应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2017年秋季学期

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(1)参数估计

- 考虑MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

其中$|b| < 1$。

- $\gamma_0 = \mathrm{E}X_t^2 = \sigma^2(1+b^2)$, $\gamma_1 = \sigma^2 b$.
- $\rho_1 = \frac{b}{1+b^2}$, 关于b的方程为

$$\rho_1 b^2 - b + \rho_1 = 0$$

- 当$|\rho_1| \le 0.5$时b才有实解:

$$b = \frac{1-\sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1}$$

(另一个解使$|b| > 1$，抛弃)
- 用$\hat{\rho}_1 = \hat{\gamma}_1/\hat{\gamma}_0$代替理论值可得$b$的矩估计

$$\hat{b} = \frac{1-\sqrt{1-4\hat{\rho}_1^2}}{2\hat{\rho}_1}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(1)参数估计

- 考虑MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

其中$|b| < 1$。

- $\gamma_0 = \mathrm{E}X_t^2 = \sigma^2(1 + b^2)$, $\gamma_1 = \sigma^2 b$.
- $\rho_1 = \frac{b}{1+b^2}$, 关于b的方程为

$$\rho_1 b^2 - b + \rho_1 = 0$$

- 当$|\rho_1| \le 0.5$时b才有实解:

$$b = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho_1^2}}{2\rho_1}$$

(另一个解使$|b| > 1$，抛弃)

- 用$\hat{\rho}_1 = \hat{\gamma}_1/\hat{\gamma}_0$代替理论值可得$b$的矩估计

$$\hat{b} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\hat{\rho}_1^2}}{2\hat{\rho}_1}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(1)参数估计

- 考虑MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

其中$|b| < 1$。

- $\gamma_0 = \mathrm{E}X_t^2 = \sigma^2(1+b^2)$, $\gamma_1 = \sigma^2 b$.
- $\rho_1 = \frac{b}{1+b^2}$, 关于b的方程为

$$\rho_1 b^2 - b + \rho_1 = 0$$

- 当$|\rho_1| \le 0.5$时b才有实解:

$$b = \frac{1-\sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1}$$

(另一个解使$|b| > 1$，抛弃)

- 用$\hat\rho_1 = \hat\gamma_1/\hat\gamma_0$代替理论值可得$b$的矩估计

$$\hat b = \frac{1-\sqrt{1-4\hat\rho_1^2}}{2\hat\rho_1}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(1)参数估计

- 考虑MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

其中$|b| < 1$。
- $\gamma_0 = \mathrm{E}X_t^2 = \sigma^2(1 + b^2)$, $\gamma_1 = \sigma^2 b$.
- $\rho_1 = \frac{b}{1+b^2}$, 关于b的方程为

$$\rho_1 b^2 - b + \rho_1 = 0$$

- 当$|\rho_1| \leq 0.5$时b才有实解:

$$b = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho_1^2}}{2\rho_1}$$

(另一个解使$|b| > 1$，抛弃)
- 用$\hat{\rho}_1 = \hat{\gamma}_1/\hat{\gamma}_0$代替理论值可得$b$的矩估计

$$\hat{b} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\hat{\rho}_1^2}}{2\hat{\rho}_1}$$

MA(1)参数估计

- 考虑MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

其中$|b| < 1$。
- $\gamma_0 = \mathrm{E}X_t^2 = \sigma^2(1+b^2)$, $\gamma_1 = \sigma^2 b$.
- $\rho_1 = \frac{b}{1+b^2}$, 关于b的方程为

$$\rho_1 b^2 - b + \rho_1 = 0$$

- 当$|\rho_1| \le 0.5$时b才有实解:

$$b = \frac{1-\sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1}$$

(另一个解使$|b| > 1$，抛弃)
- 用$\hat{\rho}_1 = \hat{\gamma}_1/\hat{\gamma}_0$代替理论值可得$b$的矩估计

$$\hat{b} = \frac{1-\sqrt{1-4\hat{\rho}_1^2}}{2\hat{\rho}_1}$$

MA(q)模型的参数估计

MA(q)模型的矩估计及其计算

MA(q)模型的逆相关函数法

MA(q)模型的新息估计方法

MA(q)模型的定阶方法

MA(q)模型的拟合检验

MA谱密度估计

ARMA(p, q)模型的参数估计

ARMA(p, q)模型的矩估计方法

ARMA(p, q)模型的自回归逼近法

正态时间序列的似然函数

ARMA(p, q)模型的最大似然估计

ARMA(p, q)模型的检验

ARMA(p, q)模型的定阶方法

ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(1)参数估计(续)

- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的白噪声，由§4.2 定理2.1 知道$\hat{\rho}_1$是ρ_1的强相合估计: $\lim_{N\to\infty}\hat{\rho}_1=\rho_1$, a.s.，于是
- $$\lim_{N\to\infty}\hat{b}=\frac{1-\sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1}=b,\ \ a.s.,$$
- 所以$\hat{b}$是b的强相合估计.
- 实际上利用§4.2 定理2.2 还可以证明，当$N\to\infty$时，$\sqrt{N}(\hat{b}-b)$ 依分布收敛到正态分布([27]).

$$\mathrm{N}\left(0,\frac{1+b^2+b^4+b^6+b^8}{(1-b^2)^2}\right).$$

MA(q)模型的参数估计

MA(q)模型的矩估计及其计算

MA(q)模型的逆相关函数法

MA(q)模型的新息估计方法

MA(q)模型的定阶方法

MA(q)模型的拟合检验

MA谱密度估计

ARMA(p,q)模型的参数估计

ARMA(p,q)模型的矩估计方法

ARMA(p,q)模型的自回归逼近法

正态时间序列的似然函数

ARMA(p,q)模型的最大似然估计

ARMA(p,q)模型的检验

ARMA(p,q)模型的定阶方法

ARMA(p,q)模型的谱密度估计

MA(1)参数估计(续)

- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的白噪声，由§4.2 定理2.1 知道$\hat{\rho}_1$是ρ_1的强相合估计: $\lim_{N\to\infty}\hat{\rho}_1 = \rho_1$, a.s., 于是
- $$\lim_{N\to\infty}\hat{b} = \frac{1-\sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1} = b, \ \ a.s.,$$
- 所以$\hat{b}$是b的强相合估计.
- 实际上利用§4.2 定理2.2 还可以证明，当$N\to\infty$时，$\sqrt{N}(\hat{b}-b)$ 依分布收敛到正态分布([27]).

$$\mathrm{N}\left(0, \frac{1+b^2+b^4+b^6+b^8}{(1-b^2)^2}\right).$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(1)参数估计(续)

- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的白噪声, 由§4.2 定理2.1 知道$\hat{\rho}_1$是ρ_1的强相合估计: $\lim_{N\to\infty} \hat{\rho}_1 = \rho_1$, a.s., 于是
- $$\lim_{N\to\infty} \hat{b} = \frac{1-\sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1} = b, \ \ a.s.,$$
- 所以$\hat{b}$是b的强相合估计.
- 实际上利用§4.2 定理2.2 还可以证明, 当$N\to\infty$时, $\sqrt{N}(\hat{b}-b)$ 依分布收敛到正态分布([27]).

$$\mathrm{N}\left(0, \frac{1+b^2+b^4+b^6+b^8}{(1-b^2)^2}\right).$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(1)参数估计(续)

- 如果$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的白噪声，由§4.2 定理2.1 知道$\hat{\rho}_1$是ρ_1的强相合估计: $\lim_{N\to\infty} \hat{\rho}_1 = \rho_1$，a.s.，于是
- $$\lim_{N\to\infty} \hat{b} = \frac{1-\sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1} = b, \ \ a.s.,$$
- 所以$\hat{b}$是b的强相合估计.
- 实际上利用§4.2 定理2.2 还可以证明，当$N \to \infty$时，$\sqrt{N}(\hat{b}-b)$ 依分布收敛到正态分布([27]).

$$\mathrm{N}\left(0, \frac{1+b^2+b^4+b^6+b^8}{(1-b^2)^2}\right).$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

矩估计

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

- 考虑可逆MA(q)模型:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$, 系数满足可逆条件：

$$B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \neq 0, \quad |z| \leq 1, \tag{2.3}$$

- 假定q已知，估计$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_q)^T$和$\sigma^2$。

矩估计

- 考虑可逆MA(q)模型:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$, 系数满足可逆条件:

$$B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \neq 0, \quad |z| \leq 1, \tag{2.3}$$

- 假定q已知，估计$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_q)^T$和$\sigma^2$。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

矩估计(续)

- 参数与自协方差函数关系为

$$\gamma_k = \sigma^2(b_0 b_k + b_1 b_{k+1} + \cdots + b_{q-k} b_q), \quad 0 \le k \le q. \tag{2.4}$$

(其中$b_0 = 1$)

- 从样本估计出$\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_q$后，可以用解非线性方程组的方法求解**b**和$\sigma^2$，但不能保证解唯一，也不能保证可逆性条件。
- 求解方法包括线性迭代方法和Newton-Raphson迭代方法。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

矩估计(续)

- 参数与自协方差函数关系为

$$\gamma_k = \sigma^2(b_0 b_k + b_1 b_{k+1} + \cdots + b_{q-k} b_q), \quad 0 \le k \le q. \tag{2.4}$$

  (其中$b_0 = 1$)
- 从样本估计出$\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_q$后，可以用解非线性方程组的方法求解$\mathbf{b}$和$\sigma^2$，但不能保证解唯一，也不能保证可逆性条件。
- 求解方法包括线性迭代方法和Newton-Raphson迭代方法。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

矩估计(续)

- 参数与自协方差函数关系为

$$\gamma_k = \sigma^2(b_0 b_k + b_1 b_{k+1} + \cdots + b_{q-k} b_q), \quad 0 \le k \le q. \tag{2.4}$$

  (其中$b_0 = 1$)
- 从样本估计出$\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_q$后，可以用解非线性方程组的方法求解$\mathbf{b}$和$\sigma^2$，但不能保证解唯一，也不能保证可逆性条件。
- 求解方法包括线性迭代方法和Newton-Raphson迭代方法。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

矩估计(续2)

- 还可以根据§3.1 C计算矩估计。由MA(q)的q步截尾性，可定义

$$\tilde{\gamma}_k = \begin{cases} \hat{\gamma}_k, & 0 \le k \le q, \\ 0, & k > q, \end{cases}$$

用$\{\tilde{\gamma}_k\}$作为$\{\gamma_k\}$的估计代入§3.1C 的计算公式。

- **定理2.1** 如果模型(2.2)中的$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$, 则几乎必然地当N充分大后由(2.6)计算的$\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q$满足可逆条件(2.3).

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

矩估计(续2)

- 还可以根据§3.1 C计算矩估计。由MA(q)的q步截尾性，可定义

$$\tilde{\gamma}_k = \begin{cases} \hat{\gamma}_k, & 0 \le k \le q, \\ 0, & k > q, \end{cases}$$

用$\{\tilde{\gamma}_k\}$作为$\{\gamma_k\}$的估计代入§3.1C 的计算公式。

- **定理2.1** 如果模型(2.2)中的$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0, \sigma^2)$, 则几乎必然地当N充分大后由(2.6)计算的$\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q$满足可逆条件(2.3).

矩估计(续3)

- **证明** 由于当$N \to \infty, \hat{\gamma}_k \to \gamma_k$, a.s., 所以

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda}$$
$$\to f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q}^{q} \gamma_k e^{-ik\lambda}, \text{ a.s., 当 } N \to \infty$$

在$[-\pi, \pi]$上一致成立. 于是当N充分大后$\hat{f}(\lambda)$恒正. 利用§3.1的引理1.2知道有惟一的$(b'_1, b'_2, \ldots, b'_q)$满足可逆性条件(2.3), 并且使得

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\sigma_0^2}{2\pi} |1 + \sum_{j=1}^{q} b'_j e^{-ij\lambda}|^2$$

是

$$Y_t = e_t + \sum_{j=1}^{q} b'_j e_{t-j}, \quad \{e_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_0^2)$$

的谱密度. 这时, $\tilde{\gamma}_k = E(Y_t Y_{t+k})$. 再利用§3.1的C知道

$$(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q) = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_q).$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

矩估计(续4)

- 从定理2.1的证明知道这样得到的$(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \cdots, \hat{b}_q)$满足

$$1 + \sum_{j=1}^{q} \hat{b}_j z^j \neq 0, \ |z| \leq 1$$

的充分条件是

$$\sum_{k=-q}^{q} \hat{\gamma}_k e^{-ik\lambda} > 0, \ \lambda \in [-\pi, \pi].$$

MA(q)模型的参数估计

MA(q)模型的矩估计及其计算

MA(q)模型的逆相关函数法

MA(q)模型的新息估计方法

MA(q)模型的定阶方法

MA(q)模型的拟合检验

MA谱密度估计

ARMA(p, q)模型的参数估计

ARMA(p, q)模型的矩估计方法

ARMA(p, q)模型的自回归逼近法

正态时间序列的似然函数

ARMA(p, q)模型的最大似然估计

ARMA(p, q)模型的检验

ARMA(p, q)模型的定阶方法

ARMA(p, q)模型的谱密度估计

逆相关函数

- 因为AR的Yule-Warker估计能保证最小相位性所以想到把MA变成一个AR再估计。
- 定义： 设平稳序列$\{X_t\}$有恒正的谱密度$f(\lambda)$.通常称

$$f_y(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2 f(\lambda)}. \tag{2.7}$$

为$\{X_t\}$的逆谱密度. 称

$$\gamma_y(k) \triangleq \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_y(\lambda)\, d\lambda$$

为$\{X_t\}$的逆相关函数或逆自相关函数.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

逆相关函数

- 因为AR的Yule-Warker估计能保证最小相位性所以想到把MA变成一个AR再估计。
- **定义**: 设平稳序列$\{X_t\}$有恒正的谱密度$f(\lambda)$.通常称

$$f_y(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2 f(\lambda)}. \tag{2.7}$$

为$\{X_t\}$的逆谱密度. 称

$$\gamma_y(k) \triangleq \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_y(\lambda)\, d\lambda$$

为$\{X_t\}$的逆相关函数或逆自相关函数.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数

- 设$\{X_t\}$为可逆MA(q)序列。其谱密度为

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|B(e^{i\lambda})|^2$$

- 逆谱密度为

$$f_y(\lambda) = \frac{\sigma^{-2}}{2\pi}|B(e^{i\lambda})|^{-2} \tag{2.8}$$

f_y为如下AR(q)序列的谱密度

$$Y_t = -\sum_{j=1}^{q} b_j Y_{t-j} + e_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.9}$$

其中$\{e_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^{-2})$。

- $\{Y_t\}$的自协方差函数

$$\gamma_y(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_y(\lambda)\, d\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

是$\{X_t\}$的逆相关函数。

MA(q)的逆相关函数

- 设$\{X_t\}$为可逆MA(q)序列。其谱密度为

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|B(e^{i\lambda})|^2$$

- 逆谱密度为

$$f_y(\lambda) = \frac{\sigma^{-2}}{2\pi}|B(e^{i\lambda})|^{-2} \tag{2.8}$$

f_y为如下AR(q)序列的谱密度

$$Y_t = -\sum_{j=1}^{q} b_j Y_{t-j} + e_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.9}$$

其中$\{e_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^{-2})$。

- $\{Y_t\}$的自协方差函数

$$\gamma_y(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_y(\lambda)\, d\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

是$\{X_t\}$的逆相关函数。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数

- 设$\{X_t\}$为可逆MA(q)序列。其谱密度为

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|B(e^{i\lambda})|^2$$

- 逆谱密度为

$$f_y(\lambda) = \frac{\sigma^{-2}}{2\pi}|B(e^{i\lambda})|^{-2} \tag{2.8}$$

f_y为如下AR(q)序列的谱密度

$$Y_t = -\sum_{j=1}^{q} b_j Y_{t-j} + e_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2.9}$$

其中$\{e_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^{-2})$。

- $\{Y_t\}$的自协方差函数

$$\gamma_y(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_y(\lambda)\, d\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

是$\{X_t\}$的逆相关函数。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数(续)

- 只要能估计$\{\gamma_y(k)\}$，就可以用Y-W方法估计$\{Y_t\}$的参数$b_1, \ldots, b_q$和σ^{-2}，从而得到MA(q) 序列$\{X_t\}$的参数估计，且系数满足可逆性条件。
- 引理2.2　如果$(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ 和σ^2分别是AR(p)模型

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

的自回归系数和白噪声$\{\varepsilon_t\}$的方差, 则$\{X_t\}$的逆相关函数为

$$\gamma_y(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=0}^{p-k} a_j a_{j+k}, & 0 \le k \le p, \quad a_0 \triangleq -1, \\ 0, & k > p. \end{cases}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数(续)

- 只要能估计$\{\gamma_y(k)\}$，就可以用Y-W方法估计$\{Y_t\}$的参数$b_1,\ldots,b_q$和σ^{-2}，从而得到MA(q) 序列$\{X_t\}$的参数估计，且系数满足可逆性条件。
- **引理2.2** 如果$(a_1,a_2,\ldots,a_p)$ 和σ^2分别是AR(p)模型

$$X_t=\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}+\varepsilon_t,\quad t\in\mathbb{Z},$$

