应用时间序列分析
课程介绍

主讲老师：席瑞斌

本课件基于李东风老师课件修改

2017年秋季学期

时间序列的递推预测

- 第二章已经用Y-W方程给出了非决定性平稳序列的预测公式，这里我们进行更深入的讨论。
- 非决定性平稳序列可以用Levinson递推得到预测系数和预测方差。
- 对AR(p)模型只要使用自回归系数。
- 对MA模型和ARMA模型则只能递推得到系数。
- 这里研究可以化简MA模型和ARMA模型预测的公式，以及非平稳时也可用的递推公式。
- 假设自协方差函数已知。
- 实际中可以用样本自协方差函数代替。

时间序列的递推预测

- 第二章已经用Y-W方程给出了非决定性平稳序列的预测公式，这里我们进行更深入的讨论。
- 非决定性平稳序列可以用Levinson递推得到预测系数和预测方差。
- 对AR(p)模型只要使用自回归系数。
- 对MA模型和ARMA模型则只能递推得到系数。
- 这里研究可以化简MA模型和ARMA模型预测的公式，以及非平稳时也可用的递推公式。
- 假设自协方差函数已知。
- 实际中可以用样本自协方差函数代替。

时间序列的递推预测

- 第二章已经用Y-W方程给出了非决定性平稳序列的预测公式，这里我们进行更深入的讨论。
- 非决定性平稳序列可以用Levinson递推得到预测系数和预测方差。
- 对AR(p)模型只要使用自回归系数。
- 对MA模型和ARMA模型则只能递推得到系数。
- 这里研究可以化简MA模型和ARMA模型预测的公式，以及非平稳时也可用的递推公式。
- 假设自协方差函数已知。
- 实际中可以用样本自协方差函数代替。

时间序列的递推预测

- 第二章已经用Y-W方程给出了非决定性平稳序列的预测公式，这里我们进行更深入的讨论。
- 非决定性平稳序列可以用Levinson递推得到预测系数和预测方差。
- 对AR(p)模型只要使用自回归系数。
- 对MA模型和ARMA模型则只能递推得到系数。
- 这里研究可以化简MA模型和ARMA模型预测的公式，以及非平稳时也可用的递推公式。
- 假设自协方差函数已知。
- 实际中可以用样本自协方差函数代替。

时间序列的递推预测

- 第二章已经用Y-W方程给出了非决定性平稳序列的预测公式，这里我们进行更深入的讨论。
- 非决定性平稳序列可以用Levinson递推得到预测系数和预测方差。
- 对AR(p)模型只要使用自回归系数。
- 对MA模型和ARMA模型则只能递推得到系数。
- 这里研究可以化简MA模型和ARMA模型预测的公式，以及非平稳时也可用的递推公式。
- 假设自协方差函数已知。
- 实际中可以用样本自协方差函数代替。

时间序列的递推预测

- 第二章已经用Y-W方程给出了非决定性平稳序列的预测公式，这里我们进行更深入的讨论。
- 非决定性平稳序列可以用Levinson递推得到预测系数和预测方差。
- 对AR(p)模型只要使用自回归系数。
- 对MA模型和ARMA模型则只能递推得到系数。
- 这里研究可以化简MA模型和ARMA模型预测的公式，以及非平稳时也可用的递推公式。
- 假设自协方差函数已知。
- 实际中可以用样本自协方差函数代替。

时间序列的递推预测

- 第二章已经用Y-W方程给出了非决定性平稳序列的预测公式，这里我们进行更深入的讨论。
- 非决定性平稳序列可以用Levinson递推得到预测系数和预测方差。
- 对AR(p)模型只要使用自回归系数。
- 对MA模型和ARMA模型则只能递推得到系数。
- 这里研究可以化简MA模型和ARMA模型预测的公式，以及非平稳时也可用的递推公式。
- 假设自协方差函数已知。
- 实际中可以用样本自协方差函数代替。

递推预测的正交分解

- 设$\{Y_t\}$是方差有限的零均值时间序列, 对任何正整数n, 用
$$L_n = \overline{\text{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$$
表示$Y_1, \ldots, Y_n$的线性组合的全体.
- 定义$\mathbf{Y}_n = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$,
$$\hat{Y}_1 = 0, \ \ \hat{Y}_n = L(Y_n|\mathbf{Y}_{n-1}), \ \ n = 2, \ldots . \qquad (3.1)$$
- 引入预测误差W_n及其方差ν_{n-1}如下:
$$W_n = Y_n - \hat{Y}_n, \ \ \nu_{n-1} = EW_n^2. \ \ n = 1, 2, \cdots . \qquad (3.2)$$
- 由最佳线性预测的性质7 知道W_n和L_{n-1}中的任何随机变量正交, 并且$W_n \in L_n$.
- 于是$\{W_n\}$是一个正交序列, 满足
$$E(W_n W_k) = \nu_{n-1}\delta_{n-k}.$$
这里δ_t是Kronecker 函数.

递推预测的正交分解

- 设$\{Y_t\}$是方差有限的零均值时间序列，对任何正整数n，用
$$L_n = \overline{\text{sp}}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$$
表示$Y_1, \dots, Y_n$的线性组合的全体.
- 定义$\mathbf{Y}_n = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$,
$$\hat{Y}_1 = 0, \ \hat{Y}_n = L(Y_n|\mathbf{Y}_{n-1}), \ n = 2, \dots. \tag{3.1}$$
- 引入预测误差W_n及其方差ν_{n-1}如下:
$$W_n = Y_n - \hat{Y}_n, \quad \nu_{n-1} = EW_n^2. \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{3.2}$$
- 由最佳线性预测的性质7 知道W_n和L_{n-1}中的任何随机变量正交，并且$W_n \in L_n$.
- 于是$\{W_n\}$是一个正交序列，满足
$$E(W_n W_k) = \nu_{n-1}\delta_{n-k}.$$
这里δ_t是Kronecker 函数.

递推预测的正交分解

- 设$\{Y_t\}$是方差有限的零均值时间序列，对任何正整数n，用
$$L_n = \overline{\text{sp}}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$$
表示$Y_1, \dots, Y_n$的线性组合的全体.
- 定义$\mathbf{Y}_n = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$，
$$\hat{Y}_1 = 0, \ \ \hat{Y}_n = L(Y_n|\mathbf{Y}_{n-1}), \ \ n = 2, \dots. \qquad (3.1)$$
- 引入预测误差W_n及其方差ν_{n-1}如下：
$$W_n = Y_n - \hat{Y}_n, \quad \nu_{n-1} = EW_n^2. \ \ n = 1, 2, \cdots. \qquad (3.2)$$
- 由最佳线性预测的性质7 知道W_n和L_{n-1}中的任何随机变量正交，并且$W_n \in L_n$.
- 于是$\{W_n\}$是一个正交序列，满足
$$E(W_n W_k) = \nu_{n-1}\delta_{n-k}.$$
这里δ_t是Kronecker 函数.

递推预测的正交分解

- 设$\{Y_t\}$是方差有限的零均值时间序列, 对任何正整数n, 用
$$L_n = \overline{\mathrm{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$$
表示$Y_1, \ldots, Y_n$的线性组合的全体.
- 定义$\mathbf{Y}_n = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$,
$$\hat{Y}_1 = 0, \ \hat{Y}_n = L(Y_n|\mathbf{Y}_{n-1}), \ n = 2, \ldots. \tag{3.1}$$
- 引入预测误差W_n及其方差ν_{n-1}如下:
$$W_n = Y_n - \hat{Y}_n, \quad \nu_{n-1} = EW_n^2. \ \ n = 1, 2, \cdots. \tag{3.2}$$
- 由最佳线性预测的性质7 知道W_n和L_{n-1}中的任何随机变量正交, 并且$W_n \in L_n$.
- 于是$\{W_n\}$是一个正交序列, 满足
$$E(W_n W_k) = \nu_{n-1}\delta_{n-k}.$$
这里δ_t是Kronecker 函数.

递推预测的正交分解

- 设$\{Y_t\}$是方差有限的零均值时间序列，对任何正整数n，用
$$L_n = \overline{\mathrm{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$$
表示$Y_1, \ldots, Y_n$的线性组合的全体.
- 定义$\mathbf{Y}_n = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$,
$$\hat{Y}_1 = 0, \ \ \hat{Y}_n = L(Y_n|\mathbf{Y}_{n-1}), \ \ n = 2, \ldots. \tag{3.1}$$
- 引入预测误差W_n及其方差ν_{n-1}如下:
$$W_n = Y_n - \hat{Y}_n, \quad \nu_{n-1} = EW_n^2. \ \ n = 1, 2, \cdots. \tag{3.2}$$
- 由最佳线性预测的性质7 知道W_n和L_{n-1}中的任何随机变量正交，并且$W_n \in L_n$.
- 于是$\{W_n\}$是一个正交序列，满足
$$E(W_n W_k) = \nu_{n-1}\delta_{n-k}.$$
这里δ_t是Kronecker 函数.

递推预测的正交分解(续)

- 用
$$M_n \triangleq \overline{\text{sp}}\{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$$
表示$W_1, W_2, \cdots, W_n$的线性组合全体.
- 则$M_n \subset L_n$.
- 对$n \in \mathbb{N}$, 我们用归纳法证明$Y_n \in M_n$.
- 首先$Y_1 = W_1 \in M_1$.
- 如果对$k \le n$已经证明$Y_k \in M_k$, 注意$\hat{Y}_{n+1} = L(Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n) \in M_n$, 于是
$$Y_{n+1} = (Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) + \hat{Y}_{n+1} = W_{n+1} + \hat{Y}_{n+1} \in M_{n+1}.$$
这就证明了对$n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in M_n$成立.
- 于是得到
$$\begin{aligned} L_n &= \overline{\text{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} \\ &= \overline{\text{sp}}\{W_1, W_2, \ldots, W_n\} = M_n, \\ & n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{3.3}$$

递推预测的正交分解(续)

- 用
$$M_n \triangleq \overline{\text{sp}}\{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$$
表示$W_1, W_2, \cdots, W_n$的线性组合全体.
- 则$M_n \subset L_n$.
- 对$n \in \mathbb{N}$, 我们用归纳法证明$Y_n \in M_n$.
- 首先$Y_1 = W_1 \in M_1$.
- 如果对$k \leq n$已经证明$Y_k \in M_k$, 注意$\hat{Y}_{n+1} = L(Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n) \in M_n$, 于是
$$Y_{n+1} = (Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) + \hat{Y}_{n+1} = W_{n+1} + \hat{Y}_{n+1} \in M_{n+1}.$$
这就证明了对$n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in M_n$成立.
- 于是得到
$$\begin{aligned} L_n &= \overline{\text{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} \\ &= \overline{\text{sp}}\{W_1, W_2, \ldots, W_n\} = M_n, \\ & n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{3.3}$$

递推预测的正交分解(续)

