mathbb{N}_+$。

平稳序列——引言

- 序列分解中趋势和季节部分一般可以用非随机函数描述（但也可以用随机模型）。
- 随机项通常是平稳的。表现：水平没有明显变化；方差没有明显变化；相关性结构不随时间变化。
- 很多平稳序列可以用历史值预报。
- 记号:
  - $\mathbb{Z}$—所有整数的集合；。
  - $\mathbb{N}_+$—所有正整数的集合；。
  - $\mathbb{N}$—表示$\mathbb{Z}$或$\mathbb{N}_+$。

平稳序列——引言

- 序列分解中趋势和季节部分一般可以用非随机函数描述（但也可以用随机模型）。
- 随机项通常是平稳的。表现：水平没有明显变化；方差没有明显变化；相关性结构不随时间变化。
- 很多平稳序列可以用历史值预报。
- 记号:
  - $\mathbb{Z}$—所有整数的集合；。
  - $\mathbb{N}_+$—所有正整数的集合；。
  - $\mathbb{N}$—表示$\mathbb{Z}$或$\mathbb{N}_+$。

平稳序列——引言

- 序列分解中趋势和季节部分一般可以用非随机函数描述（但也可以用随机模型）。
- 随机项通常是平稳的。表现：水平没有明显变化；方差没有明显变化；相关性结构不随时间变化。
- 很多平稳序列可以用历史值预报。
- 记号:
  - $\mathbb{Z}$—所有整数的集合；。
  - $\mathbb{N}_+$—所有正整数的集合；。
  - $\mathbb{N}$—表示$\mathbb{Z}$或$\mathbb{N}_+$。

平稳序列——引言

- 序列分解中趋势和季节部分一般可以用非随机函数描述（但也可以用随机模型）。
- 随机项通常是平稳的。表现：水平没有明显变化；方差没有明显变化；相关性结构不随时间变化。
- 很多平稳序列可以用历史值预报。
- 记号:
  - $\mathbb{Z}$—所有整数的集合；。
  - $\mathbb{N}_+$—所有正整数的集合；。
  - $\mathbb{N}$—表示$\mathbb{Z}$或$\mathbb{N}_+$。

平稳序列定义

- **定义2.1** 如果时间序列$\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ 满足
  (1) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t^2 < \infty$;
  (2) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t = \mu$;
  (3) 对任何$t, s \in \mathbb{N}$, $E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma_{t-s}$,
  则称$\{X_t\}$ 是**平稳时间序列**, 简称为**平稳序列**. 称实数列$\{\gamma_t\}$为$\{X_t\}$的**自协方差函数**.
- 性质:
  1. 期望、方差与t无关。
  2. 时间平移不影响两时刻的相关系数。
  3. 又称平稳序列为二阶矩平稳序列,还称为宽平稳序列。
- 我们总假设$\gamma_0 > 0$

平稳序列定义

- **定义2.1** 如果时间序列$\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ 满足
  (1) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t^2 < \infty$;
  (2) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t = \mu$;
  (3) 对任何$t, s \in \mathbb{N}$, $E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma_{t-s}$,
  则称$\{X_t\}$ 是**平稳时间序列**, 简称为**平稳序列**. 称实数列$\{\gamma_t\}$为$\{X_t\}$的**自协方差函数**.
- 性质:
  1. 期望、方差与t无关。
  2. 时间平移不影响两时刻的相关系数。
  3. 又称平稳序列为二阶矩平稳序列,还称为宽平稳序列。
- 我们总假设$\gamma_0 > 0$

平稳序列定义

- **定义2.1** 如果时间序列$\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ 满足
  (1) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t^2 < \infty$;
  (2) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t = \mu$;
  (3) 对任何$t, s \in \mathbb{N}$, $E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma_{t-s}$,
  则称$\{X_t\}$ 是**平稳时间序列**, 简称为**平稳序列**. 称实数列$\{\gamma_t\}$为$\{X_t\}$的**自协方差函数**.
- 性质：
  1. 期望、方差与t无关。
  2. 时间平移不影响两时刻的相关系数。
  3. 又称平稳序列为二阶矩平稳序列,还称为宽平稳序列。
- 我们总假设$\gamma_0 > 0$

平稳序列定义

- **定义2.1** 如果时间序列$\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ 满足
  (1) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t^2 < \infty$;
  (2) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t = \mu$;
  (3) 对任何$t, s \in \mathbb{N}$, $E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma_{t-s}$,
  则称$\{X_t\}$ 是**平稳时间序列**, 简称为**平稳序列**. 称实数列$\{\gamma_t\}$为$\{X_t\}$的**自协方差函数**.
- 性质:
  1. 期望、方差与t无关。
  2. 时间平移不影响两时刻的相关系数。
  3. 又称平稳序列为二阶矩平稳序列,还称为宽平稳序列。
- 我们总假设$\gamma_0 > 0$

平稳序列定义

- **定义2.1** 如果时间序列$\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ 满足
  (1) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t^2 < \infty$;
  (2) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t = \mu$;
  (3) 对任何$t, s \in \mathbb{N}$, $E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma_{t-s}$,
  则称$\{X_t\}$ 是**平稳时间序列**, 简称为**平稳序列**. 称实数列$\{\gamma_t\}$为$\{X_t\}$的**自协方差函数**.
- 性质：
  1. 期望、方差与t无关。
  2. 时间平移不影响两时刻的相关系数。
  3. 又称平稳序列为**二阶矩平稳序列**,还称为**宽平稳序列**。
- 我们总假设$\gamma_0 > 0$

平稳序列定义

- **定义2.1** 如果时间序列$\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ 满足
  (1) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t^2 < \infty$;
  (2) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t = \mu$;
  (3) 对任何$t, s \in \mathbb{N}$, $E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma_{t-s}$,
  则称$\{X_t\}$ 是**平稳时间序列**, 简称为**平稳序列**. 称实数列$\{\gamma_t\}$为$\{X_t\}$的**自协方差函数**.
- 性质:
  1. 期望、方差与t无关。
  2. 时间平移不影响两时刻的相关系数。
  3. 又称平稳序列为**二阶矩平稳序列**,还称为**宽平稳序列**。
- 我们总假设$\gamma_0 > 0$

自协方差函数性质

- (1) 对称性: $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- (2) 非负定性:

$$\Gamma_n = (\gamma_{k-j})_{k,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

  非负定($\forall n \in \mathbb{N}_+$)。
- (3) 有界性：$|\gamma_k| \le \gamma_0, \forall k \in \mathbb{Z}$。
- 任何满足上述三个性质的实数列都被称为**非负定序列**.
- 所以平稳序列的自协方差函数是非负定序列.
- 可以证明, 每个非负定序列都可以是一个平稳序列的自协方差函数.

自协方差函数性质

- (1) 对称性: $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- (2) 非负定性:

$$\Gamma_n = (\gamma_{k-j})_{k,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

非负定($\forall n \in \mathbb{N}_+$)。

- (3) 有界性: $|\gamma_k| \le \gamma_0, \forall k \in \mathbb{Z}$。
- 任何满足上述三个性质的实数列都被称为非负定序列.
- 所以平稳序列的自协方差函数是非负定序列.
- 可以证明, 每个非负定序列都可以是一个平稳序列的自协方差函数.

自协方差函数性质

- (1) 对称性: $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- (2) 非负定性:

$$\Gamma_n = (\gamma_{k-j})_{k,j=1}^n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

  非负定($\forall n \in \mathbb{N}_+$)。
- (3) 有界性：$|\gamma_k| \le \gamma_0, \forall k \in \mathbb{Z}$。
- 任何满足上述三个性质的实数列都被称为非负定序列.
- 所以平稳序列的自协方差函数是非负定序列.
- 可以证明, 每个非负定序列都可以是一个平稳序列的自协方差函数.

自协方差函数性质

- (1) 对称性: $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- (2) 非负定性:

$$\Gamma_n = (\gamma_{k-j})_{k,j=1}^n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

  非负定($\forall n \in \mathbb{N}_+$)。
- (3) 有界性：$|\gamma_k| \le \gamma_0, \forall k \in \mathbb{Z}$。
- 任何满足上述三个性质的实数列都被称为**非负定序列**.
- 所以平稳序列的自协方差函数是非负定序列.
- 可以证明, 每个非负定序列都可以是一个平稳序列的自协方差函数.

自协方差函数性质

- (1) 对称性: $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- (2) 非负定性:

$$\Gamma_n = (\gamma_{k-j})_{k,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

  非负定($\forall n \in \mathbb{N}_+$)。
- (3) 有界性: $|\gamma_k| \leq \gamma_0, \forall k \in \mathbb{Z}$。
- 任何满足上述三个性质的实数列都被称为**非负定序列**.
- 所以平稳序列的自协方差函数是非负定序列.
- 可以证明, 每个非负定序列都可以是一个平稳序列的自协方差函数.

自协方差函数性质

- (1) 对称性: $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- (2) 非负定性:

$$\Gamma_n = (\gamma_{k-j})_{k,j=1}^n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

  非负定($\forall n \in \mathbb{N}_+$)。
- (3) 有界性：$|\gamma_k| \leq \gamma_0, \forall k \in \mathbb{Z}$。
- 任何满足上述三个性质的实数列都被称为**非负定序列**.
- 所以平稳序列的自协方差函数是非负定序列.
- 可以证明, 每个非负定序列都可以是一个平稳序列的自协方差函数.

