应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2017年秋季学期

周期图定义

- 周期图是估计谱密度的基础。
- 对零均值平稳序列的观测$x_1, x_2, \ldots, x_N$，记

$$\begin{aligned}
\bar{x} =& \frac{1}{N}\sum x_k, \\
\hat{\gamma}_k =& \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \\
\hat{\gamma}_{-k} =& \hat{\gamma}_k, k = 0, 1, \ldots, N-1, \\
\tilde{f}(\lambda) =& \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}.
\end{aligned}$$

周期图定义

- 周期图是估计谱密度的基础。
- 对零均值平稳序列的观测$x_1, x_2, \ldots, x_N$，记

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{N} \sum x_k, \\
\hat{\gamma}_k &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \\
\hat{\gamma}_{-k} &= \hat{\gamma}_k, k = 0, 1, \ldots, N-1, \\
\tilde{f}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}.
\end{aligned}
$$

- 记

$$J_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})e^{-ik\lambda}\right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- 引理2.1

$$\tilde{f}(\lambda) = J_N(\lambda).$$

- 证明　记$y_t = (x_t - \bar{x})e^{-it\lambda}$, $t = 1, 2, \ldots, N$, 用$\mathbb{1}$表示元素都是1的N维向量。

- 记

$$J_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})e^{-ik\lambda}\right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- **引理2.1**

$$\tilde{f}(\lambda) = J_N(\lambda).$$

- **证明** 记$y_t = (x_t - \bar{x})e^{-it\lambda}$, $t = 1, 2, \ldots, N$, 用$\mathbb{1}$表示元素都是1的N维向量。

- 记

$$J_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x}) e^{-ik\lambda} \right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

- **引理2.1**

$$\tilde{f}(\lambda) = J_N(\lambda).$$

- **证明** 记$y_t = (x_t - \bar{x})e^{-it\lambda}$, $t = 1, 2, \ldots, N$, 用$\mathbb{1}$表示元素都是1的N维向量。

- 则

$$
\begin{aligned}
J_N(\lambda) =& \frac{1}{2\pi N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\bar{x})(x_j-\bar{x})e^{-i(k-j)\lambda} \\
=& \frac{1}{2\pi N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} y_k\bar{y}_j \\
=& \frac{1}{2\pi N}\mathbb{1}^T\begin{pmatrix} y_1\bar{y}_1 & y_1\bar{y}_2 & \cdots & y_1\bar{y}_N \\ y_2\bar{y}_1 & y_2\bar{y}_2 & \cdots & y_2\bar{y}_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_N\bar{y}_1 & y_N\bar{y}_2 & \cdots & y_N\bar{y}_N \end{pmatrix}\mathbb{1} \\
=& \frac{1}{2\pi}(\hat{\gamma}_0+\hat{\gamma}_1 e^{i\lambda}+\cdots+\hat{\gamma}_{N-1}e^{i(N-1)\lambda} \\
& +\hat{\gamma}_1 e^{-i\lambda}+\cdots+\hat{\gamma}_{N-1}e^{-i(N-1)\lambda}) \\
=& \tilde{f}(\lambda)
\end{aligned}
$$

- Fourier频率点

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}, j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

- 记

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N} x_k e^{-ik\lambda}\right|^2,$$

- 由于

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-ik\lambda} = \frac{1-e^{-iN\lambda}}{1-e^{-i\lambda}} e^{-i\lambda}$$

和$e^{-iN\lambda_j} = e^{-i2\pi j} = 1$得$\sum_{k=1}^{N} e^{-ik\lambda_j} = 0$。

- 所以在Fourier频率点上

$$I_N(\lambda_j) = J_N(\lambda_j), j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

- Fourier频率点

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}, j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

- 记

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N} x_k e^{-ik\lambda}\right|^2,$$

- 由于

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-ik\lambda} = \frac{1-e^{-iN\lambda}}{1-e^{-i\lambda}} e^{-i\lambda}$$

和$e^{-iN\lambda_j} = e^{-i2\pi j} = 1$得$\sum_{k=1}^{N} e^{-ik\lambda_j} = 0$。

- 所以在Fourier频率点上

$$I_N(\lambda_j) = J_N(\lambda_j), j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

- Fourier频率点

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}, j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

- 记

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=1}^{N} x_k e^{-ik\lambda} \right|^2,$$

- 由于

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-ik\lambda} = \frac{1 - e^{-iN\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}} e^{-i\lambda}$$

和$e^{-iN\lambda_j} = e^{-i2\pi j} = 1$得$\sum_{k=1}^{N} e^{-ik\lambda_j} = 0$。

- 所以在Fourier频率点上

$$I_N(\lambda_j) = J_N(\lambda_j), j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

- Fourier频率点

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}, j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

- 记

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N} x_k e^{-ik\lambda}\right|^2,$$

- 由于

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-ik\lambda} = \frac{1-e^{-iN\lambda}}{1-e^{-i\lambda}} e^{-i\lambda}$$

和$e^{-iN\lambda_j} = e^{-i2\pi j} = 1$得$\sum_{k=1}^{N} e^{-ik\lambda_j} = 0$。

- 所以在Fourier频率点上

$$I_N(\lambda_j) = J_N(\lambda_j), j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

- **定义2.1** $I_N(\lambda)$称为观测数据的周期图。
- **定理2.1** 对于零均值时间序列的观测值$x_1, x_2, \ldots, x_N$，若定义

$$\hat{\gamma}_{\pm k} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.7}$$

则

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{2.8}$$

- **定义2.1** $I_N(\lambda)$称为观测数据的周期图。
- **定理2.1** 对于零均值时间序列的观测值$x_1, x_2, \ldots, x_N$，若定义

$$\hat{\gamma}_{\pm k} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (2.7)$$

则

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \qquad (2.8)$$

周期图的性质

- **定理2.3(周期图的渐近无偏性)** 如果零均值平稳序列$\{X_t\}$的自协方差函数绝对可和: $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$, 则$I_N(\lambda)$ 是谱密度$f(\lambda)$的渐近无偏估计:

$$EI_N(\lambda) \to f(\lambda), \quad N \to \infty.$$

- **证明**

$$
\begin{aligned}
EI_N(\lambda) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} E\hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda} \quad (\text{这里}\hat{\gamma}_k\text{按(2.7)定义}) \\
=& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \frac{N-|k|}{N} \gamma_k e^{-ik\lambda} \\
=& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_k e^{-ik\lambda} - \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} |k| \gamma_k e^{-ik\lambda} \\
\to& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\lambda} \\
& (\text{由Kronecker引理及}\{\gamma_k\}\text{绝对可和知后一项趋于零}) \\
=& f(\lambda) \quad (\text{由定理2.3.1})
\end{aligned}
$$

- $I_N(\lambda)$不是$f(\lambda)$的相合估计:
- **定理2.4** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$, 实数列$\{c_j\}$满足$\sum_{j=0}^{\infty} j|c_j| < \infty$, 线性平稳列