- 用
$$M_n \triangleq \overline{\text{sp}}\{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$$
表示$W_1, W_2, \cdots, W_n$的线性组合全体.
- 则$M_n \subset L_n$.
- 对$n \in \mathbb{N}$, 我们用归纳法证明$Y_n \in M_n$.
- 首先$Y_1 = W_1 \in M_1$.
- 如果对$k \le n$已经证明$Y_k \in M_k$, 注意$\hat{Y}_{n+1} = L(Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n) \in M_n$, 于是
$$Y_{n+1} = (Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) + \hat{Y}_{n+1} = W_{n+1} + \hat{Y}_{n+1} \in M_{n+1}.$$
这就证明了对$n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in M_n$成立.
- 于是得到
$$\begin{aligned} L_n &= \overline{\text{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} \\ &= \overline{\text{sp}}\{W_1, W_2, \ldots, W_n\} = M_n, \\ n &= 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{3.3}$$

递推预测的正交分解(续)

- 用
$$M_n \triangleq \overline{\mathrm{sp}}\{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$$
表示$W_1, W_2, \cdots, W_n$的线性组合全体.
- 则$M_n \subset L_n$.
- 对$n \in \mathbb{N}$, 我们用归纳法证明$Y_n \in M_n$.
- 首先$Y_1 = W_1 \in M_1$.
- 如果对$k \leq n$已经证明$Y_k \in M_k$, 注意$\hat{Y}_{n+1} = L(Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n) \in M_n$, 于是
$$Y_{n+1} = (Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) + \hat{Y}_{n+1} = W_{n+1} + \hat{Y}_{n+1} \in M_{n+1}.$$
这就证明了对$n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in M_n$成立.
- 于是得到
$$\begin{aligned} L_n &= \overline{\mathrm{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} \\ &= \overline{\mathrm{sp}}\{W_1, W_2, \ldots, W_n\} = M_n, \\ n &= 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{3.3}$$

递推预测的正交分解(续)

- 用
$$M_n \triangleq \overline{\text{sp}}\{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$$
表示$W_1, W_2, \cdots, W_n$的线性组合全体.
- 则$M_n \subset L_n$.
- 对$n \in \mathbb{N}$, 我们用归纳法证明$Y_n \in M_n$.
- 首先$Y_1 = W_1 \in M_1$.
- 如果对$k \leq n$已经证明$Y_k \in M_k$, 注意$\hat{Y}_{n+1} = L(Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n) \in M_n$, 于是
$$Y_{n+1} = (Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) + \hat{Y}_{n+1} = W_{n+1} + \hat{Y}_{n+1} \in M_{n+1}.$$
这就证明了对$n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in M_n$成立.
- 于是得到
$$L_n = \overline{\text{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} = \overline{\text{sp}}\{W_1, W_2, \ldots, W_n\} = M_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.3}$$

递推预测的正交分解(续)

- 用
$$M_n \triangleq \overline{\mathrm{sp}}\{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$$
表示$W_1, W_2, \cdots, W_n$的线性组合全体.
- 则$M_n \subset L_n$.
- 对$n \in \mathbb{N}$, 我们用归纳法证明$Y_n \in M_n$.
- 首先$Y_1 = W_1 \in M_1$.
- 如果对$k \le n$已经证明$Y_k \in M_k$, 注意$\hat{Y}_{n+1} = L(Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n) \in M_n$, 于是
$$Y_{n+1} = (Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) + \hat{Y}_{n+1} = W_{n+1} + \hat{Y}_{n+1} \in M_{n+1}.$$
这就证明了对$n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in M_n$成立.
- 于是得到
$$\begin{aligned} L_n &= \overline{\mathrm{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} \\ &= \overline{\mathrm{sp}}\{W_1, W_2, \ldots, W_n\} = M_n, \\ & n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{3.3}$$

递推预测的正交分解(续2)

- §5.1性质10和(3.3)式告诉我们
  用$\mathbf{W}_n=(W_1,W_2,\ldots,W_n)^T$ 对Y_{n+1}进行预测和
  用$\mathbf{Y}_n=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)^T$ 对Y_{n+1} 进行预测是等价的.
- 由于$\{W_t\}$是正交序列，所以用$\mathbf{W}_n$对Y_{n+1}进行预测有很多的方便.
- 类似于在正交基上的投影，可以直接计算坐标。

递推预测的正交分解(续2)

- §5.1性质10和(3.3)式告诉我们
  用$\mathbf{W}_n = (W_1, W_2, \ldots, W_n)^T$ 对Y_{n+1}进行预测和
  用$\mathbf{Y}_n = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$ 对Y_{n+1} 进行预测是等价的.
- 由于$\{W_t\}$是正交序列，所以用$\mathbf{W}_n$对Y_{n+1}进行预测有很多的方便.
- 类似于在正交基上的投影，可以直接计算坐标。

递推预测的正交分解(续2)

- §5.1性质10和(3.3)式告诉我们用$\mathbf{W}_n = (W_1, W_2, \ldots, W_n)^T$ 对Y_{n+1}进行预测和用$\mathbf{Y}_n = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$ 对Y_{n+1} 进行预测是等价的.
- 由于$\{W_t\}$是正交序列, 所以用$\mathbf{W}_n$对Y_{n+1}进行预测有很多的方便.
- 类似于在正交基上的投影，可以直接计算坐标。

时间序列递推预测的定理

- **定理3.1** 设$\{Y_t\}$是零均值时间序列(不要求平稳!). 如果$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m+1})^T$的协方差矩阵

$$\Big(E(Y_s Y_t)\Big)_{1\le s,t\le m+1} \qquad (3.4)$$

正定, 则最佳线性预测

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{n+1} &\triangleq L(Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n),\ \ n=1,2,\ldots,m\\ &=\sum_{j=1}^{n}\theta_{n,j}W_{n+1-j}=\sum_{k=0}^{n-1}\theta_{n,n-k}W_{k+1} \qquad (3.5)\\ &=\theta_{n,1}W_n+\theta_{n,2}W_{n-1}+\cdots+\theta_{n,n}W_1\\ &=\theta_{n,n}W_1+\theta_{n,n-1}W_2+\cdots+\theta_{n,1}W_n\end{aligned}$$

时间序列递推预测的定理(续)

- 其中的系数$\{\theta_{n,j}\}$ 和预测的均方误差$\nu_n = EW_{n+1}^2$满足如下的递推公式.
- $$\begin{cases} \nu_0 = EY_1^2, \\ \theta_{n,n-k} = \left[E(Y_{n+1}Y_{k+1}) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j}\theta_{n,n-j}\nu_j\right] / \nu_k, \\ \qquad 0 \le k \le n-1, \\ \nu_n = EY_{n+1}^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{n,n-k}^2 \nu_k, \end{cases} \tag{3.6}$$

  其中约定$\sum_{j=0}^{-1}(\cdot) \triangleq 0$.

时间序列递推预测的定理(续)

- 其中的系数$\{\theta_{n,j}\}$ 和预测的均方误差$\nu_n = EW_{n+1}^2$满足如下的递推公式.
-

$$
\begin{cases}
\nu_0 = EY_1^2, \\
\theta_{n,n-k} = \left[E(Y_{n+1} Y_{k+1}) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} \nu_j \right] / \nu_k, \\
\qquad 0 \le k \le n-1, \\
\nu_n = EY_{n+1}^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{n,n-k}^2 \nu_k,
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

其中约定$\sum_{j=0}^{-1} (\cdot) \triangleq 0$.

时间序列递推预测的定理(续2)

- 递推的顺序是

$$
\begin{array}{ccccc}
\nu_0 & & & & \\
\theta_{1,1} & \nu_1 & & & \\
\theta_{2,2} & \theta_{2,1} & \nu_2 & & \\
\theta_{3,3} & \theta_{3,2} & \theta_{3,1} & \nu_3 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

- 从协方差可以递推计算系数$\{\theta_{n,k}\}$和$\{\nu_n\}$，并递推计算

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_1 &= 0, & W_1 &= Y_1 - \hat{Y}_1 \\
\hat{Y}_2 &= \theta_{1,1} W_1, & W_2 &= Y_2 - \hat{Y}_2 \\
\hat{Y}_3 &= \theta_{2,2} W_1 + \theta_{2,1} W_2, & W_3 &= Y_3 - \hat{Y}_3 \\
\hat{Y}_4 &= \theta_{3,3} W_1 + \theta_{3,2} W_2 + \theta_{3,1} W_3, & W_4 &= Y_4 - \hat{Y}_4 \\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

时间序列递推预测的定理(续2)

- 递推的顺序是

$$
\begin{array}{lllll}
\nu_0 & & & & \\
\theta_{1,1} & \nu_1 & & & \\
\theta_{2,2} & \theta_{2,1} & \nu_2 & & \\
\theta_{3,3} & \theta_{3,2} & \theta_{3,1} & \nu_3 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

- 从协方差可以递推计算系数$\{\theta_{n,k}\}$和$\{\nu_n\}$，并递推计算

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_1 =& 0, & W_1 =& Y_1 - \hat{Y}_1 \\
\hat{Y}_2 =& \theta_{1,1} W_1, & W_2 =& Y_2 - \hat{Y}_2 \\
\hat{Y}_3 =& \theta_{2,2} W_1 + \theta_{2,1} W_2, & W_3 =& Y_3 - \hat{Y}_3 \\
\hat{Y}_4 =& \theta_{3,3} W_1 + \theta_{3,2} W_2 + \theta_{3,1} W_3, & W_4 =& Y_4 - \hat{Y}_4 \\
& \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

递推预测定理的证明

- **证明** 从自协方差矩阵(3.4)的正定性知道$\nu_n = EW_{n+1}^2 > 0$.
- 以下设$0 \le k \le n-1$.
- 在(3.5)两边同乘W_{k+1}后求数学期望，由$\{W_k\}$的正交性得

$$E(\hat{Y}_{n+1}W_{k+1}) = \theta_{n,n-k}\nu_k. \quad (3.7)$$

- 利用$W_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$和$W_{k+1}$垂直，得

$$E(Y_{n+1}W_{k+1}) = E(\hat{Y}_{n+1}W_{k+1}) = \theta_{n,n-k}\nu_k \quad (3.7')$$

递推预测定理的证明

- **证明** 从自协方差矩阵(3.4)的正定性知道$\nu_n = EW_{n+1}^2 > 0$.
- 以下设$0 \le k \le n-1$.
- 在(3.5)两边同乘W_{k+1}后求数学期望，由$\{W_k\}$的正交性得

$$E(\hat{Y}_{n+1}W_{k+1}) = \theta_{n,n-k}\nu_k. \qquad (3.7)$$

- 利用$W_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$和$W_{k+1}$垂直，得

$$E(Y_{n+1}W_{k+1}) = E(\hat{Y}_{n+1}W_{k+1}) = \theta_{n,n-k}\nu_k \qquad (3.7')$$

递推预测定理的证明

- **证明**　从自协方差矩阵(3.4)的正定性知道$\nu_n = EW_{n+1}^2 > 0$.
- 以下设$0 \le k \le n-1$.
- 在(3.5)两边同乘W_{k+1}后求数学期望，由$\{W_k\}$的正交性得

$$E(\hat{Y}_{n+1}W_{k+1}) = \theta_{n,n-k}\nu_k. \tag{3.7}$$

- 利用$W_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$和$W_{k+1}$垂直，得

$$E(Y_{n+1}W_{k+1}) = E(\hat{Y}_{n+1}W_{k+1}) = \theta_{n,n-k}\nu_k \tag{3.7'}$$

递推预测定理的证明

- **证明**　从自协方差矩阵(3.4)的正定性知道$\nu_n = EW_{n+1}^2 > 0$.
- 以下设$0 \le k \le n-1$.
- 在(3.5)两边同乘W_{k+1}后求数学期望，由$\{W_k\}$的正交性得

$$E(\hat{Y}_{n+1}W_{k+1}) = \theta_{n,n-k}\nu_k. \tag{3.7}$$

- 利用$W_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$和$W_{k+1}$垂直，得

$$E(Y_{n+1}W_{k+1}) = E(\hat{Y}_{n+1}W_{k+1}) = \theta_{n,n-k}\nu_k \qquad (3.7')$$

