多项式判别矩阵的若干性质及其应用

夏壁灿 [1] 杨 路 [2]

1. 北京大学数学科学学院，北京， 100871

2. 中国科学院成都计算机应用研究所，成都， 610041

摘要 给定一文字系数的多项式 $f(x)$, 其判别矩阵是指 f 与 f' 的 Sylvester 矩阵. 熟知判别矩阵的偶数阶主子式的符号确定了 $f(x)$ 的相异根 (实根、复根) 的数目. 这里介绍如何将奇数阶与偶数阶主子式相结合用以判定该多项式的相异负根或正根的数目，并进一步判定其在区间上的实根数. 本文还研究了与判别矩阵相关的一些实用性质，并应用这些性质给出了 4 次键合多项式不能正分解的一组简洁的充分必要条件.

关键词 实根 Sylvester 矩阵 负根判别式序列 键合多项式 正分解

1 两个多项式的 Sylvester 矩阵

设

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \ (a_0 \neq 0),$$

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

是两个符号系数多项式，将

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & & \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & & & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & & & \\ & & & \cdots & \cdots & & & & \\ & & & \cdots & \cdots & & & & \\ & & & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \\ & & & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

[0] 国家重点基础研究发展规划 (973) 项目 (G1998030602), 中国科学院 95 重点基础研究项目及国家自然科学基金资助项目.

叫做 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Sylvester 矩阵, 这与 Maple 系统中 Sylvester 矩阵的定义有些微差别. 用

$$\mathrm{sturm}(f,g) = [r_0(x) = f(x), r_1(x) = g(x), r_2(x), ...]$$

记 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 标准 Sturm 序列(见文献 [1]), 其中

$$r_{k+1}(x) = -(r_{k-1}(x) - q_k(x)r_k(x)),\ \deg(r_{k+1}(x)) < \deg(r_k(x)),\ k = 1, 2, ...$$

$\deg(r_i(x))$ 表示 r_i 关于 x 的最高次数. 令

$$s_{-1} = 0,\ s_i = \deg(r_i(x)) - \deg(r_{i+1}(x)),\ i = 0, 1, ...$$

$$q_{-1} = 0,\ q_j = \sum_{i=-1}^{j-1} s_i,\ j = 0, 1, ...$$

$$\delta_k = \frac{1}{2}\sum_{p=-1}^{k-1}(s_p - 1)s_p,\ \overline{r_{-1}} = 1,\ \overline{r_i} = \mathrm{lcoeff}(r_i(x)),\ i = 0, 1, ...$$

其中, $\mathrm{lcoeff}(r_i(x))$ 表示 $r_i(x)$ 关于 x 的首项系数. 再用 A_k 表示由 A 的前 $2k$ 行及前 $n+k$ 列构成的子矩阵, $A(k,l)$ 表示由 A 的前 k 行、前 $k-1$ 列及第 $(k+l)$ 列构成的子矩阵.

定理 1.1 **(i)** 如果 $m \neq \sum_{i=0}^{k-1} s_i$, 那么, $|A(2m,0)| = 0$;

(ii) 如果 $m = \sum_{i=0}^{k-1} s_i$, 那么,

$$|A(2m,0)| = (-1)^{\delta_k} \cdot (\overline{r_0 r_1})^{s_0} \cdot (\overline{r_1 r_2})^{s_1} \cdots (\overline{r_{k-1} r_k})^{s_{k-1}},$$

$$r_k(x) = \frac{\overline{r_k}}{|A(2m,0)|} \cdot \sum_{t=0}^{n-m} |A(2m,t)| x^{n-m-t}.$$

证明. 与文献 [2] 第 154 – 159 页的证明几乎完全一样 (除了 g 的系数有所不同之外). 证明的思路就是对矩阵 A 作初等行变换, 反复用 Gauss 消去法模拟 f 和 g 的辗转相除.

令 $H_0 = 1$ 且 $H_1, H_2, ..., H_n$ 表示 A 的偶数阶主子式.

推论 1.1 **(a)** 如果对任意 $j = 1, ..., k$, 都有 $m \neq q_j = \sum_{i=0}^{j-1} s_i$, 则 $H_m = 0$. 也就是说, 在序列 $\{H_0, H_1, ..., H_n\}$ 中, 介于 $H_{q_{i-1}}$ 和 H_{q_i} 之间的元都是 0.

(b) 如果对某个 j $(1 \le j \le k)$ 有 $m = q_j = \sum_{i=0}^{j-1} s_i$, 则,

$$H_m = (-1)^{\delta_k} \cdot (\overline{r_0 r_1})^{s_0} \cdot (\overline{r_1 r_2})^{s_1} \cdots (\overline{r_{k-1} r_k})^{s_{k-1}}.$$

设 $\sigma_i = H_{q_i}$ 是序列 $\{H_1, ..., H_n\}$ 中第 i 个非零元，则

$$\frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_i} = (-1)^{(s_i - 1)s_i/2} (\overline{r_i r_{i+1}})^{s_i}.$$

命题 1.1 **(1)** 在序列 $\{H_0, H_1, ..., H_n\}$ 中，如果对某个 $i = 1, ..., n-1$ 有 $H_i = 0$ 且 $H_{i-1} \cdot H_{i+1} \neq 0$, 则 $H_{i-1} \cdot H_{i+1} < 0$; 如果对某个 $i = 2, ..., n-2$ 有

$$H_{i-1} = H_i = H_{i+1} = 0,\ H_{i-2} \cdot H_{i+2} \neq 0,$$

则 $H_{i-2} \cdot H_{i+2} > 0$.

(2) 用 $h_1, h_2, ..., h_{2n-1}, h_{2n}$ 记 A 的主子式序列，当然 $H_i = h_{2i}$ $(i = 1, ..., n)$. 如果对某个 m $(1 \le m \le n-1)$ 有 $h_{2m} = h_{2m+2} = 0$, 则 $h_{2m+1} = 0$.

证明.

(1). 设 H_{i-1} 是序列 $\{H_1, ..., H_n\}$ 中第 j 个非零元, 则, $i-1 = q_j$, $i+1 = q_{j+1}$. 所以, $s_j = q_{j+1} - q_j = 2$. 据推论 1.1(b), 我们有,

$$\frac{H_{i+1}}{H_i} = (-1)^{(s_j-1)s_j/2} (\overline{r_j r_{j+1}})^{s_j} = -(\overline{r_j r_{j+1}})^2 < 0.$$

完全类似地我们可以得到，如果

$$H_{i-1} = H_i = H_{i+1} = 0,\ H_{i-2} \cdot H_{i+2} \neq 0,$$

那么 $H_{i-2} \cdot H_{i+2} > 0$.