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j} \tag{2.9}$$

$I_N(\lambda)$为$X_1, X_2, \ldots, X_N$的周期图，$f(\lambda)$为$\{X_t\}$的谱密度，则

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\ln\ln N} I_N(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda), & \lambda \neq 0, \pi \\ 2f(\lambda), & \lambda = 0, \pi, \end{cases} \quad \text{a.s.,} \tag{2.10}$$

- 定理说明$|I_N(\lambda) - f(\lambda)|$不趋于零。

- $I_N(\lambda)$不是$f(\lambda)$的相合估计:
- **定理2.4** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$, 实数列$\{c_j\}$满足$\sum_{j=0}^{\infty} j|c_j| < \infty$, 线性平稳列

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j} \tag{2.9}$$

$I_N(\lambda)$为$X_1, X_2, \ldots, X_N$的周期图，$f(\lambda)$为$\{X_t\}$的谱密度，则

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\ln\ln N} I_N(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda), & \lambda \neq 0, \pi \\ 2f(\lambda), & \lambda = 0, \pi, \end{cases} \quad \text{a.s.,} \tag{2.10}$$

- 定理说明$|I_N(\lambda) - f(\lambda)|$不趋于零。

- $I_N(\lambda)$不是$f(\lambda)$的相合估计:
- **定理2.4** 设$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$，实数列$\{c_j\}$满足$\sum_{j=0}^{\infty} j|c_j| < \infty$，线性平稳列

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j} \tag{2.9}$$

$I_N(\lambda)$为$X_1, X_2, \ldots, X_N$的周期图，$f(\lambda)$为$\{X_t\}$的谱密度，则

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\ln\ln N} I_N(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda), & \lambda \neq 0, \pi \\ 2f(\lambda), & \lambda = 0, \pi, \end{cases} \text{a.s.}, \tag{2.10}$$

- 定理说明$|I_N(\lambda) - f(\lambda)|$不趋于零。

- **例2.1** $\{X_t\}$为标准正态白噪声。
- $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$。
- $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} X_j \sim \mathrm{N}(0, 1)$.
- $I_N(0) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} X_j\right)^2$为$\chi_1^2$分布的$\frac{1}{2\pi}$倍，与$N$无关。
- 周期图一般不是谱密度的相合估计，因为使用了所有的$\hat{\gamma}_k$，其中k接近于$N-1$时$\hat{\gamma}_k$ 估计偏差很大：

$$E\hat{\gamma}_k - \gamma_k = \frac{N-k}{N}\gamma_k - \gamma_k = -\frac{k}{N}\gamma_k.$$

- **例2.1** $\{X_t\}$为标准正态白噪声。
- $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$。
- $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} X_j \sim \mathrm{N}(0,1)$.
- $I_N(0) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} X_j\right)^2$为$\chi_1^2$分布的$\frac{1}{2\pi}$倍，与$N$无关。
- 周期图一般不是谱密度的相合估计，因为使用了所有的$\hat{\gamma}_k$，其中k接近于$N-1$时$\hat{\gamma}_k$ 估计偏差很大：

$$E\hat{\gamma}_k - \gamma_k = \frac{N-k}{N}\gamma_k - \gamma_k = -\frac{k}{N}\gamma_k.$$

- **例2.1** $\{X_t\}$为标准正态白噪声。
- $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$。
- $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} X_j \sim \mathrm{N}(0,1)$.
- $I_N(0) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} X_j\right)^2$为$\chi_1^2$分布的$\frac{1}{2\pi}$倍，与$N$无关。
- 周期图一般不是谱密度的相合估计，因为使用了所有的$\hat{\gamma}_k$，其中k接近于$N-1$时$\hat{\gamma}_k$ 估计偏差很大:

$$E\hat{\gamma}_k - \gamma_k = \frac{N-k}{N}\gamma_k - \gamma_k = -\frac{k}{N}\gamma_k.$$

- **例2.1** $\{X_t\}$为标准正态白噪声。
- $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$。
- $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} X_j \sim \mathrm{N}(0, 1)$.
- $I_N(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} X_j \right)^2$为$\chi_1^2$分布的$\frac{1}{2\pi}$倍，与$N$无关。
- 周期图一般不是谱密度的相合估计，因为使用了所有的$\hat{\gamma}_k$，其中k接近于$N-1$时$\hat{\gamma}_k$ 估计偏差很大：

$$E\hat{\gamma}_k - \gamma_k = \frac{N-k}{N}\gamma_k - \gamma_k = -\frac{k}{N}\gamma_k.$$

- **例2.1** $\{X_t\}$为标准正态白噪声。
- $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$。
- $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} X_j \sim \mathrm{N}(0, 1)$.
- $I_N(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} X_j \right)^2$为$\chi_1^2$分布的$\frac{1}{2\pi}$倍，与$N$无关。
- 周期图一般不是谱密度的相合估计，因为使用了所有的$\hat{\gamma}_k$，其中k接近于$N-1$时$\hat{\gamma}_k$ 估计偏差很大:

$$E\hat{\gamma}_k - \gamma_k = \frac{N-k}{N}\gamma_k - \gamma_k = -\frac{k}{N}\gamma_k.$$

- 减少使用的$\hat{\gamma}_k$可以改善估计，称为截断周期图:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N_1}^{N_1} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda} \tag{2.11}$$

$(N_1 < N - 1)$

- 见演示：周期图例2.2(AR(2)序列的周期图和截断周期图)。

- 减少使用的$\hat{\gamma}_k$可以改善估计，称为截断周期图:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N_1}^{N_1} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda} \tag{2.11}$$

$(N_1 < N - 1)$

- 见演示：周期图例2.2(AR(2)序列的周期图和截断周期图)。

时窗

- 克服周期图不相合性的经典方法是加窗谱估计。
- 令

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \lambda_N(k)\hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda} \tag{3.1}$$

- 其中$\lambda_N(k)$是$|k|$的减函数，称为时窗，称$\hat{f}(\lambda)$为加时窗谱估计，简称加窗谱估计。

时窗

- 克服周期图不相合性的经典方法是加窗谱估计。
- 令

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \lambda_N(k) \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda} \tag{3.1}$$

- 其中$\lambda_N(k)$是$|k|$的减函数，称为时窗，称$\hat{f}(\lambda)$为加时窗谱估计，简称加窗谱估计。

时窗

- 克服周期图不相合性的经典方法是加窗谱估计。
- 令

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \lambda_N(k) \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda} \qquad (3.1)$$

- 其中$\lambda_N(k)$是$|k|$的减函数，称为时窗，称$\hat{f}(\lambda)$为加时窗窗谱估计，简称加窗谱估计。

例3.1

- 取时窗为

$$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1, & |k| \le \sqrt{N} \\ 0, & |k| > \sqrt{N} \end{cases}$$