递推预测定理的证明(续)

- 注意到

$$\hat{Y}_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \theta_{k,j} W_{k+1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} W_{j+1},$$

- 于是

$$\begin{aligned}
\theta_{n,n-k} &= E(Y_{n+1} W_{k+1})/\nu_k \quad (\text{用}(3.7')) \\
&= E\left[Y_{n+1}\Big(Y_{k+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} W_{j+1}\Big) \right] / \nu_k \\
&= \left[E(Y_{n+1} Y_{k+1}) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} E(Y_{n+1} W_{j+1}) \right] / \nu_k \\
&= [E(Y_{n+1} Y_{k+1}) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} \nu_j] / \nu_k. \quad (\text{用}(3.7'))
\end{aligned}$$

递推预测定理的证明(续)

- 注意到

$$\hat{Y}_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \theta_{k,j} W_{k+1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} W_{j+1},$$

- 于是

$$\begin{aligned}
\theta_{n,n-k} =& E(Y_{n+1} W_{k+1})/\nu_k \quad (\text{用}(3.7'))\\
=& E\left[Y_{n+1}(Y_{k+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} W_{j+1}) \right] /\nu_k \\
=& \left[E(Y_{n+1} Y_{k+1}) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} E(Y_{n+1} W_{j+1}) \right] /\nu_k \\
=& [E(Y_{n+1} Y_{k+1}) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} \nu_j]/\nu_k. \quad (\text{用}(3.7'))
\end{aligned}$$

递推预测定理的证明(续2)

- 最后，利用$\nu_n = EW_{n+1}^2 = EY_{n+1}^2 - E\hat{Y}_{n+1}^2$ 和(3.5)得到预测的均方误差公式：

$$\nu_n = EY_{n+1}^2 - \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}^2 \nu_{n-j} = EY_{n+1}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 \nu_j.$$

$\square$

多步预报问题

- 下面考虑用$\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$预测$Y_{n+k+1}$的问题.
- 设$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+k+1})^T$的自协方差矩阵正定.
- 仍记$\hat{Y}_{n+k+1} = L(Y_{n+k+1}|\mathbf{Y}_{n+k})$, 用$W_j$表示预测误差$Y_j - L(Y_j|\mathbf{Y}_{j-1})$,
- 则有

$$\hat{Y}_{n+k+1} = \sum_{j=1}^{n+k} \theta_{n+k,j} W_{n+k+1-j}. \tag{3.8}$$

多步预报问题

- 下面考虑用$\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$预测$Y_{n+k+1}$的问题.
- 设$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+k+1})^T$的自协方差矩阵正定.
- 仍记$\hat{Y}_{n+k+1} = L(Y_{n+k+1}|\mathbf{Y}_{n+k})$, 用$W_j$表示预测误差$Y_j - L(Y_j|\mathbf{Y}_{j-1})$,
- 则有

$$\hat{Y}_{n+k+1} = \sum_{j=1}^{n+k} \theta_{n+k,j} W_{n+k+1-j}. \qquad (3.8)$$

多步预报问题

- 下面考虑用$\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$预测$Y_{n+k+1}$的问题.
- 设$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+k+1})^T$的自协方差矩阵正定.
- 仍记$\hat{Y}_{n+k+1} = L(Y_{n+k+1}|\mathbf{Y}_{n+k})$, 用$W_j$表示预测误差$Y_j - L(Y_j|\mathbf{Y}_{j-1})$,
- 则有

$$\hat{Y}_{n+k+1} = \sum_{j=1}^{n+k} \theta_{n+k,j} W_{n+k+1-j}. \qquad (3.8)$$

多步预报问题

- 下面考虑用$\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$预测$Y_{n+k+1}$的问题.
- 设$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+k+1})^T$的自协方差矩阵正定.
- 仍记$\hat{Y}_{n+k+1} = L(Y_{n+k+1}|\mathbf{Y}_{n+k})$, 用$W_j$表示预测误差$Y_j - L(Y_j|\mathbf{Y}_{j-1})$,
- 则有

$$\hat{Y}_{n+k+1} = \sum_{j=1}^{n+k} \theta_{n+k,j} W_{n+k+1-j}. \qquad (3.8)$$

多步预报问题(续)

- 注意，对$j \geq 0$, W_{n+j+1}垂直于L_n, $W_{n-j} \in L_n$. 根据§5.1中最佳线性预测的性质4、5、8或定理1.2 得到

$$
\begin{aligned}
& L(Y_{n+k+1}|\mathbf{Y}_n) = L(\hat{Y}_{n+k+1}|\mathbf{Y}_n) \quad (\text{定理}1.2(6)) \\
= & L[\sum_{j=1}^{n+k} \theta_{n+k,j} W_{n+k+1-j} \,\Big|\, \mathbf{W}_n] \quad (\text{定理}3.1) \\
= & L[\sum_{j=k+1}^{n+k} \theta_{n+k,j} W_{n+k+1-j} \,\Big|\, \mathbf{W}_n] \quad (\text{定理}1.2(5)) \\
= & \sum_{j=k+1}^{n+k} \theta_{n+k,j} W_{n+k+1-j}. \quad (\text{定理}1.2(4)) \qquad (3.9) \\
= & \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n+k,n+k-j} W_{j+1}
\end{aligned}
$$

多步预报问题(续2)

- 由投影的正交性，得到预测的均方误差

$$
\begin{aligned}
& E[Y_{n+k+1} - L(Y_{n+k+1}|\mathbf{Y}_n)]^2 \\
=& EY_{n+k+1}^2 - E[L(Y_{n+k+1}|\mathbf{Y}_n)]^2 \\
=& EY_{n+k+1}^2 - \sum_{j=k+1}^{n+k} \theta_{n+k,j}^2 \nu_{n+k-j}, \\
=& EY_{n+k+1}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n+k,n+k-j}^2 \nu_j
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

- 其中的系数$\theta_{n+k,j}$和预测的均方误差ν_{n+k-j}可用递推公式(3.6)计算，只不过因为$Y_{n+1},\ldots,Y_{n+k}$未知所以$W_{n+1},\ldots,W_{n+k}$不能计算。

多步预报问题(续2)

- 由投影的正交性，得到预测的均方误差

$$
\begin{aligned}
& E[Y_{n+k+1} - L(Y_{n+k+1}|\mathbf{Y}_n)]^2 \\
=& EY_{n+k+1}^2 - E[L(Y_{n+k+1}|\mathbf{Y}_n)]^2 \\
=& EY_{n+k+1}^2 - \sum_{j=k+1}^{n+k} \theta_{n+k,j}^2 \nu_{n+k-j}, \\
=& EY_{n+k+1}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n+k,n+k-j}^2 \nu_j
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

- 其中的系数$\theta_{n+k,j}$和预测的均方误差ν_{n+k-j}可用递推公式(3.6)计算，只不过因为$Y_{n+1},\ldots,Y_{n+k}$未知所以$W_{n+1},\ldots,W_{n+k}$不能计算。

正态时间序列的区间预测

- 如果$\{Y_t\}$是正态时间序列, 则$\hat{Y}_{n+1}$也是最佳预测.
- $W_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$ 作为$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+1}$的线性组合服从正态分布$N(0, \nu_n)$.
- 利用

$$\Pr\left(|Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}|/\sqrt{\nu_n} \le 1.96\right) = 0.95$$

可以得到

- Y_{n+1}的置信度为0.95的置信区间(预测区间)

$$[\hat{Y}_{n+1} - 1.96\sqrt{\nu_n},\ \hat{Y}_{n+1} + 1.96\sqrt{\nu_n}].$$

正态时间序列的区间预测

- 如果$\{Y_t\}$是正态时间序列，则$\hat{Y}_{n+1}$也是最佳预测.
- $W_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$ 作为$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+1}$的线性组合服从正态分布$N(0, \nu_n)$.
- 利用

$$\Pr\left(|Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}|/\sqrt{\nu_n} \le 1.96\right) = 0.95$$

可以得到

- Y_{n+1}的置信度为0.95的置信区间(预测区间)

$$[\hat{Y}_{n+1} - 1.96\sqrt{\nu_n},\ \hat{Y}_{n+1} + 1.96\sqrt{\nu_n}].$$

正态时间序列的区间预测

- 如果$\{Y_t\}$是正态时间序列，则$\hat{Y}_{n+1}$也是最佳预测.
- $W_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$ 作为$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+1}$的线性组合服从正态分布$N(0, \nu_n)$.
- 利用

$$\Pr\left(|Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}|/\sqrt{\nu_n} \le 1.96\right) = 0.95$$

可以得到

- Y_{n+1}的置信度为0.95的置信区间(预测区间)

$$[\hat{Y}_{n+1} - 1.96\sqrt{\nu_n},\ \hat{Y}_{n+1} + 1.96\sqrt{\nu_n}].$$

正态时间序列的区间预测

- 如果$\{Y_t\}$是正态时间序列，则$\hat{Y}_{n+1}$也是最佳预测.
- $W_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$ 作为$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+1}$的线性组合服从正态分布$N(0, \nu_n)$.
- 利用

$$\Pr\left(|Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}|/\sqrt{\nu_n} \leq 1.96\right) = 0.95$$

可以得到

- Y_{n+1}的置信度为0.95的置信区间(预测区间)

$$[\hat{Y}_{n+1} - 1.96\sqrt{\nu_n},\ \ \hat{Y}_{n+1} + 1.96\sqrt{\nu_n}].$$

平稳序列的递推预测

- 设$\gamma_k = E(X_{t+k}X_t)$ 是零均值平稳序列$\{X_t\}$的自协方差函数, Γ_n是$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵.
- 设$\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$, $Z_n = X_n - L(X_n|\mathbf{X}_{n-1})$, 可以把定理3.1 改述如下.
- **推论3.2** 设$\{X_t\}$是零均值平稳序列, 对任何$n \in \mathbb{N}$, 自协方差矩阵Γ_n正定. 则最佳线性预测

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{n+1} &\triangleq L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}, \qquad (3.11) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j} Z_{j+1} \quad n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

其中的系数$\{\theta_{n,j}\}$ 和预测的均方误差$\nu_n = EZ_{n+1}^2$满足如下的递推公式.

平稳序列的递推预测

- 设$\gamma_k = E(X_{t+k}X_t)$ 是零均值平稳序列$\{X_t\}$的自协方差函数, Γ_n是$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵.
- 设$\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$, $Z_n = X_n - L(X_n|\mathbf{X}_{n-1})$, 可以把定理3.1 改述如下.
- **推论3.2** 设$\{X_t\}$是零均值平稳序列, 对任何$n \in \mathbb{N}$, 自协方差矩阵Γ_n正定. 则最佳线性预测

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &\triangleq L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}, \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j} Z_{j+1} \quad n = 1, 2, \ldots,\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中的系数$\{\theta_{n,j}\}$ 和预测的均方误差$\nu_n = EZ_{n+1}^2$满足如下的递推公式.