关于Γ_n

- Γ_n的元素通项：

$$\Gamma_n = \left(\gamma_{|i-j|}\right)_{i=1,2,\dots,n j=1,2,\dots,n}$$

- 记

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

则$\Gamma_n = \mathrm{Var}(\mathbf{X})$。
- 关于随机向量$\mathbf{X}$与矩阵A, B，有（见1.4.1节）

$$E(A + B\mathbf{X}) = A + BE(\mathbf{X})$$
$$\mathrm{Var}(A + B\mathbf{X}) = B\mathrm{Var}(\mathbf{X})\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

且$\mathbf{X}$的协方差阵$\mathrm{Var}(\mathbf{X})$总是非负定的。

关于Γ_n

- Γ_n的元素通项：

$$\Gamma_n = \left(\gamma_{|i-j|}\right)_{i=1,2,\ldots,n j=1,2,\ldots,n}$$

- 记

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

则$\Gamma_n = \mathrm{Var}(\mathbf{X})$。

- 关于随机向量$\mathbf{X}$与矩阵A, B，有（见1.4.1节）

$$E(A + B\mathbf{X}) = A + BE(\mathbf{X})$$
$$\mathrm{Var}(A + B\mathbf{X}) = B\mathrm{Var}(\mathbf{X})\mathbf{B}^T$$

且$\mathbf{X}$的协方差阵$\mathrm{Var}(\mathbf{X})$总是非负定的。

关于Γ_n

- Γ_n的元素通项：

$$\Gamma_n = \left(\gamma_{|i-j|}\right)_{i=1,2,\ldots,nj=1,2,\ldots,n}$$

- 记

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

  则$\Gamma_n = \mathrm{Var}(\mathbf{X})$。
- 关于随机向量$\mathbf{X}$与矩阵A, B，有（见1.4.1节）

$$E(A + B\mathbf{X}) = A + BE(\mathbf{X})$$
$$\mathrm{Var}(A + B\mathbf{X}) = B\mathrm{Var}(\mathbf{X})\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$$

  且$\mathbf{X}$的协方差阵$\mathrm{Var}(\mathbf{X})$总是非负定的。

非负定性及随机变量的线性相关

- 因为Γ_n是协方差阵，所以非负定。
- 设$\alpha=(a_1,\ldots,a_n)^T$，则

$$
\begin{aligned}
\alpha^T\Gamma_n\alpha =& \mathrm{Var}(\alpha^T\mathbf{X}\alpha) \\
=& \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right) \geq 0
\end{aligned}
$$

- Γ_n退化(不满秩)当且仅当存在$\alpha\neq 0$使得

$$
\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)=0
$$

这时称随机变量$X_1,\ldots,X_n$是线性相关的。
即$X_1,\ldots,X_n$的非零线性组合是退化随机变量。

- 如果$X_1,\ldots,X_n$线性相关，则$m\geq n$时$X_1,\ldots,X_m$ 线性相关。

非负定性及随机变量的线性相关

- 因为Γ_n是协方差阵，所以非负定。
- 设$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^T$，则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^T \Gamma_n \boldsymbol{\alpha} =& \mathrm{Var}(\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\alpha}) \\
=& \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right) \geq 0
\end{aligned}
$$

- Γ_n退化(不满秩)当且仅当存在$\boldsymbol{\alpha} \neq 0$使得

$$
\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = 0
$$

这时称随机变量$X_1, \ldots, X_n$是线性相关的。
即$X_1, \ldots, X_n$的非零线性组合是退化随机变量。

- 如果$X_1, \ldots, X_n$线性相关，则$m \geq n$时$X_1, \ldots, X_m$ 线性相关。

非负定性及随机变量的线性相关

- 因为Γ_n是协方差阵，所以非负定。
- 设$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^T$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^T \Gamma_n \boldsymbol{\alpha} =& \mathrm{Var}(\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\alpha}) \\ =& \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) \geq 0\end{aligned}$$

- Γ_n退化(不满秩)当且仅当存在$\boldsymbol{\alpha} \neq 0$使得

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = 0$$

这时称随机变量$X_1, \ldots, X_n$是线性相关的。
即$X_1, \ldots, X_n$的非零线性组合是退化随机变量。

- 如果$X_1, \ldots, X_n$线性相关，则$m \geq n$时$X_1, \ldots, X_m$线性相关。

非负定性及随机变量的线性相关

- 因为Γ_n是协方差阵，所以非负定。
- 设$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^T$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^T \Gamma_n \boldsymbol{\alpha} =& \mathrm{Var}(\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\alpha}) \\ =& \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) \geq 0\end{aligned}$$

- Γ_n退化(不满秩)当且仅当存在$\boldsymbol{\alpha} \neq 0$使得

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = 0$$

这时称随机变量$X_1, \ldots, X_n$是线性相关的。
即$X_1, \ldots, X_n$的非零线性组合是退化随机变量。

- 如果$X_1, \ldots, X_n$线性相关，则$m \geq n$时$X_1, \ldots, X_m$ 线性相关。

Schwarz不等式

- $$|E(XY)| \le \sqrt{EX^2EY^2}$$
- $$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \le \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$$
- 推论:
$$\mathrm{E}|X| \le \sqrt{\mathrm{E}|X|^2}$$
- $$\gamma_t = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_{t+1}) \le \gamma_0$$

Schwarz不等式

- $$|E(XY)| \le \sqrt{EX^2EY^2}$$
- $$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \le \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$$
- 推论:
$$\mathrm{E}|X| \le \sqrt{\mathrm{E}|X|^2}$$
- $$\gamma_t = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_{t+1}) \le \gamma_0$$

Schwarz不等式

- $$|E(XY)| \leq \sqrt{EX^2 EY^2}$$
- $$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$$
- 推论:
$$\mathrm{E}|X| \leq \sqrt{\mathrm{E}|X|^2}$$
- $$\gamma_t = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_{t+1}) \leq \gamma_0$$

Schwarz不等式

- $$|E(XY)| \leq \sqrt{EX^2EY^2}$$
- $$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$$
- 推论:
  $$\mathrm{E}|X| \leq \sqrt{\mathrm{E}|X|^2}$$
- $$\gamma_t = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_{t+1}) \leq \gamma_0$$

例2.1 平稳序列的线性变换

- $\{X_t\}$为平稳序列，期望μ，自协方差函数$\gamma(t)$。
- $Y_t = a + bX_t, t \in \mathbb{Z}$。
- $\mathrm{E}Y_t = a + b\mu$.
- $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_{s+t}) = b^2\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+s}) = b^2\gamma(t)$.
- 可见$\{Y_t\}$平稳。
- 若取
$$Y_t = \frac{X_t - \mu}{\sqrt{\gamma_0}}$$
则$\mathrm{E}Y_t = 0, \mathrm{Var}(Y_t) = 1$，称$\{Y_t\}$为$\{X_t\}$的标准化序列。

例2.1 平稳序列的线性变换

- $\{X_t\}$为平稳序列，期望μ，自协方差函数$\gamma(t)$。
- $Y_t = a + bX_t, t \in \mathbb{Z}$。
- $\mathrm{E}Y_t = a + b\mu$.
- $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_{s+t}) = b^2\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+s}) = b^2\gamma(t)$.
- 可见$\{Y_t\}$平稳。
- 若取

$$Y_t = \frac{X_t - \mu}{\sqrt{\gamma_0}}$$

则$\mathrm{E}Y_t = 0, \mathrm{Var}(Y_t) = 1$，称$\{Y_t\}$为$\{X_t\}$的标准化序列。

例2.1 平稳序列的线性变换

- $\{X_t\}$为平稳序列，期望μ，自协方差函数$\gamma(t)$。
- $Y_t = a + bX_t, t \in \mathbb{Z}$。
- $\mathrm{E}Y_t = a + b\mu$.
- $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_{s+t}) = b^2\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+s}) = b^2\gamma(t)$.
- 可见$\{Y_t\}$平稳。
- 若取
$$Y_t = \frac{X_t - \mu}{\sqrt{\gamma_0}}$$
则$\mathrm{E}Y_t = 0, \mathrm{Var}(Y_t) = 1$，称$\{Y_t\}$为$\{X_t\}$的标准化序列。

例2.1 平稳序列的线性变换

- $\{X_t\}$为平稳序列，期望μ，自协方差函数$\gamma(t)$。
- $Y_t = a + bX_t, t \in \mathbb{Z}$。
- $\mathrm{E}Y_t = a + b\mu$.
- $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_{s+t}) = b^2\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+s}) = b^2\gamma(t)$.
- 可见$\{Y_t\}$平稳。
- 若取

$$Y_t = \frac{X_t - \mu}{\sqrt{\gamma_0}}$$

则$\mathrm{E}Y_t = 0, \mathrm{Var}(Y_t) = 1$，称$\{Y_t\}$为$\{X_t\}$的标准化序列。

例2.1 平稳序列的线性变换

- $\{X_t\}$为平稳序列，期望μ，自协方差函数$\gamma(t)$。
- $Y_t = a + bX_t, t \in \mathbb{Z}$。
- $\mathrm{E}Y_t = a + b\mu$.
- $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_{s+t}) = b^2\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+s}) = b^2\gamma(t)$.
- 可见$\{Y_t\}$平稳。
- 若取

$$Y_t = \frac{X_t - \mu}{\sqrt{\gamma_0}}$$

则$\mathrm{E}Y_t = 0, \mathrm{Var}(Y_t) = 1$，称$\{Y_t\}$为$\{X_t\}$的标准化序列。

例2.1 平稳序列的线性变换

- $\{X_t\}$为平稳序列，期望μ，自协方差函数$\gamma(t)$。
- $Y_t = a + bX_t, t \in \mathbb{Z}$。
- $\mathrm{E}Y_t = a + b\mu$.
- $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_{s+t}) = b^2\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+s}) = b^2\gamma(t)$.
- 可见$\{Y_t\}$平稳。
- 若取

$$Y_t = \frac{X_t - \mu}{\sqrt{\gamma_0}}$$

则$\mathrm{E}Y_t = 0, \mathrm{Var}(Y_t) = 1$，称$\{Y_t\}$为$\{X_t\}$的标准化序列。

自相关系数

- **定义2.2** 设平稳序列$\{X_t\}$的标准化序列是$\{Y_t\}$. $\{Y_t\}$的自协方差函数

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

称为平稳序列$\{X_t\}$的**自相关系数**.

- 自相关系数$\{\rho_t\}$是满足$\rho_0 = 1$的自协方差函数, 从而也是非负定序列.

自相关系数

- **定义2.2**　设平稳序列$\{X_t\}$的标准化序列是$\{Y_t\}$. $\{Y_t\}$的自协方差函数

$$\rho_k = \gamma_k/\gamma_0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

称为平稳序列$\{X_t\}$的**自相关系数**.
- 自相关系数$\{\rho_t\}$是满足$\rho_0 = 1$的自协方差函数, 从而也是非负定序列.

例2.2 调和平稳序列

- 设a, b是常数,随机变量U 在$(-\pi, \pi)$内均匀分布, 则
$$X_t = b\cos(at+U), \quad t \in \mathbb{Z}$$
是平稳序列.
-
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X_t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\cos(at+u)\,du = 0, \\
\mathrm{E}(X_t X_s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b^2\cos(at+u)\cos(as+u)\,du \\
&= \frac{1}{2}b^2\cos((t-s)a),
\end{aligned}$$
- 这个平稳序列的观测样本和自协方差函数$\gamma_k = 0.5b^2\cos(ak)$ 都是以a为角频率, 以$2\pi/a$为周期的函数.
- 这个例子告诉我们,平稳序列也可以有很强的周期性.
- $\{X_t\}$的一次实现是一个周期函数，不表现出随机性。

例2.2 调和平稳序列

- 设a,b是常数,随机变量U 在$(-\pi,\pi)$内均匀分布, 则

$$X_t = b\cos(at+U), \quad t\in\mathbb{Z}$$

是平稳序列.