- 即为截断周期图估计。

例3.1

- 取时窗为

$$\lambda_N(k)=\begin{cases}1, & |k|\le\sqrt{N}\\ 0, & |k|>\sqrt{N}\end{cases}$$

- 即为截断周期图估计。

例3.2

- MA(q)序列。则谱密度为

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-q}^{q}\gamma_k e^{-ik\lambda}.$$

- 取$M\geq q$，时窗

$$\lambda_N(k)=\begin{cases}1, & |k|\leq M\\ 0, & |k|>M\end{cases}$$

例3.2

- MA(q)序列。则谱密度为

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \gamma_k e^{-ik\lambda}.$$

- 取$M \geq q$，时窗

$$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leq M \\ 0, & |k| > M \end{cases}$$

- 加窗谱估计为

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}.$$

- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立白噪声，则$N \to \infty$时$\hat{\gamma}_k \to \gamma_k$, a.s., 有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \hat{f}(\lambda) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} \gamma_k e^{-ik\lambda} \\ =& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \gamma_k e^{-ik\lambda} = f(\lambda), \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

- 加窗后$\hat{f}(\lambda)$为$f(\lambda)$的强相合估计。
- 见演示：例3.2（MA(2)截断窗谱估计）。

- 加窗谱估计为

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}.$$

- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立白噪声，则$N \to \infty$时$\hat{\gamma}_k \to \gamma_k$, a.s., 有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \hat{f}(\lambda) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} \gamma_k e^{-ik\lambda} \\ =& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \gamma_k e^{-ik\lambda} = f(\lambda), \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

- 加窗后$\hat{f}(\lambda)$为$f(\lambda)$的强相合估计。
- 见演示：例3.2（MA(2)截断窗谱估计）。

- 加窗谱估计为

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}.$$

- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立白噪声，则$N \to \infty$时$\hat{\gamma}_k \to \gamma_k$, a.s., 有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \hat{f}(\lambda) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} \gamma_k e^{-ik\lambda} \\ =& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \gamma_k e^{-ik\lambda} = f(\lambda), \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

- 加窗后$\hat{f}(\lambda)$为$f(\lambda)$的强相合估计。
- 见演示：例3.2（MA(2)截断窗谱估计）。

- 加窗谱估计为

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}.$$

- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立白噪声，则$N \to \infty$时$\hat{\gamma}_k \to \gamma_k$, a.s., 有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \hat{f}(\lambda) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} \gamma_k e^{-ik\lambda} \\ =& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \gamma_k e^{-ik\lambda} = f(\lambda), \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

- 加窗后$\hat{f}(\lambda)$为$f(\lambda)$的强相合估计。
- 见演示：例3.2（MA(2)截断窗谱估计）。

谱窗

- 由

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N} x_k e^{-ik\lambda}\right|^2$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}$$

- 所以

$$\hat{\gamma}_k = \int_{-\pi}^{\pi} I_N(s)e^{iks}ds, \quad |k| \le N-1. \tag{3.3}$$

($\hat{\gamma}_k$为不减去均值的计算公式)

谱窗

- 由

$$
\begin{aligned}
I_N(\lambda) =& \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N} x_k e^{-ik\lambda}\right|^2 \\
=& \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}
\end{aligned}
$$

- 所以

$$
\hat{\gamma}_k = \int_{-\pi}^{\pi} I_N(s)e^{iks}ds, \quad |k| \leq N-1. \tag{3.3}
$$

($\hat{\gamma}_k$为不减去均值的计算公式)

- 于是

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \lambda_N(k) \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \lambda_N(k) e^{-ik\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} I_N(s) e^{iks} ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} I_N(s) \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \lambda_N(k) e^{ik(\lambda-s)} ds \\
&\triangleq \int_{-\pi}^{\pi} I_N(s) W_N(\lambda - s) ds,
\end{aligned}
$$

其中

$$
W_N(\lambda) \triangleq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \lambda_N(k) e^{ik\lambda}
$$

- **定义3.1** 设$W_N(\lambda)$为满足一定要求的权函数，

$$\hat{f}(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi} I_N(s)W_N(\lambda-s)ds \qquad (3.4)$$

称为$f(\lambda)$的加谱窗谱估计，简称为加窗谱估计。权函数$W_N(\lambda)$称为谱窗。

- 加谱窗的谱估计是对周期图用一个权函数做卷积，取$W_N(\cdot)$为偶函数，在0点最高的钟形曲线，则加谱窗谱估计是对周期图的局部光滑，可以克服周期图的不相合性。
- 直观想法是取小的$\delta>0$令$W_N(\lambda)=\frac{1}{2\delta}I_{[\lambda-\delta,\lambda+\delta]}$，$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{2\delta}\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} I_N(s)ds$。
- 更一般的$W_N(\lambda)$是其它的局部加权平均方法。

- **定义3.1** 设$W_N(\lambda)$为满足一定要求的权函数，

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} I_N(s) W_N(\lambda - s) ds \qquad (3.4)$$

称为$f(\lambda)$的加谱窗谱估计，简称为加窗谱估计。权函数$W_N(\lambda)$称为谱窗。

- 加谱窗的谱估计是对周期图用一个权函数做卷积，取$W_N(\cdot)$为偶函数，在0点最高的钟形曲线，则加谱窗谱估计是对周期图的局部光滑，可以克服周期图的不相合性。
- 直观想法是取小的$\delta > 0$令$W_N(\lambda) = \frac{1}{2\delta} I_{[\lambda-\delta, \lambda+\delta]}$，$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\delta} \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} I_N(s) ds$。
- 更一般的$W_N(\lambda)$是其它的局部加权平均方法。

- **定义3.1** 设$W_N(\lambda)$为满足一定要求的权函数，

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} I_N(s) W_N(\lambda - s) ds \qquad (3.4)$$

  称为$f(\lambda)$的加谱窗谱估计，简称为加窗谱估计。权函数$W_N(\lambda)$称为谱窗。
- 加谱窗的谱估计是对周期图用一个权函数做卷积，取$W_N(\cdot)$为偶函数，在0点最高的钟形曲线，则加谱窗谱估计是对周期图的局部光滑，可以克服周期图的不相合性。
- 直观想法是取小的$\delta > 0$令$W_N(\lambda) = \frac{1}{2\delta} I_{[\lambda-\delta,\lambda+\delta]}$，$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\delta} \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} I_N(s) ds$。
- 更一般的$W_N(\lambda)$是其它的局部加权平均方法。

- **定义3.1** 设$W_N(\lambda)$为满足一定要求的权函数，

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} I_N(s) W_N(\lambda - s) ds \qquad (3.4)$$

称为$f(\lambda)$的加谱窗谱估计，简称为加窗谱估计。权函数$W_N(\lambda)$称为谱窗。

- 加谱窗的谱估计是对周期图用一个权函数做卷积，取$W_N(\cdot)$为偶函数，在0点最高的钟形曲线，则加谱窗谱估计是对周期图的局部光滑，可以克服周期图的不相合性。
- 直观想法是取小的$\delta > 0$令$W_N(\lambda) = \frac{1}{2\delta} I_{[\lambda-\delta,\lambda+\delta]}$，$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\delta} \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} I_N(s) ds$。
- 更一般的$W_N(\lambda)$是其它的局部加权平均方法。