平稳序列的递推预测

- 设$\gamma_k = E(X_{t+k}X_t)$ 是零均值平稳序列$\{X_t\}$的自协方差函数, Γ_n是$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵.
- 设$\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$, $Z_n = X_n - L(X_n|\mathbf{X}_{n-1})$, 可以把定理3.1 改述如下.
- **推论3.2** 设$\{X_t\}$是零均值平稳序列, 对任何$n \in \mathbb{N}$, 自协方差矩阵Γ_n正定. 则最佳线性预测

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &\triangleq L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}, \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j} Z_{j+1} \quad n = 1, 2, \ldots,\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中的系数$\{\theta_{n,j}\}$ 和预测的均方误差$\nu_n = EZ_{n+1}^2$满足如下的递推公式.

平稳序列的递推预测(续)

-

$$
\begin{cases}
\nu_0 = \gamma_0 \\
\theta_{n,n-k} = [\gamma_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j}\theta_{n,n-j}\nu_j]/\nu_k, \\
\qquad\qquad 0 \le k \le n-1, \\
\nu_n = \gamma_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 \nu_j,
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

其中$\sum_{j=0}^{-1}(\cdot) \triangleq 0$,

- 递推的顺序是

$$
\begin{array}{lllll}
\nu_0 & & & & \\
\theta_{1,1} & \nu_1 & & & \\
\theta_{2,2} & \theta_{2,1} & \nu_2 & & \\
\theta_{3,3} & \theta_{3,2} & \theta_{3,1} & \nu_3 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

平稳序列的递推预测(续)

- $$\begin{cases} \nu_0 = \gamma_0 \\ \theta_{n,n-k} = [\gamma_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j}\theta_{n,n-j}\nu_j]/\nu_k, \\ \qquad\qquad 0 \le k \le n-1, \\ \nu_n = \gamma_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 \nu_j, \end{cases} \tag{3.12}$$

  其中$\sum_{j=0}^{-1}(\cdot) \triangleq 0$,
- 递推的顺序是

$$\begin{array}{lllll} \nu_0 \\ \theta_{1,1} & \nu_1 \\ \theta_{2,2} & \theta_{2,1} & \nu_2 \\ \theta_{3,3} & \theta_{3,2} & \theta_{3,1} & \nu_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

平稳序列的递推预测(续2)

- 由于预测误差$Z_n = X_n - L(X_n|\mathbf{X}_{n-1})$ 和$\mathbf{X}_{n-1}$正交, 所以是不被$\mathbf{X}_{n-1}$包含的信息. 基于这个原因, 人们又称Z_n是样本新息.
- 从§5.2 的讨论知道,
  $\nu_n = E[X_1 - L(X_1|X_0, X_{-1}, \cdots, X_{-n+1})]^2 \to \sigma^2$,
  当$n \to \infty$. 这里σ^2是用全体历史$X_t, X_{t-1}, \ldots$ 预测X_{t+1}时的均方误差. $\sigma^2 > 0$表示$\{X_t\}$是非决定性的.

平稳序列的递推预测(续2)

- 由于预测误差$Z_n = X_n - L(X_n|\mathbf{X}_{n-1})$ 和$\mathbf{X}_{n-1}$正交，所以是不被$\mathbf{X}_{n-1}$包含的信息. 基于这个原因，人们又称Z_n是样本新息.
- 从§5.2 的讨论知道，
  $\nu_n = E[X_1 - L(X_1|X_0, X_{-1}, \cdots, X_{-n+1})]^2 \to \sigma^2$,
  当$n \to \infty$. 这里σ^2是用全体历史$X_t, X_{t-1}, \ldots$ 预测X_{t+1}时的均方误差. $\sigma^2 > 0$表示$\{X_t\}$是非决定性的.

ARMA模型预测的意义

- 新息预测方法从理论上很完美，对平稳列只需要知道自协方差函数列$\{\gamma_k\}$，还可以预测非平稳列。
- 但是对样本数据协方差需要估计。注意新息预测系数中需要用到γ_n，但是如果样本量不够的话估计γ_n会产生很大误差，导致预测误差很大。
- 如果我们知道序列服从ARMA模型，就可以用比较少的自协方差估计得到模型参数估计，用模型参数来得到预报公式，这样的预报结果受随机误差影响比较小。
- 另外，ARMA模型中的白噪声如果是独立白噪声，最佳线性预报还是最佳预报。这个结果虽然是对无穷长历史得到的但是样本量足够大时也近似成立。

ARMA模型预测的意义

- 新息预测方法从理论上很完美，对平稳列只需要知道自协方差函数列$\{\gamma_k\}$，还可以预测非平稳列。
- 但是对样本数据协方差需要估计。注意新息预测系数中需要用到γ_n，但是如果样本量不够的话估计γ_n会产生很大误差，导致预测误差很大。
- 如果我们知道序列服从ARMA模型，就可以用比较少的自协方差估计得到模型参数估计，用模型参数来得到预报公式，这样的预报结果受随机误差影响比较小。
- 另外，ARMA模型中的白噪声如果是独立白噪声，最佳线性预报还是最佳预报。这个结果虽然是对无穷长历史得到的但是样本量足够大时也近似成立。

ARMA模型预测的意义

- 新息预测方法从理论上很完美，对平稳列只需要知道自协方差函数列$\{\gamma_k\}$，还可以预测非平稳列。
- 但是对样本数据协方差需要估计。注意新息预测系数中需要用到γ_n，但是如果样本量不够的话估计γ_n会产生很大误差，导致预测误差很大。
- 如果我们知道序列服从ARMA模型，就可以用比较少的自协方差估计得到模型参数估计，用模型参数来得到预报公式，这样的预报结果受随机误差影响比较小。
- 另外，ARMA模型中的白噪声如果是独立白噪声，最佳线性预报还是最佳预报。这个结果虽然是对无穷长历史得到的但是样本量足够大时也近似成立。

ARMA模型预测的意义

- 新息预测方法从理论上很完美，对平稳列只需要知道自协方差函数列$\{\gamma_k\}$，还可以预测非平稳列。
- 但是对样本数据协方差需要估计。注意新息预测系数中需要用到γ_n，但是如果样本量不够的话估计γ_n会产生很大误差，导致预测误差很大。
- 如果我们知道序列服从ARMA模型，就可以用比较少的自协方差估计得到模型参数估计，用模型参数来得到预报公式，这样的预报结果受随机误差影响比较小。
- 另外，ARMA模型中的白噪声如果是独立白噪声，最佳线性预报还是最佳预报。这个结果虽然是对无穷长历史得到的但是样本量足够大时也近似成立。

AR(p)序列的一步预测

- 设$\{X_t\}$满足AR(p)模型

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

其中$\{\varepsilon_t\}$是白噪声, 特征多项式

$$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j \neq 0, \quad |z| \le 1.$$

- 考虑用$\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ 预测X_{n+1}的问题.
- 设$\{\gamma_n\}$是$\{X_t\}$的自协方差函数.

AR(p)序列的一步预测

- 设$\{X_t\}$满足AR(p)模型

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

其中$\{\varepsilon_t\}$是白噪声, 特征多项式

$$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j \neq 0, \quad |z| \leq 1.$$

- 考虑用$\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ 预测X_{n+1}的问题.
- 设$\{\gamma_n\}$是$\{X_t\}$的自协方差函数.

AR(p)序列的一步预测

- 设$\{X_t\}$满足AR(p)模型

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

其中$\{\varepsilon_t\}$是白噪声, 特征多项式

$$A(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j \neq 0, \quad |z| \leq 1.$$

- 考虑用$\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ 预测X_{n+1}的问题.
- 设$\{\gamma_n\}$是$\{X_t\}$的自协方差函数.

AR(p)序列的一步预测(续)

- 对于$1 \le n \le p-1$，由最佳线性预测的性质1知道

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &= L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) = \gamma_n^T \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n \\ &= a_{n,1}X_n + a_{n,2}X_{n-1} + \cdots + a_{n,n}X_1\end{aligned}$$

- 其中Γ_n是$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵，$\gamma_n = (\gamma_n, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_1)^T$，$(a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})$是$n$阶Yule-Walker系数。
- 预测的均方误差是

$$E(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2 = \gamma_0 - \gamma_n^T \Gamma_n^{-1} \gamma_n.$$

- 可以用Levinson递推公式计算线性组合系数系数和均方误差。（见§2.4.3）

AR(p)序列的一步预测(续)

- 对于$1 \le n \le p-1$，由最佳线性预测的性质1知道

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} =& L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) = \gamma_n^T \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n \\ =& a_{n,1}X_n + a_{n,2}X_{n-1} + \cdots + a_{n,n}X_1\end{aligned}$$

- 其中Γ_n是$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵，$\gamma_n = (\gamma_n, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_1)^T$，$(a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})$是$n$阶Yule-Walker系数。
- 预测的均方误差是

$$E(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2 = \gamma_0 - \gamma_n^T \Gamma_n^{-1} \gamma_n.$$

- 可以用Levinson递推公式计算线性组合系数系数和均方误差。（见§2.4.3）

AR(p)序列的一步预测(续)

- 对于$1 \le n \le p-1$，由最佳线性预测的性质1知道

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &= L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) = \gamma_n^T \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n \\ &= a_{n,1}X_n + a_{n,2}X_{n-1} + \cdots + a_{n,n}X_1\end{aligned}$$

- 其中Γ_n是$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵，$\gamma_n = (\gamma_n, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_1)^T$，$(a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})$是$n$阶Yule-Walker系数。
- 预测的均方误差是

$$E(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2 = \gamma_0 - \gamma_n^T \Gamma_n^{-1} \gamma_n.$$

- 可以用Levinson递推公式计算线性组合系数系数和均方误差。（见§2.4.3）

AR(p)序列的一步预测(续)

- 对于$1 \le n \le p-1$，由最佳线性预测的性质1知道

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) = \gamma_n^T \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n \\ &= a_{n,1}X_n + a_{n,2}X_{n-1} + \cdots + a_{n,n}X_1 \end{aligned}$$

- 其中Γ_n是$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵，$\gamma_n = (\gamma_n, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_1)^T$，$(a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n})$是$n$阶Yule-Walker系数。
- 预测的均方误差是

$$E(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2 = \gamma_0 - \gamma_n^T \Gamma_n^{-1} \gamma_n.$$

- 可以用Levinson递推公式计算线性组合系数系数和均方误差。（见§2.4.3）

AR(p)序列的一步预测(续2)

- 对于$n \geq p$，由于当$k \geq 1$，$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$与$\varepsilon_{t+k}$ 正交，所以对$n \geq p$

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &= L(\varepsilon_{n+1} + \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j} | \mathbf{X}_n) \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j}\end{aligned}$$

- 由于$X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}$与$X_n, \ldots, X_1$正交，可见$n \geq p$时

$$\hat{X}_{n+1} = L(X_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-p+1}).$$

AR(p)序列的一步预测(续2)

- 对于$n \geq p$, 由于当$k \geq 1$, $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$与$\varepsilon_{t+k}$ 正交, 所以对$n \geq p$