的自回归系数和白噪声$\{\varepsilon_t\}$的方差, 则$\{X_t\}$的逆相关函数为

$$\gamma_y(k)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=0}^{p-k}a_ja_{j+k}, & 0\le k\le p,\quad a_0\triangleq-1,\\ 0, & k>p.\end{cases}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数(续2)

- **引理2.2证明** $\{X_t\}$有谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|A(e^{i\lambda})|^{-2}, \quad \text{其中 } A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j,$$

和逆谱密度

$$f_y(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2 f(\lambda)} = \frac{1}{2\pi\sigma^2}|A(e^{i\lambda})|^2,$$

于是有逆相关函数

$$\gamma_y(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_y(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=0}^{p-k} a_j a_{j+k}, & 0 \le k \le p, \\ 0, & k > p. \end{cases}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数参数估计法

- 满足(2.2)的可逆MA(q)序列$\{X_t\}$可以写成无穷阶自回归的形式

$$X_t - \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j} = \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, .., \tag{2.13}$$

这里的回归系数$\{a_j\}$ 由$1/B(z)$ 在单位圆内的Taylor级数决定:

$$\frac{1}{B(z)} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j, \ |z| \le 1.$$

- 由于当$j \to \infty$, a_j是以负指数阶收敛到0的, 所以对较大的正整数p 可以将无穷阶自回归模型(2.13)写成近似的长阶(p阶)自回归的形式

$$X_t \approx \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \ t = 1, 2, .., \tag{2.14}$$

- 利用引理2.2 知道$\{X_t\}$的逆相关函数$\gamma_y(k)$满足

$$\gamma_y(k) \approx \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=0}^{p-k} a_j a_{j+k}, \ 0 \le k \le q, \ a_0 \overset{\triangle}{=} -1. \tag{2.15}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数参数估计法

- 满足(2.2)的可逆MA(q)序列$\{X_t\}$可以写成无穷阶自回归的形式

$$X_t - \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j} = \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, .., \tag{2.13}$$

这里的回归系数$\{a_j\}$ 由$1/B(z)$ 在单位圆内的Taylor级数决定:

$$\frac{1}{B(z)} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j, \ |z| \le 1.$$

- 由于当$j \to \infty$, a_j是以负指数阶收敛到0的, 所以对较大的正整数p 可以将无穷阶自回归模型(2.13)写成近似的长阶(p阶)自回归的形式

$$X_t \approx \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \ t = 1, 2, .., \tag{2.14}$$

- 利用引理2.2 知道$\{X_t\}$的逆相关函数$\gamma_y(k)$满足

$$\gamma_y(k) \approx \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=0}^{p-k} a_j a_{j+k}, \ 0 \le k \le q, \ a_0 \triangleq -1. \tag{2.15}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数参数估计法

- 满足(2.2)的可逆MA(q)序列$\{X_t\}$可以写成无穷阶自回归的形式

$$X_t - \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j} = \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, .., \tag{2.13}$$

这里的回归系数$\{a_j\}$ 由$1/B(z)$ 在单位圆内的Taylor级数决定:

$$\frac{1}{B(z)} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j, \ |z| \le 1.$$

- 由于当$j \to \infty$, a_j是以负指数阶收敛到0的, 所以对较大的正整数p 可以将无穷阶自回归模型(2.13)写成近似的长阶(p阶)自回归的形式

$$X_t \approx \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \ t = 1, 2, .., \tag{2.14}$$

- 利用引理2.2 知道$\{X_t\}$的逆相关函数$\gamma_y(k)$满足

$$\gamma_y(k) \approx \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=0}^{p-k} a_j a_{j+k}, \ 0 \le k \le q, \ a_0 \triangleq -1. \tag{2.15}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数参数估计法(续)

- 用样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$计算逆相关函数$\hat{\gamma}_y(k)$和$\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_q, \hat{\sigma}^2$的方法如下。
  1. 首先利用$\{x_t\}$的样本自协方差函数$\hat{\gamma}_k$建立一个AR(p_N)模型，这里p_N可以是AR模型的AIC定阶，也可以取作$K\ln(N)$的整数部分，K是一个正数.
  2. 对$p = p_N$解样本Yule-Walker方程(1.3),(1.4)，得到样本Yule-Walker 系数
  $$(\hat{a}_{p,1}, \hat{a}_{p,2}, \ldots, \hat{a}_{p,p}) \quad 和 \quad \hat{\sigma}_p^2.$$
  3. 计算样本逆相关函数
  $$\hat{\gamma}_y(k) = \frac{1}{\hat{\sigma}_p^2} \sum_{j=0}^{p-k} \hat{a}_{p,j}\hat{a}_{p,j+k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, q, \quad \hat{a}_{p,0} \triangleq -1.$$
  4. 利用样本Yule-Walker 方程(2.11) 和(2.12) 计算出MA(q)系数的估计$\hat{\mathbf{b}}_q = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, .., \hat{b}_q)^T$ 和$\hat{\sigma}^2$.
- 这种办法是用一个长阶自回归来近似$\{X_t\}$，自回归序列的逆自相关函数很容易计算，这样得到逆相关函数。

MA(q)模型的参数估计
- MA(q)模型的矩估计及其计算
- MA(q)模型的逆相关函数法
- MA(q)模型的新息估计方法
- MA(q)模型的定阶方法
- MA(q)模型的拟合检验
- MA谱密度估计

ARMA(p, q)模型的参数估计
- ARMA(p, q)模型的矩估计方法
- ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
- 正态时间序列的似然函数
- ARMA(p, q)模型的最大似然估计
- ARMA(p, q)模型的检验
- ARMA(p, q)模型的定阶方法
- ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数参数估计法(续)

- 用样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$计算逆相关函数$\hat{\gamma}_y(k)$和$\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_q, \hat{\sigma}^2$的方法如下。
  1. 首先利用$\{x_t\}$的样本自协方差函数$\hat{\gamma}_k$建立一个AR(p_N)模型，这里p_N可以是AR模型的AIC定阶，也可以取作$K \ln(N)$的整数部分，K是一个正数.
  2. 对$p = p_N$解样本Yule-Walker方程(1.3),(1.4)，得到样本Yule-Walker 系数

$$(\hat{a}_{p,1}, \hat{a}_{p,2}, \ldots, \hat{a}_{p,p}) \quad 和 \quad \hat{\sigma}_p^2.$$

  3. 计算样本逆相关函数

$$\hat{\gamma}_y(k) = \frac{1}{\hat{\sigma}_p^2} \sum_{j=0}^{p-k} \hat{a}_{p,j} \hat{a}_{p,j+k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, q, \quad \hat{a}_{p,0} \triangleq -1.$$

  4. 利用样本Yule-Walker 方程(2.11) 和(2.12) 计算出MA(q)系数的估计$\hat{\mathbf{b}}_q = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, .., \hat{b}_q)^T$ 和$\hat{\sigma}^2$.
- 这种办法是用一个长阶自回归来近似$\{X_t\}$，自回归序列的逆自相关函数很容易计算，这样得到逆相关函数。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数参数估计法(续)

- 用样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$计算逆相关函数$\hat{\gamma}_y(k)$和$\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_q, \hat{\sigma}^2$的方法如下。
  1. 首先利用$\{x_t\}$的样本自协方差函数$\hat{\gamma}_k$建立一个AR(p_N)模型，这里p_N可以是AR模型的AIC定阶，也可以取作$K\ln(N)$的整数部分，K是一个正数.
  2. 对$p \equiv p_N$解样本Yule-Walker方程(1.3),(1.4)，得到样本Yule-Walker 系数

$$(\hat{a}_{p,1}, \hat{a}_{p,2}, \ldots, \hat{a}_{p,p}) \text{ 和 } \hat{\sigma}_p^2.$$

  3. 计算样本逆相关函数

$$\hat{\gamma}_y(k) = \frac{1}{\hat{\sigma}_p^2} \sum_{j=0}^{p-k} \hat{a}_{p,j}\hat{a}_{p,j+k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, q, \; \hat{a}_{p,0} \triangleq -1.$$

  4. 利用样本Yule-Walker 方程(2.11) 和(2.12) 计算出MA(q)系数的估计$\hat{\mathbf{b}}_q = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, .., \hat{b}_q)^T$ 和$\hat{\sigma}^2$.
- 这种办法是用一个长阶自回归来近似$\{X_t\}$，自回归序列的逆自相关函数很容易计算，这样得到逆相关函数。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数参数估计法(续)

- 用样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$计算逆相关函数$\hat{\gamma}_y(k)$和$\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_q, \hat{\sigma}^2$的方法如下。
  1. 首先利用$\{x_t\}$的样本自协方差函数$\hat{\gamma}_k$建立一个AR(p_N)模型，这里p_N可以是AR模型的AIC定阶，也可以取作$K\ln(N)$的整数部分，K是一个正数.
  2. 对$p \equiv p_N$解样本Yule-Walker方程(1.3),(1.4)，得到样本Yule-Walker 系数
  $$(\hat{a}_{p,1}, \hat{a}_{p,2}, \ldots, \hat{a}_{p,p}) \quad 和 \quad \hat{\sigma}_p^2.$$
  3. 计算样本逆相关函数
  $$\hat{\gamma}_y(k) = \frac{1}{\hat{\sigma}_p^2} \sum_{j=0}^{p-k} \hat{a}_{p,j}\hat{a}_{p,j+k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, q, \; \hat{a}_{p,0} \triangleq -1.$$
  4. 利用样本Yule-Walker 方程(2.11) 和(2.12) 计算出MA(q)系数的估计$\hat{\mathbf{b}}_q = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, .., \hat{b}_q)^T$ 和$\hat{\sigma}^2$.
- 这种办法是用一个长阶自回归来近似$\{X_t\}$，自回归序列的逆自相关函数很容易计算，这样得到逆相关函数。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数参数估计法(续)

- 用样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$计算逆相关函数$\hat{\gamma}_y(k)$和$\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_q, \hat{\sigma}^2$的方法如下。
  1. 首先利用$\{x_t\}$的样本自协方差函数$\hat{\gamma}_k$建立一个AR(p_N)模型，这里p_N可以是AR模型的AIC定阶，也可以取作$K\ln(N)$的整数部分，K是一个正数.
  2. 对$p \equiv p_N$解样本Yule-Walker方程(1.3),(1.4)，得到样本Yule-Walker 系数
  $$(\hat{a}_{p,1}, \hat{a}_{p,2}, \ldots, \hat{a}_{p,p}) \ \text{和}\ \hat{\sigma}_p^2.$$
  3. 计算样本逆相关函数
  $$\hat{\gamma}_y(k) = \frac{1}{\hat{\sigma}_p^2}\sum_{j=0}^{p-k}\hat{a}_{p,j}\hat{a}_{p,j+k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, q,\ \hat{a}_{p,0} \triangleq -1.$$
  4. 利用样本Yule-Walker 方程(2.11) 和(2.12) 计算出MA(q)系数的估计$\hat{\mathbf{b}}_q = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, .., \hat{b}_q)^T$ 和$\hat{\sigma}^2$.
- 这种办法是用一个长阶自回归来近似$\{X_t\}$，自回归序列的逆自相关函数很容易计算，这样得到逆相关函数。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)的逆相关函数参数估计法(续)

- 用样本$x_1, x_2, \ldots, x_N$计算逆相关函数$\hat{\gamma}_y(k)$和$\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_q, \hat{\sigma}^2$的方法如下。
  1. 首先利用$\{x_t\}$的样本自协方差函数$\hat{\gamma}_k$建立一个AR(p_N)模型，这里p_N可以是AR模型的AIC定阶，也可以取作$K\ln(N)$的整数部分，K是一个正数.
  2. 对$p \equiv p_N$解样本Yule-Walker方程(1.3),(1.4)，得到样本Yule-Walker 系数
  $$(\hat{a}_{p,1}, \hat{a}_{p,2}, \ldots, \hat{a}_{p,p}) \ \text{和}\ \hat{\sigma}_p^2.$$
  3. 计算样本逆相关函数
  $$\hat{\gamma}_y(k) = \frac{1}{\hat{\sigma}_p^2} \sum_{j=0}^{p-k} \hat{a}_{p,j}\hat{a}_{p,j+k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, q, \ \hat{a}_{p,0} \triangleq -1.$$
  4. 利用样本Yule-Walker 方程(2.11) 和(2.12) 计算出MA(q)系数的估计$\hat{\mathbf{b}}_q = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, .., \hat{b}_q)^T$ 和$\hat{\sigma}^2$.
- 这种办法是用一个长阶自回归来近似$\{X_t\}$，自回归序列的逆自相关函数很容易计算，这样得到逆相关函数。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA参数的新息估计

- 用新息预报公式可以计算$\{X_t\}$的样本新息。

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{t+1} =& X_{t+1} - \hat{X}_{t+1} \triangleq X_{t+1} - L(X_{t+1}|X_1,\dots,X_t)\\ =& X_{t+1} - L(X_{t+1}|\hat{\varepsilon}_1,\dots,\hat{\varepsilon}_t)\\ =& X_{t+1} - \sum_{j=1}^{t}\theta_{t,j}\hat{\varepsilon}_{t+1-j}, \quad t=1,2,\dots\end{aligned}$$

- 其中$\hat{X}_1 \triangleq 0$，$\{\theta_{t,j}\}$可递推计算，预报误差$\nu_t = \mathrm{E}\hat{\varepsilon}_{t+1}^2$可递推计算。
- 对MA(q)序列$\{X_t\}$上述新息预报公式中$\theta_{t,j}=0$，对$t\ge q, j>q$，新息预报公式变成

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^{q}\theta_{t,j}\hat{\varepsilon}_{t+1-j}, \quad t \ge q \qquad (2.16)$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA参数的新息估计

- 用新息预报公式可以计算$\{X_t\}$的样本新息。

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{t+1} =& X_{t+1} - \hat{X}_{t+1} \triangleq X_{t+1} - L(X_{t+1}|X_1,\dots,X_t) \\ =& X_{t+1} - L(X_{t+1}|\hat{\varepsilon}_1,\dots,\hat{\varepsilon}_t) \\ =& X_{t+1} - \sum_{j=1}^{t} \theta_{t,j}\hat{\varepsilon}_{t+1-j}, \quad t=1,2,\dots\end{aligned}$$

- 其中$\hat{X}_1 \triangleq 0$，$\{\theta_{t,j}\}$可递推计算，预报误差$\nu_t = \mathrm{E}\hat{\varepsilon}_{t+1}^2$可递推计算。
- 对MA(q)序列$\{X_t\}$上述新息预报公式中$\theta_{t,j}=0$，对$t\ge q, j>q$，新息预报公式变成

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^{q} \theta_{t,j}\hat{\varepsilon}_{t+1-j}, \quad t\ge q \qquad (2.16)$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA参数的新息估计

- 用新息预报公式可以计算$\{X_t\}$的样本新息。

$$
\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{t+1} =& X_{t+1} - \hat{X}_{t+1} \triangleq X_{t+1} - L(X_{t+1}|X_1, \ldots, X_t) \\
=& X_{t+1} - L(X_{t+1}|\hat{\varepsilon}_1, \ldots, \hat{\varepsilon}_t) \\
=& X_{t+1} - \sum_{j=1}^{t} \theta_{t,j}\hat{\varepsilon}_{t+1-j}, \quad t = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

- 其中$\hat{X}_1 \triangleq 0$，$\{\theta_{t,j}\}$可递推计算，预报误差$\nu_t = \mathrm{E}\hat{\varepsilon}_{t+1}^2$可递推计算。
- 对MA(q)序列$\{X_t\}$上述新息预报公式中$\theta_{t,j} = 0$，对$t \geq q, j > q$，新息预报公式变成

$$
\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^{q} \theta_{t,j}\hat{\varepsilon}_{t+1-j}, \quad t \geq q \qquad (2.16)
$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA参数的新息估计(续)

- 对MA(q)序列$\{X_t\}$其白噪声项$\{\varepsilon_t\}$是新息:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{t+1} =& X_{t+1} - L(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)\\ \approx& X_{t+1} - L(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1)\\ =& \hat{\varepsilon}_{t+1}, \quad t \to \infty\end{aligned}$$

(由§5.2(P161)定理2.4，无穷长历史最佳线性预测是有限历史预测的极限)

- 于是t较大时

$$\begin{aligned}X_t =& \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\varepsilon_{t-q}\\ \approx& \hat{\varepsilon}_t + b_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + b_q\hat{\varepsilon}_{t-q}\\ =& X_t - \hat{X}_t + b_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + b_q\hat{\varepsilon}_{t-q}\end{aligned}$$

说明

$$\hat{X}_t \approx b_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + b_q\hat{\varepsilon}_{t-q}$$

- 上式与(2.16)的新息预报公式比较可知当t较大时可以用$\hat{b}_j = \theta_{t,j}$估计b_j，用ν_t估计σ^2。这种估计称为新息估计。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA参数的新息估计(续)

- 对MA(q)序列$\{X_t\}$其白噪声项$\{\varepsilon_t\}$是新息:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{t+1} =& X_{t+1} - L(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) \\
\approx& X_{t+1} - L(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_1) \\
=& \hat{\varepsilon}_{t+1}, \quad t \to \infty
\end{aligned}
$$