- 时窗$\lambda_N(k)$和谱窗$W_N(\lambda)$的关系为

$$W_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \lambda_N(k) e^{ik\lambda}$$

$$\lambda_N(k) = \int_{-\pi}^{\pi} W_N(s) e^{iks} ds.$$

谱窗应有的性质

- $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda)d\lambda = 1$ (等价于$\lambda_N(0) = 1$)。
- $\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda)d\lambda < \infty$;
- $\forall \varepsilon > 0$, $N \to \infty$时$\sup_{|\lambda|>\varepsilon} W_N(\lambda) \to 0$; (即$N \to \infty$时谱窗向着$\lambda = 0$处集中)
- 对称性: $W_N(-\lambda) = W_N(\lambda)$;
- 对任何正数A，当$N \to \infty$时，

$$\max_{|\mu|\le A/N} \left| \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda)W_N(\mu+\lambda)d\lambda}{\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda)d\lambda} - 1 \right| \to 0.$$

(要求谱窗随$N \to \infty$不要变窄太快)

谱窗应有的性质

- $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda)d\lambda = 1$ (等价于$\lambda_N(0) = 1$)。
- $\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda)d\lambda < \infty$;
- $\forall \varepsilon > 0$, $N \to \infty$时$\sup_{|\lambda|>\varepsilon} W_N(\lambda) \to 0$; (即$N \to \infty$时谱窗向着$\lambda = 0$处集中)
- 对称性: $W_N(-\lambda) = W_N(\lambda)$;
- 对任何正数A，当$N \to \infty$时，

$$\max_{|\mu|\le A/N} \left| \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda)W_N(\mu+\lambda)d\lambda}{\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda)d\lambda} - 1 \right| \to 0.$$

(要求谱窗随$N \to \infty$不要变窄太快)

谱窗应有的性质

- $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda) d\lambda = 1$ (等价于$\lambda_N(0) = 1$)。
- $\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda) d\lambda < \infty$;
- $\forall \varepsilon > 0$, $N \to \infty$时$\sup_{|\lambda|>\varepsilon} W_N(\lambda) \to 0$; (即$N \to \infty$时谱窗向着$\lambda = 0$处集中)
- 对称性: $W_N(-\lambda) = W_N(\lambda)$;
- 对任何正数A，当$N \to \infty$时，

$$\max_{|\mu| \le A/N} \left| \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda) W_N(\mu + \lambda) d\lambda}{\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda) d\lambda} - 1 \right| \to 0.$$

(要求谱窗随$N \to \infty$不要变窄太快)

谱窗应有的性质

- $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda)d\lambda = 1$ (等价于$\lambda_N(0) = 1$)。
- $\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda)d\lambda < \infty$;
- $\forall \varepsilon > 0$, $N \to \infty$时$\sup_{|\lambda|>\varepsilon} W_N(\lambda) \to 0$; (即$N \to \infty$时谱窗向着$\lambda = 0$处集中)
- 对称性: $W_N(-\lambda) = W_N(\lambda)$;
- 对任何正数A，当$N \to \infty$时，

$$\max_{|\mu|\le A/N} \left| \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda)W_N(\mu+\lambda)d\lambda}{\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda)d\lambda} - 1 \right| \to 0.$$

(要求谱窗随$N \to \infty$不要变窄太快)

谱窗应有的性质

- $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda)d\lambda = 1$ (等价于$\lambda_N(0) = 1$)。
- $\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda)d\lambda < \infty$;
- $\forall \varepsilon > 0$, $N \to \infty$时$\sup_{|\lambda|>\varepsilon} W_N(\lambda) \to 0$; (即$N \to \infty$时谱窗向着$\lambda = 0$处集中)
- 对称性: $W_N(-\lambda) = W_N(\lambda)$;
- 对任何正数A，当$N \to \infty$时，

$$\max_{|\mu|\le A/N} \left| \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda)W_N(\mu+\lambda)d\lambda}{\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda)d\lambda} - 1 \right| \to 0.$$

(要求谱窗随$N \to \infty$不要变窄太快)

常用谱窗和时窗—截断窗

- 取$M_N = o(N)$, $M_N \to \infty$, 比如$M_N = A[\sqrt{N}]$, A取值1到3之间。
- 截断窗:

$$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1, & |k| \le M_N \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$

- $$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le M_N} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}$$

- $$W_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le M_N} e^{-ik\lambda} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(2M_n+1)\lambda/2]}{\sin(\lambda/2)} \triangleq \frac{1}{2\pi} D_{2M_N+1}(\lambda)$$

$D_K(\lambda)$称为Dirichlet核。它有正有负。

常用谱窗和时窗—截断窗

- 取$M_N = o(N)$, $M_N \to \infty$, 比如$M_N = A[\sqrt{N}]$, A取值1到3之间。
- 截断窗:

$$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1, & |k| \le M_N \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$

-

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le M_N} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}$$

-

$$W_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le M_N} e^{-ik\lambda}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(2M_n + 1)\lambda/2]}{\sin(\lambda/2)} \triangleq \frac{1}{2\pi} D_{2M_N+1}(\lambda)$$

$D_K(\lambda)$称为Dirichlet核。它有正有负。

常用谱窗和时窗—截断窗

- 取$M_N = o(N)$, $M_N \to \infty$, 比如$M_N = A[\sqrt{N}]$, A取值1到3之间。
- 截断窗:

$$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leq M_N \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$

- $$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq M_N} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}$$

- $$\begin{aligned} W_N(\lambda) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq M_N} e^{-ik\lambda} \\ =& \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(2M_n + 1)\lambda/2]}{\sin(\lambda/2)} \triangleq \frac{1}{2\pi} D_{2M_N+1}(\lambda) \end{aligned}$$

  $D_K(\lambda)$称为Dirichlet核。它有正有负。

常用谱窗和时窗—截断窗

- 取$M_N = o(N)$, $M_N \to \infty$, 比如$M_N = A[\sqrt{N}]$, A取值1到3之间。
- 截断窗:

$$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1, & |k| \le M_N \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$

- $$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le M_N} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}$$

- $$\begin{aligned} W_N(\lambda) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le M_N} e^{-ik\lambda} \\ =& \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(2M_n + 1)\lambda/2]}{\sin(\lambda/2)} \triangleq \frac{1}{2\pi} D_{2M_N+1}(\lambda) \end{aligned}$$

$D_K(\lambda)$称为Dirichlet核。它有正有负。

Bartlett窗

- $$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{M_N}, & |k| \le M_N \\ 0, & |k| > M_N \end{cases}$$

- $$\begin{aligned} W_N(\lambda) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le M_N} \left(1 - \frac{|k|}{M_N}\right) e^{-ik\lambda} \\ =& \frac{1}{2\pi M_N} \left(\frac{\sin(M_N\lambda/2)}{\sin(\lambda/2)}\right)^2 \triangleq F_{M_N}(\lambda) \end{aligned}$$