-

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X_t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\cos(at+u)\ du = 0,\\ \mathrm{E}(X_tX_s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b^2\cos(at+u)\cos(as+u)\ du\\ &= \frac{1}{2}b^2\cos((t-s)a),\end{aligned}$$

- 这个平稳序列的观测样本和自协方差函数$\gamma_k = 0.5b^2\cos(ak)$ 都是以a为角频率, 以$2\pi/a$为周期的函数.
- 这个例子告诉我们,平稳序列也可以有很强的周期性.
- $\{X_t\}$的一次实现是一个周期函数, 不表现出随机性。

例2.2 调和平稳序列

- 设a, b是常数,随机变量U 在$(-\pi, \pi)$内均匀分布, 则
$$X_t = b\cos(at+U), \quad t \in \mathbb{Z}$$
是平稳序列.
-
$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\cos(at+u)\ du = 0, \\ \mathrm{E}(X_t X_s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b^2\cos(at+u)\cos(as+u)\ du \\ &= \frac{1}{2}b^2\cos((t-s)a), \end{aligned}$$
- 这个平稳序列的观测样本和自协方差函数$\gamma_k = 0.5b^2\cos(ak)$ 都是以a为角频率, 以$2\pi/a$为周期的函数.
- 这个例子告诉我们,平稳序列也可以有很强的周期性.
- $\{X_t\}$的一次实现是一个周期函数，不表现出随机性。

例2.2 调和平稳序列

- 设a,b是常数,随机变量U 在$(-\pi,\pi)$内均匀分布, 则
$$X_t = b\cos(at+U), \quad t \in \mathbb{Z}$$
是平稳序列.
-
$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\cos(at+u)\,du = 0, \\ \mathrm{E}(X_tX_s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b^2\cos(at+u)\cos(as+u)\,du \\ &= \frac{1}{2}b^2\cos((t-s)a), \end{aligned}$$
- 这个平稳序列的观测样本和自协方差函数$\gamma_k = 0.5b^2\cos(ak)$ 都是以a为角频率, 以$2\pi/a$为周期的函数.
- 这个例子告诉我们,平稳序列也可以有很强的周期性.
- $\{X_t\}$的一次实现是一个周期函数，不表现出随机性。

例2.2 调和平稳序列

- 设a, b是常数,随机变量U 在$(-\pi, \pi)$内均匀分布, 则
$$X_t = b\cos(at + U), \quad t \in \mathbb{Z}$$
是平稳序列.
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}X_t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\cos(at+u)\ du = 0, \\ \mathrm{E}(X_t X_s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b^2\cos(at+u)\cos(as+u)\ du \\ &= \frac{1}{2}b^2\cos((t-s)a), \end{aligned}$$
- 这个平稳序列的观测样本和自协方差函数$\gamma_k = 0.5b^2\cos(ak)$ 都是以a为角频率, 以$2\pi/a$为周期的函数.
- 这个例子告诉我们,平稳序列也可以有很强的周期性.
- $\{X_t\}$的一次实现是一个周期函数，不表现出随机性。

- **定义2.3** (白噪声) 设$\{\varepsilon_t\}$ 是一个平稳序列. 如果对任何$s, t \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\varepsilon_t &= \mu, & (1)\\
\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) &= \sigma^2\delta_{t-s} = \begin{cases} \sigma^2, & t = s, \\ 0, & t \neq s, \end{cases} & (2)
\end{aligned}
$$

则称$\{\varepsilon_t\}$是一个**白噪声**, 记做$\mathrm{WN}(\mu, \sigma^2)$.

白噪声(续)

- 设$\{\varepsilon_t\}$是白噪声,
- 当$\{\varepsilon_t\}$ 是独立序列时, 称$\{\varepsilon_t\}$ 是**独立白噪声**。
- 当$\mu = 0$ 时, 称$\{\varepsilon_t\}$ 为**零均值白噪声**。白噪声的另一种定义要求零均值，本书中用到的白噪声一般都是零均值的。
- 当$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时, 称$\{\varepsilon_t\}$ 为**标准白噪声**。
- 当ε_t服从正态分布时, 称$\{\varepsilon_t\}$是**正态白噪声**。正态白噪声总是独立白噪声。
- Kronecker函数δ_t, 白噪声满足$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \sigma^2\delta_{t-s}$.

白噪声(续)

- 设$\{\varepsilon_t\}$是白噪声，
- 当$\{\varepsilon_t\}$ 是独立序列时，称$\{\varepsilon_t\}$ 是**独立白噪声**。
- 当$\mu = 0$ 时，称$\{\varepsilon_t\}$ 为**零均值白噪声**。白噪声的另一种定义要求零均值，本书中用到的白噪声一般都是零均值的。
- 当$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时，称$\{\varepsilon_t\}$ 为**标准白噪声**。
- 当ε_t服从正态分布时，称$\{\varepsilon_t\}$是**正态白噪声**。正态白噪声总是独立白噪声。
- Kronecker函数δ_t，白噪声满足$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \sigma^2\delta_{t-s}$.

白噪声(续)

- 设$\{\varepsilon_t\}$是白噪声，
- 当$\{\varepsilon_t\}$ 是独立序列时，称$\{\varepsilon_t\}$ 是**独立白噪声**。
- 当$\mu = 0$ 时，称$\{\varepsilon_t\}$ 为**零均值白噪声**。白噪声的另一种定义要求零均值，本书中用到的白噪声一般都是零均值的。
- 当$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时，称$\{\varepsilon_t\}$ 为**标准白噪声**。
- 当ε_t服从正态分布时，称$\{\varepsilon_t\}$是**正态白噪声**。正态白噪声总是独立白噪声。
- Kronecker函数δ_t，白噪声满足$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \sigma^2\delta_{t-s}$.

白噪声(续)

- 设$\{\varepsilon_t\}$是白噪声,
- 当$\{\varepsilon_t\}$ 是独立序列时, 称$\{\varepsilon_t\}$ 是**独立白噪声**。
- 当$\mu = 0$ 时, 称$\{\varepsilon_t\}$ 为**零均值白噪声**。白噪声的另一种定义要求零均值，本书中用到的白噪声一般都是零均值的。
- 当$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时, 称$\{\varepsilon_t\}$ 为**标准白噪声**。
- 当ε_t服从正态分布时, 称$\{\varepsilon_t\}$是**正态白噪声**。正态白噪声总是独立白噪声。
- Kronecker函数δ_t, 白噪声满足$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \sigma^2\delta_{t-s}$.

白噪声(续)

- 设$\{\varepsilon_t\}$是白噪声，
- 当$\{\varepsilon_t\}$ 是独立序列时，称$\{\varepsilon_t\}$ 是**独立白噪声**。
- 当$\mu = 0$ 时，称$\{\varepsilon_t\}$ 为**零均值白噪声**。白噪声的另一种定义要求零均值，本书中用到的白噪声一般都是零均值的。
- 当$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时，称$\{\varepsilon_t\}$ 为**标准白噪声**。
- 当ε_t服从正态分布时，称$\{\varepsilon_t\}$是**正态白噪声**。正态白噪声总是独立白噪声。
- Kronecker函数δ_t，白噪声满足$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \sigma^2\delta_{t-s}$.

白噪声(续)

- 设$\{\varepsilon_t\}$是白噪声,
- 当$\{\varepsilon_t\}$ 是独立序列时, 称$\{\varepsilon_t\}$ 是**独立白噪声**。
- 当$\mu = 0$ 时, 称$\{\varepsilon_t\}$ 为**零均值白噪声**。白噪声的另一种定义要求零均值，本书中用到的白噪声一般都是零均值的。
- 当$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时, 称$\{\varepsilon_t\}$ 为**标准白噪声**。
- 当ε_t服从正态分布时, 称$\{\varepsilon_t\}$是**正态白噪声**。正态白噪声总是独立白噪声。
- Kronecker函数δ_t, 白噪声满足$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \sigma^2\delta_{t-s}$.

例2.3 Poisson 过程

- 如果连续时的随机过程$\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$满足
- (1) $N(0) = 0$, 且对任何$s \geq 0, t > 0$ 和非负整数k,

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp[-\lambda t], (\lambda > 0)$$

- (2) $\{N(t)\}$ 有独立增量性: 对任何$n > 1$ 和$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 随机变量$N(t_j) - N(t_{j-1})$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 相互独立,
- 则称$\{N(t)\}$ 是一个强度λ的**Poisson 过程**.
- $\mathrm{E}N(t) = \lambda t$, $\mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t$.

例2.3 Poisson 过程

- 如果连续时的随机过程$\{N(t): t \in [0, \infty)\}$满足
- (1) $N(0) = 0$, 且对任何$s \geq 0, t > 0$ 和非负整数k,

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp[-\lambda t], (\lambda > 0)$$

- (2) $\{N(t)\}$ 有独立增量性: 对任何$n > 1$ 和$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 随机变量$N(t_j) - N(t_{j-1})$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 相互独立,
- 则称$\{N(t)\}$ 是一个强度λ的**Poisson** 过程.
- $EN(t) = \lambda t$, $\mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t$.

例2.3 Poisson 过程

- 如果连续时的随机过程$\{N(t): t \in [0, \infty)\}$满足
- (1) $N(0) = 0$, 且对任何$s \geq 0, t > 0$ 和非负整数k,

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp[-\lambda t], (\lambda > 0)$$

- (2) $\{N(t)\}$ 有独立增量性: 对任何$n > 1$ 和$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 随机变量$N(t_j) - N(t_{j-1})$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 相互独立,
- 则称$\{N(t)\}$ 是一个强度λ的**Poisson** 过程.
- $\mathrm{E}N(t) = \lambda t$, $\mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t$.

例2.3 Poisson 过程

- 如果连续时的随机过程$\{N(t): t \in [0, \infty)\}$满足
- (1) $N(0) = 0$, 且对任何$s \geq 0, t > 0$ 和非负整数k,

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp[-\lambda t], (\lambda > 0)$$

- (2) $\{N(t)\}$ 有独立增量性: 对任何$n > 1$ 和$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 随机变量$N(t_j) - N(t_{j-1})$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 相互独立,
- 则称$\{N(t)\}$ 是一个强度λ的**Poisson 过程**.
- $\mathrm{E}N(t) = \lambda t$, $\mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t$.

例2.3 Poisson 过程

- 如果连续时的随机过程$\{N(t): t \in [0,\infty)\}$满足
- (1) $N(0)=0$, 且对任何$s \geq 0, t > 0$ 和非负整数k,

$$P(N(t+s)-N(s)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp[-\lambda t],(\lambda > 0)$$

- (2) $\{N(t)\}$ 有独立增量性: 对任何$n > 1$ 和$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 随机变量$N(t_j)-N(t_{j-1}), \quad j=1,2,\cdots,n$ 相互独立,
- 则称$\{N(t)\}$ 是一个强度λ的**Poisson 过程**.
- $\mathrm{E}N(t)=\lambda t$, $\mathrm{Var}(N(t))=\lambda t$.