(2). 设 $q_{k-1} < m < m+1 < q_k$. 对 h_{2m+1} 做完全类似于文献 [2] 的 156-158 页的证明中对 A_m 所做的变换，注意始终保持最后一行不变. 于是

$$h_{2m+1} \ddot{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccccccccc}
r_{k-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\
 & & r_{k-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & 0 & \cdots & 0 & r_k & & \\
 & \vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & 0 & \cdots & 0 & r_k \\
\cdots & a_0 & a_1 & \underbrace{a_2 \quad \cdots \quad }_{n_1} & & & \cdots & &
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m - q_{k-2} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m - q_{k-1} + 1
\end{array}$$

$$
\xrightarrow{0}
\left(\begin{array}{ccccccccc}
r_{k-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\
 & & r_{k-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & 0 & \cdots & 0 & r_k & & \\
 & \vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & 0 & \cdots & 0 & r_k \\
0 & \cdots & 0 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{a_0' \quad a_1' \quad \cdots}_{n_1}} & \cdots & &
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m-q_{k-2} \\
\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m-q_{k-1}+1
\end{array}
$$

其中 $n_1 = s_{k-1} - (m - q_{k-1})$. 因为 $h_{2m+2} = 0$, 故 $s_{k-1} - ((m+1) - q_{k-1}) > 0$, 进而 $n_1 = s_{k-1} - (m - q_{k-1}) > 1$. 于是 $h_{2m+1} = 0$ 成为显然. 证毕.

2 多项式的判别矩阵

本节叙述 (但不重复证明) 多项式判别矩阵的偶数阶主子式的已知的基本性质. 这是往后讨论的需要. 对证明感兴趣的读者可查阅文献 [2, 3]. 这些结果在不同的领域有重要的应用前景, 譬如见文献 [4, 5, 6, 7].

定义 2.1 给定一个符号系数的多项式

$$
f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,
$$

由其系数构成的 $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩阵,

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & & \\
0 & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} & & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & & \\
 & 0 & na_0 & \cdots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & & & \\
 & & & \cdots & \cdots & & & & \\
 & & & \cdots & \cdots & & & & \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & \\
 & & & 0 & na_0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & \\
 & & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n
\end{array}\right]
$$

记作 Discr (f), 叫做 $f(x)$ 的 *判别矩阵*.

用 d_k 或 $d_k(f)$ 记由 Discr (f) 的前 k 行和前 k 列 $(k=1,2,\cdots,2n+1)$ 构成的子矩阵的行列式. 显而易见 (令 $g(x)=f'(x)$), 定理 1.1 及命题 1.1 对 Discr (f) 都成立.

令 $D_k=d_{2k}, k=1,\cdots,n$. 我们把 $[D_1,D_2,\cdots,D_n]$ 称作 $f(x)$ 的 *判别式序列*, 记作 DiscrList(f,x). 把

$$[\mathrm{sign}(B_1),\mathrm{sign}(B_2),\cdots,\mathrm{sign}(B_n)]$$

称作序列 $[B_1,B_2,\cdots,B_n]$ 的 *符号表*, 其中

$$\mathrm{sign}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

给定一个符号表 $[s_1,s_2,\cdots,s_n]$, 我们按如下规则定义其 *符号修订表* $[t_1,t_2,...,t_n]$:

- 如果 $[s_i,s_{i+1},\cdots,s_{i+j}]$ 是所给符号表中的一段，并且

$$s_i\neq 0, s_{i+1}=\cdots=s_{i+j-1}=0, s_{i+j}\neq 0,$$

  那么，我们将 $[s_{i+1},\cdots,s_{i+j-1}]$ 替换为 $[-s_i,-s_i,s_i,s_i,-s_i,-s_i,s_i,s_i,\cdots]$ 的前 $j-1$ 个，即令

$$t_{i+r}=(-1)^{[(r+1)/2]}\cdot s_i,\quad r=1,2,\cdots,j-1.$$

- 否则，令 $t_k=s_k$ 即，其余各项保持不变.

定理 2.1 [2, 3] 给定实系数多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 如果

$$[D_1(f),D_2(f),\cdots,D_n(f)]$$

的符号修订表的符号改变的次数 (变号数) 是 ν, 那么， $f(x)$ 的不同的共轭虚根对的个数就是 ν. 而且，如果该符号修订表的非零元的个数是 l, 则 $f(x)$ 的不同的实根个数为 $l-2\nu$.

定理 2.2 设 $g(x) = xf'(x)$, 且 A 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 *Sylvester* 矩阵. 令 $H_0 = 1$ 并以 $H_1, H_2, ..., H_n$ 记 A 的偶数阶主子式. 如果序列 $\{H_0, H_1, ..., H_n\}$ 的符号修订表的变号数是 v 且有 $H_l \neq 0$, $H_m = 0 (m > l)$, 则

$$l - 2v = f_{(0,\infty)} - f_{(-\infty,0)},$$

其中 $f_{(0,\infty)}$ 表示 $f(x)$ 的相异正根数, $f_{(-\infty,0)}$ 表示 $f(x)$ 的相异负根数.

这个定理是文献 [8] 中定理 2.2 的一个简单推论.

3 多项式的负根判别式序列

本节讨论与多项式判别矩阵奇数阶主子式相关的性质. 相应于命题 1.1, 我们有

命题 3.1 **(1)** 在序列 $\{d_1, d_3, ..., d_{2n+1}\}$ 中, 若对某个 $i\,(1 \leq i \leq n-1)$ 有 $d_{2i+1} = 0$ 且 $d_{2i-1} \cdot d_{2i+3} \neq 0$, 则 $d_{2i-1} \cdot d_{2i+3} < 0$;

(2) 若对某个 $m\,(1 \leq m \leq n)$ 有 $d_{2m-1} = d_{2m+1} = 0$, 则 $d_{2m} = 0$. (证明略)

对于给定的实符号系数多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 用 $f_{(a,b)}$ 记 $f(x)$ 在 (a, b) 中的根的数目, 令

$$\tilde{h}(x) = f(x^2), \quad h(x) = f(-x^2)$$

并设 $f(0) \neq 0$, 那么显然有

$$f_{(0,\infty)} = \frac{1}{2}\tilde{h}_{(-\infty,\infty)}, \quad f_{(-\infty,0)} = \frac{1}{2}h_{(-\infty,\infty)}.$$

用 $\{d_1, d_2, \cdots, d_{2n+1}\}$ 记多项式 $f(x)$ 的判别矩阵 $\mathrm{Discr}(f)$ 的主子式序列, 我们把 $[d_1d_2, d_2d_3, \cdots, d_{2n}d_{2n+1}]$ 称作 $f(x)$ 的 负根判别式序列, 记作 n.r.d.(f).