- $F_{M_N}(\lambda)$称为Fejer核。是全非负的。

Bartlett窗

- $$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{M_N}, & |k| \le M_N \\ 0, & |k| > M_N \end{cases}$$

- $$\begin{aligned} W_N(\lambda) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le M_N} \left(1 - \frac{|k|}{M_N}\right) e^{-ik\lambda} \\ =& \frac{1}{2\pi M_N} \left(\frac{\sin(M_N \lambda/2)}{\sin(\lambda/2)} \right)^2 \triangleq F_{M_N}(\lambda) \end{aligned}$$

- $F_{M_N}(\lambda)$称为Fejer核。是全非负的。

Bartlett窗

- $$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{M_N}, & |k| \le M_N \\ 0, & |k| > M_N \end{cases}$$

- $$\begin{aligned} W_N(\lambda) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le M_N} \left(1 - \frac{|k|}{M_N}\right) e^{-ik\lambda} \\ =& \frac{1}{2\pi M_N} \left(\frac{\sin(M_N \lambda/2)}{\sin(\lambda/2)} \right)^2 \triangleq F_{M_N}(\lambda) \end{aligned}$$

- $F_{M_N}(\lambda)$称为Fejer核。是全非负的。

Daniell窗

- $$W_N(\lambda)=\begin{cases}\frac{M_N}{2\pi}, & |\lambda|\le\frac{\pi}{M_N},\\ 0, & |\lambda|>\frac{\pi}{M_N}.\end{cases}$$

- $$\hat{f}(\lambda)=\frac{M_N}{2\pi}\int_{\lambda-\frac{\pi}{M_N}}^{\lambda+\frac{\pi}{M_N}} I_N(s)ds$$

  是$I_N(s)$在$[\lambda-\frac{\pi}{M_N},\lambda+\frac{\pi}{M_N}]$ 的平均。

- $$\lambda_N(k)=\sin\frac{k\pi}{M_N}\Big/\frac{k\pi}{M_N}.$$

Daniell窗

-
$$W_N(\lambda) = \begin{cases} \frac{M_N}{2\pi}, & |\lambda| \le \frac{\pi}{M_N}, \\ 0, & |\lambda| > \frac{\pi}{M_N}. \end{cases}$$

-
$$\hat{f}(\lambda) = \frac{M_N}{2\pi} \int_{\lambda - \frac{\pi}{M_N}}^{\lambda + \frac{\pi}{M_N}} I_N(s) ds$$

是$I_N(s)$在$[\lambda - \frac{\pi}{M_N}, \lambda + \frac{\pi}{M_N}]$ 的平均。

-
$$\lambda_N(k) = \sin \frac{k\pi}{M_N} / \frac{k\pi}{M_N}.$$

Daniell窗

- $$W_N(\lambda) = \begin{cases} \frac{M_N}{2\pi}, & |\lambda| \le \frac{\pi}{M_N}, \\ 0, & |\lambda| > \frac{\pi}{M_N}. \end{cases}$$

- $$\hat{f}(\lambda) = \frac{M_N}{2\pi} \int_{\lambda-\frac{\pi}{M_N}}^{\lambda+\frac{\pi}{M_N}} I_N(s)ds$$

  是$I_N(s)$在$[\lambda - \frac{\pi}{M_N}, \lambda + \frac{\pi}{M_N}]$ 的平均。

- $$\lambda_N(k) = \sin\frac{k\pi}{M_N} \Big/ \frac{k\pi}{M_N}.$$

Tukey窗

- $a \in (0, 0.25]$. $a = 0.25$称为Tukey-Hanning窗， $a = 0.23$称为Tukey-Hamming窗。

$$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a\cos\frac{k\pi}{M_N}, & |k| \le M_N, \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$

- $$W_N(\lambda) = aD(\lambda - \frac{\pi}{M_N}) + (1-2a)D(\lambda) + aD(\lambda + \frac{\pi}{M_N}),$$
$$D(\lambda) \triangleq \frac{\sin[(2M_N+1)\lambda/2]}{2\pi\sin(\lambda/2)}$$
- 谱窗有负值。

Tukey窗

- $a \in (0, 0.25]$. $a = 0.25$称为Tukey-Hanning窗， $a = 0.23$称为Tukey-Hamming窗。

$$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a\cos\frac{k\pi}{M_N}, & |k| \le M_N, \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$

- $$W_N(\lambda) = aD(\lambda - \frac{\pi}{M_N}) + (1-2a)D(\lambda) + aD(\lambda + \frac{\pi}{M_N}),$$
$$D(\lambda) \triangleq \frac{\sin[(2M_N+1)\lambda/2]}{2\pi\sin(\lambda/2)}$$

- 谱窗有负值。

Tukey窗

- $a \in (0, 0.25]$. $a = 0.25$称为Tukey-Hanning窗， $a = 0.23$称为Tukey-Hamming窗。

$$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a\cos\frac{k\pi}{M_N}, & |k| \le M_N, \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$

-

$$\begin{aligned} W_N(\lambda) =& aD(\lambda - \frac{\pi}{M_N}) + (1-2a)D(\lambda) + aD(\lambda + \frac{\pi}{M_N}), \\ D(\lambda) \triangleq& \frac{\sin[(2M_N+1)\lambda/2]}{2\pi\sin(\lambda/2)} \end{aligned}$$

- 谱窗有负值。

Parzen窗

- $$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - 6(k/M_N)^2 + 6(|k|/M_N)^3, & |k| \le M_N/2, \\ 2(1 - |k|/M_N)^3, & M_N/2 < k \le M_N, \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$
- $$W_N(\lambda) = \frac{3}{8\pi M_N^3}\left(\frac{\sin(M_N\lambda/4)}{\sin(\lambda/2)/2}\right)^4\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\lambda}{2}\right).$$
- 谱窗非负。
- Parzen窗在这几个加窗谱估计中估计方差最小。

Parzen窗

- $$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - 6(k/M_N)^2 + 6(|k|/M_N)^3, & |k| \le M_N/2, \\ 2(1 - |k|/M_N)^3, & M_N/2 < k \le M_N, \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$
- $$W_N(\lambda) = \frac{3}{8\pi M_N^3} \left(\frac{\sin(M_N\lambda/4)}{\sin(\lambda/2)/2} \right)^4 \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right).$$
- 谱窗非负。
- Parzen窗在这几个加窗谱估计中估计方差最小。

Parzen窗

- $$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - 6(k/M_N)^2 + 6(|k|/M_N)^3, & |k| \le M_N/2, \\ 2(1 - |k|/M_N)^3, & M_N/2 < k \le M_N, \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$
- $$W_N(\lambda) = \frac{3}{8\pi M_N^3} \left(\frac{\sin(M_N\lambda/4)}{\sin(\lambda/2)/2} \right)^4 \left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\lambda}{2} \right).$$
- 谱窗非负。
- Parzen窗在这几个加窗谱估计中估计方差最小。