Poisson白噪声

- 定义

$$\varepsilon_n = N(n+1) - N(n) - \lambda, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

- $\mathrm{E}\varepsilon_n = 0$,
- $\mathrm{Var}(\varepsilon_n) = \lambda$.
- $\{\varepsilon_n\}$ 是独立白噪声, 称为**Poisson白噪声**.
- ave和std表示样本平均和样本标准差。

Poisson白噪声

- 定义

$$\varepsilon_n = N(n+1) - N(n) - \lambda, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

- $\mathrm{E}\varepsilon_n = 0$,
- $\mathrm{Var}(\varepsilon_n) = \lambda$.
- $\{\varepsilon_n\}$ 是独立白噪声，称为**Poisson白噪声**.
- ave和std表示样本平均和样本标准差。

Poisson白噪声

- 定义

$$\varepsilon_n = N(n+1) - N(n) - \lambda, \quad n = 1, 2, \dots,$$

- $\mathrm{E}\varepsilon_n = 0$,
- $\mathrm{Var}(\varepsilon_n) = \lambda$.
- $\{\varepsilon_n\}$ 是独立白噪声，称为**Poisson**白噪声.
- ave和std表示样本平均和样本标准差。

Poisson白噪声

- 定义

$$\varepsilon_n = N(n+1) - N(n) - \lambda, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

- $\mathrm{E}\varepsilon_n = 0$,
- $\mathrm{Var}(\varepsilon_n) = \lambda$.
- $\{\varepsilon_n\}$ 是独立白噪声，称为**Poisson白噪声**.
- ave和std表示样本平均和样本标准差。

Poisson白噪声

- 定义

$$\varepsilon_n = N(n+1) - N(n) - \lambda, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

- $\mathrm{E}\varepsilon_n = 0,$
- $\mathrm{Var}(\varepsilon_n) = \lambda.$
- $\{\varepsilon_n\}$ 是独立白噪声，称为**Poisson白噪声**.
- ave和std表示样本平均和样本标准差。

布朗运动

- 如果连续时的随机过程$\{B(t): t \in [0, \infty)\}$满足
- (1) $B(0) = 0$, 且对任何$s \geq 0, t > 0$, $B(t+s) - B(s)$服从正态分布$N(0, t)$;
- (2) $\{B(t)\}$ 有独立增量性
- 则称$\{B(t)\}$是一个标准布朗运动.
- 定义

$$\varepsilon_n = B(n+1) - B(n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

则$\{\varepsilon_n\}$ 是一个标准正态白噪声.

布朗运动

- 如果连续时的随机过程$\{B(t): t \in [0, \infty)\}$满足
- (1) $B(0) = 0$, 且对任何$s \geq 0, t > 0$, $B(t+s) - B(s)$服从正态分布$N(0, t)$;
- (2) $\{B(t)\}$ 有独立增量性
- 则称$\{B(t)\}$是一个标准布朗运动.
- 定义

$$\varepsilon_n = B(n+1) - B(n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

则$\{\varepsilon_n\}$ 是一个标准正态白噪声.

布朗运动

- 如果连续时的随机过程$\{B(t): t \in [0, \infty)\}$满足
- (1) $B(0) = 0$, 且对任何$s \geq 0, t > 0$, $B(t+s) - B(s)$服从正态分布$N(0, t)$;
- (2) $\{B(t)\}$ 有独立增量性
- 则称$\{B(t)\}$是一个标准布朗运动.
- 定义

$$\varepsilon_n = B(n+1) - B(n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

则$\{\varepsilon_n\}$ 是一个标准正态白噪声.

布朗运动

- 如果连续时的随机过程$\{B(t): t \in [0, \infty)\}$满足
- (1) $B(0) = 0$, 且对任何$s \geq 0, t > 0$, $B(t+s) - B(s)$服从正态分布$N(0, t)$;
- (2) $\{B(t)\}$ 有独立增量性
- 则称$\{B(t)\}$是一个标准布朗运动.
- 定义

$$\varepsilon_n = B(n+1) - B(n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

则$\{\varepsilon_n\}$ 是一个标准正态白噪声.

布朗运动

- 如果连续时的随机过程$\{B(t): t \in [0,\infty)\}$满足
- (1) $B(0)=0$, 且对任何$s \geq 0, t>0$, $B(t+s)-B(s)$服从正态分布$N(0,t)$;
- (2) $\{B(t)\}$ 有独立增量性
- 则称$\{B(t)\}$是一个标准布朗运动.
- 定义

$$\varepsilon_n = B(n+1) - B(n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

则$\{\varepsilon_n\}$ 是一个标准正态白噪声.

随机相位

- $U_1, , U_2, \cdots$ iid $\text{U}(0, 2\pi)$.
- $$X_t = b\cos(at + U_t), \quad t \in \mathbb{Z},$$
  (a, b为常数)
- 则X_t 独立；
- $\text{E}X_t = 0$, $\text{Var}(X_t) = 0.5b^2$.
- X_t是独立白噪声。
- 演示: atsa01.r::demo.harmonic().

随机相位

- $U_1, , U_2, \cdots$ iid $\mathrm{U}(0, 2\pi)$.
-
$$X_t = b\cos(at + U_t), \quad t \in \mathbb{Z},$$
(a, b为常数)
- 则X_t 独立；
- $\mathrm{E}X_t = 0$, $\mathrm{Var}(X_t) = 0.5b^2$.
- X_t是独立白噪声。
- 演示: atsa01.r::demo.harmonic().

随机相位

- $U_1, , U_2, \cdots$ iid $\mathrm{U}(0, 2\pi)$.
- $$X_t = b\cos(at + U_t), \quad t \in \mathbb{Z},$$
  (a, b为常数)
- 则X_t 独立;
- $\mathrm{E}X_t = 0$, $\mathrm{Var}(X_t) = 0.5b^2$.
- X_t是独立白噪声。
- 演示: atsa01.r::demo.harmonic().

随机相位

- $U_1, , U_2, \cdots$ iid $\mathrm{U}(0, 2\pi)$.
- $$X_t = b\cos(at + U_t), \quad t \in \mathbb{Z},$$
  (a, b为常数)
- 则X_t 独立;
- $\mathrm{E}X_t = 0,\ \mathrm{Var}(X_t) = 0.5b^2$.
- X_t是独立白噪声。
- 演示: atsa01.r::demo.harmonic().

随机相位

- $U_1, , U_2, \cdots$ iid U$(0, 2\pi)$.
- $$X_t = b\cos(at + U_t), \quad t \in \mathbb{Z},$$
  (a, b为常数)
- 则X_t 独立；
- $\mathrm{E}X_t = 0$, $\mathrm{Var}(X_t) = 0.5b^2$.
- X_t是独立白噪声。
- 演示：atsa01.r::demo.harmonic().

随机相位

- $U_1, , U_2, \cdots$ iid $\mathrm{U}(0, 2\pi)$.
- $$X_t = b\cos(at + U_t), \quad t \in \mathbb{Z},$$
  (a, b为常数)
- 则X_t 独立；
- $\mathrm{E}X_t = 0$, $\mathrm{Var}(X_t) = 0.5b^2$.
- X_t是独立白噪声。
- 演示: atsa01.r::demo.harmonic().

正交和不相关

- 不相关：$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
- 正交：$\mathrm{E}(XY) = 0$.
- 对零均值随机变量正交与不相关等价。
- 对平稳列$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$，
  - 不相关：$\mathrm{Cov}(X_t, Y_s) = 0, \forall t, s$.
  - 正交：$\mathrm{E}(X_t Y_s) = 0, \forall t, s$.

正交和不相关

- 不相关：$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
- 正交：$\mathrm{E}(XY) = 0$.
- 对零均值随机变量正交与不相关等价。
- 对平稳列$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$，
  - 不相关: $\mathrm{Cov}(X_t, Y_s) = 0, \forall t, s$.
  - 正交：$\mathrm{E}(X_t Y_s) = 0, \forall t, s$.

正交和不相关

- 不相关：$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0.$
- 正交：$\mathrm{E}(XY) = 0.$
- 对零均值随机变量正交与不相关等价。
- 对平稳列$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$，
  - 不相关: $\mathrm{Cov}(X_t, Y_s) = 0, \forall t, s.$
  - 正交：$\mathrm{E}(X_t Y_s) = 0, \forall t, s.$

正交和不相关

- 不相关：$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
- 正交：$\mathrm{E}(XY) = 0$.
- 对零均值随机变量正交与不相关等价。
- 对平稳列$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$，
  - 不相关: $\mathrm{Cov}(X_t, Y_s) = 0, \forall t, s$.
  - 正交：$\mathrm{E}(X_t Y_s) = 0, \forall t, s$.

正交和不相关

- 不相关：$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
- 正交：$\mathrm{E}(XY) = 0$.
- 对零均值随机变量正交与不相关等价。
- 对平稳列$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$，
  - 不相关: $\mathrm{Cov}(X_t, Y_s) = 0, \forall t, s$.
  - 正交：$\mathrm{E}(X_t Y_s) = 0, \forall t, s$.

正交和不相关

- 不相关：$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
- 正交：$\mathrm{E}(XY) = 0$.
- 对零均值随机变量正交与不相关等价。
- 对平稳列$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$，
  - 不相关: $\mathrm{Cov}(X_t, Y_s) = 0, \forall t, s$.
  - 正交：$\mathrm{E}(X_t Y_s) = 0, \forall t, s$.

定理2.2

- 平稳列$\{X_t\}$, $\{Y_t\}$, 自协方差函数$\gamma_X(t)$, $\gamma_Y(t)$, 期望μ_X, μ_Y。

$$Z_t = X_t + Y_t, t \in \mathbb{Z}$$

- (1) 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$正交, 则$\{Z_t\}$是平稳序列, 有自协方差函数

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k) - 2\mu_X\mu_Y, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- (2) 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$不相关, 则$\{Z_t\}$是平稳序列, 有自协方差函数

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k), \ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

定理2.2

- 平稳列$\{X_t\}$, $\{Y_t\}$, 自协方差函数$\gamma_X(t)$, $\gamma_Y(t)$, 期望μ_X, μ_Y。
$$Z_t = X_t + Y_t, t \in \mathbb{Z}$$
- (1) 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$正交, 则$\{Z_t\}$是平稳序列, 有自协方差函数
$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k) - 2\mu_X\mu_Y, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
- (2) 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$不相关, 则$\{Z_t\}$是平稳序列, 有自协方差函数
$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k), \ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

定理2.2

- 平稳列$\{X_t\}$, $\{Y_t\}$, 自协方差函数$\gamma_X(t)$, $\gamma_Y(t)$, 期望μ_X, μ_Y。

$$Z_t = X_t + Y_t, t \in \mathbb{Z}$$

- (1) 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$正交, 则$\{Z_t\}$是平稳序列, 有自协方差函数

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k) - 2\mu_X\mu_Y, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- (2) 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$不相关, 则$\{Z_t\}$是平稳序列, 有自协方差函数

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k), \;\; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

有限运动平均

- 线性平稳序列是白噪声的线性组合得到的序列。
- 最简单的线性平稳序列是有限运动平均。
- 设$\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是WN$(0, \sigma^2)$. 对于非负整数q和常数$a_0, a_1, \ldots, a_q (a_0 \neq 0, a_q \neq 0)$, 我们称

$$X_t = \sum_{j=0}^{q} a_j \varepsilon_{t-j} = a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

是白噪声$\{\varepsilon_t\}$ 的(有限)运动平均, 简称为MA (Moving Average). 运动平均又称作滑动平均.