注 3.1 我们在 *Maple* 下写了一段计算多项式的判别式序列及负根判别式序列的程序. 详见附录.

定理 3.1 用 $\{d_1, d_2, \cdots, d_{2n+1}\}$ 记多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的判别矩阵 $\mathrm{Discr}(f)$ 的主子式序列. 令 $h(x) = f(-x^2)$ 并设 $a_0 \neq 0$, 则 $h(x)$ 的判别式序列 $[D_1(h), D_2(h), \cdots, D_{2n}(h)]$ 在相差一个与 a_0 符号相同的因子的意义下等于 $n.r.d.(f)$

$$[d_1d_2, d_2d_3, \cdots, d_{2n}d_{2n+1}]$$

即 $D_k(h)=d_k(f)d_{k+1}(f), k=1,2,\cdots,2n.$

证明 (1) 如果 k 是偶数，设 $k=2j$ $(1\le j\le n)$, 则,

$D_k(h)=$

$$\begin{vmatrix} (-1)^n a_0 & 0 & (-1)^{n-1}a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (-1)^n 2na_0 & 0 & (-1)^{n-1}2(n-1)a_1 & \cdots & (-1)^{n-2j+1}2(n-2j+1)a_{2j-1} \\ & (-1)^n a_0 & 0 & (-1)^{n-1}a_1 & \cdots & (-1)^{n-2j+1}a_{2j-1} \\ & & (-1)^n 2na_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & (-1)^n a_0 & \cdots & \cdots & (-1)^{n-j}a_j \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^n 2na_0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{4j\times 4j}$$

$=(-1)^n 2^k a_0\times$

$$\begin{vmatrix} (-1)^n na_0 & 0 & (-1)^{n-1}(n-1)a_1 & 0 & \cdots & (-1)^{n-2j+1}(n-2j+1)a_{2j-1} \\ (-1)^n a_0 & 0 & (-1)^{n-1}a_1 & 0 & \cdots & (-1)^{n-2j+1}a_{2j-1} \\ 0 & (-1)^n na_0 & 0 & (-1)^{n-1}(n-1)a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & (-1)^n a_0 & 0 & (-1)^{n-1}a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & (-1)^n a_0 & \cdots & \cdots & (-1)^{n-j}a_j \\ \cdots & \cdots & 0 & (-1)^n na_0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

在上一个行列式中，依次将第 2, 第 4, 第 6,$\cdots$, 直到第 $(4j-2)$ 列移动为前 $(2j-1)$ 列，然后，依次将第 $3,4$ 行，第 $7,8$ 行， $\cdots$, 直到第 $(4j-5),(4j-4)$ 行移动为前 $(2j-1)$ 行．我们有

$$D_k(h)=(-1)^{\delta}\cdot(-1)^n\cdot 2^k\cdot a_0\cdot\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned}\delta &= (2-1)+(4-2)+(6-3)+\cdots+(4j-2-2j+1)+ \\ &\quad\ (3-1)+(4-2)+(7-3)+(8-4)+\cdots+(4j-1-2j+1) \\ &\equiv 1+2+3+\cdots+(2j-1)(\mathrm{mod}\ 2) \\ &\equiv j(\mathrm{mod}\ 2),\end{aligned}$$

$$A=\begin{vmatrix} (-1)^n na_0 & (-1)^{n-1}(n-1)a_1 & \cdots & \cdots & (-1)^{n-2j+2}(n-2j+2)a_{2j-2} \\ (-1)^n a_0 & (-1)^{n-1}a_1 & \cdots & \cdots & (-1)^{n-2j+2}a_{2j-2} \\ & (-1)^n na_0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ & (-1)^n a_0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & (-1)^n na_0 & \cdots & (-1)^{n-j+1}(n-j+1)a_{j-1} \end{vmatrix}_{(2j-1)\times(2j-1)},$$

且

$$B=\begin{vmatrix} (-1)^n na_0 & \cdots & \cdots & (-1)^{n-2j+1}(n-2j+1)a_{2j-1} \\ (-1)^n a_0 & \cdots & \cdots & (-1)^{n-2j+1}a_{2j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & (-1)^n a_0 & \cdots & (-1)^{n-j}a_j \end{vmatrix}_{2j\times 2j}.$$

如果 n 是偶数，则用 -1 分别乘以 A, B 的第 1, 第 3, 第 5, 等等奇数列；否则，如果 n 是奇数，则用 -1 分别乘以 A, B 的第 2, 第 4, 第 6, 等等偶数列．之后，用 -1 分别乘以 A, B 的第 $1, 2$ 行，第 $5, 6$ 行，第 $9, 10$ 等等行．于是，我们有

$$A=(-1)^{2j}A^*=A^*, \quad B=(-1)^jB^*, \text{ if } n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),$$

$$A=(-1)^{2j-1}A^*=(-1)A^*, \ B=(-1)^jB^*, \text{ if } n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2).$$

其中

$$A^*=\begin{vmatrix} na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & \cdots & (n-2j+2)a_{2j-2} \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{2j-2} \\ & na_0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ & a_0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & na_0 & \cdots & (n-j+1)a_{j-1} \end{vmatrix}_{(2j-1)\times(2j-1)},$$

$$B^*=\begin{vmatrix} na_0 & \cdots & \cdots & (n-2j+1)a_{2j-1} \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{2j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & a_0 & \cdots & a_j \end{vmatrix}_{2j\times 2j}.$$

因此，无论 n 是奇是偶，我们都有

$$\begin{aligned} D_k(h) &= (-1)^\delta\cdot(-1)^n\cdot 2^k\cdot a_0\cdot A\cdot B \\ &= (-1)^j\cdot(-1)^j\cdot 2^k\cdot a_0\cdot A^*\cdot B^* \\ &= 2^k\cdot a_0\cdot A^*\cdot B^*. \end{aligned}$$

注意到

$$A^* = \frac{1}{a_0}\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & A^* \end{vmatrix} = \frac{1}{a_0}d_{2j}, \quad B^* = \frac{1}{a_0}\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & B^* \end{vmatrix} = \frac{1}{a_0}d_{2j+1},$$

我们得到

$$D_k(h) = \frac{2^k}{a_0}\cdot d_{2j}\cdot d_{2j+1}.$$

因为 $k=2j$, 于是，在相差一个与 a_0 符号相同的因子的意义下，我们有

$$D_k(h) = d_k(f)\cdot d_{k+1}(f).$$

(2) 同理可证 k 是奇数的情况．证毕.