Parzen窗

- $$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - 6(k/M_N)^2 + 6(|k|/M_N)^3, & |k| \le M_N/2, \\ 2(1 - |k|/M_N)^3, & M_N/2 < k \le M_N, \\ 0, & |k| > M_N. \end{cases}$$
- $$W_N(\lambda) = \frac{3}{8\pi M_N^3} \left(\frac{\sin(M_N\lambda/4)}{\sin(\lambda/2)/2} \right)^4 \left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\lambda}{2} \right).$$
- 谱窗非负。
- Parzen窗在这几个加窗谱估计中估计方差最小。

Bartlett-Priestley窗

- $$W_N(\lambda)=\begin{cases}\frac{3M_N}{4\pi}[1-(M_N\lambda/\pi)^2], & |\lambda|\le \pi/M_N\\ 0, & |\lambda|>\pi/M_N\end{cases}$$

  是二次函数。

- $$\lambda_N(k)=\begin{cases}\frac{3M_N^2}{(\pi k)^2}\left[\frac{\sin(\pi k/M_N)}{\pi k/M_N}-\cos(\pi k/M_N)\right], & 0<|k|\le M_N,\\ 1, & k=0,\\ 0, & |k|>M_N\end{cases}$$

Bartlett-Priestley窗

- $$W_N(\lambda)=\begin{cases}\frac{3M_N}{4\pi}[1-(M_N\lambda/\pi)^2], & |\lambda|\le \pi/M_N\\ 0, & |\lambda|>\pi/M_N\end{cases}$$

  是二次函数。

- $$\lambda_N(k)=\begin{cases}\frac{3M_N^2}{(\pi k)^2}\left[\frac{\sin(\pi k/M_N)}{\pi k/M_N}-\cos(\pi k/M_N)\right], & 0<|k|\le M_N,\\ 1, & k=0,\\ 0, & |k|>M_N\end{cases}$$

方差的比较

- **定理4.1** 设$\{X_t\}$是平稳正态序列，有连续可微的谱密度$f(\lambda)$，谱窗函数$W_N(\lambda)$满足§8.3 中的条件(1)—(5)。加窗谱估计$\hat{f}(\lambda)$由(3.4)定义。则有如下结果:
  (1) $\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的渐近无偏估计。
  (2) $\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的均方相合估计。
  (3) 当N充分大后，有

$$\mathrm{Var}(\hat{f}(\lambda)) \approx \begin{cases} \frac{M_N}{N} f(\lambda)^2 K^2, & \lambda \neq 0, \pm\pi, \\ 2\frac{M_N}{N} f(\lambda)^2 K^2, & \lambda = 0, \pm\pi, \end{cases}$$

$$K^2 = \frac{2\pi}{M_N} \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda) d\lambda.$$

- 虽然减小M_N会减小方差，但是可能增加偏差，降低分辨率。

方差的比较

- **定理4.1** 设$\{X_t\}$是平稳正态序列，有连续可微的谱密度$f(\lambda)$，谱窗函数$W_N(\lambda)$满足§8.3 中的条件(1)—(5)。加窗谱估计$\hat{f}(\lambda)$由(3.4)定义。则有如下结果:
  (1) $\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的渐近无偏估计。
  (2) $\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的均方相合估计。
  (3) 当N充分大后，有

$$\mathrm{Var}(\hat{f}(\lambda)) \approx \begin{cases} \frac{M_N}{N} f(\lambda)^2 K^2, & \lambda \neq 0, \pm\pi, \\ 2\frac{M_N}{N} f(\lambda)^2 K^2, & \lambda = 0, \pm\pi, \end{cases}$$

$$K^2 = \frac{2\pi}{M_N} \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda) d\lambda.$$

- 虽然减小M_N会减小方差，但是可能增加偏差，降低分辨率。

方差的比较

- **定理4.1** 设$\{X_t\}$是平稳正态序列，有连续可微的谱密度$f(\lambda)$，谱窗函数$W_N(\lambda)$满足§8.3 中的条件(1)—(5)。加窗谱估计$\hat{f}(\lambda)$由(3.4)定义。则有如下结果:
  (1) $\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的渐近无偏估计。
  (2) $\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的均方相合估计。
  (3) 当N充分大后，有

$$\mathrm{Var}(\hat{f}(\lambda)) \approx \begin{cases} \frac{M_N}{N} f(\lambda)^2 K^2, & \lambda \neq 0, \pm\pi, \\ 2\frac{M_N}{N} f(\lambda)^2 K^2, & \lambda = 0, \pm\pi, \end{cases}$$

$$K^2 = \frac{2\pi}{M_N} \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda) d\lambda.$$

- 虽然减小M_N会减小方差，但是可能增加偏差，降低分辨率。

方差的比较

- **定理4.1** 设$\{X_t\}$是平稳正态序列，有连续可微的谱密度$f(\lambda)$，谱窗函数$W_N(\lambda)$满足§8.3 中的条件(1)—(5)。加窗谱估计$\hat{f}(\lambda)$由(3.4)定义。则有如下结果:
  (1) $\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的渐近无偏估计。
  (2) $\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的均方相合估计。
  (3) 当N充分大后，有

$$\mathrm{Var}(\hat{f}(\lambda)) \approx \begin{cases} \frac{M_N}{N} f(\lambda)^2 K^2, & \lambda \neq 0, \pm\pi, \\ 2\frac{M_N}{N} f(\lambda)^2 K^2, & \lambda = 0, \pm\pi, \end{cases}$$

$$K^2 = \frac{2\pi}{M_N} \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda) d\lambda.$$

- 虽然减小M_N会减小方差，但是可能增加偏差，降低分辨率。

方差的比较

- **定理4.1** 设$\{X_t\}$是平稳正态序列，有连续可微的谱密度$f(\lambda)$，谱窗函数$W_N(\lambda)$满足§8.3 中的条件(1)—(5)。加窗谱估计$\hat{f}(\lambda)$由(3.4)定义。则有如下结果:
  (1) $\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的渐近无偏估计。
  (2) $\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的均方相合估计。
  (3) 当N充分大后，有

$$\mathrm{Var}(\hat{f}(\lambda)) \approx \begin{cases} \frac{M_N}{N} f(\lambda)^2 K^2, & \lambda \neq 0, \pm\pi, \\ 2\frac{M_N}{N} f(\lambda)^2 K^2, & \lambda = 0, \pm\pi, \end{cases}$$

$$K^2 = \frac{2\pi}{M_N} \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\lambda) d\lambda.$$

- 虽然减小M_N会减小方差，但是可能增加偏差，降低分辨率。

各谱窗方差比较

窗名	K^2
截断窗	2.0000
Bartlett	0.6667
Daniell	1.0000
Tukey-Hamming	0.7948
Parzen	**0.5392**
Bartlett-Priestley	1.2000