有限运动平均

- 线性平稳序列是白噪声的线性组合得到的序列。
- 最简单的线性平稳序列是有限运动平均。
- 设$\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是WN$(0, \sigma^2)$. 对于非负整数q和常数$a_0, a_1, \ldots, a_q (a_0 \neq 0, a_q \neq 0)$, 我们称

$$X_t = \sum_{j=0}^{q} a_j \varepsilon_{t-j} = a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

是白噪声$\{\varepsilon_t\}$ 的(有限)运动平均, 简称为MA (Moving Average). 运动平均又称作滑动平均.

有限运动平均

- 线性平稳序列是白噪声的线性组合得到的序列。
- 最简单的线性平稳序列是有限运动平均。
- 设$\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t: \ t \in \mathbb{Z}\}$ 是WN$(0, \sigma^2)$. 对于非负整数q和常数$a_0, a_1, \ldots, a_q (a_0 \neq 0, a_q \neq 0)$, 我们称

$$X_t = \sum_{j=0}^{q} a_j \varepsilon_{t-j} = a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

是白噪声$\{\varepsilon_t\}$ 的(有限)运动平均, 简称为MA (Moving Average). 运动平均又称作滑动平均.

MA的平稳性

- $$\mathrm{E}X_t = 0$$
- $$\mathrm{E}X_{t+k}X_t = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} a_j a_{j+k}, & 0 \le k \le q, \\ 0, & k > q \end{cases}$$
- $\{X_t\}$平稳。
- $\gamma_k = 0, \forall k > q$, 称这样的序列为$q$相关的。
- 随机变量有限平均到随机变量无穷级数的推广需要概率论的极限理论。

MA的平稳性

- $$\mathrm{E}X_t = 0$$
- $$\mathrm{E}X_{t+k}X_t = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} a_j a_{j+k}, & 0 \le k \le q, \\ 0, & k > q \end{cases}$$
- $\{X_t\}$平稳。
- $\gamma_k = 0, \forall k > q$, 称这样的序列为$q$相关的。
- 随机变量有限平均到随机变量无穷级数的推广需要概率论的极限理论。

MA的平稳性

- $$\mathrm{E}X_t = 0$$
- $$\mathrm{E}X_{t+k}X_t = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} a_j a_{j+k}, & 0 \le k \le q, \\ 0, & k > q \end{cases}$$
- $\{X_t\}$平稳。
- $\gamma_k = 0, \forall k > q$, 称这样的序列为$q$相关的。
- 随机变量有限平均到随机变量无穷级数的推广需要概率论的极限理论。

MA的平稳性

-
$$\mathrm{E}X_t = 0$$
-
$$\mathrm{E}X_{t+k}X_t = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} a_j a_{j+k}, & 0 \le k \le q, \\ 0, & k > q \end{cases}$$
- $\{X_t\}$平稳。
- $\gamma_k = 0, \forall k > q$, 称这样的序列为$q$相关的。
- 随机变量有限平均到随机变量无穷级数的推广需要概率论的极限理论。

MA的平稳性

- $$\mathrm{E}X_t = 0$$
- $$\mathrm{E}X_{t+k}X_t = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} a_j a_{j+k}, & 0 \le k \le q, \\ 0, & k > q \end{cases}$$
- $\{X_t\}$平稳。
- $\gamma_k = 0, \forall k > q$, 称这样的序列为$q$相关的。
- 随机变量有限平均到随机变量无穷级数的推广需要概率论的极限理论。

概率极限

- $\xi_n \sim F_n(x)$, $\xi \sim F(x)$。
- 如果在F的每个连续点x 有$F_n(x) \to F(x)$, 则称ξ_n**依分布收敛**到ξ, 记做$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$;
- 如果对任取$\epsilon > 0$ 有$P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \to 0$, 则称$\xi_n$**依概率收敛**到$\xi$, 或称$\xi_n$相合于$\xi$, 或$\xi_n$弱收敛到$\xi$, 记做$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$;
- 如果$E|\xi_n - \xi| \to 0$, 则称ξ_n L^1收敛到ξ (很少用);
- 如果$E|\xi_n - \xi|^2 \to 0$, 则称ξ_n L^2**收敛**到ξ, 或称ξ_n **均方收敛**到ξ, 记做$\xi_n \to \xi$ (L^2);
- 如果

$$P(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi) = 1$$

则称ξ_n **a.s.收敛**到ξ。

概率极限

- $\xi_n \sim F_n(x)$, $\xi \sim F(x)$。
- 如果在F的每个连续点x 有$F_n(x) \to F(x)$, 则称ξ_n**依分布收敛**到ξ, 记做$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$;
- 如果对任取$\epsilon > 0$ 有$P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \to 0$, 则称$\xi_n$**依概率收敛**到$\xi$, 或称$\xi_n$相合于$\xi$, 或$\xi_n$弱收敛到$\xi$, 记做$\xi_n \xrightarrow{\text{P}} \xi$;
- 如果$E|\xi_n - \xi| \to 0$, 则称ξ_n L^1收敛到ξ (很少用);
- 如果$E|\xi_n - \xi|^2 \to 0$, 则称ξ_n **L^2收敛**到ξ, 或称ξ_n **均方收敛**到ξ, 记做$\xi_n \to \xi$ (L^2);
- 如果

$$P(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi) = 1$$

则称ξ_n **a.s.收敛**到ξ。

概率极限

- $\xi_n \sim F_n(x)$, $\xi \sim F(x)$。
- 如果在F的每个连续点x 有$F_n(x) \to F(x)$, 则称ξ_n**依分布收敛**到ξ, 记做$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$;
- 如果对任取$\epsilon > 0$ 有$P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \to 0$, 则称$\xi_n$**依概率收敛**到$\xi$, 或称$\xi_n$相合于$\xi$, 或$\xi_n$弱收敛到$\xi$, 记做$\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$;
- 如果$E|\xi_n - \xi| \to 0$, 则称ξ_n L^1收敛到ξ (很少用);
- 如果$E|\xi_n - \xi|^2 \to 0$, 则称ξ_n L^2**收敛**到ξ, 或称ξ_n **均方收敛**到ξ, 记做$\xi_n \to \xi$ (L^2);
- 如果

$$P(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi) = 1$$

则称ξ_n **a.s.收敛**到ξ。

概率极限

- $\xi_n \sim F_n(x)$, $\xi \sim F(x)$。
- 如果在F的每个连续点x 有$F_n(x) \to F(x)$, 则称ξ_n**依分布收敛**到ξ, 记做$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$;
- 如果对任取$\epsilon > 0$ 有$P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \to 0$, 则称$\xi_n$**依概率收敛**到$\xi$, 或称$\xi_n$相合于$\xi$, 或$\xi_n$弱收敛到$\xi$, 记做$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$;
- 如果$E|\xi_n - \xi| \to 0$, 则称ξ_n L^1收敛到ξ (很少用);
- 如果$E|\xi_n - \xi|^2 \to 0$, 则称ξ_n L^2**收敛**到ξ, 或称ξ_n **均方收敛**到ξ, 记做$\xi_n \to \xi$ (L^2);
- 如果

$$P(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi) = 1$$

则称ξ_n **a.s.收敛**到ξ。

概率极限

- $\xi_n \sim F_n(x)$, $\xi \sim F(x)$。
- 如果在F的每个连续点x 有$F_n(x) \to F(x)$, 则称ξ_n**依分布收敛**到ξ, 记做$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$;
- 如果对任取$\epsilon > 0$ 有$P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \to 0$, 则称$\xi_n$**依概率收敛**到$\xi$, 或称$\xi_n$相合于$\xi$, 或$\xi_n$弱收敛到$\xi$, 记做$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$;
- 如果$E|\xi_n - \xi| \to 0$, 则称ξ_n L^1收敛到ξ (很少用);
- 如果$E|\xi_n - \xi|^2 \to 0$, 则称ξ_n L^2**收敛**到ξ, 或称ξ_n **均方收敛**到ξ, 记做$\xi_n \to \xi$ (L^2);
- 如果

$$P(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi) = 1$$

则称ξ_n **a.s.收敛**到ξ。

概率极限

- $\xi_n \sim F_n(x)$, $\xi \sim F(x)$。
- 如果在F的每个连续点x 有$F_n(x) \to F(x)$, 则称ξ_n**依分布收敛**到ξ, 记做$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$;
- 如果对任取$\epsilon > 0$ 有$P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \to 0$, 则称$\xi_n$**依概率收敛**到$\xi$, 或称$\xi_n$相合于$\xi$, 或$\xi_n$弱收敛到$\xi$, 记做$\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$;
- 如果$E|\xi_n - \xi| \to 0$, 则称ξ_n L^1收敛到ξ (很少用);
- 如果$E|\xi_n - \xi|^2 \to 0$, 则称ξ_n L^2**收敛**到ξ, 或称ξ_n **均方收敛**到ξ, 记做$\xi_n \to \xi$ (L^2);
- 如果

$$P(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi) = 1$$

则称ξ_n **a.s.收敛**到ξ。

- 定理4.2 L^2收敛$\Rightarrow$ L^1收敛$\Rightarrow$ 依概率收敛$\Rightarrow$ 依分布收敛。
- (证明自学)
- 另外，a.s.收敛$\Rightarrow$ 依概率收敛$\Rightarrow$ 依分布收敛。

- **定理4.2** L^2收敛$\Rightarrow$ L^1收敛$\Rightarrow$ 依概率收敛$\Rightarrow$ 依分布收敛。
- (证明自学)
- 另外，a.s.收敛$\Rightarrow$ 依概率收敛$\Rightarrow$ 依分布收敛。

- **定理4.2** L^2收敛$\Rightarrow$ L^1收敛$\Rightarrow$ 依概率收敛$\Rightarrow$ 依分布收敛。
- (证明自学)
- 另外，a.s.收敛$\Rightarrow$ 依概率收敛$\Rightarrow$ 依分布收敛。

概率极限定理

- **定理3.1** (单调收敛定理) 如果非负随机变量序列单调不减: $0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \cdots$, 则当$\xi_n \to \xi$, a.s. 时, 有$E\xi = \lim_{n\to\infty} E\xi_n$.
- 广义随机变量: 可以取值$\pm\infty$.
- 对于任何时间序列$\{Y_t\}$, 利用单调收敛定理得到

$$E\Big[\sum_{t=-\infty}^{\infty} |Y_t|\Big] = \lim_{n\to\infty} E\Big[\sum_{t=-n}^{n} |Y_t|\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{t=-n}^{n} E|Y_t| = \sum_{t=-\infty}^{\infty} E|Y_t|.$$