定理 3.2 用 $\{d_1, d_2, \cdots, d_{2n+1}\}$ 记多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的判别矩阵 $\mathrm{Discr}(f)$ 的主子式序列．令 $\tilde{h}(x) = f(x^2)$ 并设 $a_0 \neq 0$, 则对 $\tilde{h}(x)$ 的判别式序列

$$[D_1(\tilde{h}), D_2(\tilde{h}), \cdots, D_{2n}(\tilde{h})]$$

的每个元而言，在相差一个与 a_0 符号相同的因子的意义下有

$$D_k(\tilde{h}) = (-1)^{[\frac{k}{2}]}d_k(f)d_{k+1}(f).$$

证明. 与定理 3.1 的证明相似，或见文献 [9, 10].

定理 3.3 多项式 $f(x)$ 满足 $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$, 记其判别矩阵 $\mathrm{Discr}(f)$ 的主子式序列为 $\{d_1, d_2, \cdots, d_{2n+1}\}$. 设 $f(x)$ 的负根判别式序列 $n.r.d.(f)$

$$[d_1d_2, d_2d_3, \cdots, d_{2n}d_{2n+1}]$$

的符号修订表的变号数和非零元个数分别是 μ 和 $2l$, 则 $f(x)$ 的相异负根数等于 $l-\mu$.

证明. 定理 2.1 和定理 3.1 的直接推论.

定理 3.4 给定多项式 $f(x)$ 及其判别矩阵 $\mathrm{Discr}(f)$, 如果序列 $[d_1, d_3, ..., d_{2n+1}]$ 的符号修订表的变号数是 v 且其非零元个数是 $l+1$, 即， $d_{2l+1} \neq 0, d_{2m+1} = 0$ $(m > l)$, 那么

$$l - 2v = f_{(-\infty,0)} - f_{(0,\infty)}.$$

证明. 首先，如果 $t_0,t_1,...,t_n$ 是一个非零实数的序列，则该序列的变号数等于

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}(1-\mathrm{sign}(t_it_{i+1})).$$

设 $\{H_0,H_1,...,H_n\}$ 如定理 2.2 中定义即， $H_0=1$, $\{H_1,...,H_n\}$ 是 $f(x)$ 与 $xf'(x)$ 的 Sylvester 矩阵的偶数阶主子式. 设 $[\epsilon_0,\epsilon_1,...,\epsilon_n]$ 是序列 $\{H_0,H_1,...,H_n\}$ 的符号修订表，并设其变号数是 v_1 且 $\epsilon_{l_1}\neq 0$, $\epsilon_m=0(m>l_1)$, 则由定理 2.2 有,

$$l_1-2v_1=f_{(0,\infty)}-f_{(-\infty,0)}.$$

设 $[\epsilon'_0,\epsilon'_1,...,\epsilon'_n]$ 是序列 $\{d_1,d_3,...,d_{2n+1}\}$ 的符号修订表，我们需要说明

$$l-2v=-(l_1-2v_1).$$

假设 $l_1=q_k$, 于是

$$\begin{aligned}
l_1-2v_1 &= l_1-2\sum_{i=0}^{l_1-1}\tfrac{1}{2}(1-\mathrm{sign}(\epsilon_i\epsilon_{i+1}))=\sum_{i=0}^{l_1-1}\mathrm{sign}(\epsilon_i\epsilon_{i+1})\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(\sum_{j=0,s_i>1}^{s_i-2}\mathrm{sign}(\epsilon_{q_i+j}\epsilon_{q_i+j+1})+\mathrm{sign}(\epsilon_{q_i+s_i-1}\epsilon_{q_{i+1}}))\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(\sum_{j=0,s_i>1}^{s_i-2}(-1)^{\frac{j(j+1)}{2}+\frac{(j+1)(j+2)}{2}}\cdot\mathrm{sign}(\sigma_i^2)+(-1)^{(s_i-1)s_i/2}\cdot\\
&\quad \mathrm{sign}(\sigma_i\sigma_{i+1}))\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(\sum_{j=0,s_i>1}^{s_i-2}(-1)^{j+1}+(-1)^{(s_i-1)s_i}\cdot\mathrm{sign}((\overline{r_ir_{i+1}})^{s_i}\cdot\sigma_i^2))\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(\tfrac{1}{2}((-1)^{s_i-1}-1)+\mathrm{sign}((\overline{r_ir_{i+1}})^{s_i}))\\
&= \sum_{i=0,s_i\ odd}^{k-1}\mathrm{sign}(\overline{r_ir_{i+1}})
\end{aligned}$$

由关系式,

$$d_{2i+1}=(-1)^i\cdot a_0\cdot H_i,\ (0\le i\le n).$$

知 $l=q_k$ 且

$$\epsilon'_{q_i}=(-1)^{q_i}\epsilon_{q_i},\ 0\le i\le k.$$

因此，同理

$$l-2v=\sum_{i=0}^{k-1}(\sum_{j=0,s_i>1}^{s_i-2}\operatorname{sign}(\epsilon'_{q_i+j}\epsilon'_{q_i+j+1})+\operatorname{sign}(\epsilon'_{q_i+s_i-1}\epsilon'_{q_{i+1}})).$$

对每个 i $(0\le i\le k-1)$, 如果

(i) q_i 是奇数， s_i 也是奇数，则 $q_{i+1}=q_i+s_i$ 是偶数，因此

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0,s_i>1}^{s_i-2}\operatorname{sign}(\epsilon'_{q_i+j}\epsilon'_{q_i+j+1})+\operatorname{sign}(\epsilon'_{q_i+s_i-1}\epsilon'_{q_{i+1}})\\ =\ &\tfrac{1}{2}((-1)^{s_i-1}-1)-\operatorname{sign}((\overline{r_ir_{i+1}})^{s_i})\\ =\ &-\operatorname{sign}(\overline{r_ir_{i+1}}).\end{aligned}$$

(ii) q_i 是奇数而 s_i 是偶数，则 $q_{i+1}=q_i+s_i$ 是奇数，因此

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0,s_i>1}^{s_i-2}\operatorname{sign}(\epsilon'_{q_i+j}\epsilon'_{q_i+j+1})+\operatorname{sign}(\epsilon'_{q_i+s_i-1}\epsilon'_{q_{i+1}})\\ =\ &\tfrac{1}{2}((-1)^{s_i-1}-1)+\operatorname{sign}((\overline{r_ir_{i+1}})^{s_i})\\ =\ &0.\end{aligned}$$

另外两种情形 (q_i 偶 s_i 奇和 q_i 偶 s_i 偶) 的讨论完全一样．最终，我们得到

$$\begin{aligned}l-2v\ &=-\sum_{i=0,s_i\ odd}^{k-1}\operatorname{sign}(\overline{r_ir_{i+1}})\\ &=-(l_1-2v_1).\end{aligned}$$

证毕.