分辨率的比较

- 谱估计对峰的个数、位置很感兴趣。
- 两个相邻的峰需要能分开，不被混在一起。
- 只有谱窗宽度比两个峰距离更短时才有可能分开。

分辨率的比较

- 谱估计对峰的个数、位置很感兴趣。
- 两个相邻的峰需要能分开，不被混在一起。
- 只有谱窗宽度比两个峰距离更短时才有可能分开。

分辨率的比较

- 谱估计对峰的个数、位置很感兴趣。
- 两个相邻的峰需要能分开，不被混在一起。
- 只有谱窗宽度比两个峰距离更短时才有可能分开。

例4.1(分辨率)

- 例4.1 考虑AR(4)模型

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + a_3 X_{t-3} + a_4 X_{t-4} + \varepsilon, \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中

$$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0,4),$$
$$\mathbf{a} = (-0.9337, -1.4599, -0.7528, -0.6355)^T$$

- 特征多项式有两对共轭复根

$$1.115e^{\pm 1.5i}, \quad 1.125e^{\pm 2.2i}$$

- 谱密度$f(\lambda)$在$\lambda = 1.5, 2.2$处有明显峰值，距离为$2.2 - 1.5 = 0.7$。(见演示图形)

例4.1(分辨率)

- 例4.1 考虑AR(4)模型

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + a_3 X_{t-3} + a_4 X_{t-4} + \varepsilon, \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中

$$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0,4),$$
$$\mathbf{a} = (-0.9337, -1.4599, -0.7528, -0.6355)^T$$

- 特征多项式有两对共轭复根

$$1.115e^{\pm 1.5i}, \ 1.125e^{\pm 2.2i}$$

- 谱密度$f(\lambda)$在$\lambda = 1.5, 2.2$处有明显峰值，距离为$2.2 - 1.5 = 0.7$。(见演示图形)

例4.1(分辨率)

- 例4.1 考虑AR(4)模型

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + a_3 X_{t-3} + a_4 X_{t-4} + \varepsilon, \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中

$$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0,4),$$
$$\mathbf{a} = (-0.9337, -1.4599, -0.7528, -0.6355)^T$$

- 特征多项式有两对共轭复根

$$1.115e^{\pm 1.5i}, \quad 1.125e^{\pm 2.2i}$$

- 谱密度$f(\lambda)$在$\lambda = 1.5, 2.2$处有明显峰值，距离为$2.2 - 1.5 = 0.7$。(见演示图形)

- 考虑用Daniell谱窗做谱估计：

$$W_N(\lambda) = \begin{cases} M_N/(2\pi) & |\lambda| \le \pi/M_N \\ 0 & |\lambda| > \pi/M_N \end{cases}$$

M_N越大，谱窗越窄。

- 加窗谱估计为

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{M_N}{2\pi} \int_{\lambda-\pi/M_N}^{\lambda+\pi/M_N} I_N(s) ds$$

- 由周期图的渐近无偏性

$$E\hat{f}(\lambda) \approx \frac{M_N}{2\pi} \int_{\lambda-\pi/M_N}^{\lambda+\pi/M_N} f(s) ds$$

- 所以$E\hat{f}(\lambda)$是$f(s)$在λ的小邻域 $[\lambda-\pi/M_N, \lambda+\pi/M_N]$ 上的近似平均。如果这个小邻域太宽(M_N太小)，就会把两个峰混在一起。

- 考虑用Daniell谱窗做谱估计：

$$W_N(\lambda) = \begin{cases} M_N/(2\pi) & |\lambda| \le \pi/M_N \\ 0 & |\lambda| > \pi/M_N \end{cases}$$

M_N越大，谱窗越窄。

- 加窗谱估计为

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{M_N}{2\pi} \int_{\lambda-\pi/M_N}^{\lambda+\pi/M_N} I_N(s)ds$$

- 由周期图的渐近无偏性

$$E\hat{f}(\lambda) \approx \frac{M_N}{2\pi} \int_{\lambda-\pi/M_N}^{\lambda+\pi/M_N} f(s)ds$$

- 所以$E\hat{f}(\lambda)$是$f(s)$在λ的小邻域 $[\lambda-\pi/M_N, \lambda+\pi/M_N]$ 上的近似平均。如果这个小邻域太宽(M_N太小)，就会把两个峰混在一起。

- 考虑用Daniell谱窗做谱估计：

$$W_N(\lambda)=\begin{cases} M_N/(2\pi) & |\lambda|\le \pi/M_N \\ 0 & |\lambda|>\pi/M_N \end{cases}$$

M_N越大，谱窗越窄。

- 加窗谱估计为

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{M_N}{2\pi}\int_{\lambda-\pi/M_N}^{\lambda+\pi/M_N} I_N(s)ds$$

- 由周期图的渐近无偏性

$$E\hat{f}(\lambda)\approx\frac{M_N}{2\pi}\int_{\lambda-\pi/M_N}^{\lambda+\pi/M_N} f(s)ds$$

- 所以$E\hat{f}(\lambda)$是$f(s)$在λ的小邻域 $[\lambda-\pi/M_N,\ \lambda+\pi/M_N]$ 上的近似平均。如果这个小邻域太宽(M_N太小)，就会把两个峰混在一起。

- 考虑用Daniell谱窗做谱估计：

$$W_N(\lambda) = \begin{cases} M_N/(2\pi) & |\lambda| \le \pi/M_N \\ 0 & |\lambda| > \pi/M_N \end{cases}$$

  M_N越大，谱窗越窄。
- 加窗谱估计为

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{M_N}{2\pi} \int_{\lambda-\pi/M_N}^{\lambda+\pi/M_N} I_N(s) ds$$

- 由周期图的渐近无偏性

$$E\hat{f}(\lambda) \approx \frac{M_N}{2\pi} \int_{\lambda-\pi/M_N}^{\lambda+\pi/M_N} f(s) ds$$

- 所以$E\hat{f}(\lambda)$是$f(s)$在λ的小邻域 $[\lambda-\pi/M_N, \lambda+\pi/M_N]$ 上的近似平均。如果这个小邻域太宽(M_N太小)，就会把两个峰混在一起。

谱窗宽度的选择

- 只有谱窗宽度比两个峰距离小很多时才有可能分开。
- 但是，谱窗太窄(M_N太大)，估计方差会变大，估计的结果变得很不光滑，出现许多虚假的峰。
- 谱密度和谱窗的宽度用带宽来描述。

谱窗宽度的选择

- 只有谱窗宽度比两个峰距离小很多时才有可能分开。
- 但是，谱窗太窄(M_N太大)，估计方差会变大，估计的结果变得很不光滑，出现许多虚假的峰。
- 谱密度和谱窗的宽度用带宽来描述。

谱窗宽度的选择

- 只有谱窗宽度比两个峰距离小很多时才有可能分开。
- 但是，谱窗太窄(M_N太大)，估计方差会变大，估计的结果变得很不光滑，出现许多虚假的峰。
- 谱密度和谱窗的宽度用带宽来描述。