- **定理3.2** (控制收敛定理) 如果随机变量序列$\{\xi_n\}$满足$|\xi_n| \le \xi_0$ a.s. 和$E|\xi_0| < \infty$, 则当$\xi_n \to \xi$, $a.s.$时, $E|\xi| < \infty$ 并且$E\xi_n \to E\xi$.
- 在定理3.1和定理3.2条件下,

$$\lim_{n\to\infty} E\xi_n = E \lim_{n\to\infty} \xi_n.$$

概率极限定理

- **定理3.1** (单调收敛定理) 如果非负随机变量序列单调不减: $0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \cdots$, 则当$\xi_n \to \xi$, a.s. 时, 有$E\xi = \lim_{n\to\infty} E\xi_n$.
- 广义随机变量：可以取值$\pm\infty$.
- 对于任何时间序列$\{Y_t\}$, 利用单调收敛定理得到

$$E\Big[\sum_{t=-\infty}^{\infty} |Y_t|\Big] = \lim_{n\to\infty} E\Big[\sum_{t=-n}^{n} |Y_t|\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{t=-n}^{n} E|Y_t| = \sum_{t=-\infty}^{\infty} E|Y_t|.$$

- **定理3.2** (控制收敛定理) 如果随机变量序列$\{\xi_n\}$满足$|\xi_n| \le \xi_0$ a.s. 和$E|\xi_0| < \infty$, 则当$\xi_n \to \xi$, a.s.时, $E|\xi| < \infty$ 并且$E\xi_n \to E\xi$.
- 在定理3.1和定理3.2条件下,

$$\lim_{n\to\infty} E\xi_n = E \lim_{n\to\infty} \xi_n.$$

概率极限定理

- **定理3.1** (单调收敛定理) 如果非负随机变量序列单调不减: $0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \cdots$, 则当$\xi_n \to \xi$, a.s. 时, 有$E\xi = \lim_{n\to\infty} E\xi_n$.
- 广义随机变量：可以取值$\pm\infty$.
- 对于任何时间序列$\{Y_t\}$, 利用单调收敛定理得到

$$E\Big[\sum_{t=-\infty}^{\infty}|Y_t|\Big] = \lim_{n\to\infty} E\Big[\sum_{t=-n}^{n}|Y_t|\Big] = \lim_{n\to\infty}\sum_{t=-n}^{n} E|Y_t| = \sum_{t=-\infty}^{\infty} E|Y_t|.$$

- **定理3.2** (控制收敛定理) 如果随机变量序列$\{\xi_n\}$满足$|\xi_n| \le \xi_0$ a.s. 和$E|\xi_0| < \infty$, 则当$\xi_n \to \xi$, $a.s.$时, $E|\xi| < \infty$ 并且$E\xi_n \to E\xi$.
- 在定理3.1和定理3.2条件下,

$$\lim_{n\to\infty} E\xi_n = E \lim_{n\to\infty} \xi_n.$$

概率极限定理

- **定理3.1** (单调收敛定理) 如果非负随机变量序列单调不减: $0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \cdots$, 则当$\xi_n \to \xi$, a.s. 时, 有$E\xi = \lim_{n\to\infty} E\xi_n$.
- 广义随机变量：可以取值$\pm\infty$.
- 对于任何时间序列$\{Y_t\}$, 利用单调收敛定理得到

$$E\Big[\sum_{t=-\infty}^{\infty}|Y_t|\Big] = \lim_{n\to\infty} E\Big[\sum_{t=-n}^{n}|Y_t|\Big] = \lim_{n\to\infty}\sum_{t=-n}^{n} E|Y_t| = \sum_{t=-\infty}^{\infty} E|Y_t|.$$

- **定理3.2** (控制收敛定理) 如果随机变量序列$\{\xi_n\}$满足$|\xi_n| \le \xi_0$ a.s. 和$E|\xi_0| < \infty$, 则当$\xi_n \to \xi$, $a.s.$时, $E|\xi| < \infty$ 并且$E\xi_n \to E\xi$.
- 在定理3.1和定理3.2条件下，

$$\lim_{n\to\infty} E\xi_n = E \lim_{n\to\infty} \xi_n.$$

概率极限定理

- **定理3.1** (单调收敛定理) 如果非负随机变量序列单调不减: $0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \cdots$, 则当$\xi_n \to \xi$, a.s. 时, 有$E\xi = \lim_{n\to\infty} E\xi_n$.
- 广义随机变量：可以取值$\pm\infty$.
- 对于任何时间序列$\{Y_t\}$, 利用单调收敛定理得到

$$
\begin{aligned}
E\Big[\sum_{t=-\infty}^{\infty}|Y_t|\Big] &= \lim_{n\to\infty} E\Big[\sum_{t=-n}^{n}|Y_t|\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{t=-n}^{n} E|Y_t| = \sum_{t=-\infty}^{\infty} E|Y_t|.
\end{aligned}
$$

- **定理3.2** (控制收敛定理) 如果随机变量序列$\{\xi_n\}$满足$|\xi_n| \le \xi_0$ a.s. 和$E|\xi_0| < \infty$, 则当$\xi_n \to \xi$, $a.s.$时, $E|\xi| < \infty$ 并且$E\xi_n \to E\xi$.
- 在定理3.1和定理3.2条件下，

$$
\lim_{n\to\infty} E\xi_n = E \lim_{n\to\infty} \xi_n.
$$

线性平稳序列

- 绝对可和: 如果实数列$\{a_j\}$ 满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

则称$\{a_j\}$是绝对可和的. 记$\{a_j\} \in l_1$.

- 注意: $\{a_j\} \in l_1$则$\{a_j\} \in l_2$ (即$\sum_j a_j^2 < \infty$).
- 对于绝对可和的实数列$\{a_j\}$, 定义零均值白噪声$\{\varepsilon_t\}$的无穷滑动和如下

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- 则$\{X_t\}$是平稳序列。
- $\mathrm{E}X_t = 0$.
- $\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}, k \in \mathbb{Z}$.

线性平稳序列

- 绝对可和: 如果实数列$\{a_j\}$ 满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

则称$\{a_j\}$是绝对可和的. 记$\{a_j\} \in l_1$.
- 注意: $\{a_j\} \in l_1$则$\{a_j\} \in l_2$ (即$\sum_j a_j^2 < \infty$).
- 对于绝对可和的实数列$\{a_j\}$, 定义零均值白噪声$\{\varepsilon_t\}$的无穷滑动和如下

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- 则$\{X_t\}$是平稳序列。
- $\mathrm{E}X_t = 0$.
- $\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}, k \in \mathbb{Z}$.

线性平稳序列

- 绝对可和: 如果实数列$\{a_j\}$ 满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

则称$\{a_j\}$是绝对可和的. 记$\{a_j\} \in l_1$.

- 注意: $\{a_j\} \in l_1$则$\{a_j\} \in l_2$ (即$\sum_j a_j^2 < \infty$).
- 对于绝对可和的实数列$\{a_j\}$, 定义零均值白噪声$\{\varepsilon_t\}$的无穷滑动和如下

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- 则$\{X_t\}$是平稳序列。
- $\mathrm{E}X_t = 0$.
- $\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}, k \in \mathbb{Z}$.

线性平稳序列

- 绝对可和: 如果实数列$\{a_j\}$ 满足
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty,$$
则称$\{a_j\}$是绝对可和的. 记$\{a_j\} \in l_1$.
- 注意: $\{a_j\} \in l_1$则$\{a_j\} \in l_2$ (即$\sum_j a_j^2 < \infty$).
- 对于绝对可和的实数列$\{a_j\}$, 定义零均值白噪声$\{\varepsilon_t\}$的无穷滑动和如下
$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$
- 则$\{X_t\}$是平稳序列。
- $\mathrm{E}X_t = 0.$
- $\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}, k \in \mathbb{Z}.$

线性平稳序列

- 绝对可和: 如果实数列$\{a_j\}$ 满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

则称$\{a_j\}$是绝对可和的. 记$\{a_j\} \in l_1$.

- 注意: $\{a_j\} \in l_1$则$\{a_j\} \in l_2$ (即$\sum_j a_j^2 < \infty$).
- 对于绝对可和的实数列$\{a_j\}$, 定义零均值白噪声$\{\varepsilon_t\}$的无穷滑动和如下

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- 则$\{X_t\}$是平稳序列。
- $\mathrm{E}X_t = 0.$
- $\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}, k \in \mathbb{Z}.$

线性平稳序列

- 绝对可和: 如果实数列$\{a_j\}$ 满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

则称$\{a_j\}$是绝对可和的. 记$\{a_j\} \in l_1$.

- 注意: $\{a_j\} \in l_1$则$\{a_j\} \in l_2$ (即$\sum_j a_j^2 < \infty$).
- 对于绝对可和的实数列$\{a_j\}$, 定义零均值白噪声$\{\varepsilon_t\}$的无穷滑动和如下

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- 则$\{X_t\}$是平稳序列。
- $\mathrm{E}X_t = 0$.
- $\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}, k \in \mathbb{Z}$.

线性序列的a.s.收敛性

- $\{X_t\}$有定义？
- 设

$$\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j||\varepsilon_{t-j}|$$

则η有定义（允许取$+\infty$）；
- 又由单调收敛定理得

$$\mathrm{E}\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|\mathrm{E}|\varepsilon_{t-j}| \le \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$$

- 因此$\eta < \infty$, a.s.(否则$\mathrm{E}\eta = +\infty$)。

线性序列的a.s.收敛性

- $\{X_t\}$有定义？
- 设

$$\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j||\varepsilon_{t-j}|$$

则η有定义（允许取$+\infty$）；

- 又由单调收敛定理得

$$\mathrm{E}\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|\mathrm{E}|\varepsilon_{t-j}| \le \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$$

- 因此$\eta < \infty$, a.s.(否则$\mathrm{E}\eta = +\infty$)。

线性序列的a.s.收敛性

- $\{X_t\}$有定义？
- 设

$$\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j||\varepsilon_{t-j}|$$

则η有定义（允许取$+\infty$）；
- 又由单调收敛定理得

$$\mathrm{E}\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|\mathrm{E}|\varepsilon_{t-j}| \le \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$$

- 因此$\eta < \infty$, a.s.(否则$\mathrm{E}\eta = +\infty$)。

线性序列的a.s.收敛性

- $\{X_t\}$有定义？
- 设

$$\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j||\varepsilon_{t-j}|$$

则η有定义（允许取$+\infty$）；
- 又由单调收敛定理得

$$\mathrm{E}\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|\mathrm{E}|\varepsilon_{t-j}| \le \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$$

- 因此$\eta < \infty$, a.s.(否则$\mathrm{E}\eta = +\infty$)。

线性序列的a.s.收敛性II

- 由$\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j||\varepsilon_{t-j}| < \infty$(a.s.)，在概率空间中除去一个零测集的意义下级数

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$$

处处绝对收敛(称为a.s.绝对收敛);

- 所以，此级数a.s.收敛到一个随机变量X_t,

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \qquad (*)$$

在a.s.收敛意义下存在。

线性序列的a.s.收敛性II

- 由$\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j||\varepsilon_{t-j}| < \infty$(a.s.), 在概率空间中除去一个零测集的意义下级数

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$$

处处绝对收敛(称为a.s.绝对收敛);
- 所以, 此级数a.s.收敛到一个随机变量X_t,

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \qquad (*)$$

在a.s.收敛意义下存在。

线性序列的L^1收敛性

(*) 在L^1意义下也是收敛的，因为

$$\mathrm{E}\left|\sum_{|j|>N} a_j\varepsilon_{t-j}\right| \le \sum_{|j|>N} |a_j|\mathrm{E}|\varepsilon_{t-j}| \le \sigma \sum_{|j|>N} |a_j| \to 0$$