定理 3.5 设 $\{d_1,d_2,...,d_{2n},d_{2n+1}\}$ 是多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\ (a_0\neq 0,\ a_n\neq 0)$$

的判别矩阵 Discr (f) 的主子式序列．若 l_1,v_1; l_2,v_2; l,v 分别是序列

$$[d_2,d_4,...,d_{2n}],$$

$$[d_1, d_3, ..., d_{2n+1}],$$

与

$$[d_1 d_2, d_2 d_3, ..., d_{2n} d_{2n+1}]$$

的符号修订表的非零元个数和变号数，则 $l = l_1 + l_2 - 1$，$v = v_1 + v_2$.

证明. 由定理 3.3, 我们知道 $f(x)$ 的相异负根数等于 $l/2 - v$. 另一方面，由定理 2.1 和定理 3.4, 我们知道这个数目也等于 $(l_1 + l_2 - 1)/2 - (v_1 + v_2)$. 因此，如果 $l = l_1 + l_2 - 1$, 则 $v = v_1 + v_2$. 由命题 1.1(2) 及命题 3.1(2), 我们有 $|2l_1 - (2l_2 - 1)| = 1$. 显然， l 一定是偶数，因此， $l = 2l_1$, 且 $2l_1 < (2l_2 - 1)$, 所以，

$$2l_2 - 1 - 2l_1 = 1, \quad l_2 = l_1 + 1.$$

最终，我们得到 $l = 2l_1 = l_1 + l_2 - 1$. 证毕.

4 应用实例：键合多项式的正分解

在许多生理过程中都包含所谓的 “蛋白质 - 配位体的键合 (protein-ligand binding)” 过程. 在众多的用于描述和解释这个过程的数学模型中， J. Wyman[11] 引入了键合多项式 (binding polynomial) 这个基本工具. 如果一个蛋白质大分子具有 n 个 (血色素通常是 4 个) 键合位点，则其键合多项式是 n 次的，可以写成 $P(x) = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n$ 的形式，其中 x 表示配位体活性 (ligand activity) 而 $\beta_i > 0\,(1 \leq i \leq n)$ 是常数. 键合多项式是否可被分解成正系数的多项式的乘积，是与 “site linkage” 和 “positive cooperativity” 等现象紧密相关的 (见文献 [12]). 针对键合多项式的正分解问题，已有许多讨论 [11, 12, 13, 14]. 现有的结果 [12] 需要讨论根的位置，繁琐而不好用. 我们利用上节的结果，得到 4 次键合多项式不能正分解的一个简洁的充要条件.

一个实系数多项式的首项系数与常数项为正而其它系数非负则称为 *正多项式*. 键合多项式都是正多项式. 一个多项式的 *正分解* 是指它被分解为两个非平凡的正多项式的乘积. 一个正多项式若不能被正分解则称为 p- *不可约的*. 我们讨论的问题是：求正多项式

$$f(u) = u^4 + au^3 + bu^2 + cu + d$$

p- 不可约的条件.

定义 4.1 如果一个实多项式的所有零点都位于复平面的左半平面，称为 *稳定* 多项式.

显然，次数大于 2 的稳定多项式一定能正分解.

定理 4.1 (Routh-Hurwitz) 给定实系数多项式 $h(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$, $h(x)$ 是稳定的当且仅当

$$\Gamma_1 > 0, \Gamma_2 > 0, \cdots, \Gamma_n > 0,$$

其中

$$\Gamma_i = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \cdots \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & c_i \end{vmatrix} (c_k = 0, \forall k > n).$$

显然，稳定多项式的系数一定非负. 因此，上述定理中的不等式并不独立，至少可去掉一半. 特别地，我们有

定理 4.2 *(Routh-Hurwitz)* 实多项式 $g(x) = x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ 稳定的充要条件是 $\Gamma_3 = c_1c_2c_3 - c_1^2c_4 - c_3^2 > 0$.

命题 4.1 若 $f(u)$ 有 4 个实根 *(按重数计)*, 则 $f(u)$ 一定可以正分解.

证明. 因为 $f(u)$ 的系数皆非负，所以由 Descartes 符号法则， $f(u)$ 没有正根. 设 u_1, u_2, u_3, u_4 是 $f(u)$ 的 4 个实根，则 $f(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4)$ 是一个正分解.

命题 4.2 $f(u)$ 恰有一对 *(按重数计)* 纯虚根当且仅当

$$a \neq 0 \wedge \Gamma = abc - c^2 - a^2d = 0.$$

f 有两对纯虚根 *(按重数计)* 当且仅当

$$a = c = 0 \wedge b^2 - 4d \geq 0.$$

证明. 设 $f(\beta i)=0$, 其中 $\beta\neq 0$, 则

$$(\beta^4-b\beta^2+d)+(c\beta-a\beta^3)i=0.$$

于是

$$\begin{cases} c-a\beta^2 &=0, \\ \beta^4-b\beta^2+d &=0. \end{cases} \quad (*)$$

所以, $f(u)$ 恰有一对 (按重数计) 纯虚根当且仅当 (*) 式中的 β 有两个实根当且仅当

$$a\neq 0\wedge\Gamma=abc-c^2-a^2d=0.$$

f 有两对纯虚根 (按重数计) 当且仅当 (*) 式中的 β 有 4 个实根 (按重数计) 当且仅当

$$a=c=0\wedge b^2-4d\geq 0.$$

命题 4.3 若 f 至少有一对纯虚根则 f 能正分解.

命题 4.4 如果 f 没有实根，那么， f 是 p- 不可约的当且仅当 f 有一对虚根位于右半平面而另一对虚根位于左半平面.

证明. 充分性是显然的，下证必要性. 首先，由命题 4.3, f 是 p- 不可约的说明 f 没有纯虚根. 其次，若虚根都在左半平面，则 f 显然可被正分解；若都在右半平面，则 u^3 的系数必为负. 这都是不可能的. 证毕.