  (由§5.2(P161)定理2.4，无穷长历史最佳线性预测是有限历史预测的极限)
- 于是t较大时

$$
\begin{aligned}
X_t =& \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\varepsilon_{t-q} \\
\approx& \hat{\varepsilon}_t + b_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + b_q\hat{\varepsilon}_{t-q} \\
=& X_t - \hat{X}_t + b_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + b_q\hat{\varepsilon}_{t-q}
\end{aligned}
$$

  说明

$$
\hat{X}_t \approx b_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + b_q\hat{\varepsilon}_{t-q}
$$

- 上式与(2.16)的新息预报公式比较可知当t较大时可以用$\hat{b}_j = \theta_{t,j}$估计b_j，用ν_t估计σ^2。这种估计称为新息估计。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA参数的新息估计(续)

- 对MA(q)序列$\{X_t\}$其白噪声项$\{\varepsilon_t\}$是新息:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{t+1} =& X_{t+1} - L(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)\\ \approx& X_{t+1} - L(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1)\\ =& \hat{\varepsilon}_{t+1}, \quad t \to \infty\end{aligned}$$

(由§5.2(P161)定理2.4，无穷长历史最佳线性预测是有限历史预测的极限)
- 于是t较大时

$$\begin{aligned}X_t =& \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\varepsilon_{t-q}\\ \approx& \hat{\varepsilon}_t + b_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + b_q\hat{\varepsilon}_{t-q}\\ =& X_t - \hat{X}_t + b_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + b_q\hat{\varepsilon}_{t-q}\end{aligned}$$

说明

$$\hat{X}_t \approx b_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + b_q\hat{\varepsilon}_{t-q}$$

- 上式与(2.16)的新息预报公式比较可知当t较大时可以用$\hat{b}_j = \theta_{t,j}$估计b_j，用ν_t估计σ^2。这种估计称为新息估计。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA参数的新息估计算法

- 给定观测数据$x_1, x_2, \ldots, x_N$，取$m = o(N^{1/3})$.
- 计算样本自协方差函数$\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \cdots, \hat{\gamma}_m$.
- **b** 和σ^2的新息估计

$$(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q) = (\hat{\theta}_{m,1}, \hat{\theta}_{m,2}, \ldots, \hat{\theta}_{m,q}), \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\nu}_m. \tag{2.17}$$

由下面的新息预报递推公式得到.

$$\begin{cases} \hat{\nu}_0 = \hat{\gamma}_0, \\ \hat{\theta}_{n,n-k} = \hat{\nu}_k^{-1}[\hat{\gamma}_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\theta}_{k,k-j}\hat{\theta}_{n,n-j}\hat{\nu}_j], & 0 \le k \le n-1, \\ \hat{\nu}_n = \hat{\gamma}_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\theta}_{n,n-j}^2 \hat{\nu}_j, & 1 \le n \le m, \end{cases} \tag{2.18}$$

其中$\sum_{j=0}^{-1}(\cdot) \triangleq 0$.
- 递推次序是

$$\hat{\nu}_0; \ \hat{\theta}_{1,1}, \hat{\nu}_1; \ \hat{\theta}_{2,2}, \hat{\theta}_{2,1}, \hat{\nu}_2; \hat{\theta}_{3,3}, \hat{\theta}_{3,2}, \hat{\theta}_{3,1}, \hat{\nu}_3; \cdots.$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA参数的新息估计算法

- 给定观测数据$x_1, x_2, \ldots, x_N$，取$m = o(N^{1/3})$.
- 计算样本自协方差函数$\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \cdots, \hat{\gamma}_m$.
- **b** 和σ^2的新息估计

$$(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q) = (\hat{\theta}_{m,1}, \hat{\theta}_{m,2}, \ldots, \hat{\theta}_{m,q}), \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\nu}_m. \tag{2.17}$$

由下面的新息预报递推公式得到.

$$\begin{cases} \hat{\nu}_0 = \hat{\gamma}_0, \\ \hat{\theta}_{n,n-k} = \hat{\nu}_k^{-1}[\hat{\gamma}_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\theta}_{k,k-j}\hat{\theta}_{n,n-j}\hat{\nu}_j], & 0 \le k \le n-1, \\ \hat{\nu}_n = \hat{\gamma}_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\theta}_{n,n-j}^2 \hat{\nu}_j, & 1 \le n \le m, \end{cases} \tag{2.18}$$

其中$\sum_{j=0}^{-1}(\cdot) \triangleq 0$.
- 递推次序是

$$\hat{\nu}_0; \ \hat{\theta}_{1,1}, \hat{\nu}_1; \ \hat{\theta}_{2,2}, \hat{\theta}_{2,1}, \hat{\nu}_2; \hat{\theta}_{3,3}, \hat{\theta}_{3,2}, \hat{\theta}_{3,1}, \hat{\nu}_3; \cdots.$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA参数的新息估计算法

- 给定观测数据$x_1, x_2, \ldots, x_N$，取$m = o(N^{1/3})$.
- 计算样本自协方差函数$\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \cdots, \hat{\gamma}_m$.
- **b** 和σ^2的新息估计

$$(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q) = (\hat{\theta}_{m,1}, \hat{\theta}_{m,2}, \ldots, \hat{\theta}_{m,q}), \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\nu}_m. \tag{2.17}$$

由下面的新息预报递推公式得到.

$$\begin{cases} \hat{\nu}_0 = \hat{\gamma}_0, \\ \hat{\theta}_{n,n-k} = \hat{\nu}_k^{-1}[\hat{\gamma}_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\theta}_{k,k-j}\hat{\theta}_{n,n-j}\hat{\nu}_j], & 0 \le k \le n-1, \\ \hat{\nu}_n = \hat{\gamma}_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\theta}_{n,n-j}^2 \hat{\nu}_j, & 1 \le n \le m, \end{cases} \tag{2.18}$$

其中$\sum_{j=0}^{-1}(\cdot) \triangleq 0$.

- 递推次序是

$$\hat{\nu}_0;\ \hat{\theta}_{1,1}, \hat{\nu}_1;\ \hat{\theta}_{2,2}, \hat{\theta}_{2,1}, \hat{\nu}_2; \hat{\theta}_{3,3}, \hat{\theta}_{3,2}, \hat{\theta}_{3,1}, \hat{\nu}_3; \cdots.$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA参数的新息估计算法

- 给定观测数据$x_1, x_2, \dots, x_N$，取$m = o(N^{1/3})$.
- 计算样本自协方差函数$\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \cdots, \hat{\gamma}_m$.
- **b** 和σ^2的新息估计

$$(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_q) = (\hat{\theta}_{m,1}, \hat{\theta}_{m,2}, \dots, \hat{\theta}_{m,q}), \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\nu}_m. \tag{2.17}$$

由下面的新息预报递推公式得到.

$$\begin{cases} \hat{\nu}_0 = \hat{\gamma}_0, & \\ \hat{\theta}_{n,n-k} = \hat{\nu}_k^{-1}[\hat{\gamma}_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\theta}_{k,k-j}\hat{\theta}_{n,n-j}\hat{\nu}_j], & 0 \le k \le n-1, \\ \hat{\nu}_n = \hat{\gamma}_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\theta}_{n,n-j}^2 \hat{\nu}_j, & 1 \le n \le m, \end{cases} \tag{2.18}$$

其中$\sum_{j=0}^{-1}(\cdot) \triangleq 0$.
- 递推次序是

$$\hat{\nu}_0;\ \hat{\theta}_{1,1}, \hat{\nu}_1;\ \hat{\theta}_{2,2}, \hat{\theta}_{2,1}, \hat{\nu}_2; \hat{\theta}_{3,3}, \hat{\theta}_{3,2}, \hat{\theta}_{3,1}, \hat{\nu}_3; \cdots .$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

新息估计的相合性

定理2.3([18]) 设$\{X_t\}$是可逆ARMA(p,q)序列, 满足

$$A(\mathscr{B})X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

$\{\psi_j\}$是$B(z)/A(z)$的Taylor级数系数. 如果$\{\varepsilon_t\}$是4阶矩有限的独立同分布WN$(0,\sigma^2)$, 正整数列$m = m(N) < N$ 满足当$N \to \infty$ 时, $m \to \infty$ 和$m = o(N^{1/3})$. 则对任何正整数q, 当$N \to \infty$

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{m,1} - \psi_1, \hat{\theta}_{m,2} - \psi_2, \ldots, \hat{\theta}_{m,q} - \psi_q)$$

依分布收敛到q维正态分布$N(0, A)$, 其中$q \times q$矩阵

$$A = (a_{i,j}), \quad a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \psi_{i-k}\psi_{j-k}.$$

并且$\hat{v}_m$ 依概率收敛到σ^2.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

新息估计的相合性(续)

- **推论** 对于MA(q)序列$\{X_t\}$, 当模型(2.2)中的白噪声是4阶矩有限的独立同分布序列时, 新息估计(2.17)是相合估计, 当N趋于无穷时,

$$\sqrt{N}(\hat{b}_1 - b_1, \hat{b}_2 - b_2, \cdots, \hat{b}_q - b_q)$$

依分布收敛到q维正态分布$N(0, A)$, 其中$q \times q$矩阵

$$A = (a_{i,j}), \quad a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{i-k} b_{j-k}, \quad b_0 \triangleq 1.$$

并且$\hat{v}_m$ 依概率收敛到σ^2.

- 注意需要$m \to \infty$时新息方法得到的参数估计才是相合的，不能用$\theta_{q,1}, \ldots, \theta_{q,q}$作为$b_1, \ldots, b_q$的估计。
- 实际中，m也不能取得太大，因为新息预测的递推公式中用到$\hat{\gamma}_{m-1}$。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

新息估计的相合性(续)

- **推论**　对于MA(q)序列$\{X_t\}$，当模型(2.2)中的白噪声是4阶矩有限的独立同分布序列时，新息估计(2.17)是相合估计，当N趋于无穷时，

$$\sqrt{N}(\hat{b}_1 - b_1, \hat{b}_2 - b_2, \cdots, \hat{b}_q - b_q)$$

依分布收敛到q维正态分布$N(0, A)$，其中$q \times q$矩阵

$$A = (a_{i,j}), \quad a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{i-k} b_{j-k}, \quad b_0 \triangleq 1.$$

并且$\hat{v}_m$ 依概率收敛到σ^2.

- 注意需要$m \to \infty$时新息方法得到的参数估计才是相合的，不能用$\theta_{q,1}, \ldots, \theta_{q,q}$作为$b_1, \ldots, b_q$的估计。
- 实际中，m也不能取得太大，因为新息预测的递推公式中用到$\hat{\gamma}_{m-1}$。

新息估计的相合性(续)

- **推论** 对于MA(q)序列$\{X_t\}$，当模型(2.2)中的白噪声是4阶矩有限的独立同分布序列时，新息估计(2.17)是相合估计，当N趋于无穷时，

$$\sqrt{N}(\hat{b}_1 - b_1, \hat{b}_2 - b_2, \cdots, \hat{b}_q - b_q)$$

依分布收敛到q维正态分布$N(0, A)$，其中$q \times q$矩阵

$$A = (a_{i,j}), \quad a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{i-k} b_{j-k}, \quad b_0 \triangleq 1.$$

并且$\hat{v}_m$ 依概率收敛到σ^2.

- 注意需要$m \to \infty$时新息方法得到的参数估计才是相合的，不能用$\theta_{q,1}, \ldots, \theta_{q,q}$作为$b_1, \ldots, b_q$的估计。
- 实际中，m也不能取得太大，因为新息预测的递推公式中用到$\hat{\gamma}_{m-1}$。

MA序列的定阶方法

- 由于MA(q)序列的特征是自相关系数q后截尾，所以当样本自相关系数$\hat{\rho}_k = \hat{\gamma}_k/\hat{\gamma}_0$ 从某一点$\hat{q}$后变得很小时，可以$\hat{q}$作为q的估计.
- 从§4.2 的定理2.2及例2.1 知道，对于$m > q$，$\sqrt{N}\hat{\rho}_m$依分布收敛到期望为0，方差为

$$1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + .. + 2\rho_q^2$$

的正态分布. 这样由样本自相关系数$\hat{\rho}_k, k = 1, 2, \cdots, m$的图形可以大致得到$q$的估计，同时也可以判断采用MA($q$)模型的合理与否.
- 还可以用AIC定阶方法：如果根据问题的背景或数据的特性能够判定MA(q)模型阶数q的上界是Q_0. 对于$m = 0, 1, 2, \ldots, Q_0$按前述的方法逐个拟合MA(m)模型. 白噪声方差σ^2的估计量记做$\hat{\sigma}_m^2$. 定义AIC函数

$$\mathrm{AIC}(m) = \ln(\hat{\sigma}_m^2) + 2m/N, \quad m = 0, 1, \ldots, Q_0.$$

这里N是样本个数. AIC(m)的最小值点$\hat{q}$ (如不惟一，应取小的) 称为MA(q)模型的AIC定阶.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA序列的定阶方法

- 由于MA(q)序列的特征是自相关系数q后截尾，所以当样本自相关系数$\hat{\rho}_k = \hat{\gamma}_k/\hat{\gamma}_0$ 从某一点$\hat{q}$后变得很小时，可以$\hat{q}$作为q的估计.
- 从§4.2 的定理2.2及例2.1 知道，对于$m > q$，$\sqrt{N}\hat{\rho}_m$依分布收敛到期望为0，方差为

$$1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + .. + 2\rho_q^2$$

的正态分布. 这样由样本自相关系数$\hat{\rho}_k, k = 1, 2, \cdots, m$的图形可以大致得到$q$的估计，同时也可以判断采用MA($q$)模型的合理与否.
- 还可以用AIC定阶方法: 如果根据问题的背景或数据的特性能够判定MA(q)模型阶数q的上界是Q_0. 对于$m = 0, 1, 2, \ldots, Q_0$按前述的方法逐个拟合MA(m)模型. 白噪声方差σ^2的估计量记做$\hat{\sigma}_m^2$. 定义AIC函数

$$\mathrm{AIC}(m) = \ln(\hat{\sigma}_m^2) + 2m/N, \quad m = 0, 1, \ldots, Q_0.$$

这里N是样本个数. AIC(m)的最小值点$\hat{q}$ (如不惟一，应取小的) 称为MA(q)模型的AIC定阶.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA序列的定阶方法

- 由于MA(q)序列的特征是自相关系数q后截尾, 所以当样本自相关系数$\hat{\rho}_k = \hat{\gamma}_k/\hat{\gamma}_0$ 从某一点$\hat{q}$后变得很小时, 可以$\hat{q}$作为q的估计.
- 从§4.2 的定理2.2及例2.1 知道, 对于$m > q$, $\sqrt{N}\hat{\rho}_m$依分布收敛到期望为0, 方差为

$$1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + .. + 2\rho_q^2$$

  的正态分布. 这样由样本自相关系数$\hat{\rho}_k, k = 1, 2, \cdots, m$的图形可以大致得到$q$的估计, 同时也可以判断采用MA($q$)模型的合理与否.
- 还可以用AIC定阶方法: 如果根据问题的背景或数据的特性能够判定MA(q)模型阶数q的上界是Q_0. 对于$m = 0, 1, 2, \ldots, Q_0$按前述的方法逐个拟合MA(m)模型. 白噪声方差σ^2的估计量记做$\hat{\sigma}_m^2$. 定义AIC函数

$$\mathrm{AIC}(m) = \ln(\hat{\sigma}_m^2) + 2m/N, \quad m = 0, 1, \ldots, Q_0.$$

  这里N是样本个数. AIC(m)的最小值点$\hat{q}$ (如不惟一, 应取小的) 称为MA(q)模型的AIC定阶.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA模型估计的拟合检验

- 从观测数据$x_1, x_2, \cdots, x_N$ 得到模型的参数估计$\hat{q}$, $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_{\hat{q}}$ 和$\hat{\sigma}^2$ 后，取

$$
\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{1-\hat{q}} = \hat{\varepsilon}_{2-\hat{q}} = \cdots = \hat{\varepsilon}_0 = 0, \\
y_t =& x_t - \bar{x}_N, \\
\hat{\varepsilon}_t =& y_t - \sum_{j=1}^{\hat{q}} \hat{b}_j \hat{\varepsilon}_{t-j}, \quad t = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

- 对$L = O(N^{1/3})$, 如果$\{\hat{\varepsilon}_t : t = L, L+1, \cdots, N\}$ 能够通过白噪声检验，就认为模型的选择合适. 否则改变$\hat{q}$的取值，拟合新的MA模型或改用其他的模型，例如改用ARMA模型等.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA模型估计的拟合检验

- 从观测数据$x_1, x_2, \cdots, x_N$ 得到模型的参数估计$\hat{q}$, $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_{\hat{q}}$ 和$\hat{\sigma}^2$ 后，取

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{1-\hat{q}} &= \hat{\varepsilon}_{2-\hat{q}} = \cdots = \hat{\varepsilon}_0 = 0, \\
y_t &= x_t - \bar{x}_N, \\
\hat{\varepsilon}_t &= y_t - \sum_{j=1}^{\hat{q}} \hat{b}_j \hat{\varepsilon}_{t-j}, \quad t = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}$$

- 对$L = O(N^{1/3})$，如果$\{\hat{\varepsilon}_t : t = L, L+1, \cdots, N\}$ 能够通过白噪声检验，就认为模型的选择合适．否则改变$\hat{q}$的取值，拟合新的MA模型或改用其他的模型，例如改用ARMA模型等．

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)序列的谱密度估计

- 如果从数据得到了MA 模型的参数估计, 模型的检验也已经通过, 可以利用

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\hat{\sigma}^2}{2\pi}|1 + \sum_{j=1}^{\hat{q}} \hat{b}_j e^{ij\lambda}|^2$$

作为所关心的平稳序列的谱密度的估计.