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_{n+1} =& L(\varepsilon_{n+1} + \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j} | \mathbf{X}_n) \\
=& \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j}
\end{aligned}
$$

- 由于$X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}$与$X_n, \ldots, X_1$正交，可见$n \geq p$时

$$\hat{X}_{n+1} = L(X_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-p+1}).$$

AR(p)序列的多步预报

- 下面考虑用$\mathbf{X}_n$预测$X_{n+k}(k \geq 1)$的问题.
- 对于$n \geq p$, 对k用归纳法容易证明(习题4.1)

$$L(X_{n+k}|\mathbf{X}_n) = L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-p+1}).$$

- 当$n \geq p$时，记

$$\hat{X}_{n,m} = \begin{cases} L(X_m|\mathbf{X}_n), & m > n \\ X_m, & m \leq n \end{cases}$$

- 则

$$L(X_{n+k}|\mathbf{X}_n) = L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+k-j} + \varepsilon_{n+k}|\mathbf{X}_n)$$

$$= L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+k-j}|\mathbf{X}_n) = \sum_{j=1}^{p} a_j \hat{X}_{n,n+k-j},$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

- 可以递推计算$\hat{X}_{n,m}, m > n$。

AR(p)序列的多步预报

- 下面考虑用$\mathbf{X}_n$预测$X_{n+k}(k \geq 1)$的问题.
- 对于$n \geq p$, 对k用归纳法容易证明(习题4.1)

$$L(X_{n+k}|\mathbf{X}_n) = L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-p+1}).$$

- 当$n \geq p$时，记

$$\hat{X}_{n,m} = \begin{cases} L(X_m|\mathbf{X}_n), & m > n \\ X_m, & m \leq n \end{cases}$$

- 则

$$L(X_{n+k}|\mathbf{X}_n) = L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+k-j} + \varepsilon_{n+k}|\mathbf{X}_n)$$

$$=L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+k-j}|\mathbf{X}_n) = \sum_{j=1}^{p} a_j \hat{X}_{n,n+k-j},$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

- 可以递推计算$\hat{X}_{n,m}$, $m > n$。

AR(p)序列的多步预报

- 下面考虑用$\mathbf{X}_n$预测$X_{n+k}(k \geq 1)$的问题.
- 对于$n \geq p$, 对k用归纳法容易证明(习题4.1)

$$L(X_{n+k}|\mathbf{X}_n) = L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-p+1}).$$

- 当$n \geq p$时，记

$$\hat{X}_{n,m} = \begin{cases} L(X_m|\mathbf{X}_n), & m > n \\ X_m, & m \leq n \end{cases}$$

- 则

$$L(X_{n+k}|\mathbf{X}_n) = L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+k-j} + \varepsilon_{n+k}|\mathbf{X}_n)$$

$$= L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+k-j}|\mathbf{X}_n) = \sum_{j=1}^{p} a_j \hat{X}_{n,n+k-j},$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

- 可以递推计算$\hat{X}_{n,m}, m > n$。

AR(p)序列的多步预报

- 下面考虑用$\mathbf{X}_n$预测$X_{n+k}(k \geq 1)$的问题.
- 对于$n \geq p$, 对k用归纳法容易证明(习题4.1)

$$L(X_{n+k}|\mathbf{X}_n) = L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-p+1}).$$

- 当$n \geq p$时，记

$$\hat{X}_{n,m} = \begin{cases} L(X_m|\mathbf{X}_n), & m > n \\ X_m, & m \leq n \end{cases}$$

- 则

$$L(X_{n+k}|\mathbf{X}_n) = L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+k-j} + \varepsilon_{n+k}|\mathbf{X}_n)$$

$$= L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+k-j}|\mathbf{X}_n) = \sum_{j=1}^{p} a_j \hat{X}_{n,n+k-j},$$

$$k = 1, 2, \dots$$

- 可以递推计算$\hat{X}_{n,m}, m > n$。

AR(p)序列的多步预报

- 下面考虑用$\mathbf{X}_n$预测$X_{n+k}(k \geq 1)$的问题.
- 对于$n \geq p$, 对k用归纳法容易证明(习题4.1)

$$L(X_{n+k}|\mathbf{X}_n) = L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-p+1}).$$

- 当$n \geq p$时，记

$$\hat{X}_{n,m} = \begin{cases} L(X_m|\mathbf{X}_n), & m > n \\ X_m, & m \leq n \end{cases}$$

- 则

$$L(X_{n+k}|\mathbf{X}_n) = L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+k-j} + \varepsilon_{n+k}|\mathbf{X}_n)$$

$$= L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+k-j}|\mathbf{X}_n) = \sum_{j=1}^{p} a_j \hat{X}_{n,n+k-j},$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

- 可以递推计算$\hat{X}_{n,m}, m > n$。

例4.1 AR(1)模型的预测

- 设$X_n = a_1 X_{n-1} + \varepsilon_n$. 则对任何$m \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
L(X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m+1}) =& a_1 X_n, \\
L(X_{n+2}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m+1}) =& a_1 L(X_{n+1}|X_n) \\
=& a_1^2 X_n, \\
& \cdots\cdots \\
L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m+1}) =& a_1^k X_n.
\end{aligned}
$$

- 当$k \to \infty$, 利用$|a_1| < 1$和控制收敛定理得到

$$
\begin{aligned}
& E[X_{n+k} - L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_{n-m})]^2 \\
=& E(X_{n+k} - a_1^k X_n)^2 \\
=& E(X_k - a_1^k X_0)^2 \\
\to& \gamma_0 = EX_0^2, \text{ 当 } k \to \infty.
\end{aligned}
$$

- 这与AR(1)序列是纯非决定性的平稳序列有关. 实际上任何ARMA(p, q)序列都是纯非决定性的(§5.2 例2.3).

例4.1 AR(1)模型的预测

- 设$X_n = a_1 X_{n-1} + \varepsilon_n$. 则对任何$m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
L(X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m+1}) =& a_1 X_n, \\
L(X_{n+2}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m+1}) =& a_1 L(X_{n+1}|X_n) \\
=& a_1^2 X_n, \\
& \cdots\cdots \\
L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m+1}) =& a_1^k X_n.
\end{aligned}$$

- 当$k \to \infty$, 利用$|a_1| < 1$和控制收敛定理得到

$$\begin{aligned}
& E[X_{n+k} - L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_{n-m})]^2 \\
=& E(X_{n+k} - a_1^k X_n)^2 \\
=& E(X_k - a_1^k X_0)^2 \\
\to& \gamma_0 = EX_0^2, \ 当\ k \to \infty.
\end{aligned}$$

- 这与AR(1)序列是纯非决定性的平稳序列有关. 实际上任何ARMA(p, q)序列都是纯非决定性的(§5.2 例2.3).

例4.1 AR(1)模型的预测

- 设$X_n = a_1 X_{n-1} + \varepsilon_n$. 则对任何$m \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
L(X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m+1}) =& a_1 X_n, \\
L(X_{n+2}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m+1}) =& a_1 L(X_{n+1}|X_n) \\
=& a_1^2 X_n, \\
& \cdots\cdots \\
L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m+1}) =& a_1^k X_n.
\end{aligned}
$$

- 当$k \to \infty$, 利用$|a_1| < 1$和控制收敛定理得到

$$
\begin{aligned}
& E[X_{n+k} - L(X_{n+k}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_{n-m})]^2 \\
=& E(X_{n+k} - a_1^k X_n)^2 \\
=& E(X_k - a_1^k X_0)^2 \\
\to& \gamma_0 = EX_0^2, \text{ 当 } k \to \infty.
\end{aligned}
$$

- 这与AR(1)序列是纯非决定性的平稳序列有关. 实际上任何ARMA(p, q)序列都是纯非决定性的(§5.2 例2.3).

例4.2 降雨量预报

- 平均降雨量为$\bar{X} = 540mm$. 用$X_t, t = 1, 2, \ldots$表示该地区的逐年降雨量.
- 如果
$$Y_t = X_t - \bar{X}$$
满足AR(2)模型
$$Y_t = -0.54Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$
- 给定观测$X_1 = 560,\ X_2 = 470,\ X_3 = 580,\ X_4 = 496,\ X_5 = 576$, 求$X_8$的最佳线性预测.'
- 首先中心化得,
$$Y_1 = 560 - 540 = 20,\ \ Y_2 = 470 - 540 = -70,$$
$$Y_3 = 580 - 540 = 40,\ \ Y_4 = 496 - 540 = -44,$$
$$Y_5 = 576 - 540 = 36.$$

例4.2 降雨量预报

- 平均降雨量为$\bar{X} = 540mm$. 用$X_t, t = 1, 2, \ldots$表示该地区的逐年降雨量.
- 如果

$$Y_t = X_t - \bar{X}$$

满足AR(2)模型

$$Y_t = -0.54Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$

- 给定观测$X_1 = 560$, $X_2 = 470$, $X_3 = 580$, $X_4 = 496$, $X_5 = 576$, 求X_8的最佳线性预测.'
- 首先中心化得,

$$Y_1 = 560 - 540 = 20,\quad Y_2 = 470 - 540 = -70,$$
$$Y_3 = 580 - 540 = 40,\quad Y_4 = 496 - 540 = -44,$$
$$Y_5 = 576 - 540 = 36.$$

例4.2 降雨量预报

- 平均降雨量为$\bar{X} = 540mm$. 用$X_t, t = 1, 2, \ldots$表示该地区的逐年降雨量.
- 如果
$$Y_t = X_t - \bar{X}$$
满足AR(2)模型
$$Y_t = -0.54Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$
- 给定观测$X_1 = 560,\ X_2 = 470,\ X_3 = 580,\ X_4 = 496,\ X_5 = 576$, 求$X_8$的最佳线性预测.‘
- 首先中心化得,
$$Y_1 = 560 - 540 = 20,\ \ Y_2 = 470 - 540 = -70,$$
$$Y_3 = 580 - 540 = 40,\ \ Y_4 = 496 - 540 = -44,$$
$$Y_5 = 576 - 540 = 36.$$

例4.2 降雨量预报

- 平均降雨量为$\bar{X} = 540mm$. 用$X_t, t = 1, 2, \ldots$表示该地区的逐年降雨量.
- 如果
$$Y_t = X_t - \bar{X}$$
满足AR(2)模型
$$Y_t = -0.54Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$
- 给定观测$X_1 = 560,\ X_2 = 470,\ X_3 = 580,\ X_4 = 496,\ X_5 = 576$, 求$X_8$的最佳线性预测.‘
- 首先中心化得，

$$Y_1 = 560 - 540 = 20,\quad Y_2 = 470 - 540 = -70,$$
$$Y_3 = 580 - 540 = 40,\quad Y_4 = 496 - 540 = -44,$$
$$Y_5 = 576 - 540 = 36.$$

例4.2 降雨量预报(续)

- 用递推公式计算。记$\hat{Y}_j = L(Y_j | Y_1, Y_2, ..., Y_5)$, $6 \le j \le 8$, 则有

$$\hat{Y}_6 = -0.54 \times 36 + 0.3 \times (-44) = -32.64,$$
$$\hat{Y}_7 = -0.54 \hat{Y}_6 + 0.3 \times 36 = 28.43$$
$$\hat{Y}_8 = -0.54 \hat{Y}_7 + 0.3 \hat{Y}_6 = -25.14$$

- 最后加上平均值得

$$\hat{X}_6 = 540 - 32.64 = 507.36$$
$$\hat{X}_7 = 540 + 28.43 = 568.43$$
$$\hat{X}_8 = 540 - 25.14 = 514.86.$$

- 在本例中, 特征多项式$A(z) = 1 + 0.54z - 0.3z^2$ 有两个实根$z_1 = -1.1355$, $z_2 = 2.9355$. 最靠近单位圆的根的辐角是π, 所以序列有周期$T = 2$的特性. 预测数据也体现了围绕均值540上下交替变化的特性.