命题 4.5 令 $\mathrm{DiscrList}(f,u)=[1,D_2,D_3,D_4]$ 记 $f(u)$ 的判别式序列且 $\Gamma=abc-c^2-a^2d$, 则

$$D_4=0\wedge\Gamma<0\Longrightarrow D_3<0.$$

证明. 首先，由判别式序列的定义我们知道， D_4 实际上就是 $f(u)$ 的判别式. 因此， $D_4=0$ 蕴涵 f 有重根. 其次，由定理 4.2, $\Gamma<0$ 说明 $f(u)$ 不稳定因而不可能 4 个根都是实根. 第三，若 $f(u)$ 没有实根，则对某个 $x\geq 0, y>0, x^2-4y<0$ 成立

$$f(u)=(u^2+xu+y)^2.$$

如果 $x=0$, 则 $\Gamma=0$. 所以, $\Gamma<0$ 蕴涵 $x>0$, 而 $x>0$ 又蕴涵 $f(u)$ 是稳定的, 这与 $\Gamma<0$ 矛盾 (由定理 4.2). 综上, $f(u)$ 必有 2 个实根 (按重数计) 和一对虚根. 据定理 2.1, 这说明 $D_3<0$.

设 $[1,D_2,D_3,D_4]$ 是 $f(u)$ 的判别式序列 (D_4 列于本节的末尾), 下面我们分两种情况讨论 $f(u)$ 是 p- 不可约的条件.

(I) $f(u)$ 没有实根.

首先必有 $D_4\geq 0$, 因为如果 $D_4<0$, 则 $[1,D_2,D_3,D_4]$ 的符号修订表有 1 个变号数和 4 个非零元, 而由定理 2.1, 这表明 f 有 2 个实根, 矛盾.

其次 $D_4=0$ 也不用考虑. 否则, $f(u)$ 有重根, 再加上我们假设 $f(u)$ 没有实根, 所以, 一定存在 $x\geq 0, y>0, x^2-4y<0$ 使得 $f(u)=(u^2+xu+y)^2$. 这意味着 f 不是 p- 不可约的.

总之, 在条件 (I) 下, 我们总假设 $D_4>0$.

容易知道, 若 f 的根都是虚根, 则一对虚根在左半平面而另一对虚根在右半平面的充要条件是 f 不稳定且没有纯虚根. 由命题 4.2 及定理 4.2, f 不稳定且没有纯虚根的充要条件是 $\Gamma<0\vee(a=c=0\wedge b^2-4d<0)$. 所以由命题 4.4, 在条件 (I) 下, f 是 p- 不可约的当且仅当

$$\Gamma<0\vee(a=c=0\wedge b^2-4d<0).$$

注意到 $D_4>0$ 是前提且

$$a=c=0\wedge b^2-4d<0\Longrightarrow D_4>0,$$

我们得到

$$(D_4>0\wedge\Gamma<0)\vee(a=c=0\wedge b^2-4d<0).$$

最后, 我们还需要说明如果上式成立, 条件 (I) 仍然满足即, f 没有实根. 由定理 2.1, $D_4>0$ 表明 f 要么没有虚根要么有 2 对相异共轭虚根. 另一方面, $\Gamma<0\vee(a=c=0\wedge b^2-4d<0)\Longrightarrow\Gamma\leq 0$, 据定理 4.2, 这说明 f 不稳定. 因此, f 必有 2 对相异共轭虚根.

(II) $f(u)$ 有 2 个 (按重数计) 实根 2 个虚根即 (定理 2.1),

$$D_4<0\vee(D_4=0\wedge D_3<0).$$

此时，若 $\Gamma=0$ 且 $a=0$, 则 $c=0$. 而由命题 4.2, $a=c=0\wedge b^2-4d\geq 0$ 蕴涵 f 无实根，所以必有 $a=c=0\wedge b^2-4d<0$. 但这蕴涵 $D_4>0$, 与假设 (II) 矛盾. 因此，在假设 (II) 下， $\Gamma=0$ 和 $a=0$ 不能同时成立. 又设 $\Gamma=0$ 且 $a\neq 0$, 那么由命题 4.2, 4.3, f 可正分解. 所以，在下面的讨论中，我们总假定 $\Gamma<0$.

我们不必考虑 f 有纯虚根及 f 的根都在左半平面的情形，因为那蕴涵 f 可正分解. 另外, 也容易验证在假设 (II) 下, 除了 2 个实根在左半平面、 2 个虚根在右半平面外, 不可能有别的分布. 那么显然地，我们只需找出 f 不能分解为 1 次正多项式和 3 次正多项式的乘积的条件. 令

$$f(u)=(u+x)(u^3+yu^2+zu+w),$$

其中 x,y,z,w 都是实数，那么,

$$\begin{cases} f_1 &= a-x-y &= 0,\\ f_2 &= b-xy-z &= 0,\\ f_3 &= c-xz-w &= 0,\\ f_4 &= d-xw &= 0.\end{cases}$$

我们的任务就是：在假设 $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d>0$ 及 (II) 下，找出上述方程组中的 y 和 z 不同时有非负解的充要条件. 令

$$\begin{aligned} g_1 &= \mathrm{rem}(f_3,f_1,x)=c-w-za+zy,\\ g_2 &= \mathrm{rem}(f_2,f_1,x),\\ g_3 &= \mathrm{rem}(f_4,f_1,x);\\ h_1 &= \mathrm{rem}(g_2,g_1,w)=y^2-ay+b-z,\\ h_2 &= \mathrm{rem}(g_3,g_1,w);\\ l_1 &= \mathrm{rem}(h_2,h_1,z)\\ &= y^4-3ay^3+(3a^2+b)y^2+(c-2ab-a^3)y+d+ba^2-ca,\\ l_2 &= \mathrm{resultant}(l_1,h_1,y)\\ &= z^4-2bz^3+(2d+ac+b^2)z^2+(a^2d-2bd-abc-c^2)z+d^2-dca+bc^2;\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{rem}(p,q,r)$ 表示 p 除以 q(关于变元 r) 的余式, 而 $\mathrm{resultant}(p,q,r)$ 表示 p 和 q 关于变元 r 的 Sylvester 结式. 容易看到, 方程组 $\{l_1(y)=0, h_1(y,z)=0, g_1(y,z,w)=0, f_1(y,x)=0\}$ 的解恰是方程组 $\{f_1=0, f_2=0, f_3=0, f_4=0\}$ 的解.