- 这是因为如果观测数据确实是MA(q)序列(2.2)时, 它的谱密度是

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1 + \sum_{j=1}^{q} b_j e^{ij\lambda}|^2.$$

- 不难看出, 如果$\hat{q}$, $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q$和$\hat{\sigma}^2$分别是$q$, $b_1, b_2, .., b_q$ 和σ^2的相合估计, 则$\hat{f}(\lambda)$ 是$f(\lambda)$的相合估计.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

MA(q)序列的谱密度估计

- 如果从数据得到了MA 模型的参数估计，模型的检验也已经通过，可以利用

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{\hat{\sigma}^2}{2\pi}|1+\sum_{j=1}^{\hat{q}}\hat{b}_j e^{ij\lambda}|^2$$

作为所关心的平稳序列的谱密度的估计.

- 这是因为如果观测数据确实是MA(q)序列(2.2)时，它的谱密度是

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}|1+\sum_{j=1}^{q}b_j e^{ij\lambda}|^2.$$

- 不难看出，如果$\hat{q}$, $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q$和$\hat{\sigma}^2$分别是$q$, $b_1, b_2, .., b_q$ 和σ^2的相合估计，则$\hat{f}(\lambda)$ 是$f(\lambda)$的相合估计.

MA(q)序列的谱密度估计

- 如果从数据得到了MA 模型的参数估计，模型的检验也已经通过，可以利用

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\hat{\sigma}^2}{2\pi}|1 + \sum_{j=1}^{\hat{q}} \hat{b}_j e^{ij\lambda}|^2$$

作为所关心的平稳序列的谱密度的估计.

- 这是因为如果观测数据确实是MA(q)序列(2.2)时，它的谱密度是

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1 + \sum_{j=1}^{q} b_j e^{ij\lambda}|^2.$$

- 不难看出，如果$\hat{q}$，$\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q$和$\hat{\sigma}^2$分别是$q$，$b_1, b_2, .., b_q$ 和σ^2的相合估计，则$\hat{f}(\lambda)$ 是$f(\lambda)$的相合估计.

ARMA模型

- 对于零均值化后的平稳观测数据$x_1, x_2, \cdots, x_N$，如果拟合AR(p)和MA(q)模型的效果都不理想，就要考虑ARMA(p, q)模型的拟合.
- 这时可以假设$x_1, x_2, \cdots, x_N$满足如下的可逆ARMA(p, q)模型

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, t = 1, 2, \ldots \quad (3.1)$$

- 其中$\{\varepsilon_t\}$ 是WN(0,σ^2)，未知参数$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_p)^T$和$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_q)^T$ 使得多项式

$$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j, \quad B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \quad (3.2)$$

互素，并且满足

$$A(z)B(z) \neq 0, \ |z| \leq 1. \quad (3.3)$$

- 以下仍然用$\hat{\gamma}_k$ 表示由(1.2)定义的样本自协方差函数.
- 我们先设p, q是已知的.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型

- 对于零均值化后的平稳观测数据$x_1, x_2, \cdots, x_N$，如果拟合AR(p)和MA(q)模型的效果都不理想，就要考虑ARMA(p, q)模型的拟合.
- 这时可以假设$x_1, x_2, \cdots, x_N$满足如下的可逆ARMA(p, q)模型

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, t = 1, 2, \ldots \quad (3.1)$$

- 其中$\{\varepsilon_t\}$ 是WN(0,σ^2)，未知参数$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_p)^T$ 和$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_q)^T$ 使得多项式

$$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j, \quad B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \quad (3.2)$$

互素，并且满足

$$A(z)B(z) \neq 0, \ |z| \leq 1. \quad (3.3)$$

- 以下仍然用$\hat{\gamma}_k$ 表示由(1.2)定义的样本自协方差函数.
- 我们先设p, q是已知的.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型

- 对于零均值化后的平稳观测数据$x_1, x_2, \cdots, x_N$，如果拟合AR(p)和MA(q)模型的效果都不理想，就要考虑ARMA(p, q)模型的拟合.
- 这时可以假设$x_1, x_2, \cdots, x_N$满足如下的可逆ARMA(p, q)模型

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, t = 1, 2, \ldots \qquad (3.1)$$

- 其中$\{\varepsilon_t\}$ 是WN(0,σ^2)，未知参数$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_p)^T$和$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_q)^T$ 使得多项式

$$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j, \quad B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \qquad (3.2)$$

互素，并且满足

$$A(z)B(z) \neq 0, \ |z| \leq 1. \qquad (3.3)$$

- 以下仍然用$\hat{\gamma}_k$ 表示由(1.2)定义的样本自协方差函数.
- 我们先设p, q是已知的.

ARMA模型

- 对于零均值化后的平稳观测数据$x_1, x_2, \cdots, x_N$，如果拟合AR(p)和MA(q)模型的效果都不理想，就要考虑ARMA(p, q)模型的拟合.
- 这时可以假设$x_1, x_2, \cdots, x_N$满足如下的可逆ARMA(p, q)模型

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, t = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

- 其中$\{\varepsilon_t\}$ 是WN(0,σ^2)，未知参数$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_p)^T$ 和$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_q)^T$ 使得多项式

$$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j, \quad B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \tag{3.2}$$

互素，并且满足

$$A(z)B(z) \neq 0, \ |z| \leq 1. \tag{3.3}$$

- 以下仍然用$\hat{\gamma}_k$ 表示由(1.2)定义的样本自协方差函数.
- 我们先设p, q是已知的.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型

- 对于零均值化后的平稳观测数据$x_1, x_2, \cdots, x_N$，如果拟合AR(p)和MA(q)模型的效果都不理想，就要考虑ARMA(p, q)模型的拟合.
- 这时可以假设$x_1, x_2, \cdots, x_N$满足如下的可逆ARMA(p, q)模型

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, t = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

- 其中$\{\varepsilon_t\}$ 是WN($0, \sigma^2$)，未知参数$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_p)^T$和$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_q)^T$ 使得多项式

$$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j, \quad B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j \tag{3.2}$$

互素，并且满足

$$A(z)B(z) \neq 0, \ |z| \leq 1. \tag{3.3}$$

- 以下仍然用$\hat{\gamma}_k$ 表示由(1.2)定义的样本自协方差函数.
- 我们先设p, q是已知的.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的矩估计方法

- 利用§3.2的(2.15)知道ARMA(p,q)序列的自协方差函数满足延伸的Yule-Walker方程

$$\begin{pmatrix} \gamma_{q+1} \\ \gamma_{q+2} \\ \vdots \\ \gamma_{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_q & \gamma_{q-1} & \cdots & \gamma_{q-p+1} \\ \gamma_{q+1} & \gamma_q & \cdots & \gamma_{q-p+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{q+p-1} & \gamma_{q+p-2} & \cdots & \gamma_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

- 这是参数**a** 的估计方程, 从它得到**a**的矩估计

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_q & \hat{\gamma}_{q-1} & \cdots & \hat{\gamma}_{q-p+1} \\ \hat{\gamma}_{q+1} & \hat{\gamma}_q & \cdots & \hat{\gamma}_{q-p+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{\gamma}_{q+p-1} & \hat{\gamma}_{q+p-2} & \cdots & \hat{\gamma}_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{q+1} \\ \hat{\gamma}_{q+2} \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_{q+p} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的矩估计方法

- 利用§3.2的(2.15)知道ARMA(p, q)序列的自协方差函数满足延伸的Yule-Walker方程

$$\begin{pmatrix} \gamma_{q+1} \\ \gamma_{q+2} \\ \vdots \\ \gamma_{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_q & \gamma_{q-1} & \cdots & \gamma_{q-p+1} \\ \gamma_{q+1} & \gamma_q & \cdots & \gamma_{q-p+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{q+p-1} & \gamma_{q+p-2} & \cdots & \gamma_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

- 这是参数**a** 的估计方程, 从它得到**a**的矩估计

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_q & \hat{\gamma}_{q-1} & \cdots & \hat{\gamma}_{q-p+1} \\ \hat{\gamma}_{q+1} & \hat{\gamma}_q & \cdots & \hat{\gamma}_{q-p+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{\gamma}_{q+p-1} & \hat{\gamma}_{q+p-2} & \cdots & \hat{\gamma}_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{q+1} \\ \hat{\gamma}_{q+2} \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_{q+p} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的矩估计方法(续)

- 利用§3.2的定理2.3 知道(3.4) 中的$p \times p$矩阵$\Gamma_{p,q}$是可逆的. 用$\hat{\Gamma}_{p,q}$表示(3.5)中的$p \times p$矩阵.
当ARMA(p, q)模型中的白噪声$\{\varepsilon_t\}$独立同分布时, $\hat{\gamma}_k$ a.s.收敛到γ_k.
- 于是当$N \to \infty$,
$$\det(\hat{\Gamma}_{p,q}) \to \det(\Gamma_{p,q}) \neq 0.$$
- 所以当N充分大后, (3.5)中的矩阵$\hat{\Gamma}_{p,q}$也是可逆的. 这时矩估计是惟一的.还可以看出, 在上述的条件下, 矩估计(3.5)是强相合的:
$$\lim_{N\to\infty} \hat{a}_j = a_j, \ a.s., \ 1 \le j \le p. \qquad (3.6)$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的矩估计方法(续)

- 利用§3.2的定理2.3 知道(3.4) 中的$p \times p$矩阵$\Gamma_{p,q}$是可逆的. 用$\hat{\Gamma}_{p,q}$表示(3.5)中的$p \times p$矩阵.
  当ARMA(p,q)模型中的白噪声$\{\varepsilon_t\}$独立同分布时, $\hat{\gamma}_k$ a.s.收敛到γ_k.
- 于是当$N \to \infty$,

$$\det(\hat{\Gamma}_{p,q}) \to \det(\Gamma_{p,q}) \neq 0.$$

- 所以当N充分大后, (3.5)中的矩阵$\hat{\Gamma}_{p,q}$也是可逆的. 这时矩估计是惟一的.还可以看出, 在上述的条件下, 矩估计(3.5)是强相合的:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{a}_j = a_j, \ a.s., \ 1 \leq j \leq p. \tag{3.6}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA模型的矩估计方法(续)

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

- 利用§3.2的定理2.3 知道(3.4) 中的$p \times p$矩阵$\Gamma_{p,q}$是可逆的. 用$\hat{\Gamma}_{p,q}$表示(3.5)中的$p \times p$矩阵.
  当ARMA(p, q)模型中的白噪声$\{\varepsilon_t\}$独立同分布时, $\hat{\gamma}_k$ a.s.收敛到γ_k.
- 于是当$N \to \infty$,

$$\det(\hat{\Gamma}_{p,q}) \to \det(\Gamma_{p,q}) \neq 0.$$

- 所以当N充分大后, (3.5)中的矩阵$\hat{\Gamma}_{p,q}$也是可逆的. 这时矩估计是惟一的.还可以看出, 在上述的条件下, 矩估计(3.5)是强相合的:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{a}_j = a_j, \ a.s., \ 1 \leq j \leq p. \tag{3.6}$$

ARMA模型的矩估计方法(续2)

- 下面估计MA(q)部分的参数.
- 由于

$$z_t \triangleq x_t - \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j},\ t = p+1, p+2, \ldots, N$$

满足MA(q)模型

$$z_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t,$$

- 所以得到$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p$后,

$$y_t = x_t - \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j x_{t-j},\ t = p+1, p+2, \ldots, N. \qquad (3.7)$$

是一个MA(q)序列的近似观测数据. 它的样本自协方差函数由

$$\hat{\gamma}_y(k) = \sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \hat{a}_j \hat{a}_l \hat{\gamma}_{k+j-l}, k = 0, 1, \cdots, q \qquad (3.8)$$

定义, 其中$\hat{a}_0 = -1$.
- 现在将(3.8)看成一个MA(q)序列的样本自协方差函数, 利用§6.2 的方法就可以估计出MA(q)部分的参数**b** 和σ^2.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的矩估计方法(续2)

- 下面估计MA(q)部分的参数.
- 由于

$$z_t \overset{\triangle}{=} x_t - \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j}, \ \ t = p+1, p+2, \ldots, N$$

满足MA(q)模型

$$z_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t,$$

- 所以得到$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p$后,

$$y_t = x_t - \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j x_{t-j}, \ \ t = p+1, p+2, \ldots, N. \qquad (3.7)$$

是一个MA(q)序列的近似观测数据. 它的样本自协方差函数由

$$\hat{\gamma}_y(k) = \sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \hat{a}_j \hat{a}_l \hat{\gamma}_{k+j-l}, k = 0, 1, \cdots, q \qquad (3.8)$$

定义, 其中$\hat{a}_0 = -1$.

- 现在将(3.8)看成一个MA(q)序列的样本自协方差函数, 利用§6.2 的方法就可以估计出MA(q)部分的参数$\mathbf{b}$ 和σ^2.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的矩估计方法(续2)

- 下面估计MA(q)部分的参数.
- 由于

$$z_t \triangleq x_t - \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j},\ \ t = p+1, p+2, \ldots, N$$

满足MA(q)模型

$$z_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t,$$

- 所以得到$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p$后,

$$y_t = x_t - \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j x_{t-j},\ \ t = p+1, p+2, \ldots, N. \tag{3.7}$$

是一个MA(q)序列的近似观测数据. 它的样本自协方差函数由

$$\hat{\gamma}_y(k) = \sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \hat{a}_j \hat{a}_l \hat{\gamma}_{k+j-l}, k = 0, 1, \cdots, q \tag{3.8}$$

定义, 其中$\hat{a}_0 = -1$.
- 现在将(3.8)看成一个MA(q)序列的样本自协方差函数, 利用§6.2 的方法就可以估计出MA(q)部分的参数**b** 和σ^2.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的矩估计方法(续2)

- 下面估计MA(q)部分的参数.
- 由于

$$z_t \overset{\triangle}{=} x_t - \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j}, \ t = p+1, p+2, \ldots, N$$

满足MA(q)模型

$$z_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t,$$

- 所以得到$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p$后,

$$y_t = x_t - \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j x_{t-j}, \ t = p+1, p+2, \ldots, N. \qquad (3.7)$$

是一个MA(q)序列的近似观测数据. 它的样本自协方差函数由

$$\hat{\gamma}_y(k) = \sum_{j=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \hat{a}_j \hat{a}_l \hat{\gamma}_{k+j-l}, k = 0, 1, \cdots, q \qquad (3.8)$$

定义, 其中$\hat{a}_0 = -1$.
- 现在将(3.8)看成一个MA(q)序列的样本自协方差函数, 利用§6.2 的方法就可以估计出MA(q)部分的参数$\mathbf{b}$ 和σ^2.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的自回归逼近法

- 如果ARMA模型中已知$\{\varepsilon_t\}$则$a_1, \ldots, a_p$，$b_1, \ldots, b_q$可以看成是回归系数。
- ε_t作为一步预报误差，可以用样本新息估计。但是样本新息直接计算困难，所以可以拟合长阶自回归模型，用自回归模型的残差作为一步预报误差的估计。
- 首先为数据建立AR模型. 取自回归阶数的上界$P_0 = [\sqrt{N}]$. 这里$[a]$表示a的整数部分. 采用AIC定阶方法得到AR模型的阶数估计$\hat{p}$ 和自回归系数的估计

$$(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_{\hat{p}}).$$

计算残差

$$\hat{\varepsilon}_t = x_t - \sum_{j=1}^{\hat{p}} \hat{\phi}_j x_{t-j}, \quad t = \hat{p}+1, \hat{p}+2, \ldots, N.$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的自回归逼近法

- 如果ARMA模型中已知$\{\varepsilon_t\}$则$a_1, \ldots, a_p$，$b_1, \ldots, b_q$可以看成是回归系数。
- ε_t作为一步预报误差，可以用样本新息估计。但是样本新息直接计算困难，所以可以拟合长阶自回归模型，用自回归模型的残差作为一步预报误差的估计。
- 首先为数据建立AR模型. 取自回归阶数的上界$P_0 = [\sqrt{N}]$. 这里$[a]$表示a的整数部分. 采用AIC定阶方法得到AR模型的阶数估计$\hat{p}$ 和自回归系数的估计

$$(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_{\hat{p}}).$$

计算残差

$$\hat{\varepsilon}_t = x_t - \sum_{j=1}^{\hat{p}} \hat{\phi}_j x_{t-j}, \quad t = \hat{p}+1, \hat{p}+2, \ldots, N.$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的自回归逼近法

- 如果ARMA模型中已知$\{\varepsilon_t\}$则$a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_q$可以看成是回归系数。
- ε_t作为一步预报误差，可以用样本新息估计。但是样本新息直接计算困难，所以可以拟合长阶自回归模型，用自回归模型的残差作为一步预报误差的估计。
- 首先为数据建立AR模型. 取自回归阶数的上界$P_0 = [\sqrt{N}]$. 这里$[a]$表示a的整数部分. 采用AIC定阶方法得到AR模型的阶数估计$\hat{p}$ 和自回归系数的估计

$$(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_{\hat{p}}).$$

计算残差

$$\hat{\varepsilon}_t = x_t - \sum_{j=1}^{\hat{p}} \hat{\phi}_j x_{t-j}, \quad t = \hat{p}+1, \hat{p}+2, \ldots, N.$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型的自回归逼近法(续)

- 然后写出近似的ARMA(p,q)模型

$$x_t = \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j} + \hat{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \hat{\varepsilon}_{t-j},\ \ t = L+1, L+2, \ldots, N.$$

这里$L = \max(\hat{p}, p, q)$, a_j, b_k是待定参数.