线性序列的L^1收敛性

(*) 在L^1意义下也是收敛的，因为

$$\mathrm{E}\left|\sum_{|j|>N} a_j \varepsilon_{t-j}\right| \le \sum_{|j|>N} |a_j| \mathrm{E}|\varepsilon_{t-j}| \le \sigma \sum_{|j|>N} |a_j| \to 0$$

线性序列的L^1收敛性

(*) 在L^1意义下也是收敛的，因为

$$\mathrm{E}\left|\sum_{|j|>N} a_j \varepsilon_{t-j}\right| \le \sum_{|j|>N} |a_j| \mathrm{E}|\varepsilon_{t-j}| \le \sigma \sum_{|j|>N} |a_j| \to 0$$

线性序列的L^1收敛性

(*) 在L^1意义下也是收敛的，因为

$$\mathrm{E}\left|\sum_{|j|>N} a_j \varepsilon_{t-j}\right| \leq \sum_{|j|>N} |a_j| \mathrm{E}|\varepsilon_{t-j}| \leq \sigma \sum_{|j|>N} |a_j| \to 0$$

线性序列的平稳性

由$\sum_j |a_j|\mathrm{E}|\varepsilon_{t-j}| < \infty$及控制收敛定理得

$$\mathrm{E}\sum_j a_j\varepsilon_{t-j} = \sum_j a_j\mathrm{E}\varepsilon_{t-j} = 0$$

线性序列的平稳性

由$\sum_j |a_j| \mathrm{E}|\varepsilon_{t-j}| < \infty$及控制收敛定理得

$$\mathrm{E}\sum_j a_j \varepsilon_{t-j} = \sum_j a_j \mathrm{E}\varepsilon_{t-j} = 0$$

线性序列的平稳性II

令

$$V=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}|a_j||a_l||\epsilon_{t-j}||\epsilon_{t+k-l}|$$

则

$$\mathrm{E}V=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}|a_j||a_l|\mathrm{E}|\epsilon_{t-j}||\epsilon_{t+k-l}|$$

$$\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}|a_j||a_l|\sigma^2=\sigma^2\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|\right)^2<\infty$$

线性序列的平稳性II

令

$$V=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}|a_j||a_l||\epsilon_{t-j}||\epsilon_{t+k-l}|$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}|a_j||a_l|\mathrm{E}|\epsilon_{t-j}||\epsilon_{t+k-l}|\\&\le\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}|a_j||a_l|\sigma^2=\sigma^2\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|\right)^2<\infty\end{aligned}$$

线性序列的平稳性II

令

$$V = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_j||a_l||\epsilon_{t-j}||\epsilon_{t+k-l}|$$

则

$$\mathrm{E}V = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_j||a_l|\mathrm{E}|\epsilon_{t-j}||\epsilon_{t+k-l}|$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_j||a_l|\sigma^2 = \sigma^2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| \right)^2 < \infty$$

线性序列的平稳性III

由控制收敛定理得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X_tX_{t+k} &= \mathrm{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\varepsilon_{t+k-l} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_ja_l\mathrm{E}(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+k-l}) \\
&= \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_ja_{j+k}
\end{aligned}
$$

即$\{X_t\}$是平稳序列, $\mathrm{E}X_t = 0$, $\gamma_k = \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_ja_{j+k}$.

线性序列的平稳性III

由控制收敛定理得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X_tX_{t+k} &= \mathrm{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\varepsilon_{t+k-l} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_ja_l\mathrm{E}(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+k-l}) \\
&= \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_ja_{j+k}
\end{aligned}
$$

即$\{X_t\}$是平稳序列，$\mathrm{E}X_t = 0$，$\gamma_k = \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_ja_{j+k}$.

线性序列的平稳性III

由控制收敛定理得

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_tX_{t+k} &= \mathrm{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\varepsilon_{t+k-l} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_ja_l\mathrm{E}(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+k-l}) \\ &= \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_ja_{j+k} \end{aligned}$$

即$\{X_t\}$是平稳序列, $\mathrm{E}X_t = 0$，$\gamma_k = \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_ja_{j+k}$.

线性序列的平稳性III

由控制收敛定理得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X_tX_{t+k} &= \mathrm{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\varepsilon_{t+k-l} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_ja_l\mathrm{E}(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+k-l}) \\
&= \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_ja_{j+k}
\end{aligned}
$$

即$\{X_t\}$是平稳序列，$\mathrm{E}X_t=0$， $\gamma_k=\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_ja_{j+k}$.

均方意义的的线性序列

- 设$\{a_j\} \in l_2$则

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \ (L^2) \qquad (**)$$

也是平稳序列。期望为零，自协方差函数同上。

- X_t定义的无穷级数是L^2收敛的。证明需要应用Hilbert空间性质。见1.6节例6.3。
- 注意$\{a_j\} \in L_1 \Longrightarrow \{a_j\} \in L_2$。

均方意义的的线性序列

- 设$\{a_j\} \in l_2$则

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \ (L^2) \qquad (**)$$

  也是平稳序列。期望为零，自协方差函数同上。
- X_t定义的无穷级数是L^2收敛的。证明需要应用Hilbert空间性质。见1.6节例6.3。
- 注意$\{a_j\} \in L_1 \Longrightarrow \{a_j\} \in L_2$。

均方意义的的线性序列

- 设$\{a_j\} \in l_2$则

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \ (L^2) \qquad (**)$$

  也是平稳序列。期望为零，自协方差函数同上。
- X_t定义的无穷级数是L^2收敛的。证明需要应用Hilbert空间性质。见1.6节例6.3。
- 注意$\{a_j\} \in L_1 \Longrightarrow \{a_j\} \in L_2$。

l_1系数的线性平稳列的自协方差函数的收敛性

当$\{a_j\} \in l_1$时

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$$

. 事实上，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| \le \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j a_{j+k}|$$

$$= \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{j+k}| = \sigma^2 (\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|)^2 < \infty$$

l_1系数的线性平稳列的自协方差函数的收敛性

当$\{a_j\} \in l_1$时

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$$

. 事实上，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| \le \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j a_{j+k}|$$

$$= \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{j+k}| = \sigma^2 (\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|)^2 < \infty$$

l_1系数的线性平稳列的自协方差函数的收敛性

当$\{a_j\} \in l_1$时

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$$

. 事实上，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| \le \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j a_{j+k}|$$

$$= \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{j+k}| = \sigma^2 (\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|)^2 < \infty$$

l_1系数的线性平稳列的自协方差函数的收敛性

当$\{a_j\} \in l_1$时

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$$

. 事实上，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| \leq \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j a_{j+k}|$$

$$= \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{j+k}| = \sigma^2 (\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|)^2 < \infty$$

l_2系数的线性平稳列的自协方差函数的收敛性

当$\{a_j\} \in l_2$时，有

定理3.3 自协方差函数$\lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0$.

证明：利用Cauchy不等式$|\sum a_j b_j| \le \left(\sum a_j^2 \sum b_j^2\right)^{1/2}$ **得到**

$$
\begin{aligned}
|\gamma_k| =&\sigma^2 \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k} \right| \\
\le&\sigma^2 \sum_{|j|\le k/2} |a_j a_{j+k}| + \sigma^2 \sum_{|j|>k/2} |a_j a_{j+k}| \\
\le&\sigma^2 \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 \sum_{|j|\le k/2} a_{j+k}^2 \right]^{1/2} + \sigma^2 \left[\sum_{|j|>k/2} a_j^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 \right]^{1/2} \\
\le&2\sigma^2 \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{|j|\ge k/2} a_j^2 \right]^{1/2} \to 0 \quad (k \to \infty)
\end{aligned}
$$

线性序列的应用

线性序列描述了自协方差函数衰减到零的时间序列。只要样本自协方差函数衰减到零就可以用线性序列来描述。

单边线性序列

- $$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- 称为单边运动平均(MA)，或单边无穷滑动和。
- 这样的X_t有因果性：X_t只受$s \leq t$的ε_s影响而不受t时刻以后的ε_s影响。
- $$\gamma_k = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+k}, & k \geq 0 \\ \gamma_{-k} & k < 0 \end{cases}$$

单边线性序列

- $$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j},\ t \in \mathbb{Z}$$
- 称为单边运动平均(MA)，或单边无穷滑动和。
- 这样的X_t有因果性：X_t只受$s \le t$的ε_s影响而不受t时刻以后的ε_s影响。
- $$\gamma_k = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+k}, & k \ge 0 \\ \gamma_{-k} & k < 0 \end{cases}$$

单边线性序列

- $$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- 称为单边运动平均(MA)，或单边无穷滑动和。
- 这样的X_t有因果性：X_t只受$s \le t$的ε_s影响而不受t时刻以后的ε_s影响。
- $$\gamma_k = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+k}, & k \ge 0 \\ \gamma_{-k} & k < 0 \end{cases}$$

单边线性序列

- $$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- 称为单边运动平均(MA)，或单边无穷滑动和。
- 这样的X_t有因果性：X_t只受$s \leq t$的ε_s影响而不受t时刻以后的ε_s影响。
- $$\gamma_k = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+k}, & k \geq 0 \\ \gamma_{-k} & k < 0 \end{cases}$$

时间序列的线性滤波

- 对序列$\{X_t\}$进行滑动求和：

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

称为对$\{X_t\}$进行线性滤波。
- 其中绝对可和的$\{h_j\}$称为一个保时线性滤波器。
- 如果输入信号$\{X_t\}$是平稳列则输出$\{Y_t\}$也是平稳列。
- 关于线性滤波§2.1和§2.2还有进一步讨论。

时间序列的线性滤波

- 对序列$\{X_t\}$进行滑动求和：

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

  称为对$\{X_t\}$进行线性滤波。
- 其中绝对可和的$\{h_j\}$称为一个保时线性滤波器。
- 如果输入信号$\{X_t\}$是平稳列则输出$\{Y_t\}$也是平稳列。
- 关于线性滤波§2.1和§2.2还有进一步讨论。

时间序列的线性滤波

- 对序列$\{X_t\}$进行滑动求和：

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

  称为对$\{X_t\}$进行线性滤波。
- 其中绝对可和的$\{h_j\}$称为一个保时线性滤波器。
- 如果输入信号$\{X_t\}$是平稳列则输出$\{Y_t\}$也是平稳列。
- 关于线性滤波§2.1和§2.2还有进一步讨论。

时间序列的线性滤波

- 对序列$\{X_t\}$进行滑动求和：

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

称为对$\{X_t\}$进行线性滤波。
- 其中绝对可和的$\{h_j\}$称为一个保时线性滤波器。
- 如果输入信号$\{X_t\}$是平稳列则输出$\{Y_t\}$也是平稳列。
- 关于线性滤波§2.1和§2.2还有进一步讨论。