通过直接计算，我们得到

$$\mathrm{DiscrList}(l_1, y) = \mathrm{DiscrList}(f, u) = [1, D_2, D_3, D_4].$$

所以,据定理 2.1, $f(u)$ 满足假设 (II) 当且仅当 $l_1(y)$ 满足假设 (II). 如果 (y_i, z_i, w_i, x_i) $(i = 1, 2.)$ 是方程组 $\{f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0, f_4 = 0\}$ 的 2 个 (按重数计) 实解，那么, y_i $(i = 1, 2.)$ 恰是 $l_1(y)$ 的 2 个 (按重数计) 实零点而 z_i $(i = 1, 2.)$ 恰是 $l_2(z)$ 的 2 个 (按重数计) 实零点.

设 c_1, c_2 分别是 $l_1(y), l_2(z)$ 的常数项即,

$$c_1 = d + ba^2 - ca, \quad c_2 = d^2 - dca + bc^2.$$

如果 $c_1 = 0$, 则 $y = 0$ 是 $l_1(y) = 0$ 的根，所以 $(y, z) = (0, b)$ 是 $\{l_1 = 0, h_1 = 0\}$ 的非负解. 因此， f 可正分解.

如果 $c_2 = d^2 - dca + bc^2 = 0$, 则 $ac - d \geq 0$ 同时， $z = 0$ 是 $l_2(z) = 0$ 的根. 将 $z = 0$ 带入 $\{f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0, f_4 = 0\}$ 易知， $y = (ac - d)/c \geq 0$. 因此， f 可正分解.

所以，在以下每种情形的讨论中我们假设 $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$.

(i) 如果 $l_1(y)$ 和 $l_2(z)$ 都有 1 个正根和 1 个负根.

因为

$$h_1 = y^2 - ay + b - z = 0, \ a \geq 0, \ b \geq 0,$$

所以在 y 的负根处 z 取正值，因而必然地，在 y 的正根处 z 取负值. 于是，如果 $l_1(y)$ 和 $l_2(z)$ 都有 1 个正根和 1 个负根， f 是 p- 不可约的. 由 Descartes 符号法则，这等价于 $c_1 < 0 \wedge c_2 < 0$. 注意到当 $D_4 = 0 \wedge D_3 < 0$ 时， $l_1(y)$ 有重根因而不可能恰有 1 个正根和 1 个负根，我们得到如下条件

$$D_4 < 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_1 < 0 \wedge c_2 < 0.$$

(ii) 求 $l_1(y) = 0$ 有 2 个 (按重数计) 负根的条件.

通过直接计算， $\mathrm{Discr}(l_1)$ 的奇数阶主子式序列是

$$[1, -a, d_5, d_7, c_1 D_4],$$

其中 d_5, d_7 是 a, b, c, d 的多项式 (见本节最后). 如果 $c_1 < 0$, $l_1(y)$ 将有 1 个正根和 1 个负根. 因此，在当前的情形中，我们总假设 $c_1 > 0$.

- 假设 $D_4 < 0$.

n.r.d.(l_1) 的符号修订表的非零元个数是 8. 因此，据定理 3.3, $l_1(y)$ 有 2 个 (相异) 负根当且仅当 n.r.d.(l_1) 的符号修订表的变号数是 2. 在假设 (II) 下，偶数阶主子式序列 $[1, D_2, D_3, D_4]$ 的符号修订表有 1 个变号数. 所以，据定理 3.5, 我们需要求 $[1, -a, d_5, d_7, c_1 D_4]$ 的符号修订表有 1 个变号数的条件.

如果 $a > 0$, 则符号表 $[1, -a, d_5, d_7, c_1 D_4]$ 化为 $[1, -1, \mathrm{sign}(d_5), \mathrm{sign}(d_7), -1]$. 因此，由符号修订规则，它有 1 个变号数的条件是

$$a > 0 \wedge d_5 < 0 \wedge d_7 < 0.$$

如果 $a = 0$, 则符号表 $[1, -a, d_5, d_7, c_1 D_4]$ 化为 $[1, 0, \mathrm{sign}(d_5), \mathrm{sign}(d_7), -1]$. 它有 1 个变号数的条件是

$$(a = 0 \wedge d_5 = 0 \wedge d_7 < 0) \vee (a = 0 \wedge d_5 < 0 \wedge d_7 < 0).$$

注意到 $D_4 < 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_1 > 0$ 是大前提，而且

$$D_4 < 0 \wedge a = 0 \wedge d_5 = 0 \Longrightarrow b = 0 \wedge c_1 > 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge d_7 < 0,$$

$$a = 0 \wedge b = 0 \Longrightarrow d_5 = 0,$$

我们得到如下条件

$$\begin{aligned} &(D_4 < 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_1 > 0 \wedge d_5 < 0 \wedge d_7 < 0) \\ &\vee\ (D_4 < 0 \wedge a = 0 \wedge b = 0). \end{aligned}$$

- 假设 $D_4 = 0 \wedge D_3 < 0$.

$l_1(y)$ 的两个实根必定相同，而且 n.r.d.(l_1) 的符号修订表的非零元个数是 6. 所以，据定理 3.3, $l_1(y)$ 有 1 个相异负根当且仅当 n.r.d.(l_1) 的符号修订表的变号数是 2. 在假设 (II) 下， $[1, D_2, D_3, D_4]$ 的符号修订表有 1 个变号数. 因此，据定理 3.5, 我们需要求 $[1, -a, d_5, d_7, c_1 D_4]$ 的符号修订表有 1 个变号数的条件.

据命题 3.1(2), d_5, d_7 不能同时为零，因为 $D_3 = d_6 \neq 0$. 而且我们还有 $d_7 \neq 0$, 否则如果 $d_7 = 0$, 则 n.r.d.(l_1) 的符号修订表的非零元个数是奇数，而这是不可能的 (定理 3.3).

如果 $a > 0$, 则符号表 $[1, -a, d_5, d_7, c_1 D_4]$ 化为 $[1, -1, \mathrm{sign}(d_5), \mathrm{sign}(d_7), 0]$. 它有 1 个变号数的条件是 $a > 0 \wedge d_5 < 0 \wedge d_7 < 0$.