例4.2 降雨量预报(续)

- 用递推公式计算。记$\hat{Y}_j = L(Y_j | Y_1, Y_2, ..., Y_5)$, $6 \le j \le 8$, 则有

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_6 &= -0.54 \times 36 + 0.3 \times (-44) = -32.64, \\
\hat{Y}_7 &= -0.54 \hat{Y}_6 + 0.3 \times 36 = 28.43 \\
\hat{Y}_8 &= -0.54 \hat{Y}_7 + 0.3 \hat{Y}_6 = -25.14
\end{aligned}$$

- 最后加上平均值得

$$\begin{aligned}
\hat{X}_6 &= 540 - 32.64 = 507.36 \\
\hat{X}_7 &= 540 + 28.43 = 568.43 \\
\hat{X}_8 &= 540 - 25.14 = 514.86.
\end{aligned}$$

- 在本例中，特征多项式$A(z) = 1 + 0.54z - 0.3z^2$ 有两个实根$z_1 = -1.1355$, $z_2 = 2.9355$. 最靠近单位圆的根的辐角是π, 所以序列有周期$T = 2$的特性. 预测数据也体现了围绕均值540上下交替变化的特性.

例4.2 降雨量预报(续)

- 用递推公式计算。记$\hat{Y}_j = L(Y_j | Y_1, Y_2, ..., Y_5)$, $6 \le j \le 8$, 则有

$$\hat{Y}_6 = -0.54 \times 36 + 0.3 \times (-44) = -32.64,$$
$$\hat{Y}_7 = -0.54\hat{Y}_6 + 0.3 \times 36 = 28.43$$
$$\hat{Y}_8 = -0.54\hat{Y}_7 + 0.3\hat{Y}_6 = -25.14$$

- 最后加上平均值得

$$\hat{X}_6 = 540 - 32.64 = 507.36$$
$$\hat{X}_7 = 540 + 28.43 = 568.43$$
$$\hat{X}_8 = 540 - 25.14 = 514.86.$$

- 在本例中, 特征多项式$A(z) = 1 + 0.54z - 0.3z^2$ 有两个实根$z_1 = -1.1355$, $z_2 = 2.9355$. 最靠近单位圆的根的辐角是π, 所以序列有周期$T = 2$的特性. 预测数据也体现了围绕均值540上下交替变化的特性.

MA(q)序列的预测

- 设$\{\varepsilon_t\}$是WN$(0,\sigma^2)$，实系数多项式 $B(z)=1+b_1z+\cdots+b_qz^q$在单位圆内无根: $B(z)\neq 0, |z|<1$.
- 满足MA(q)模型

$$X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t\in\mathbb{Z}, \tag{4.2}$$

的MA(q)序列$\{X_t\}$的自协方差函数$\{\gamma_k\}$是q后截尾的.

- 假设$\sigma^2, b_1, b_2, \ldots, b_q$已知，我们考虑用$X_1, X_2, \ldots, X_n$预测$X_{n+k}$的问题.
- 从(3.3)(新息预报)可以看出，对$n\geq 1$

$$L_n = \overline{\text{sp}}\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} = \overline{\text{sp}}\{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \ldots, \hat{\varepsilon}_n\}, \tag{4.3}$$

- 这里$\hat{\varepsilon}_n = X_n - L(X_n|\mathbf{X}_{n-1})$ 是$\{X_t\}$的逐步预测误差，$\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)^T$.

MA(q)序列的预测

- 设$\{\varepsilon_t\}$是WN$(0,\sigma^2)$，实系数多项式 $B(z)=1+b_1z+\cdots+b_qz^q$在单位圆内无根: $B(z)\neq 0, |z|<1.$
- 满足MA(q)模型

$$X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t\in\mathbb{Z}, \tag{4.2}$$

的MA(q)序列$\{X_t\}$的自协方差函数$\{\gamma_k\}$是q后截尾的.

- 假设σ^2, $b_1, b_2, \ldots, b_q$已知，我们考虑用$X_1, X_2, \ldots, X_n$预测X_{n+k}的问题.
- 从(3.3)(新息预报)可以看出，对$n\geq 1$

$$L_n = \overline{\text{sp}}\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} = \overline{\text{sp}}\{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \ldots, \hat{\varepsilon}_n\}, \tag{4.3}$$

- 这里$\hat{\varepsilon}_n = X_n - L(X_n|\mathbf{X}_{n-1})$ 是$\{X_t\}$的逐步预测误差，$\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)^T$.

MA(q)序列的预测

- 设$\{\varepsilon_t\}$是WN$(0, \sigma^2)$, 实系数多项式 $B(z) = 1 + b_1 z + \cdots + b_q z^q$在单位圆内无根: $B(z) \neq 0, |z| < 1$.
- 满足MA(q)模型

$$X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{4.2}$$

的MA(q)序列$\{X_t\}$的自协方差函数$\{\gamma_k\}$是q后截尾的.

- 假设$\sigma^2, b_1, b_2, \ldots, b_q$已知, 我们考虑用$X_1, X_2, \ldots, X_n$预测$X_{n+k}$的问题.
- 从(3.3)(新息预报)可以看出, 对$n \geq 1$

$$L_n = \overline{\mathrm{sp}}\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} = \overline{\mathrm{sp}}\{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \ldots, \hat{\varepsilon}_n\}, \tag{4.3}$$

- 这里$\hat{\varepsilon}_n = X_n - L(X_n|\mathbf{X}_{n-1})$ 是$\{X_t\}$的逐步预测误差, $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)^T$.

MA(q)序列的预测

- 设$\{\varepsilon_t\}$是WN$(0,\sigma^2)$，实系数多项式 $B(z)=1+b_1z+\cdots+b_qz^q$在单位圆内无根: $B(z)\neq 0, |z|<1$.
- 满足MA(q)模型

$$X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t\in\mathbb{Z}, \tag{4.2}$$

的MA(q)序列$\{X_t\}$的自协方差函数$\{\gamma_k\}$是q后截尾的.

- 假设$\sigma^2, b_1, b_2, \ldots, b_q$已知，我们考虑用$X_1, X_2, \ldots, X_n$预测$X_{n+k}$的问题.
- 从(3.3)(新息预报)可以看出，对$n\geq 1$

$$L_n=\overline{\text{sp}}\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}=\overline{\text{sp}}\{\hat\varepsilon_1,\hat\varepsilon_2,\ldots,\hat\varepsilon_n\}, \tag{4.3}$$

- 这里$\hat\varepsilon_n=X_n-L(X_n|\mathbf{X}_{n-1})$ 是$\{X_t\}$的逐步预测误差，$\mathbf{X}_n=(X_1,\ldots,X_n)^T$.

MA(q)序列的预测

- 设$\{\varepsilon_t\}$是WN$(0,\sigma^2)$, 实系数多项式 $B(z)=1+b_1z+\cdots+b_qz^q$在单位圆内无根: $B(z)\neq 0, |z|<1$.
- 满足MA(q)模型

$$X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t\in\mathbb{Z}, \tag{4.2}$$

的MA(q)序列$\{X_t\}$的自协方差函数$\{\gamma_k\}$是q后截尾的.

- 假设σ^2, $b_1, b_2, \ldots, b_q$已知, 我们考虑用$X_1, X_2, \ldots, X_n$预测X_{n+k}的问题.
- 从(3.3)(新息预报)可以看出, 对$n\geq 1$

$$L_n = \overline{\text{sp}}\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} = \overline{\text{sp}}\{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \ldots, \hat{\varepsilon}_n\}, \tag{4.3}$$

- 这里$\hat{\varepsilon}_n = X_n - L(X_n|\mathbf{X}_{n-1})$ 是$\{X_t\}$的逐步预测误差, $\mathbf{X}_n=(X_1,\ldots,X_n)^T$.

MA(q)序列的预测II

- 以下假定$n \ge q$.
- 由于$\{\hat{\varepsilon}_t\}$是正交序列，并由q步截尾性可知X_{n+1}与L_{n-q}正交，所以X_{n+1}与$\hat{\varepsilon}_{n-q}, \hat{\varepsilon}_{n-q-1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_1$ 正交，根据最佳线性预测的性质6、4、10得到

$$
\begin{aligned}
&L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) = L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_1) \quad (\text{性质10及(4.3)}) \\
=&L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_{n-q+1}) + L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_{n-q}, \ldots, \hat{\varepsilon}_1) \quad (\text{性质6}) \\
=&L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_{n-q+1}) \quad (\text{性质4}) \\
=&\sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}\hat{\varepsilon}_{n+1-j}. \quad (\text{新息预测公式}) \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

- 预测的均方误差

$$
\nu_n = E\hat{\varepsilon}_{n+1}^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}^2 \nu_{n-j}. \qquad (4.5)
$$

- 这里的$\{\theta_{n,j}\}$, ν_n可以利用(3.12)进行递推计算，但注意$\{\gamma_k\}$是q步截尾的。

MA(q)序列的预测II

- 以下假定$n \geq q$.
- 由于$\{\hat{\varepsilon}_t\}$是正交序列，并由q步截尾性可知X_{n+1}与L_{n-q}正交，所以X_{n+1}与$\hat{\varepsilon}_{n-q}, \hat{\varepsilon}_{n-q-1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_1$ 正交，根据最佳线性预测的性质6、4、10得到

$$
\begin{aligned}
&L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) = L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_1) \quad (\text{性质10及(4.3)}) \\
=&L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_{n-q+1}) + L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_{n-q}, \ldots, \hat{\varepsilon}_1) \quad (\text{性质6}) \\
=&L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_{n-q+1}) \quad (\text{性质4}) \\
=&\sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}\hat{\varepsilon}_{n+1-j}. \quad (\text{新息预测公式}) \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

- 预测的均方误差

$$
\nu_n = E\hat{\varepsilon}_{n+1}^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}^2 \nu_{n-j}. \qquad (4.5)
$$

- 这里的$\{\theta_{n,j}\}$, ν_n可以利用(3.12)进行递推计算，但注意$\{\gamma_k\}$是q步截尾的。

MA(q)序列的预测II

- 以下假定$n \geq q$.
- 由于$\{\hat{\varepsilon}_t\}$是正交序列，并由q步截尾性可知X_{n+1}与L_{n-q}正交，所以X_{n+1}与$\hat{\varepsilon}_{n-q}, \hat{\varepsilon}_{n-q-1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_1$ 正交，根据最佳线性预测的性质6、4、10得到

$$
\begin{aligned}
&L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) = L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_1) \quad (\text{性质10及(4.3)}) \\
=&L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_{n-q+1}) + L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_{n-q}, \ldots, \hat{\varepsilon}_1) \quad (\text{性质6}) \\
=&L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_{n-q+1}) \quad (\text{性质4}) \\
=&\sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}\hat{\varepsilon}_{n+1-j}. \quad (\text{新息预测公式}) \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