- 最后对目标函数

$$Q(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{t=L+1}^{N} \left(x_t - \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j} - \sum_{j=1}^{q} b_j \hat{\varepsilon}_{t-j} \right)^2 \tag{3.9}$$

极小化,得到最小二乘估计$(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \ldots \hat{b}_q)$. σ^2的最小二乘估计由下式定义.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-L} Q(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_q).$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA模型的自回归逼近法(续)

- 然后写出近似的ARMA(p,q)模型

$$x_t = \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j} + \hat{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \hat{\varepsilon}_{t-j}, \ t = L+1, L+2, \ldots, N.$$

这里$L = \max(\hat{p}, p, q)$, a_j, b_k是待定参数.

- 最后对目标函数

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{t=L+1}^{N} \left(x_t - \sum_{j=1}^{p} a_j x_{t-j} - \sum_{j=1}^{q} b_j \hat{\varepsilon}_{t-j} \right)^2 \tag{3.9}$$

极小化,得到最小二乘估计$(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \ldots \hat{b}_q)$. σ^2的最小二乘估计由下式定义.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-L} Q(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_q).$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

正态时间序列的似然函数

- 设$\{X_t\}$是零均值正态时间序列，对$n \geq 1$，$\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, .., X_n)^T$ 的协方差矩阵Γ_n正定.
- 采用§5.3的记号可以得到最佳线性预测

$$\hat{X}_n \triangleq L(X_n|\mathbf{X}_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{n-1,n-j} Z_j,$$

其中$Z_j = X_j - \hat{X}_j$, $Z_1 = X_1$.
- 于是

$$\begin{aligned} X_n =& \hat{X}_n + Z_n = \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{n-1,n-j} Z_j + Z_n \\ =& \sum_{j=1}^{n} \theta_{n-1,n-j} Z_j \qquad (\theta_{n-1,0} \triangleq 1) \\ =& (\theta_{n-1,n-1}, \theta_{n-1,n-2}, \cdots, \theta_{n-1,1}, 1) \cdot \mathbf{Z}_n, \end{aligned}$$

其中$\mathbf{Z}_n = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)^T$.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

正态时间序列的似然函数

- 设$\{X_t\}$是零均值正态时间序列, 对$n \geq 1$, $\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, .., X_n)^T$ 的协方差矩阵Γ_n正定.
- 采用§5.3的记号可以得到最佳线性预测

$$\hat{X}_n \triangleq L(X_n|\mathbf{X}_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{n-1,n-j} Z_j,$$

其中$Z_j = X_j - \hat{X}_j$, $Z_1 = X_1$.

- 于是

$$X_n = \hat{X}_n + Z_n = \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{n-1,n-j} Z_j + Z_n$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \theta_{n-1,n-j} Z_j \qquad (\theta_{n-1,0} \triangleq 1)$$
$$= (\theta_{n-1,n-1}, \theta_{n-1,n-2}, \cdots, \theta_{n-1,1}, 1) \cdot \mathbf{Z}_n,$$

其中$\mathbf{Z}_n = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)^T$.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

正态时间序列的似然函数

- 设$\{X_t\}$是零均值正态时间序列, 对$n \geq 1$, $\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, .., X_n)^T$ 的协方差矩阵Γ_n正定.
- 采用§5.3的记号可以得到最佳线性预测

$$\hat{X}_n \triangleq L(X_n|\mathbf{X}_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{n-1,n-j} Z_j,$$

其中$Z_j = X_j - \hat{X}_j$, $Z_1 = X_1$.

- 于是

$$\begin{aligned} X_n =& \hat{X}_n + Z_n = \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{n-1,n-j} Z_j + Z_n \\ =& \sum_{j=1}^{n} \theta_{n-1,n-j} Z_j \qquad (\theta_{n-1,0} \triangleq 1) \\ =& (\theta_{n-1,n-1}, \theta_{n-1,n-2}, \cdots, \theta_{n-1,1}, 1) \cdot \mathbf{Z}_n, \end{aligned}$$

其中$\mathbf{Z}_n = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)^T$.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

正态时间序列的似然函数(续)

- 为了方便引入下三角矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{2,2} & \theta_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots v \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \theta_{n-1,n-1} & \theta_{n-1,n-2} & \theta_{n-1,n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- 则有

$$\mathbf{X}_n = C\mathbf{Z}_n.$$

- 由于

$$r_{k-1} \triangleq EZ_k^2, \quad k = 1, 2, ..., n-1$$

是预测的均方误差(原来新息预报中r_{k-1}用ν_{k-1}表示，但是下面ν_{k-1}要表示对X_t作变换后的序列Y_t的样本新息方差), 所以用$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$的正交性得到

$$D \triangleq E(\mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_n^T) = \mathrm{diag}(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}).$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

正态时间序列的似然函数(续)

- 为了方便引入下三角矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{2,2} & \theta_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots v \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \theta_{n-1,n-1} & \theta_{n-1,n-2} & \theta_{n-1,n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- 则有

$$\mathbf{X}_n = C\mathbf{Z}_n.$$

- 由于

$$r_{k-1} \triangleq EZ_k^2, \quad k = 1, 2, ..., n-1$$

是预测的均方误差(原来新息预报中r_{k-1}用ν_{k-1}表示，但是下面ν_{k-1}要表示对X_t作变换后的序列Y_t的样本新息方差), 所以用$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$的正交性得到

$$D \triangleq E(\mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_n^T) = \mathrm{diag}(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}).$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

正态时间序列的似然函数(续)

- 为了方便引入下三角矩阵

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{2,2} & \theta_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots v \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \theta_{n-1,n-1} & \theta_{n-1,n-2} & \theta_{n-1,n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- 则有

$$\mathbf{X}_n = C\mathbf{Z}_n.$$

- 由于

$$r_{k-1} \triangleq EZ_k^2, \quad k=1,2,...,n-1$$

是预测的均方误差(原来新息预报中r_{k-1}用ν_{k-1}表示，但是下面ν_{k-1}要表示对X_t作变换后的序列Y_t的样本新息方差), 所以用$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$的正交性得到

$$D \triangleq E(\mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_n^T) = \mathrm{diag}(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}).$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

正态时间序列的似然函数(续2)

- 由此得到$\mathbf{X}_n$的协方差矩阵:

$$\Gamma_n = E(C\mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_n^T C^T) = CDC^T,$$

$$\det(\Gamma_n) = \det(D) = r_0 r_1 \cdots r_{n-1},$$

$$\mathbf{X}_n^T \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n = \mathbf{Z}_n^T C^T (CDC^T)^{-1} C\mathbf{Z}_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j^2 / r_{j-1}.$$

- 由于$\mathbf{X}_n$的分布由Γ_n决定, 而r_j, $\theta_{k,j}$ 都是Γ_n的函数, 所以可得基于$\mathbf{X}_n$的似然函数

$$L(\Gamma_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}[\det(\Gamma_n)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{X}_n^T \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n\right)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(r_0 r_1 \cdots r_{n-1})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} Z_j^2 / r_{j-1}\right). \tag{3.10}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

正态时间序列的似然函数(续2)

- 由此得到$\mathbf{X}_n$的协方差矩阵:

$$\Gamma_n = E(C\mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_n^T C^T) = CDC^T,$$
$$\det(\Gamma_n) = \det(D) = r_0 r_1 \cdots r_{n-1},$$
$$\mathbf{X}_n^T \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n = \mathbf{Z}_n^T C^T (CDC^T)^{-1} C\mathbf{Z}_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j^2 / r_{j-1}.$$

- 由于$\mathbf{X}_n$的分布由Γ_n决定，而r_j，$\theta_{k,j}$ 都是Γ_n的函数，所以可得基于$\mathbf{X}_n$的似然函数

$$L(\Gamma_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}[\det(\Gamma_n)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{X}_n^T \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n\right)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(r_0 r_1 \cdots r_{n-1})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} Z_j^2 / r_{j-1}\right). \tag{3.10}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p, q)模型的最大似然估计

- 设$\{X_t\}$是满足ARMA模型(3.1)的平稳序列. 采用§5.4的C中符号, 利用§5.4的(4.11)得到逐步预报的递推公式

$$\hat{X}_{k+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \theta_{k,j} Z_{k+1-j}, & 1 \le k < m, \\ \sum_{j=1}^{p} a_j X_{k+1-j} + \sum_{j=1}^{q} \theta_{k,j} Z_{k+1-j}, & k \ge m. \end{cases} \tag{3.11}$$

这里$m = \max(p, q)$,

$$Z_k = X_k - \hat{X}_k = X_k - L(X_k | X_{k-1}, X_{k-2}, \ldots, X_1), \tag{3.12}$$

$$r_{k-1} = EZ_k^2 = E(X_k - \hat{X}_k)^2 = \sigma^2 \nu_{k-1}. \tag{3.13}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的最大似然估计(续)

- $\theta_{k,j}, \nu_k$ 可以通过第五章的(4.9)和(3.6)递推计算。而(4.9)中的$\sigma^{-2}\gamma_k$ 由第三章的(2.10), (2.11)计算，即用ARMA自协方差的Wold系数表达式，Wold系数可由模型参数递推计算。它们都是和σ^2无关的量，由ARMA模型(3.1) 的参数

$$\beta = (a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q)^T \tag{3.14}$$

惟一决定.

- 从而$\hat{X}_k$ 也是和σ^2无关的量，仅由观测数据$X_1, X_2, \ldots,$ X_{k-1}和β决定. 将(3.11)和(3.13)代入(3.10)就得到基于观测数据$X_1, X_2, \cdots, X_N$的似然函数

$$L(\beta, \sigma^2) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{N} Z_k^2/\nu_{k-1}\right)}{(2\pi)^{N/2}(\sigma^{2N}\nu_0\nu_1\cdots\nu_{N-1})^{1/2}} \tag{3.15}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p, q)模型的最大似然估计(续)

- $\theta_{k,j}, \nu_k$ 可以通过第五章的(4.9)和(3.6)递推计算。而(4.9)中的$\sigma^{-2}\gamma_k$ 由第三章的(2.10), (2.11)计算，即用ARMA自协方差的Wold系数表达式，Wold系数可由模型参数递推计算。它们都是和σ^2无关的量，由ARMA模型(3.1) 的参数
$$\beta = (a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q)^T \tag{3.14}$$
惟一决定.
- 从而$\hat{X}_k$ 也是和σ^2无关的量，仅由观测数据$X_1, X_2, \ldots,$ X_{k-1}和β决定. 将(3.11)和(3.13)代入(3.10)就得到基于观测数据$X_1, X_2, \cdots, X_N$的似然函数
$$L(\beta, \sigma^2) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^N Z_k^2/\nu_{k-1}\right)}{(2\pi)^{N/2}(\sigma^{2N}\nu_0\nu_1\cdots\nu_{N-1})^{1/2}} \tag{3.15}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p, q)模型的最大似然估计(续2)

- 引入

$$S(\beta) = \sum_{k=1}^{N} Z_k^2 / \nu_{k-1}. \tag{3.16}$$

- 忽略常数项后，可以得到对数似然函数

$$\ln L(\beta, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \ln(\nu_0 \nu_1 \cdots \nu_{N-1}) - \frac{1}{2\sigma^2} S(\beta). \tag{3.17}$$

ARMA(p, q)模型的最大似然估计(续2)

- 引入

$$S(\beta) = \sum_{k=1}^{N} Z_k^2/\nu_{k-1}. \tag{3.16}$$

- 忽略常数项后，可以得到对数似然函数

$$\ln L(\beta, \sigma^2) = -\frac{N}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\ln(\nu_0\nu_1\cdots\nu_{N-1}) - \frac{1}{2\sigma^2}S(\beta). \tag{3.17}$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p, q)模型的最大似然估计(续3)

- 利用
$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{S(\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^4} = 0$$
- 得到
$$\sigma^2 = \frac{1}{N} S(\beta).$$
- 将上式代入(3.17)得到
$$l(\beta) \triangleq -\frac{2}{N} \ln L(\beta, S(\beta)/N) - 1$$
$$= \frac{1}{N} \ln(\nu_0 \nu_1 \cdots \nu_{N-1}) + \ln[S(\beta)/N]. \qquad (3.18)$$
- 通常称$l(\beta)$是约化似然函数. 可以看出, $l(\beta)$的最小值点
$$\hat{\beta} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q)^T \qquad (3.19)$$
是β的最大似然估计, 而
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} S(\hat{\beta}) \qquad (3.20)$$
是σ^2的最大似然估计.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p, q)模型的最大似然估计(续3)

- 利用

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{S(\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^4} = 0$$

- 得到

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} S(\boldsymbol{\beta}).$$

- 将上式代入(3.17)得到

$$\begin{aligned} l(\beta) &\triangleq -\frac{2}{N} \ln L(\beta, S(\beta)/N) - 1 \\ &= \frac{1}{N} \ln(\nu_0 \nu_1 \cdots \nu_{N-1}) + \ln[S(\beta)/N]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

- 通常称$l(\beta)$是约化似然函数. 可以看出, $l(\beta)$的最小值点

$$\hat{\beta} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q)^T \tag{3.19}$$

是β的最大似然估计, 而

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} S(\hat{\beta}) \tag{3.20}$$

是σ^2的最大似然估计.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p, q)模型的最大似然估计(续3)

- 利用

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{S(\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^4} = 0$$

- 得到

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} S(\boldsymbol{\beta}).$$

- 将上式代入(3.17)得到

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\beta}) &\triangleq -\frac{2}{N} \ln L(\boldsymbol{\beta}, S(\boldsymbol{\beta})/N) - 1 \\ &= \frac{1}{N} \ln(\nu_0 \nu_1 \cdots \nu_{N-1}) + \ln[S(\boldsymbol{\beta})/N]. \end{aligned} \qquad (3.18)$$

- 通常称$l(\beta)$是约化似然函数. 可以看出, $l(\beta)$的最小值点

$$\hat{\beta} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q)^T \qquad (3.19)$$

是β的最大似然估计, 而

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} S(\hat{\beta}) \qquad (3.20)$$

是σ^2的最大似然估计.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的最大似然估计(续3)

- 利用
$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\boldsymbol{\beta},\sigma^2) = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{S(\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^4} = 0$$
- 得到
$$\sigma^2 = \frac{1}{N}S(\boldsymbol{\beta}).$$
- 将上式代入(3.17)得到
$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\beta}) &\triangleq -\frac{2}{N}\ln L(\boldsymbol{\beta}, S(\boldsymbol{\beta})/N) - 1 \\ &= \frac{1}{N}\ln(\nu_0\nu_1\cdots\nu_{N-1}) + \ln[S(\boldsymbol{\beta})/N]. \end{aligned} \tag{3.18}$$
- 通常称$l(\boldsymbol{\beta})$是约化似然函数. 可以看出, $l(\boldsymbol{\beta})$的最小值点
$$\hat{\beta} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q)^T \tag{3.19}$$
是$\boldsymbol{\beta}$的最大似然估计, 而
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}S(\hat{\beta}) \tag{3.20}$$
是σ^2的最大似然估计.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

最大似然估计的计算

- 在计算$l(\beta)$的最小值点时，可采用一般的最优化方法.
- 要计算$l(\beta)$函数值，通过第五章的(4.9)和(3.6)递推计算出$\theta_{k,j}$, ν_j 和$Z_k = X_k - \hat{X}_k$, 然后计算出$l(\beta)$.
- 为了加快搜索的速度和提高估计的精度，初始值$\beta^{(0)}$应当选择在$l(\beta)$的最小值附近.
- 实际计算中，初始值应当选成在A中定义的矩估计或B中定义的自回归逼近估计. 为了得的估计模型的合理性和可逆性，还应当选择初始值$\beta^{(0)}$ 使得$A(z)$, $B(z)$在闭单位圆内没有零点.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

最大似然估计的计算

- 在计算$l(\beta)$的最小值点时，可采用一般的最优化方法.
- 要计算$l(\beta)$函数值，通过第五章的(4.9)和(3.6)递推计算出$\theta_{k,j}$, ν_j 和$Z_k = X_k - \hat{X}_k$, 然后计算出$l(\beta)$.
- 为了加快搜索的速度和提高估计的精度，初始值$\beta^{(0)}$应当选择在$l(\beta)$的最小值附近.
- 实际计算中，初始值应当选成在A中定义的矩估计或B中定义的自回归逼近估计. 为了得的估计模型的合理性和可逆性，还应当选择初始值$\beta^{(0)}$ 使得$A(z)$, $B(z)$在闭单位圆内没有零点.