- $$\mu_Y = \mathrm{E}Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \mathrm{E}X_{t-j} = \mu_X \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j$$

- $$\begin{aligned} \gamma_Y(n) &= \mathrm{Cov}(Y_{n+1}, Y_1) \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} h_j h_k E[(X_{n+1-j} - \mu)(X_{1-k} - \mu)] \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} h_j h_k \gamma_{n+k-j} \end{aligned}$$

- $$\mu_Y = \mathrm{E}Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \mathrm{E}X_{t-j} = \mu_X \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j$$
- $$\begin{aligned}\gamma_Y(n) &= \mathrm{Cov}(Y_{n+1}, Y_1) \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} h_j h_k E[(X_{n+1-j} - \mu)(X_{1-k} - \mu)] \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} h_j h_k \gamma_{n+k-j}\end{aligned}$$

矩形窗滤波器

- 取

$$h_j = \begin{cases} \frac{1}{2M+1}, & |j| \le M \\ 0, & |j| > M. \end{cases}$$

- 则

$$Y_t = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} x_{t-j}$$

- 是X_t的滑动平均。可以平滑$\{X_t\}$，抑制高频信号。
- 高频信号表现是粗糙和复杂的曲线，低频信号表现为缓慢和光滑的变化。

矩形窗滤波器

- 取

$$h_j = \begin{cases} \frac{1}{2M+1}, & |j| \le M \\ 0, & |j| > M. \end{cases}$$

- 则

$$Y_t = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} x_{t-j}$$

- 是X_t的滑动平均。可以平滑$\{X_t\}$，抑制高频信号。
- 高频信号表现是粗糙和复杂的曲线，低频信号表现为缓慢和光滑的变化。

矩形窗滤波器

- 取

$$h_j = \begin{cases} \frac{1}{2M+1}, & |j| \le M \\ 0, & |j| > M. \end{cases}$$

- 则

$$Y_t = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} x_{t-j}$$

- 是X_t的滑动平均。可以平滑$\{X_t\}$，抑制高频信号。
- 高频信号表现是粗糙和复杂的曲线，低频信号表现为缓慢和光滑的变化。

矩形窗滤波器

- 取

$$h_j = \begin{cases} \frac{1}{2M+1}, & |j| \leq M \\ 0, & |j| > M. \end{cases}$$

- 则

$$Y_t = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} x_{t-j}$$

- 是X_t的滑动平均。可以平滑$\{X_t\}$，抑制高频信号。
- 高频信号表现是粗糙和复杂的曲线，低频信号表现为缓慢和光滑的变化。

例3.1 余弦波信号的滤波

- $$X_t = S_t + \varepsilon_t = b\cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- $U \sim \mathrm{U}(0, 2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$零均值平稳, U与$\{\varepsilon_t\}$独立。
- 信号$\{S_t\}$方差$b^2/2$，噪声$\{\varepsilon_t\}$方差σ^2, 信噪比$b^2/(2\sigma^2)$。
- 作矩形窗滤波:

$$Y_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} X_{t-j}$$
$$= \frac{b\sin[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin(\omega/2)}\cos(\omega t + U) + \eta_t$$
$$\eta_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} \varepsilon_{t-j}$$

例3.1 余弦波信号的滤波

- $$X_t = S_t + \varepsilon_t = b\cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- $U \sim \mathrm{U}(0, 2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$零均值平稳, U与$\{\varepsilon_t\}$独立。
- 信号$\{S_t\}$方差$b^2/2$，噪声$\{\varepsilon_t\}$方差σ^2, 信噪比$b^2/(2\sigma^2)$。
- 作矩形窗滤波:

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} X_{t-j} \\ &= \frac{b\sin[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin(\omega/2)}\cos(\omega t + U) + \eta_t \end{aligned}$$

$$\eta_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} \varepsilon_{t-j}$$

例3.1 余弦波信号的滤波

- $$X_t = S_t + \varepsilon_t = b\cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- $U \sim$U$(0, 2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$零均值平稳, U与$\{\varepsilon_t\}$独立。
- 信号$\{S_t\}$方差$b^2/2$，噪声$\{\varepsilon_t\}$方差σ^2, 信噪比$b^2/(2\sigma^2)$。
- 作矩形窗滤波:

$$Y_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} X_{t-j}$$
$$= \frac{b\sin[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin(\omega/2)}\cos(\omega t + U) + \eta_t$$
$$\eta_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} \varepsilon_{t-j}$$

例3.1 余弦波信号的滤波

- $$X_t = S_t + \varepsilon_t = b\cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
- $U \sim \mathrm{U}(0, 2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$零均值平稳, U与$\{\varepsilon_t\}$独立。
- 信号$\{S_t\}$方差$b^2/2$，噪声$\{\varepsilon_t\}$方差σ^2, 信噪比$b^2/(2\sigma^2)$。
- 作矩形窗滤波:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} X_{t-j} \\
&= \frac{b\sin[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin(\omega/2)} \cos(\omega t + U) + \eta_t \\
\eta_t &= \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} \varepsilon_{t-j}
\end{aligned}
$$

例3.1 余弦波信号的滤波(续)

- 除了η_t项之外，结果与原始信号相比只有幅度有了成比例变化。
- 演示：atsa01.r::demo.mafilt()。
- $\mathrm{Var}(\eta_t) = \frac{\sigma^2}{2M+1}$.
- 新的信噪比为

$$\frac{b^2}{2\sigma^2} \frac{\sin^2[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin^2(\omega/2)}.$$

- 特别当$\omega(M+0.5) = \pi/2$时信噪比为

$$\frac{b^2\omega}{2\pi\sigma^2 \sin^2(\omega/2)} > \frac{2b^2}{\pi\omega\sigma^2} = \frac{b^2}{2\sigma^2} \cdot \frac{4}{\pi\omega}$$

- 信噪比至少增大到$4/(\pi\omega)$倍，ω越小信噪比提高越多。
- ω越小，M应越大。

例3.1 余弦波信号的滤波(续)

- 除了η_t项之外，结果与原始信号相比只有幅度有了成比例变化。
- 演示：atsa01.r::demo.mafilt()。
- $\text{Var}(\eta_t) = \frac{\sigma^2}{2M+1}$.
- 新的信噪比为

$$\frac{b^2}{2\sigma^2} \frac{\sin^2[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin^2(\omega/2)}.$$

- 特别当$\omega(M+0.5) = \pi/2$时信噪比为

$$\frac{b^2\omega}{2\pi\sigma^2\sin^2(\omega/2)} > \frac{2b^2}{\pi\omega\sigma^2} = \frac{b^2}{2\sigma^2} \cdot \frac{4}{\pi\omega}$$

- 信噪比至少增大到$4/(\pi\omega)$倍，ω越小信噪比提高越多。
- ω越小，M应越大。

例3.1 余弦波信号的滤波(续)

- 除了η_t项之外，结果与原始信号相比只有幅度有了成比例变化。
- 演示: atsa01.r::demo.mafilt()。
- $\text{Var}(\eta_t) = \frac{\sigma^2}{2M+1}$.
- 新的信噪比为

$$\frac{b^2}{2\sigma^2} \frac{\sin^2[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin^2(\omega/2)}.$$

- 特别当$\omega(M+0.5) = \pi/2$时信噪比为

$$\frac{b^2\omega}{2\pi\sigma^2\sin^2(\omega/2)} > \frac{2b^2}{\pi\omega\sigma^2} = \frac{b^2}{2\sigma^2} \cdot \frac{4}{\pi\omega}$$

- 信噪比至少增大到$4/(\pi\omega)$倍，ω越小信噪比提高越多。
- ω越小，M应越大。

例3.1 余弦波信号的滤波(续)

- 除了η_t项之外，结果与原始信号相比只有幅度有了成比例变化。
- 演示：atsa01.r::demo.mafilt()。
- $\text{Var}(\eta_t) = \frac{\sigma^2}{2M+1}$.
- 新的信噪比为

$$\frac{b^2}{2\sigma^2} \frac{\sin^2[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin^2(\omega/2)}.$$

- 特别当$\omega(M+0.5) = \pi/2$时信噪比为

$$\frac{b^2\omega}{2\pi\sigma^2\sin^2(\omega/2)} > \frac{2b^2}{\pi\omega\sigma^2} = \frac{b^2}{2\sigma^2}\cdot\frac{4}{\pi\omega}$$

- 信噪比至少增大到$4/(\pi\omega)$倍，ω越小信噪比提高越多。
- ω越小，M应越大。

例3.1 余弦波信号的滤波(续)

- 除了η_t项之外，结果与原始信号相比只有幅度有了成比例变化。
- 演示：atsa01.r::demo.mafilt()。
- $\text{Var}(\eta_t) = \frac{\sigma^2}{2M+1}$.
- 新的信噪比为

$$\frac{b^2}{2\sigma^2} \frac{\sin^2[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin^2(\omega/2)}.$$

- 特别当$\omega(M+0.5) = \pi/2$时信噪比为

$$\frac{b^2\omega}{2\pi\sigma^2\sin^2(\omega/2)} > \frac{2b^2}{\pi\omega\sigma^2} = \frac{b^2}{2\sigma^2} \cdot \frac{4}{\pi\omega}$$

- 信噪比至少增大到$4/(\pi\omega)$倍，ω越小信噪比提高越多。
- ω越小，M应越大。

例3.1 余弦波信号的滤波(续)

- 除了η_t项之外，结果与原始信号相比只有幅度有了成比例变化。
- 演示：atsa01.r::demo.mafilt()。
- $\text{Var}(\eta_t) = \frac{\sigma^2}{2M+1}$.
- 新的信噪比为

$$\frac{b^2}{2\sigma^2} \frac{\sin^2[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin^2(\omega/2)}.$$

- 特别当$\omega(M+0.5)=\pi/2$时信噪比为

$$\frac{b^2\omega}{2\pi\sigma^2\sin^2(\omega/2)} > \frac{2b^2}{\pi\omega\sigma^2} = \frac{b^2}{2\sigma^2} \cdot \frac{4}{\pi\omega}$$

- 信噪比至少增大到$4/(\pi\omega)$倍，ω越小信噪比提高越多。
- ω越小，M应越大。

例3.1 余弦波信号的滤波(续)

- 除了η_t项之外，结果与原始信号相比只有幅度有了成比例变化。
- 演示：atsa01.r::demo.mafilt()。
- $\text{Var}(\eta_t) = \frac{\sigma^2}{2M+1}$.
- 新的信噪比为

$$\frac{b^2}{2\sigma^2} \frac{\sin^2[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin^2(\omega/2)}.$$

- 特别当$\omega(M+0.5) = \pi/2$时信噪比为

$$\frac{b^2\omega}{2\pi\sigma^2\sin^2(\omega/2)} > \frac{2b^2}{\pi\omega\sigma^2} = \frac{b^2}{2\sigma^2} \cdot \frac{4}{\pi\omega}$$

- 信噪比至少增大到$4/(\pi\omega)$倍，ω越小信噪比提高越多。
- ω越小，M应越大。