- 预测的均方误差

$$
\nu_n = E\hat{\varepsilon}_{n+1}^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}^2 \nu_{n-j}. \qquad (4.5)
$$

- 这里的$\{\theta_{n,j}\}$, ν_n可以利用(3.12)进行递推计算，但注意$\{\gamma_k\}$是q步截尾的。

MA(q)序列的预测II

- 以下假定$n \geq q$.
- 由于$\{\hat{\varepsilon}_t\}$是正交序列, 并由q步截尾性可知X_{n+1}与L_{n-q}正交，所以X_{n+1}与$\hat{\varepsilon}_{n-q}, \hat{\varepsilon}_{n-q-1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_1$ 正交，根据最佳线性预测的性质6、4、10得到

$$\begin{aligned}
&L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) = L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_1) \quad (\text{性质10及(4.3)}) \\
=&L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_{n-q+1}) + L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_{n-q}, \ldots, \hat{\varepsilon}_1) \quad (\text{性质6}) \\
=&L(X_{n+1}|\hat{\varepsilon}_n, \ldots, \hat{\varepsilon}_{n-q+1}) \quad (\text{性质4}) \\
=&\sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}\hat{\varepsilon}_{n+1-j}. \quad (\text{新息预测公式}) \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

- 预测的均方误差

$$\nu_n = E\hat{\varepsilon}_{n+1}^2 = \gamma_0 - \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}^2 \nu_{n-j}. \qquad (4.5)$$

- 这里的$\{\theta_{n,j}\}$, ν_n可以利用(3.12)进行递推计算, 但注意$\{\gamma_k\}$是q步截尾的。

ARMA(p, q) 序列的预测

- 对于满足ARMA(p,q)模型

$$A(\mathscr{B})X_t = B(\mathscr{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{4.7}$$

的ARMA序列$\{X_t\}$，定义$m = \max(p,q)$和(参见[14])

$$Y_t = \begin{cases} X_t/\sigma, & t = 1, 2, \ldots, m, \\ A(\mathscr{B})X_t/\sigma, & t = m+1, \ldots. \end{cases} \tag{4.8}$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续1)

- 则$\{Y_t\}$由ARMA(p,q)模型(4.7)的参数 $\beta=(a_1,a_2,\ldots,a_p,b_1,b_2,\ldots,b_q)^T$ 和标准白噪声$\{\varepsilon_t/\sigma\}$决定,从而不依赖σ.
- 假设模型(4.7)中的参数已知, 我们考虑用$X_1,X_2,\cdots,X_n$对X_{n+k}进行逐步预测的问题.
- 从Y_t的定义知道, 对$t\geq 1$, $Y_t\in L_t=\overline{\text{sp}}\{X_1,X_2,\ldots,X_t\}$, 并且$X_1,X_2,\ldots,X_m\in\overline{\text{sp}}\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_m\}$.
- 容易看出, 对$t>m$,

$$X_t=\sigma Y_t+\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}\ \in\ \overline{\text{sp}}\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_t\}.$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续1)

- 则$\{Y_t\}$由ARMA(p,q)模型(4.7)的参数 $\beta=(a_1,a_2,\ldots,a_p,b_1,b_2,\ldots,b_q)^T$ 和标准白噪声$\{\varepsilon_t/\sigma\}$决定,从而不依赖σ.
- 假设模型(4.7)中的参数已知, 我们考虑用$X_1,X_2,\cdots,X_n$对X_{n+k}进行逐步预测的问题.
- 从Y_t的定义知道, 对$t\geq 1$, $Y_t\in L_t=\overline{\text{sp}}\{X_1,X_2,\ldots,X_t\}$, 并且$X_1,X_2,\ldots,X_m\in\overline{\text{sp}}\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_m\}$.
- 容易看出, 对$t>m$,

$$X_t=\sigma Y_t+\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}\ \in\ \overline{\text{sp}}\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_t\}.$$

ARMA(p, q) 序列的预测(续1)

- 则$\{Y_t\}$由ARMA(p, q)模型(4.7)的参数 $\beta = (a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q)^T$ 和标准白噪声$\{\varepsilon_t/\sigma\}$决定,从而不依赖σ.
- 假设模型(4.7)中的参数已知, 我们考虑用$X_1, X_2, \cdots, X_n$对X_{n+k}进行逐步预测的问题.
- 从Y_t的定义知道, 对$t \geq 1$, $Y_t \in L_t = \overline{\text{sp}}\{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$, 并且$X_1, X_2, \ldots, X_m \in \overline{\text{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$.
- 容易看出, 对$t > m$,

$$X_t = \sigma Y_t + \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} \ \in \ \overline{\text{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_t\}.$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续1)

- 则$\{Y_t\}$由ARMA(p,q)模型(4.7)的参数 $\beta=(a_1,a_2,\ldots,a_p,b_1,b_2,\ldots,b_q)^T$ 和标准白噪声$\{\varepsilon_t/\sigma\}$决定,从而不依赖σ.
- 假设模型(4.7)中的参数已知，我们考虑用$X_1,X_2,\cdots,X_n$对X_{n+k}进行逐步预测的问题.
- 从Y_t的定义知道，对$t\geq 1$, $Y_t\in L_t=\overline{\text{sp}}\{X_1,X_2,\ldots,X_t\}$，并且$X_1,X_2,\ldots,X_m\in\overline{\text{sp}}\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_m\}$.
- 容易看出，对$t>m$,

$$X_t=\sigma Y_t+\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}\ \in\ \overline{\text{sp}}\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_t\}.$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续2)

- 于是再利用(3.3)(新息与原序列互相线性表示)得到

$$
\begin{aligned}
L_n &= \overline{\mathrm{sp}}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \\
&= \overline{\mathrm{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} = \overline{\mathrm{sp}}\{W_1, W_2, \ldots, W_n\},
\end{aligned}
$$

其中$W_t = Y_t - L(Y_t|\mathbf{Y}_{t-1})$, $W_1 = Y_1$ 是$\{Y_t\}$的样本新息.

- 用γ_k表示$\{X_t\}$的自协方差函数, 取$b_0 = 1$, $b_j = 0$, 当$j > q$. 可以计算出

$$
E(Y_s Y_t) = \begin{cases} \sigma^{-2}\gamma_{t-s}, & 1 \le s \le t \le m, \\ \sigma^{-2}[\gamma_{t-s} - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{t-s-j}], & 1 \le s \le m < t, \\ \sum_{j=0}^{q} b_j b_{j+t-s}, & t \ge s > m, \end{cases} \tag{4.9}
$$

其中的$\{\gamma_k\}$ 可用第三章的(2.10)和(2.11)计算.

ARMA(p, q) 序列的预测(续2)

- 于是再利用(3.3)(新息与原序列互相线性表示)得到

$$\begin{aligned} L_n &= \overline{\text{sp}}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \\ &= \overline{\text{sp}}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} = \overline{\text{sp}}\{W_1, W_2, \ldots, W_n\}, \end{aligned}$$

其中$W_t = Y_t - L(Y_t|\mathbf{Y}_{t-1})$, $W_1 = Y_1$ 是$\{Y_t\}$的样本新息.

- 用γ_k表示$\{X_t\}$的自协方差函数, 取$b_0 = 1$, $b_j = 0$, 当$j > q$. 可以计算出

$$E(Y_s Y_t) = \begin{cases} \sigma^{-2}\gamma_{t-s}, & 1 \le s \le t \le m, \\ \sigma^{-2}[\gamma_{t-s} - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_{t-s-j}], & 1 \le s \le m < t, \\ \sum_{j=0}^{q} b_j b_{j+t-s}, & t \ge s > m, \end{cases} \tag{4.9}$$

其中的$\{\gamma_k\}$ 可用第三章的(2.10)和(2.11)计算.

ARMA(p, q) 序列的预测(续3)

- 定义$\{X_t\}$的逐步预测误差

$$Z_t = X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1}),\ Z_1 = X_1,$$

- 则对$1 \le t \le m$,

$$\begin{aligned} W_t =& X_t/\sigma - L(X_t/\sigma|\mathbf{X}_{t-1}) \\ =& \sigma^{-1}[X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1})] = \sigma^{-1} Z_t \end{aligned}$$

- 对$t \ge m+1$,

$$\begin{aligned} W_t =& \sigma^{-1}[X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} - L(X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}|\mathbf{X}_{t-1})] \\ =& \sigma^{-1}[X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1})] = \sigma^{-1} Z_t \end{aligned}$$

- 所以$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$的预测误差之间总有以下的关系

$$Z_t = \sigma W_t,\ EZ_t^2 = \sigma^2 EW_t^2,\ t = 1, 2, \ldots \qquad (4.10)$$

ARMA(p, q) 序列的预测(续3)

- 定义$\{X_t\}$的逐步预测误差

$$Z_t = X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1}),\ Z_1 = X_1,$$

- 则对$1 \le t \le m$,

$$\begin{aligned} W_t =& X_t/\sigma - L(X_t/\sigma|\mathbf{X}_{t-1}) \\ =& \sigma^{-1}[X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1})] = \sigma^{-1} Z_t \end{aligned}$$

- 对$t \ge m+1$,

$$\begin{aligned} W_t =& \sigma^{-1}[X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} - L(X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}|\mathbf{X}_{t-1})] \\ =& \sigma^{-1}[X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1})] = \sigma^{-1} Z_t \end{aligned}$$

- 所以$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$的预测误差之间总有以下的关系

$$Z_t = \sigma W_t,\ EZ_t^2 = \sigma^2 EW_t^2,\ t = 1, 2, \ldots \qquad (4.10)$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续3)

- 定义$\{X_t\}$的逐步预测误差

$$Z_t = X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1}),\ Z_1 = X_1,$$

- 则对$1 \le t \le m$,

$$\begin{aligned} W_t &= X_t/\sigma - L(X_t/\sigma|\mathbf{X}_{t-1}) \\ &= \sigma^{-1}[X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1})] = \sigma^{-1}Z_t \end{aligned}$$

- 对$t \ge m+1$,

$$\begin{aligned} W_t &= \sigma^{-1}[X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} - L(X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}|\mathbf{X}_{t-1})] \\ &= \sigma^{-1}[X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1})] = \sigma^{-1}Z_t \end{aligned}$$

- 所以$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$的预测误差之间总有以下的关系

$$Z_t = \sigma W_t,\ EZ_t^2 = \sigma^2 EW_t^2,\ t = 1, 2, \ldots \qquad (4.10)$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续3)

- 定义$\{X_t\}$的逐步预测误差

$$Z_t = X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1}),\ Z_1 = X_1,$$

- 则对$1 \le t \le m$,

$$\begin{aligned} W_t =& X_t/\sigma - L(X_t/\sigma|\mathbf{X}_{t-1}) \\ =& \sigma^{-1}[X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1})] = \sigma^{-1}Z_t \end{aligned}$$

- 对$t \ge m+1$,

$$\begin{aligned} W_t =& \sigma^{-1}[X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} - L(X_t - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}|\mathbf{X}_{t-1})] \\ =& \sigma^{-1}[X_t - L(X_t|\mathbf{X}_{t-1})] = \sigma^{-1}Z_t \end{aligned}$$