最大似然估计的计算

- 在计算$l(\beta)$的最小值点时，可采用一般的最优化方法.
- 要计算$l(\beta)$函数值，通过第五章的(4.9)和(3.6)递推计算出$\theta_{k,j}$, ν_j 和$Z_k = X_k - \hat{X}_k$, 然后计算出$l(\beta)$.
- 为了加快搜索的速度和提高估计的精度，初始值$\beta^{(0)}$应当选择在$l(\beta)$的最小值附近.
- 实际计算中，初始值应当选成在A中定义的矩估计或B中定义的自回归逼近估计. 为了得的估计模型的合理性和可逆性，还应当选择初始值$\beta^{(0)}$ 使得$A(z)$, $B(z)$在闭单位圆内没有零点.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

最大似然估计的计算

- 在计算$l(\beta)$的最小值点时，可采用一般的最优化方法.
- 要计算$l(\beta)$函数值，通过第五章的(4.9)和(3.6)递推计算出$\theta_{k,j}$, ν_j 和$Z_k = X_k - \hat{X}_k$, 然后计算出$l(\beta)$.
- 为了加快搜索的速度和提高估计的精度，初始值$\beta^{(0)}$应当选择在$l(\beta)$的最小值附近.
- 实际计算中，初始值应当选成在A中定义的矩估计或B中定义的自回归逼近估计. 为了得的估计模型的合理性和可逆性，还应当选择初始值$\beta^{(0)}$ 使得$A(z)$, $B(z)$在闭单位圆内没有零点.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

最大似然估计的与最小二乘估计

- 由于当$k \to \infty$, 用§5.2 定理2.4(或习题4.4)得到

$$\begin{aligned}\nu_k =& E(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1})^2/\sigma^2 \\ =& E[X_n - L(X_n|X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_{n-k})]^2/\sigma^2 \\ \to& E[X_n - L(X_n|X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots)]^2/\sigma^2 \\ =& E\varepsilon_n^2/\sigma^2 = 1.\end{aligned}$$

- 所以$N \to \infty$ 时,

$$\frac{1}{N}\ln(\nu_0\nu_1\cdots\nu_{N-1}) \to 0.$$

- 于是, 对较大的N, $l(\beta)$和$S(\beta)$的最小值点近似相等. 于是也可以用$S(\beta)$ 的最小值点$\tilde{\beta}$作为β的估计. 通常也称$\tilde{\beta}$是β的最小二乘估计, 相应的白噪声方差σ^2的估计定义成

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p-q}S(\tilde{\beta}). \qquad (3.21)$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

最大似然估计的与最小二乘估计

- 由于当$k\to\infty$, 用§5.2 定理2.4(或习题4.4)得到

$$\begin{aligned}\nu_k =&E(X_{k+1}-\hat{X}_{k+1})^2/\sigma^2\\ =&E[X_n-L(X_n|X_{n-1},X_{n-2},\ldots,X_{n-k})]^2/\sigma^2\\ \to& E[X_n-L(X_n|X_{n-1},X_{n-2},\ldots)]^2/\sigma^2\\ =&E\varepsilon_n^2/\sigma^2=1.\end{aligned}$$

- 所以$N\to\infty$ 时,

$$\frac{1}{N}\ln(\nu_0\nu_1\cdots\nu_{N-1})\to 0.$$

- 于是, 对较大的N, $l(\beta)$和$S(\beta)$的最小值点近似相等. 于是也可以用$S(\beta)$ 的最小值点$\tilde{\beta}$作为β的估计. 通常也称$\tilde{\beta}$是β的最小二乘估计, 相应的白噪声方差σ^2的估计定义成

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{1}{N-p-q}S(\tilde{\beta}). \qquad (3.21)$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

最大似然估计的与最小二乘估计

- 由于当$k \to \infty$, 用§5.2 定理2.4(或习题4.4)得到

$$\begin{aligned}\nu_k =& E(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1})^2/\sigma^2 \\ =& E[X_n - L(X_n|X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_{n-k})]^2/\sigma^2 \\ \to& E[X_n - L(X_n|X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots)]^2/\sigma^2 \\ =& E\varepsilon_n^2/\sigma^2 = 1.\end{aligned}$$

- 所以$N \to \infty$ 时,

$$\frac{1}{N}\ln(\nu_0\nu_1 \cdots \nu_{N-1}) \to 0.$$

- 于是, 对较大的N, $l(\beta)$和$S(\beta)$的最小值点近似相等. 于是也可以用$S(\beta)$ 的最小值点$\tilde{\beta}$作为β的估计. 通常也称$\tilde{\beta}$是β的最小二乘估计, 相应的白噪声方差σ^2的估计定义成

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p-q}S(\tilde{\beta}). \qquad (3.21)$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

最大似然估计的极限分布

- 可以证明最小二乘估计$\tilde{\beta}$和最大似然估计$\hat{\beta}$ 有相同的极限分布, $\tilde{\sigma}^2$和$\hat{\sigma}^2$有相同的极限分布.
- **定理3.1** 如果$\{X_t\}$是平稳可逆的ARMA(p,q)序列, 白噪声是独立同分布序列, $E\varepsilon_t^4<\infty$. 则当$N\to\infty$ 时,

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}-\beta)$$

依分布收敛到正态分布$N(0,V(\beta))$, 其中

$$V(\beta)=\begin{cases}\sigma^2\begin{pmatrix}E(\mathbf{U}\mathbf{U}^T) & E(\mathbf{U}\mathbf{V}^T)\\ E(\mathbf{V}\mathbf{U}^T) & E(\mathbf{V}\mathbf{V}^T)\end{pmatrix}^{-1}, & p>0,q>0,\\ \sigma^2\left(E(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)\right)^{-1}, & q=0,p>0,\\ \sigma^2\left(E(\mathbf{V}\mathbf{V}^T)\right)^{-1}, & p=0,q>0.\end{cases} \tag{3.22}$$

$\mathbf{U}=(U_p,U_{p-1},\ldots,U_1)^T$, $\mathbf{V}=(V_q,V_{q-1},\ldots,V_1)^T$, $\{U_t\}$和$\{V_t\}$分别是AR(p)和AR(q)序列，分别满足$A(\mathscr{B})U_t=\varepsilon_t$和$B(\mathscr{B})V_t=\varepsilon_t$.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

最大似然估计的极限分布

- 可以证明最小二乘估计$\tilde{\beta}$和最大似然估计$\hat{\beta}$ 有相同的极限分布，$\tilde{\sigma}^2$和$\hat{\sigma}^2$有相同的极限分布.
- **定理3.1** 如果$\{X_t\}$是平稳可逆的ARMA(p,q)序列，白噪声是独立同分布序列，$E\varepsilon_t^4 < \infty$. 则当$N \to \infty$ 时，

$$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$$

依分布收敛到正态分布$N(0, V(\boldsymbol{\beta}))$，其中

$$V(\boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} \sigma^2 \begin{pmatrix} E(\mathbf{U}\mathbf{U}^T) & E(\mathbf{U}\mathbf{V}^T) \\ E(\mathbf{V}\mathbf{U}^T) & E(\mathbf{V}\mathbf{V}^T) \end{pmatrix}^{-1}, & p > 0, q > 0, \\ \sigma^2 \left(E(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)\right)^{-1}, & q = 0, p > 0, \\ \sigma^2 \left(E(\mathbf{V}\mathbf{V}^T)\right)^{-1}, & p = 0, q > 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

$\mathbf{U} = (U_p, U_{p-1}, \ldots, U_1)^T$, $\mathbf{V} = (V_q, V_{q-1}, \ldots, V_1)^T$, $\{U_t\}$和$\{V_t\}$分别是AR(p)和AR(q)序列，分别满足$A(\mathscr{B})U_t = \varepsilon_t$和$B(\mathscr{B})V_t = \varepsilon_t$.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

极限分布的利用

- 用v_{jj}表示$V(\beta)$的第(j,j)的元素，则

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_j - \beta_j)$$

依分布收敛到正态分布$N(0, v_{jj})$.
- 在实际问题中，真值$V(\beta)$是未知的，通常用估计量$V(\hat{\beta})$代替.
- 于是可以用$V(\hat{\beta})$ 的第(j,j)的元$\hat{v}_{jj}$作为v_{jj}的近似.
- 这样，当N较大时，利用

$$P[\sqrt{N}|\hat{\beta}_j - \beta_j|/\sqrt{v_{jj}} \le 1.96] \approx 0.95$$

就可以在置信水平0.95下得到β_j的近似置信区间

$$[\ \hat{\beta}_j - 1.96\sqrt{\hat{v}_{jj}/N},\quad \hat{\beta}_j + 1.96\sqrt{\hat{v}_{jj}/N}\ ].$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

极限分布的利用

- 用v_{jj}表示$V(\boldsymbol{\beta})$的第(j,j)的元素，则
$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_j - \beta_j)$$
依分布收敛到正态分布$N(0, v_{jj})$.
- 在实际问题中，真值$V(\boldsymbol{\beta})$是未知的，通常用估计量$V(\hat{\beta})$代替.
- 于是可以用$V(\hat{\beta})$ 的第(j,j)的元$\hat{v}_{jj}$作为v_{jj}的近似.
- 这样，当N较大时，利用
$$P[\sqrt{N}|\hat{\beta}_j - \beta_j|/\sqrt{v_{jj}} \le 1.96] \approx 0.95$$
就可以在置信水平0.95下得到β_j的近似置信区间
$$[\ \hat{\beta}_j - 1.96\sqrt{\hat{v}_{jj}/N},\quad \hat{\beta}_j + 1.96\sqrt{\hat{v}_{jj}/N}\ ].$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

极限分布的利用

- 用v_{jj}表示$V(\boldsymbol{\beta})$的第(j,j)的元素，则

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_j - \beta_j)$$

依分布收敛到正态分布$N(0, v_{jj})$.

- 在实际问题中，真值$V(\boldsymbol{\beta})$是未知的，通常用估计量$V(\hat{\beta})$代替.
- 于是可以用$V(\hat{\beta})$ 的第(j,j)的元$\hat{v}_{jj}$作为v_{jj}的近似.
- 这样，当N较大时，利用

$$P[\sqrt{N}|\hat{\beta}_j - \beta_j|/\sqrt{v_{jj}} \le 1.96] \approx 0.95$$

就可以在置信水平0.95下得到β_j的近似置信区间

$$[\ \hat{\beta}_j - 1.96\sqrt{\hat{v}_{jj}/N}, \quad \hat{\beta}_j + 1.96\sqrt{\hat{v}_{jj}/N}\ ].$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

极限分布的利用

- 用v_{jj}表示$V(\boldsymbol{\beta})$的第(j,j)的元素，则
$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_j-\beta_j)$$
依分布收敛到正态分布$N(0,v_{jj})$.
- 在实际问题中，真值$V(\boldsymbol{\beta})$是未知的，通常用估计量$V(\hat{\beta})$代替.
- 于是可以用$V(\hat{\beta})$ 的第(j,j)的元$\hat{v}_{jj}$作为v_{jj}的近似.
- 这样，当N较大时，利用
$$P[\sqrt{N}|\hat{\beta}_j-\beta_j|/\sqrt{v_{jj}}\le 1.96]\approx 0.95$$
就可以在置信水平0.95下得到β_j的近似置信区间
$$[\ \hat{\beta}_j-1.96\sqrt{\hat{v}_{jj}/N},\quad \hat{\beta}_j+1.96\sqrt{\hat{v}_{jj}/N}\ ].$$

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

例3.1: ARMA(4,2)的估计与模拟分析

对于ARMA(4,2)模型

$$
\begin{aligned}
&X_t + 0.9X_{t-1} + 1.4X_{t-2} + 0.7X_{t-3} + 0.6X_{t-4} \\
=&\varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

的模拟计算, 其中$\{\varepsilon_t\}$是标准正态WN(0, 1).

利用§3.2的方法产生模型(3.23)的300个数据$\{x_t\}$.

利用公式(3.5)(扩展的Y-W方程)计算出**a**的估计

$$
\hat{a} = (-0.8959, \ -1.3843, \ -0.6876, \ -0.5868)^T.
$$

再利用公式(3.8)(把$\hat{A}(\mathscr{B})X_t$看成MA序列$\{Y_t\}$)计算出$\hat{\gamma}_y(k)$, $k = 0, 1, \ldots, 10$.

取$p_N = 10$, 利用MA模型的逆相关函数方法计算出MA部分的参数估计和白噪声方差的估计如下:

$$
\hat{b} = (0.5122, \ \ -0.3427)^T, \quad \hat{\sigma}^2 = 1.47.
$$

与真实值比较, 自回归部分的参数估计是令人满意的.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

例3.1: ARMA(4,2)的估计与模拟分析

对于ARMA(4,2)模型

$$\begin{aligned} & X_t + 0.9X_{t-1} + 1.4X_{t-2} + 0.7X_{t-3} + 0.6X_{t-4} \\ = & \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

的模拟计算, 其中$\{\varepsilon_t\}$是标准正态WN$(0,1)$.
利用§3.2的方法产生模型(3.23)的300个数据$\{x_t\}$.
利用公式(3.5)(扩展的Y-W方程)计算出**a**的估计

$$\hat{a} = (-0.8959, \ -1.3843, \ -0.6876, \ -0.5868)^T.$$

再利用公式(3.8)(把$\hat{A}(\mathscr{B})X_t$看成MA序列$\{Y_t\}$)计算出$\hat{\gamma}_y(k)$, $k = 0, 1, \ldots, 10$.
取$p_N = 10$, 利用MA模型的逆相关函数方法计算出MA部分的参数估计和白噪声方差的估计如下:

$$\hat{b} = (0.5122, \ \ -0.3427)^T, \quad \hat{\sigma}^2 = 1.47.$$

与真实值比较, 自回归部分的参数估计是令人满意的.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

例3.1: ARMA(4,2)的估计与模拟分析

对于ARMA(4,2)模型

$$
\begin{aligned}
& X_t + 0.9X_{t-1} + 1.4X_{t-2} + 0.7X_{t-3} + 0.6X_{t-4} \\
=& \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

的模拟计算, 其中$\{\varepsilon_t\}$是标准正态WN$(0,1)$.
利用§3.2的方法产生模型(3.23)的300个数据$\{x_t\}$.
利用公式(3.5)(扩展的Y-W方程)计算出**a**的估计

$$\hat{a} = (-0.8959,\ -1.3843,\ -0.6876,\ -0.5868)^T.$$

再利用公式(3.8)(把$\hat{A}(\mathscr{B})X_t$看成MA序列$\{Y_t\}$)计算出$\hat{\gamma}_y(k)$, $k = 0, 1, \ldots, 10$.
取$p_N = 10$, 利用MA模型的逆相关函数方法计算出MA部分的参数估计和白噪声方差的估计如下:

$$\hat{b} = (0.5122,\ \ -0.3427)^T, \quad \hat{\sigma}^2 = 1.47.$$

与真实值比较, 自回归部分的参数估计是令人满意的.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

例3.1: ARMA(4,2)的估计与模拟分析

对于ARMA(4,2)模型

$$\begin{aligned} &X_t + 0.9X_{t-1} + 1.4X_{t-2} + 0.7X_{t-3} + 0.6X_{t-4} \\ =&\varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

的模拟计算, 其中$\{\varepsilon_t\}$是标准正态WN$(0,1)$.
利用§3.2的方法产生模型(3.23)的300个数据$\{x_t\}$.
利用公式(3.5)(扩展的Y-W方程)计算出**a**的估计

$$\hat{a} = (-0.8959, \ -1.3843, \ -0.6876, \ -0.5868)^T.$$

再利用公式(3.8)(把$\hat{A}(\mathscr{B})X_t$看成MA序列$\{Y_t\}$)计算出$\hat{\gamma}_y(k)$, $k = 0, 1, \ldots, 10$.
取$p_N = 10$, 利用MA模型的逆相关函数方法计算出MA部分的参数估计和白噪声方差的估计如下:

$$\hat{b} = (0.5122, \ -0.3427)^T, \quad \hat{\sigma}^2 = 1.47.$$

与真实值比较, 自回归部分的参数估计是令人满意的.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

例3.1: ARMA(4,2)的估计与模拟分析

对于ARMA(4,2)模型

$$\begin{aligned} & X_t + 0.9X_{t-1} + 1.4X_{t-2} + 0.7X_{t-3} + 0.6X_{t-4} \\ = & \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

的模拟计算，其中$\{\varepsilon_t\}$是标准正态WN$(0,1)$.
利用§3.2的方法产生模型(3.23)的300个数据$\{x_t\}$.
利用公式(3.5)(扩展的Y-W方程)计算出**a**的估计

$$\hat{a} = (-0.8959, \ -1.3843, \ -0.6876, \ -0.5868)^T.$$

再利用公式(3.8)(把$\hat{A}(\mathscr{B})X_t$看成MA序列$\{Y_t\}$)计算出$\hat{\gamma}_y(k)$, $k = 0, 1, \ldots, 10$.
取$p_N = 10$, 利用MA模型的逆相关函数方法计算出MA部分的参数估计和白噪声方差的估计如下:

$$\hat{b} = (0.5122, \ \ -0.3427)^T, \quad \hat{\sigma}^2 = 1.47.$$

与真实值比较，自回归部分的参数估计是令人满意的.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

例3.1: ARMA(4,2)的估计与模拟分析(续)

下面以$\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}^2$为初值计算最大似然估计. 计算采用了在初值附近搜索的方法. 结果为:

$$\hat{a} = (-0.9010 \quad -1.3920 \quad -0.6808 \quad -0.6039)^T,$$
$$\hat{b} = (0.5145 \quad -0.3721)^T, \qquad \hat{\sigma}^2 = 1.282.$$

从以上结果看出, 本例中最大似然估计总体上可以改进初估计, 特别是能改进MA参数和σ^2的估计精度.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

例3.1: ARMA(4,2)的估计与模拟分析(续)

下面以$\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}^2$为初值计算最大似然估计. 计算采用了在初值附近搜索的方法. 结果为:

$$\hat{a} = (-0.9010 \quad -1.3920 \quad -0.6808 \quad -0.6039)^T,$$
$$\hat{b} = (0.5145 \quad -0.3721)^T, \qquad \hat{\sigma}^2 = 1.282.$$

从以上结果看出, 本例中最大似然估计总体上可以改进初估计, 特别是能改进MA参数和σ^2的估计精度.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

例3.1: ARMA(4,2)的估计与模拟分析(续2)

将上述的模拟计算重复1000次，每次重新产生模型(3.23)的300个数据，然后用上面的初值估计方法得到参数估计(不再进行最大似然估计)。1000次的参数估计的结果综合如下:

$$\begin{array}{lrrrr} Ave(\hat{a}) = & -0.8954 & -1.3880 & -0.6897 & -0.5900 \\ Std(\hat{a}) = & 0.0716 & 0.0873 & 0.0773 & 0.0669 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrl} Ave(\hat{b}) = & 0.5258 & -0.3141 & Ave(\hat{\sigma}^2) = 1.2791 \\ Std(\hat{b}) = & 0.6893 & 0.3188 & Std(\hat{\sigma}^2) = 0.1639 \end{array}$$

从上述的计算看出，AR部分的估计是令人满意的，MA部分和白噪声方差估计的标准差较大. 采用最大似然估计后通常可以改进估计的精度，特别是改进MA参数和白噪声方差的估计.