带宽

- **带宽**：设谱密度$f(\lambda)$连续，在λ_0处有一个明显的峰值，如果有$\omega_1 < \lambda_0 < \omega_2$ 使得

$$f(\omega_1) = f(\omega_2) = \frac{1}{2} f(\lambda_0), \tag{4.3}$$

$$f(\lambda) > \frac{1}{2} f(\lambda_0), \quad 当\lambda \in (\omega_1, \omega_2),$$

则称$\omega_2 - \omega_1$为$f(\lambda)$在λ_0处的带宽。

- 若$f(\lambda)$在λ_0处有一个明显的低谷，如果有$\omega_1 < \lambda_0 < \omega_2$ 使得

$$f(\omega_1) = f(\omega_2) = 2f(\lambda_0),$$

$$f(\lambda) < 2f(\lambda_0), \quad 当\lambda \in (\omega_1, \omega_2),$$

则称$\omega_2 - \omega_1$为$f(\lambda)$在λ_0处的带宽。

带宽

- **带宽**：设谱密度$f(\lambda)$连续，在λ_0处有一个明显的峰值，如果有$\omega_1 < \lambda_0 < \omega_2$ 使得

$$\begin{aligned} f(\omega_1) =& f(\omega_2) = \frac{1}{2} f(\lambda_0), \qquad (4.3) \\ f(\lambda) >& \frac{1}{2} f(\lambda_0), \quad \text{当}\lambda \in (\omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

  则称$\omega_2 - \omega_1$为$f(\lambda)$在λ_0处的带宽。
- 若$f(\lambda)$在λ_0处有一个明显的低谷，如果有$\omega_1 < \lambda_0 < \omega_2$ 使得

$$\begin{aligned} f(\omega_1) =& f(\omega_2) = 2f(\lambda_0), \\ f(\lambda) <& 2f(\lambda_0), \quad \text{当}\lambda \in (\omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

  则称$\omega_2 - \omega_1$为$f(\lambda)$在λ_0处的带宽。

谱窗的带宽

- 加窗谱估计要求谱窗的带宽比谱密度的带宽小很多，才能分辨出谱密度的峰值情况。
- 半功率带宽 $B_{\text{HP}} = 2\theta_1$，$\theta_1$由
$$W_N(\theta_1) = \frac{1}{2} W_N(0).$$
这种谱窗带宽定义与(4.3)的谱密度带宽定义是一致的。
- **Parzen带宽** $B_{\text{P}} = 1/W_N(0)$.
- **Jenkin带宽**
$$B_{\text{J}} = \frac{2\pi}{\sum_{|k|\le N-1} \lambda_N^2(k)}.$$
- 增加M_N可以减小谱窗的窗宽从而提高分辨率，但是会增大方差。
- 例4.3 Daniell窗不同窗宽时的分辨率演示。

谱窗的带宽

- 加窗谱估计要求谱窗的带宽比谱密度的带宽小很多，才能分辨出谱密度的峰值情况。
- **半功率带宽** $B_{\text{HP}} = 2\theta_1$，$\theta_1$ 由

$$W_N(\theta_1) = \frac{1}{2} W_N(0).$$

这种谱窗带宽定义与(4.3)的谱密度带宽定义是一致的。

- **Parzen带宽** $B_{\text{P}} = 1/W_N(0)$.
- **Jenkin带宽**

$$B_{\text{J}} = \frac{2\pi}{\sum_{|k|\le N-1} \lambda_N^2(k)}.$$

- 增加M_N可以减小谱窗的窗宽从而提高分辨率，但是会增大方差。
- 例4.3 Daniell窗不同窗宽时的分辨率演示。

谱窗的带宽

- 加窗谱估计要求谱窗的带宽比谱密度的带宽小很多，才能分辨出谱密度的峰值情况。
- **半功率带宽** $B_{\mathrm{HP}} = 2\theta_1$，$\theta_1$由

$$W_N(\theta_1) = \frac{1}{2} W_N(0).$$

这种谱窗带宽定义与(4.3)的谱密度带宽定义是一致的。
- **Parzen带宽** $B_{\mathrm{P}} = 1/W_N(0)$.
- **Jenkin带宽**

$$B_{\mathrm{J}} = \frac{2\pi}{\sum_{|k| \le N-1} \lambda_N^2(k)}.$$

- 增加M_N可以减小谱窗的窗宽从而提高分辨率，但是会增大方差。
- 例4.3 Daniell窗不同窗宽时的分辨率演示。

谱窗的带宽

- 加窗谱估计要求谱窗的带宽比谱密度的带宽小很多，才能分辨出谱密度的峰值情况。
- **半功率带宽** $B_{\text{HP}} = 2\theta_1$，$\theta_1$由

$$W_N(\theta_1) = \frac{1}{2} W_N(0).$$

这种谱窗带宽定义与(4.3)的谱密度带宽定义是一致的。

- **Parzen带宽** $B_{\text{P}} = 1/W_N(0)$.
- **Jenkin带宽**

$$B_{\text{J}} = \frac{2\pi}{\sum_{|k|\le N-1} \lambda_N^2(k)}.$$

- 增加M_N可以减小谱窗的窗宽从而提高分辨率，但是会增大方差。
- 例4.3 Daniell窗不同窗宽时的分辨率演示。

谱窗的带宽

- 加窗谱估计要求谱窗的带宽比谱密度的带宽小很多，才能分辨出谱密度的峰值情况。
- **半功率带宽** $B_{\mathrm{HP}} = 2\theta_1$，$\theta_1$由
$$W_N(\theta_1) = \frac{1}{2} W_N(0).$$
这种谱窗带宽定义与(4.3)的谱密度带宽定义是一致的。
- **Parzen带宽** $B_{\mathrm{P}} = 1/W_N(0).$
- **Jenkin带宽**
$$B_{\mathrm{J}} = \frac{2\pi}{\sum_{|k|\le N-1} \lambda_N^2(k)}.$$
- 增加M_N可以减小谱窗的窗宽从而提高分辨率，但是会增大方差。
- 例4.3 Daniell窗不同窗宽时的分辨率演示。

谱窗的带宽

- 加窗谱估计要求谱窗的带宽比谱密度的带宽小很多，才能分辨出谱密度的峰值情况。
- **半功率带宽** $B_{HP} = 2\theta_1$，θ_1由

$$W_N(\theta_1) = \frac{1}{2} W_N(0).$$

  这种谱窗带宽定义与(4.3)的谱密度带宽定义是一致的。
- **Parzen带宽** $B_P = 1/W_N(0)$.
- **Jenkin带宽**

$$B_J = \frac{2\pi}{\sum_{|k| \le N-1} \lambda_N^2(k)}.$$

- 增加M_N可以减小谱窗的窗宽从而提高分辨率，但是会增大方差。
- 例4.3 Daniell窗不同窗宽时的分辨率演示。