- 所以$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$的预测误差之间总有以下的关系

$$Z_t = \sigma W_t,\ EZ_t^2 = \sigma^2 EW_t^2,\ t = 1, 2, \ldots \qquad (4.10)$$

ARMA(p, q) 序列的预测(续4)

- 以下仍用ν_{t-1}表示$\mathrm{E}W_t^2$, 就有$\mathrm{E}Z_t^2 = \sigma^2\nu_{t-1}$.
- 对于$1 \le n < m = \max(p, q)$, 从逐步预测公式(3.5)得到

$$\hat{Y}_{n+1} = L(Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n) = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} W_{n+1-j}.$$

于是对$1 \le n < m$,

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} =& L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) = L(\sigma Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n)\\ =& \sigma\hat{Y}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}\sigma W_{n+1-j} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}.\end{aligned}$$

ARMA(p, q) 序列的预测(续4)

- 以下仍用ν_{t-1}表示$\mathrm{E}W_t^2$, 就有$\mathrm{E}Z_t^2 = \sigma^2 \nu_{t-1}$.
- 对于$1 \le n < m = \max(p, q)$, 从逐步预测公式(3.5)得到

$$\hat{Y}_{n+1} = L(Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n) = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} W_{n+1-j}.$$

于是对$1 \le n < m$,

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} =& L(X_{n+1}|\mathbf{X}_n) = L(\sigma Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n) \\ =& \sigma \hat{Y}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} \sigma W_{n+1-j} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}.\end{aligned}$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续5)

- 对于$n \geq m$, 利用ARMA序列的因果性即$E(X_t\varepsilon_{t+k})=0,\ k=1,2,\ldots,$得到

$$Y_{n+1}=\sigma^{-1}B(\mathscr{B})\varepsilon_{n+1}=\sigma^{-1}\sum_{j=0}^{q}b_j\varepsilon_{n+1-j}$$

与$\{X_j:1\leq j\leq n-q\}$正交, 从而与

$$\overline{\text{sp}}\{Y_j:1\leq j\leq n-q\}=\overline{\text{sp}}\{W_j:1\leq j\leq n-q\}$$

中的任何随机变量正交.

- 利用最佳线性预测的性质6、4得到

$$L(Y_{n+1}|\mathbf{Y}_n)=\sum_{j=1}^{q}\theta_{n,j}W_{n+1-j},\ n\geq m=\max(p,q).$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续5)

- 对于$n \geq m$, 利用ARMA序列的因果性即$E(X_t \varepsilon_{t+k}) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$,得到

$$Y_{n+1} = \sigma^{-1} B(\mathscr{B}) \varepsilon_{n+1} = \sigma^{-1} \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{n+1-j}$$

与$\{X_j : 1 \leq j \leq n-q\}$正交, 从而与

$$\overline{\mathrm{sp}}\{Y_j : 1 \leq j \leq n-q\} = \overline{\mathrm{sp}}\{W_j : 1 \leq j \leq n-q\}$$

中的任何随机变量正交.

- 利用最佳线性预测的性质6、4得到

$$L(Y_{n+1} | \mathbf{Y}_n) = \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j} W_{n+1-j},\ n \geq m = \max(p,q).$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续5)

- 于是对$n \geq m$，由Y和X的关系得到

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_{n+1} =& L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j} + \sigma Y_{n+1} | \mathbf{X}_n) \\
=& \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j} + \sigma \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j} W_{n+1-j} \\
=& \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j} + \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}.
\end{aligned}
$$

- 总结上述推导得到:

$$
\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}, & 1 \leq n < m, \\ \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j} + \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}, & n \geq m. \end{cases} \tag{4.11}
$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续5)

- 于是对$n \ge m$, 由Y和X的关系得到

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_{n+1} =& L(\sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j} + \sigma Y_{n+1} | \mathbf{X}_n) \\
=& \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j} + \sigma \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j} W_{n+1-j} \\
=& \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j} + \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}.
\end{aligned}
$$

- 总结上述推导得到:

$$
\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}, & 1 \le n < m, \\ \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j} + \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j} Z_{n+1-j}, & n \ge m. \end{cases} \quad (4.11)
$$

ARMA(p,q) 序列的预测(续6)

- 预测的均方误差仍然是$EZ_{n+1}^2 = \sigma^2\nu_n$. 这里的$\{\theta_{n,j}\}$, $\nu_n = EW_{n+1}^2$可以利用(4.9)和(3.6)进行递推计算.
- $Z_{n+1} = X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}$也可以递推计算。
- 因为$\{Y_t\}$和σ 无关，所以$\theta_{n,k}$, $\{W_n\}$以及ν_{n-1}都是和σ^2无关的量. 它们只依赖于参数$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)^T$ 和$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_q)^T$. 这个性质在研究ARMA模型的最大似然估计时将得到应用.

ARMA(p,q) 序列的预测(续6)

- 预测的均方误差仍然是$EZ_{n+1}^2=\sigma^2\nu_n$. 这里的$\{\theta_{n,j}\}$, $\nu_n=EW_{n+1}^2$可以利用(4.9)和(3.6)进行递推计算.
- $Z_{n+1}=X_{n+1}-\hat{X}_{n+1}$也可以递推计算。
- 因为$\{Y_t\}$和σ 无关, 所以$\theta_{n,k}$, $\{W_n\}$以及ν_{n-1}都是和σ^2无关的量. 它们只依赖于参数$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_p)^T$ 和$\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_q)^T$. 这个性质在研究ARMA模型的最大似然估计时将得到应用.

ARMA(p,q) 序列的预测(续6)

- 预测的均方误差仍然是$EZ_{n+1}^2=\sigma^2\nu_n$. 这里的$\{\theta_{n,j}\}$, $\nu_n=EW_{n+1}^2$可以利用(4.9)和(3.6)进行递推计算.
- $Z_{n+1}=X_{n+1}-\hat{X}_{n+1}$也可以递推计算。
- 因为$\{Y_t\}$和σ 无关, 所以$\theta_{n,k}$, $\{W_n\}$以及ν_{n-1}都是和σ^2无关的量. 它们只依赖于参数 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_p)^T$ 和$\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_q)^T$. 这个性质在研究ARMA模型的最大似然估计时将得到应用.

例4.3 ARMA序列的递推预报

- 接例1.1. 已计算§3.2例2.1的ARMA(4,2)的自协方差函数$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{20}$，由此用(4.9)计算出$\mathrm{E}(Y_t Y_S), (1 \le s, t \le 21)$.
- 用§5.3的公式(3.6)计算出新息预报系数$\theta_{n,j}$如下：

n	1	2	3	4	$\cdots$	19	20
$\theta_{n,1}$	−0.226	−0.4017	−0.5705	0.1807	$\cdots$	0.4875	0.489
$\theta_{n,2}$	0	−0.6865	−0.6353	−0.1597	$\cdots$	−0.3937	−0.394
$\theta_{n,3}$	0	0	0.3699	−0.0000	$\cdots$	−0.0001	0.000
$\theta_{n,4}$	0	0	0	−0.0000	$\cdots$	0.0000	−0.000

例4.3 ARMA序列的递推预报

- 接例1.1. 已计算§3.2例2.1的ARMA(4,2)的自协方差函数$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{20}$，由此用(4.9)计算出$\mathrm{E}(Y_t Y_s), (1 \le s, t \le 21)$.
- 用§5.3的公式(3.6)计算出新息预报系数$\theta_{n,j}$如下：

n	1	2	3	4	$\cdots$	19	20
$\theta_{n,1}$	−0.226	−0.4017	−0.5705	0.1807	$\cdots$	0.4875	0.489
$\theta_{n,2}$	0	−0.6865	−0.6353	−0.1597	$\cdots$	−0.3937	−0.394
$\theta_{n,3}$	0	0	0.3699	−0.0000	$\cdots$	−0.0001	0.000
$\theta_{n,4}$	0	0	0	−0.0000	$\cdots$	0.0000	−0.000

- 该模型的观测数据$x_1, \cdots, x_{21}$在例1.1中给出. 利用公式(4.11)和(3.6)可以计算出逐步预测$\hat{X}_{k+1} = L(X_{k+1}|\mathbf{X}_k)$ 和逐步预测的均方误差$\nu_{k-1} = EW_k^2$如下:

j	$\hat{X}_j$	ν_{j-1}
1	0	6.670
2	0.104	6.330
3	0.070	2.505
4	-1.654	2.387
5	0.232	1.268
6	5.385	1.233
7	-1.788	1.142
8	-4.398	1.114
9	-0.837	1.086
10	0.839	1.069
11	2.259	1.056
12	-1.395	1.046
13	-2.354	1.038
14	0.467	1.031
15	2.585	1.026
16	1.069	1.022
17	-1.668	1.018
18	0.161	1.016
19	5.725	1.013
20	-0.229	1.011
21	-3.468	1.010

- 从以上数据看出ν_k收敛到$\sigma^2 = 1$的速度是较理想的(参见习题4.4).
- 图5.4.1是观测x_t(虚线)和预测$\hat{X}_t$(实线)的数据图. 从图5.4.1看到逐步预测$\hat{X}_t$可以理想地预测X_t的走势, 这是和该ARMA序列的明显周期性有关的. 由于$Z_k = X_k - \hat{X}_k$服从正态分布$(0, \nu_{k-1})$, 所以真值x_t的置信度为0.95的置信下、上限分别是

$$\hat{X}_k - 1.96\sqrt{\nu_{k-1}}, \quad \hat{X}_k + 1.96\sqrt{\nu_{k-1}}.$$

图5.4.2的从上到下三条曲线分别是$\{x_t\}$的置信上限, $\{x_t\}$本身(虚线)和置信下限. 置信区间的长度$3.92\sqrt{\nu_{k-1}}$随k增加而减少, 最后稳定在3.92附近.

- 从以上数据看出ν_k收敛到$\sigma^2 = 1$的速度是较理想的(参见习题4.4).
- 图5.4.1是观测x_t(虚线)和预测$\hat{X}_t$(实线)的数据图. 从图5.4.1看到逐步预测$\hat{X}_t$可以理想地预测X_t的走势, 这是和该ARMA序列的明显周期性有关的. 由于$Z_k = X_k - \hat{X}_k$服从正态分布$(0, \nu_{k-1})$, 所以真值x_t的置信度为0.95的置信下、上限分别是

$$\hat{X}_k - 1.96\sqrt{\nu_{k-1}}, \quad \hat{X}_k + 1.96\sqrt{\nu_{k-1}}.$$

图5.4.2的从上到下三条曲线分别是$\{x_t\}$的置信上限, $\{x_t\}$本身(虚线)和置信下限. 置信区间的长度$3.92\sqrt{\nu_{k-1}}$随k增加而减少, 最后稳定在3.92附近.

ARMA(p,q)序列多步预测

- 设$n > m$,

$$L(X_{n+k+1}|\mathbf{X}_n) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{p} a_j L(X_{n+k+1-j}|\mathbf{X}_n) \\ +\sum_{j=k+1}^{q} \theta_{n+k,j} Z_{n+k+1-j}, & 0 \le k < q, n > m \\ \sum_{j=1}^{p} a_j L(X_{n+k+1-j}|\mathbf{X}_n), & k \ge q, n > m. \end{cases}$$