MA(q)模型的参数估计

MA(q)模型的矩估计及其计算

MA(q)模型的逆相关函数法

MA(q)模型的新息估计方法

MA(q)模型的定阶方法

MA(q)模型的拟合检验

MA谱密度估计

ARMA(p, q)模型的参数估计

ARMA(p, q)模型的矩估计方法

ARMA(p, q)模型的自回归逼近法

正态时间序列的似然函数

ARMA(p, q)模型的最大似然估计

ARMA(p, q)模型的检验

ARMA(p, q)模型的定阶方法

ARMA(p, q)模型的谱密度估计

例3.1: ARMA(4,2)的估计与模拟分析(续2)

将上述的模拟计算重复1000次, 每次重新产生模型(3.23)的300个数据, 然后用上面的初值估计方法得到参数估计(不再进行最大似然估计)。1000次的参数估计的结果综合如下:

$$\begin{aligned} Ave(\hat{a}) &= \quad -0.8954 \quad -1.3880 \quad -0.6897 \quad -0.5900 \\ Std(\hat{a}) &= \quad 0.0716 \quad 0.0873 \quad 0.0773 \quad 0.0669 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ave(\hat{b}) &= \quad 0.5258 \quad -0.3141 \quad Ave(\hat{\sigma}^2) = 1.2791 \\ Std(\hat{b}) &= \quad 0.6893 \quad 0.3188 \quad Std(\hat{\sigma}^2) = 0.1639 \end{aligned}$$

从上述的计算看出, AR部分的估计是令人满意的, MA部分和白噪声方差估计的标准差较大. 采用最大似然估计后通常可以改进估计的精度, 特别是改进MA参数和白噪声方差的估计.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

例3.1: ARMA(4,2)的估计与模拟分析(续2)

将上述的模拟计算重复1000次, 每次重新产生模型(3.23)的300个数据, 然后用上面的初值估计方法得到参数估计(不再进行最大似然估计)。1000次的参数估计的结果综合如下:

$$\begin{aligned} Ave(\hat{a}) &= \quad -0.8954 \quad -1.3880 \quad -0.6897 \quad -0.5900 \\ Std(\hat{a}) &= \quad 0.0716 \quad 0.0873 \quad 0.0773 \quad 0.0669 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ave(\hat{b}) &= \quad 0.5258 \quad -0.3141 \quad Ave(\hat{\sigma}^2) = 1.2791 \\ Std(\hat{b}) &= \quad 0.6893 \quad 0.3188 \quad Std(\hat{\sigma}^2) = 0.1639 \end{aligned}$$

从上述的计算看出, AR部分的估计是令人满意的, MA部分和白噪声方差估计的标准差较大. 采用最大似然估计后通常可以改进估计的精度, 特别是改进MA参数和白噪声方差的估计.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型拟合的检验

- 在得到了ARMA(p,q)模型的参数估计

$$(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_p),\ (\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_q)$$

后, 对模型进行检验是十分必要的.

- 首先要检验模型的平稳性和合理性, 即要检验估计的参数满足(3.3).
- 然后对取定的初值

$$x_0=x_{-1}=\cdots=x_{-p+1}=\hat{\varepsilon}_0=\cdots=\hat{\varepsilon}_{-q+1}=0$$

递推计算模型的残差

$$\hat{\varepsilon}_t=x_t-\sum_{l=1}^{p}\hat{a}_l x_{t-l}+\sum_{j=1}^{q}\hat{b}_j\hat{\varepsilon}_{t-j},\ t=1,2,\ldots \quad (3.24)$$

- 取$m=O(N^{1/3})$和$m>\max(p,q)$. 如果残差

$$\hat{\varepsilon}_t,\quad t=m,m+1,..,N$$

可以通过白噪声的检验, 就认为模型合适. 否则寻找其他的模型.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA模型拟合的检验

- 在得到了ARMA(p,q)模型的参数估计
$$(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_p),\ (\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_q)$$
后，对模型进行检验是十分必要的.
- 首先要检验模型的平稳性和合理性，即要检验估计的参数满足(3.3).
- 然后对取定的初值
$$x_0=x_{-1}=\cdots=x_{-p+1}=\hat{\varepsilon}_0=\cdots=\hat{\varepsilon}_{-q+1}=0$$
递推计算模型的残差
$$\hat{\varepsilon}_t=x_t-\sum_{l=1}^{p}\hat{a}_l x_{t-l}+\sum_{j=1}^{q}\hat{b}_j\hat{\varepsilon}_{t-j},\ t=1,2,\ldots \quad (3.24)$$
- 取$m=O(N^{1/3})$和$m>\max(p,q)$. 如果残差
$$\hat{\varepsilon}_t,\quad t=m,m+1,..,N$$
可以通过白噪声的检验，就认为模型合适. 否则寻找其他的模型.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA模型拟合的检验

- 在得到了ARMA(p,q)模型的参数估计
$$(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_p),\ (\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_q)$$
后, 对模型进行检验是十分必要的.
- 首先要检验模型的平稳性和合理性, 即要检验估计的参数满足(3.3).
- 然后对取定的初值
$$x_0=x_{-1}=\cdots=x_{-p+1}=\hat{\varepsilon}_0=\cdots=\hat{\varepsilon}_{-q+1}=0$$
递推计算模型的残差
$$\hat{\varepsilon}_t=x_t-\sum_{l=1}^{p}\hat{a}_l x_{t-l}+\sum_{j=1}^{q}\hat{b}_j\hat{\varepsilon}_{t-j},\ \ t=1,2,\ldots \qquad (3.24)$$
- 取$m=O(N^{1/3})$和$m>\max(p,q)$. 如果残差
$$\hat{\varepsilon}_t,\quad t=m,m+1,..,N$$
可以通过白噪声的检验, 就认为模型合适. 否则寻找其他的模型.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA模型拟合的检验

- 在得到了ARMA(p,q)模型的参数估计
$$(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_p),\ (\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_q)$$
后，对模型进行检验是十分必要的.
- 首先要检验模型的平稳性和合理性，即要检验估计的参数满足(3.3).
- 然后对取定的初值
$$x_0 = x_{-1} = \cdots = x_{-p+1} = \hat{\varepsilon}_0 = \cdots = \hat{\varepsilon}_{-q+1} = 0$$
递推计算模型的残差
$$\hat{\varepsilon}_t = x_t - \sum_{l=1}^{p} \hat{a}_l x_{t-l} + \sum_{j=1}^{q} \hat{b}_j \hat{\varepsilon}_{t-j},\ \ t = 1,2,\ldots \qquad (3.24)$$
- 取$m = O(N^{1/3})$和$m > \max(p,q)$. 如果残差
$$\hat{\varepsilon}_t, \quad t = m, m+1, .., N$$
可以通过白噪声的检验，就认为模型合适. 否则寻找其他的模型.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA模型拟合的检验(续)

- 在实际工作中，参数(p, q)是未知的. 但是根据数据的性质有时可以知道阶数的大约范围. 可以在这个范围内对每一对(p, q)建立ARMA(p, q)模型，如果一个模型可以通过检验，就把这个模型留做备用.
- 如果不能确定阶数的范围，可以采用从$p+q=1, p+q=2, \ldots,$开始由低阶到高阶的依次搜寻的方法. 然后在所有备用的模型中选出$p+q$最小的一个模型.
- 如果$p+q$不能惟一决定(p, q)，可以取p较大的一个. 也可以在所有的备用模型中，采用下面的AIC定阶方法，最后确定一个模型.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型拟合的检验(续)

- 在实际工作中，参数(p, q)是未知的．但是根据数据的性质有时可以知道阶数的大约范围．可以在这个范围内对每一对(p, q)建立ARMA(p, q)模型，如果一个模型可以通过检验，就把这个模型留做备用．
- 如果不能确定阶数的范围，可以采用从$p+q=1, p+q=2, \ldots,$开始由低阶到高阶的依次搜寻的方法．然后在所有备用的模型中选出$p+q$最小的一个模型．
- 如果$p+q$不能惟一决定(p, q)，可以取p较大的一个．也可以在所有的备用模型中，采用下面的AIC定阶方法，最后确定一个模型．

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA模型拟合的检验(续)

- 在实际工作中，参数(p, q)是未知的. 但是根据数据的性质有时可以知道阶数的大约范围. 可以在这个范围内对每一对(p, q)建立ARMA(p, q)模型，如果一个模型可以通过检验，就把这个模型留做备用.
- 如果不能确定阶数的范围，可以采用从$p+q=1, p+q=2, \ldots,$ 开始由低阶到高阶的依次搜寻的方法. 然后在所有备用的模型中选出$p+q$最小的一个模型.
- 如果$p+q$不能惟一决定(p, q)，可以取p较大的一个. 也可以在所有的备用模型中，采用下面的AIC定阶方法，最后确定一个模型.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法

- 和AR模型的定阶方法相似，给定ARMA(p,q)模型的阶数(p,q)的一个估计$(k,j)=(\hat{p},\hat{q})$.
- 无论这个估计是怎样得到的，按前面的方法都可以估计出ARMA(k,j)模型的参数.
- 用$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}^2(k,j)$表示白噪声方差$\sigma^2$的估计.
- 一般来讲，希望$\hat{\sigma}^2$的取值越小越好. 因为$\hat{\sigma}^2$越小表示模型拟合的越精确.
- 通常较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$对应于较大的阶数k,j.
- 这样，过多追求拟合的精度，或说过分追求较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$会导致较大的$\hat{p}$和$\hat{q}$，从而导致较多的待估参数.
- 其结果会使建立的模型关于数据过于敏感，从而降低模型的稳健性.
- 另一方面，参数过多的模型拟合较好但是对新数据的解释能力差。
- AIC定阶准则就是为了克服参数过多的弊病而提出的。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法

- 和AR模型的定阶方法相似，给定ARMA(p,q)模型的阶数(p,q)的一个估计$(k,j)=(\hat{p},\hat{q})$.
- 无论这个估计是怎样得到的，按前面的方法都可以估计出ARMA(k,j)模型的参数.
- 用$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}^2(k,j)$表示白噪声方差$\sigma^2$的估计.
- 一般来讲，希望$\hat{\sigma}^2$的取值越小越好. 因为$\hat{\sigma}^2$越小表示模型拟合的越精确.
- 通常较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$对应于较大的阶数k,j.
- 这样，过多追求拟合的精度，或说过分追求较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$会导致较大的$\hat{p}$和$\hat{q}$，从而导致较多的待估参数.
- 其结果会使建立的模型关于数据过于敏感，从而降低模型的稳健性.
- 另一方面，参数过多的模型拟合较好但是对新数据的解释能力差。
- AIC定阶准则就是为了克服参数过多的弊病而提出的。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法

- 和AR模型的定阶方法相似, 给定ARMA(p,q)模型的阶数(p,q)的一个估计$(k,j)=(\hat{p},\hat{q})$.
- 无论这个估计是怎样得到的, 按前面的方法都可以估计出ARMA(k,j)模型的参数.
- 用$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}^2(k,j)$表示白噪声方差$\sigma^2$的估计.
- 一般来讲, 希望$\hat{\sigma}^2$的取值越小越好. 因为$\hat{\sigma}^2$越小表示模型拟合的越精确.
- 通常较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$对应于较大的阶数k, j.
- 这样, 过多追求拟合的精度, 或说过分追求较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$会导致较大的$\hat{p}$和$\hat{q}$, 从而导致较多的待估参数.
- 其结果会使建立的模型关于数据过于敏感, 从而降低模型的稳健性.
- 另一方面，参数过多的模型拟合较好但是对新数据的解释能力差。
- AIC定阶准则就是为了克服参数过多的弊病而提出的。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法

- 和AR模型的定阶方法相似，给定ARMA(p,q)模型的阶数(p,q)的一个估计$(k,j)=(\hat{p},\hat{q})$.
- 无论这个估计是怎样得到的，按前面的方法都可以估计出ARMA(k,j)模型的参数.
- 用$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}^2(k,j)$表示白噪声方差$\sigma^2$的估计.
- 一般来讲，希望$\hat{\sigma}^2$的取值越小越好. 因为$\hat{\sigma}^2$越小表示模型拟合的越精确.
- 通常较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$对应于较大的阶数k, j.
- 这样，过多追求拟合的精度，或说过分追求较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$会导致较大的$\hat{p}$和$\hat{q}$，从而导致较多的待估参数.
- 其结果会使建立的模型关于数据过于敏感，从而降低模型的稳健性.
- 另一方面，参数过多的模型拟合较好但是对新数据的解释能力差。
- AIC定阶准则就是为了克服参数过多的弊病而提出的。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法

- 和AR模型的定阶方法相似，给定ARMA(p,q)模型的阶数(p,q)的一个估计$(k,j)=(\hat{p},\hat{q})$.
- 无论这个估计是怎样得到的，按前面的方法都可以估计出ARMA(k,j)模型的参数.
- 用$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}^2(k,j)$表示白噪声方差$\sigma^2$的估计.
- 一般来讲，希望$\hat{\sigma}^2$的取值越小越好. 因为$\hat{\sigma}^2$越小表示模型拟合的越精确.
- 通常较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$对应于较大的阶数k, j.
- 这样，过多追求拟合的精度，或说过分追求较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$会导致较大的$\hat{p}$和$\hat{q}$，从而导致较多的待估参数.
- 其结果会使建立的模型关于数据过于敏感，从而降低模型的稳健性.
- 另一方面，参数过多的模型拟合较好但是对新数据的解释能力差。
- AIC定阶准则就是为了克服参数过多的弊病而提出的。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法

- 和AR模型的定阶方法相似，给定ARMA(p,q)模型的阶数(p,q)的一个估计$(k,j)=(\hat{p},\hat{q})$.
- 无论这个估计是怎样得到的，按前面的方法都可以估计出ARMA(k,j)模型的参数.
- 用$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}^2(k,j)$表示白噪声方差$\sigma^2$的估计.
- 一般来讲，希望$\hat{\sigma}^2$的取值越小越好. 因为$\hat{\sigma}^2$越小表示模型拟合的越精确.
- 通常较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$对应于较大的阶数k, j.
- 这样，过多追求拟合的精度，或说过分追求较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$会导致较大的$\hat{p}$和$\hat{q}$，从而导致较多的待估参数.
- 其结果会使建立的模型关于数据过于敏感，从而降低模型的稳健性.
- 另一方面，参数过多的模型拟合较好但是对新数据的解释能力差。
- AIC定阶准则就是为了克服参数过多的弊病而提出的。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法

- 和AR模型的定阶方法相似，给定ARMA(p,q)模型的阶数(p,q)的一个估计$(k,j)=(\hat{p},\hat{q})$.
- 无论这个估计是怎样得到的，按前面的方法都可以估计出ARMA(k,j)模型的参数.
- 用$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}^2(k,j)$表示白噪声方差$\sigma^2$的估计.
- 一般来讲，希望$\hat{\sigma}^2$的取值越小越好. 因为$\hat{\sigma}^2$越小表示模型拟合的越精确.
- 通常较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$对应于较大的阶数k, j.
- 这样，过多追求拟合的精度，或说过分追求较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$会导致较大的$\hat{p}$和$\hat{q}$，从而导致较多的待估参数.
- 其结果会使建立的模型关于数据过于敏感，从而降低模型的稳健性.
- 另一方面，参数过多的模型拟合较好但是对新数据的解释能力差。
- AIC定阶准则就是为了克服参数过多的弊病而提出的。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法

- 和AR模型的定阶方法相似，给定ARMA(p,q)模型的阶数(p,q)的一个估计$(k,j)=(\hat{p},\hat{q})$.
- 无论这个估计是怎样得到的，按前面的方法都可以估计出ARMA(k,j)模型的参数.
- 用$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}^2(k,j)$表示白噪声方差$\sigma^2$的估计.
- 一般来讲，希望$\hat{\sigma}^2$的取值越小越好. 因为$\hat{\sigma}^2$越小表示模型拟合的越精确.
- 通常较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$对应于较大的阶数k, j.
- 这样，过多追求拟合的精度，或说过分追求较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$会导致较大的$\hat{p}$和$\hat{q}$，从而导致较多的待估参数.
- 其结果会使建立的模型关于数据过于敏感，从而降低模型的稳健性.
- 另一方面，参数过多的模型拟合较好但是对新数据的解释能力差。
- AIC定阶准则就是为了克服参数过多的弊病而提出的。

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法

- 和AR模型的定阶方法相似，给定ARMA(p,q)模型的阶数(p,q)的一个估计$(k,j)=(\hat{p},\hat{q})$.
- 无论这个估计是怎样得到的，按前面的方法都可以估计出ARMA(k,j)模型的参数.
- 用$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}^2(k,j)$表示白噪声方差$\sigma^2$的估计.
- 一般来讲，希望$\hat{\sigma}^2$的取值越小越好. 因为$\hat{\sigma}^2$越小表示模型拟合的越精确.
- 通常较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$对应于较大的阶数k, j.
- 这样，过多追求拟合的精度，或说过分追求较小的残差方差$\hat{\sigma}^2$会导致较大的$\hat{p}$和$\hat{q}$, 从而导致较多的待估参数.
- 其结果会使建立的模型关于数据过于敏感，从而降低模型的稳健性.
- 另一方面，参数过多的模型拟合较好但是对新数据的解释能力差。
- AIC定阶准则就是为了克服参数过多的弊病而提出的。

ARMA(p,q)模型的定阶方法(续)

- ARMA模型的AIC定阶方法和AR模型的AIC定阶方法是相同的.
- 如果已知p的上界P_0和q的上界Q_0, 对于每一对(k,j), $0 \le k \le P_0$, $0 \le j \le Q_0$ 计算AIC函数

$$\mathrm{AIC}(k,j) = \ln(\hat{\sigma}^2(k,j)) + \frac{2(k+j)}{N}. \tag{3.25}$$

- $\mathrm{AIC}(k,j)$的最小值点$(\hat{p},\hat{q})$ 称为(p,q)的AIC定阶.
- 如果最小值不惟一, 应先取$k+j$最小的, 然后取j最小的.
- 一般AIC定阶并不是相合的.也就是说, 如果平稳序列的观测$\{x_t\}$确实是来自一个ARMA(p,q)模型时, AIC定阶$(\hat{p},\hat{q})$ 并不依概率收敛到真正的(p,q). 但是, 和$AR(p)$模型的AIC定阶相似, 这种不相容性并不能否定AIC定阶的实用性. 因为一方面实际数据并不会真正满足某一个ARMA(p,q)模型, 所以真正的阶数并不存在, 采用ARMA模型只是对数据的一种处理方法. 另一方面, AIC定阶有时会高估阶数, 但是并不会高估出很多. 这比低估阶数要好, 低估了阶数往往会造成更大的误差和模型的选择不当.
- 将(3.25)中的$2(k+j)/N$改为$(k+j)\ln N/N$ 就得到$\mathrm{BIC}(k,j)$定阶.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法(续)

- ARMA模型的AIC定阶方法和AR模型的AIC定阶方法是相同的.
- 如果已知p的上界P_0和q的上界Q_0，对于每一对(k,j)，$0 \le k \le P_0$，$0 \le j \le Q_0$ 计算AIC函数

$$\mathrm{AIC}(k,j) = \ln(\hat{\sigma}^2(k,j)) + \frac{2(k+j)}{N}. \tag{3.25}$$

- $\mathrm{AIC}(k,j)$的最小值点$(\hat{p},\hat{q})$ 称为(p,q)的AIC定阶.
- 如果最小值不惟一，应先取$k+j$最小的，然后取j最小的.
- 一般AIC定阶并不是相合的.也就是说，如果平稳序列的观测$\{x_t\}$确实是来自一个ARMA(p,q)模型时，AIC定阶$(\hat{p},\hat{q})$ 并不依概率收敛到真正的(p,q). 但是，和$AR(p)$模型的AIC定阶相似，这种不相容性并不能否定AIC定阶的实用性. 因为一方面实际数据并不会真正满足某一个ARMA(p,q)模型，所以真正的阶数并不存在，采用ARMA模型只是对数据的一种处理方法. 另一方面，AIC定阶有时会高估阶数，但是并不会高估出很多. 这比低估阶数要好，低估了阶数往往会造成更大的误差和模型的选择不当.
- 将(3.25)中的$2(k+j)/N$改为$(k+j)\ln N/N$ 就得到$\mathrm{BIC}(k,j)$定阶.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法(续)

- ARMA模型的AIC定阶方法和AR模型的AIC定阶方法是相同的.
- 如果已知p的上界P_0和q的上界Q_0, 对于每一对(k,j), $0 \le k \le P_0$, $0 \le j \le Q_0$ 计算AIC函数

$$\mathrm{AIC}(k,j) = \ln(\hat{\sigma}^2(k,j)) + \frac{2(k+j)}{N}. \tag{3.25}$$

- AIC(k,j)的最小值点$(\hat{p},\hat{q})$ 称为(p,q)的AIC定阶.
- 如果最小值不惟一, 应先取$k+j$最小的, 然后取j最小的.
- 一般AIC定阶并不是相合的.也就是说, 如果平稳序列的观测$\{x_t\}$确实是来自一个ARMA(p,q)模型时, AIC定阶$(\hat{p},\hat{q})$ 并不依概率收敛到真正的(p,q). 但是, 和$AR(p)$模型的AIC定阶相似, 这种不相容性并不能否定AIC定阶的实用性. 因为一方面实际数据并不会真正满足某一个ARMA(p,q)模型, 所以真正的阶数并不存在, 采用ARMA模型只是对数据的一种处理方法. 另一方面, AIC定阶有时会高估阶数, 但是并不会高估出很多. 这比低估阶数要好, 低估了阶数往往会造成更大的误差和模型的选择不当.
- 将(3.25)中的$2(k+j)/N$改为$(k+j)\ln N/N$ 就得到BIC(k,j)定阶.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法(续)

- ARMA模型的AIC定阶方法和AR模型的AIC定阶方法是相同的.
- 如果已知p的上界P_0和q的上界Q_0, 对于每一对(k,j), $0 \le k \le P_0$, $0 \le j \le Q_0$ 计算AIC函数

$$\mathrm{AIC}(k,j) = \ln(\hat{\sigma}^2(k,j)) + \frac{2(k+j)}{N}. \tag{3.25}$$

- AIC(k,j)的最小值点$(\hat{p},\hat{q})$ 称为(p,q)的AIC定阶.
- 如果最小值不惟一, 应先取$k+j$最小的, 然后取j最小的.
- 一般AIC定阶并不是相合的.也就是说, 如果平稳序列的观测$\{x_t\}$确实是来自一个ARMA(p,q)模型时, AIC定阶$(\hat{p},\hat{q})$ 并不依概率收敛到真正的(p,q). 但是, 和$AR(p)$模型的AIC定阶相似, 这种不相容性并不能否定AIC定阶的实用性. 因为一方面实际数据并不会真正满足某一个ARMA(p,q)模型, 所以真正的阶数并不存在, 采用ARMA模型只是对数据的一种处理方法. 另一方面, AIC定阶有时会高估阶数, 但是并不会高估出很多. 这比低估阶数要好, 低估了阶数往往会造成更大的误差和模型的选择不当.
- 将(3.25)中的$2(k+j)/N$改为$(k+j)\ln N/N$ 就得到BIC(k,j)定阶.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法(续)

- ARMA模型的AIC定阶方法和AR模型的AIC定阶方法是相同的.
- 如果已知p的上界P_0和q的上界Q_0, 对于每一对(k,j), $0 \le k \le P_0$, $0 \le j \le Q_0$ 计算AIC函数

$$\mathrm{AIC}(k,j) = \ln(\hat{\sigma}^2(k,j)) + \frac{2(k+j)}{N}. \qquad (3.25)$$

- AIC(k,j)的最小值点$(\hat{p},\hat{q})$ 称为(p,q)的AIC定阶.
- 如果最小值不惟一, 应先取$k+j$最小的, 然后取j最小的.
- 一般AIC定阶并不是相合的.也就是说, 如果平稳序列的观测$\{x_t\}$确实是来自一个ARMA(p,q)模型时, AIC定阶$(\hat{p},\hat{q})$ 并不依概率收敛到真正的(p,q). 但是, 和$AR(p)$模型的AIC定阶相似, 这种不相容性并不能否定AIC定阶的实用性. 因为一方面实际数据并不会真正满足某一个ARMA(p,q)模型, 所以真正的阶数并不存在, 采用ARMA模型只是对数据的一种处理方法. 另一方面, AIC定阶有时会高估阶数, 但是并不会高估出很多. 这比低估阶数要好, 低估了阶数往往会造成更大的误差和模型的选择不当.
- 将(3.25)中的$2(k+j)/N$改为$(k+j)\ln N/N$ 就得到BIC(k,j)定阶.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA(p,q)模型的定阶方法(续)

- ARMA模型的AIC定阶方法和AR模型的AIC定阶方法是相同的.
- 如果已知p的上界P_0和q的上界Q_0, 对于每一对(k,j), $0 \le k \le P_0$, $0 \le j \le Q_0$ 计算AIC函数

$$\mathrm{AIC}(k,j) = \ln(\hat{\sigma}^2(k,j)) + \frac{2(k+j)}{N}. \tag{3.25}$$

- $\mathrm{AIC}(k,j)$的最小值点$(\hat{p},\hat{q})$ 称为(p,q)的AIC定阶.
- 如果最小值不惟一, 应先取$k+j$最小的, 然后取j最小的.
- 一般AIC定阶并不是相合的.也就是说, 如果平稳序列的观测$\{x_t\}$确实是来自一个ARMA(p,q)模型时, AIC定阶$(\hat{p},\hat{q})$ 并不依概率收敛到真正的(p,q). 但是, 和$AR(p)$模型的AIC定阶相似, 这种不相容性并不能否定AIC定阶的实用性. 因为一方面实际数据并不会真正满足某一个ARMA(p,q)模型, 所以真正的阶数并不存在, 采用ARMA模型只是对数据的一种处理方法. 另一方面, AIC定阶有时会高估阶数, 但是并不会高估出很多. 这比低估阶数要好, 低估了阶数往往会造成更大的误差和模型的选择不当.
- 将(3.25)中的$2(k+j)/N$改为$(k+j)\ln N/N$ 就得到$\mathrm{BIC}(k,j)$定阶.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA谱密度估计

- 如果得到了ARMA(p,q) 模型的参数估计, 模型的检验也已经通过. 可以利用

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{\hat{\sigma}^2}{2\pi}\frac{|1+\sum_{j=1}^{\hat{q}}\hat{b}_je^{ij\lambda}|^2}{|1-\sum_{j=1}^{\hat{p}}\hat{a}_je^{ij\lambda}|^2} \tag{3.26}$$

作为谱密度的估计.

- 这是因为如果观测数据确实是ARMA(p,q)序列(3.1)时, 它的谱密度是

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|1+\sum_{j=1}^{q}b_je^{ij\lambda}|^2}{|1-\sum_{j=1}^{p}a_je^{ij\lambda}|^2}.$$

- 不难看出, 如果$\hat{p}, \hat{q}, \hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_p, \hat{b}_1,\hat{b}_2,\cdots,\hat{b}_q$和$\hat{\sigma}^2$分别是$p,q, a_1,\ldots,a_p, b_1,b_2,\ldots,b_q$ 和σ^2的相合估计, 则$\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的相合估计.
- 通常对谱密度进行估计只是为了解时间序列的频率特性. 后面的第八章将主要介绍谱密度的估计方法.

MA(q)模型的参数估计

MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计

ARMA(p,q)模型的参数估计

ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计

ARMA谱密度估计

- 如果得到了ARMA(p,q) 模型的参数估计，模型的检验也已经通过. 可以利用

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{\hat{\sigma}^2}{2\pi}\frac{|1+\sum_{j=1}^{\hat{q}}\hat{b}_je^{ij\lambda}|^2}{|1-\sum_{j=1}^{\hat{p}}\hat{a}_je^{ij\lambda}|^2} \qquad (3.26)$$

作为谱密度的估计.

- 这是因为如果观测数据确实是ARMA(p,q)序列(3.1)时，它的谱密度是

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|1+\sum_{j=1}^{q}b_je^{ij\lambda}|^2}{|1-\sum_{j=1}^{p}a_je^{ij\lambda}|^2}.$$

- 不难看出，如果$\hat{p},\hat{q},\ \hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_p,\ \hat{b}_1,\hat{b}_2,\cdots,\hat{b}_q$和$\hat{\sigma}^2$分别是$p,q,\ a_1,\ldots,a_p,\ b_1,b_2,..,b_q$ 和σ^2的相合估计，则$\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的相合估计.
- 通常对谱密度进行估计只是为了解时间序列的频率特性. 后面的第八章将主要介绍谱密度的估计方法.

ARMA谱密度估计

- 如果得到了ARMA(p,q) 模型的参数估计，模型的检验也已经通过. 可以利用

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{\hat{\sigma}^2}{2\pi}\frac{|1+\sum_{j=1}^{\hat{q}}\hat{b}_j e^{ij\lambda}|^2}{|1-\sum_{j=1}^{\hat{p}}\hat{a}_j e^{ij\lambda}|^2} \tag{3.26}$$

作为谱密度的估计.
- 这是因为如果观测数据确实是ARMA(p,q)序列(3.1)时，它的谱密度是

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|1+\sum_{j=1}^{q}b_j e^{ij\lambda}|^2}{|1-\sum_{j=1}^{p}a_j e^{ij\lambda}|^2}.$$

- 不难看出，如果$\hat{p}, \hat{q}, \hat{a}_1, ..., \hat{a}_p, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \cdots, \hat{b}_q$和$\hat{\sigma}^2$分别是$p, q, a_1, ..., a_p, b_1, b_2, .., b_q$ 和σ^2的相合估计，则$\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的相合估计.
- 通常对谱密度进行估计只是为了解时间序列的频率特性. 后面的第八章将主要介绍谱密度的估计方法.

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p, q)模型的参数估计
ARMA(p, q)模型的矩估计方法
ARMA(p, q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p, q)模型的最大似然估计
ARMA(p, q)模型的检验
ARMA(p, q)模型的定阶方法
ARMA(p, q)模型的谱密度估计

ARMA谱密度估计

- 如果得到了ARMA(p,q) 模型的参数估计，模型的检验也已经通过．可以利用

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{\hat{\sigma}^2}{2\pi}\frac{|1+\sum_{j=1}^{\hat{q}}\hat{b}_j e^{ij\lambda}|^2}{|1-\sum_{j=1}^{\hat{p}}\hat{a}_j e^{ij\lambda}|^2} \tag{3.26}$$

作为谱密度的估计．
- 这是因为如果观测数据确实是ARMA(p,q)序列(3.1)时，它的谱密度是

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|1+\sum_{j=1}^{q}b_j e^{ij\lambda}|^2}{|1-\sum_{j=1}^{p}a_j e^{ij\lambda}|^2}.$$

- 不难看出，如果$\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{a}_1,...,\hat{a}_p$, $\hat{b}_1,\hat{b}_2,\cdots,\hat{b}_q$和$\hat{\sigma}^2$分别是$p,q$, $a_1,...,a_p$, $b_1,b_2,..,b_q$ 和σ^2的相合估计，则$\hat{f}(\lambda)$是$f(\lambda)$的相合估计．
- 通常对谱密度进行估计只是为了解时间序列的频率特性．后面的第八章将主要介绍谱密度的估计方法．

MA(q)模型的参数估计
MA(q)模型的矩估计及其计算
MA(q)模型的逆相关函数法
MA(q)模型的新息估计方法
MA(q)模型的定阶方法
MA(q)模型的拟合检验
MA谱密度估计
ARMA(p,q)模型的参数估计
ARMA(p,q)模型的矩估计方法
ARMA(p,q)模型的自回归逼近法
正态时间序列的似然函数
ARMA(p,q)模型的最大似然估计
ARMA(p,q)模型的检验
ARMA(p,q)模型的定阶方法
ARMA(p,q)模型的谱密度估计