如果 $a = 0$, 则符号表 $[1, -a, d_5, d_7, c_1 D_4]$ 化为 $[1, 0, \mathrm{sign}(d_5), \mathrm{sign}(d_7), 0]$. 它有 1 个变号数的条件是

$$(a = 0 \wedge d_5 = 0 \wedge d_7 < 0) \vee (a = 0 \wedge d_5 < 0 \wedge d_7 < 0).$$

注意到 $D_4 = 0 \wedge D_3 < 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_1 > 0$ 是大前提，且

$$D_4 = 0 \wedge a = 0 \wedge d_5 = 0 \Longrightarrow b = 0 \wedge c_1 > 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge d_7 < 0,$$

$$D_4 = 0 \wedge a = 0 \wedge b = 0 \Longrightarrow d_5 = 0 \wedge \Gamma < 0,$$

我们得到如下条件

$$\begin{aligned} &(D_4 = 0 \wedge D_3 < 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_1 > 0 \wedge d_5 < 0 \wedge d_7 < 0) \\ &\vee (D_4 = 0 \wedge D_3 < 0 \wedge a = 0 \wedge b = 0). \end{aligned}$$

据命题 4.5, 这个条件等价于

$$\begin{aligned} &(D_4 = 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_1 > 0 \wedge d_5 < 0 \wedge d_7 < 0) \\ &\vee (D_4 = 0 \wedge a = 0 \wedge b = 0). \end{aligned}$$

综上，我们得到 $l_1(y) = 0$ 有 2 个负根 (按重数计) 的充要条件是

$$\begin{aligned} &(D_4 \leq 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_1 > 0 \wedge d_5 < 0 \wedge d_7 < 0) \\ &\vee (D_4 \leq 0 \wedge a = 0 \wedge b = 0). \end{aligned}$$

(iii) 求 $l_2(z) = 0$ 有 2 个 (按重数计) 负根的条件.
直接计算 $\mathrm{Discr}(l_2)$ 的奇数阶主子式序列得

$$[e_1, e_3, e_5, e_7, e_9] = [1, -b, e_5, e_7, c_2 \Gamma^2 D_4],$$

其中 e_5, e_7 是 a, b, c, d 的多项式 (见本节末尾). 用几乎与情形 (ii) 相同的讨论，我们得到 $l_2(z)=0$ 有 2 个 (按重数计) 负根的充要条件是

$$D_4 \le 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_2 > 0 \wedge e_5 < 0 \wedge e_7 < 0.$$

综上所论， $f(u)$ 是 p- 不可约的当且仅当下面 6 个条件之一成立:

$$\begin{aligned}
&(1) D_4 > 0 \wedge \Gamma < 0,\\
&(2) a = 0 \wedge c = 0 \wedge b^2 - 4d < 0,\\
&(3) D_4 < 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_1 < 0 \wedge c_2 < 0,\\
&(4) D_4 \le 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_1 > 0 \wedge d_5 < 0 \wedge d_7 < 0,\\
&(5) D_4 \le 0 \wedge a = 0 \wedge b = 0,\\
&(6) D_4 \le 0 \wedge \Gamma < 0 \wedge c_2 > 0 \wedge e_5 < 0 \wedge e_7 < 0,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Gamma \quad &= abc - a^2 d - c^2,\\
D_4 \quad &= a^2\,b^2\,c^2 - 4\,a^2\,b^3\,d - 6\,a^2\,d\,c^2 + 18\,b\,c^3\,a + 144\,b\,d\,c^2 + 144\,b\,d^2\,a^2\\
&\quad - 192\,c\,d^2\,a - 27\,c^4 + 256\,d^3 - 4\,b^3\,c^2 + 16\,b^4\,d - 128\,d^2\,b^2 - 4\,a^3\,c^3\\
&\quad - 27\,a^4\,d^2 - 80\,c\,a\,d\,b^2 + 18\,a^3\,c\,d\,b,\\
d_5 \quad &= 3\,b\,a^2 - 9\,c\,a - 4\,b^2,\\
d_7 \quad &= 48\,c\,d\,b + 60\,a\,b\,c^2 - 60\,b^2\,d\,a - 15\,d\,c\,a^2 - 27\,b^2\,a^2\,c + 21\,b\,a^3\,d + 6\,b\,a^4\,c\\
&\quad - 27\,c^3 + 8\,b^4\,a - 4\,c\,b^3 - 2\,b^3\,a^3 - 6\,c^2\,a^3 + 48\,a\,d^2,\\
e_5 \quad &= -3\,b\,a^2\,d + 2\,d\,b^2 + b^2\,a\,c + 3\,b\,c^2 - 8\,d^2 - 8\,d\,c\,a - 2\,c^2\,a^2,\\
e_7 \quad &= 27\,c^6 + 8\,c^4\,b^3 - 27\,d^3\,a^6 - 64\,d^3\,c^2 + 96\,d^2\,c^3\,a + 9\,c^2\,a^4\,d^2 - 88\,b^2\,a^3\,c\,d^2\\
&\quad + 90\,b\,d^3\,a^4 - 3\,b\,c^5\,a + 64\,b\,a\,c\,d^3 + 8\,b^4\,a^2\,d^2 - 4\,b^3\,a^4\,d^2 + 16\,d^2\,b^2\,c^2\\
&\quad - 48\,d^3\,b^2\,a^2 - 96\,c\,a^3\,d^3 - 6\,b\,c^4\,d - 72\,a\,b^2\,c^3\,d + 45\,b\,c\,a^5\,d^2\\
&\quad + 14\,b\,a^3\,d\,c^3 + 116\,b\,c^2\,d^2\,a^2 - 7\,b^2\,c^4\,a^2 + 4\,b^4\,a^3\,c\,d + 18\,b^3\,a^2\,d\,c^2\\
&\quad + 4\,c^5\,a^3 - 16\,a\,b^3\,c\,d^2 - 17\,b^2\,a^4\,d\,c^2 - 4\,c^3\,a^5\,d + 4\,c^4\,a^4\,b - 9\,d\,c^4\,a^2\\
&\quad - b^3\,a^3\,c^3 + 64\,d^4\,a^2,\\
c_1 \quad &= d + ba^2 - ca,\\
c_2 \quad &= d^2 - dca + bc^2.
\end{aligned}$$

Appendix

下面 3 个程序分别用于求多项式判别矩阵的偶数阶主子式序列，奇数阶主子式序列和负根判别式序列.

```
with(linalg):
discr:=proc(poly,var)
local f,g,h,tt,d,bz,i,ar,j,mm,dd;
    f:=expand(poly);
    d:=degree(f,var);
    h:=tt*var^d + diff(f,var);
    bz:=subs(tt=0,bezout(f,h,var));
    ar:=[ ];
    for i to d do ar:=[op(ar),row(bz,d+1-i..d+1-i)] od;
    mm:=matrix(ar);
    dd:=[ ];
    for j to d do dd:=[op(dd),det(submatrix(mm,1..j,1..j))] od;
    dd:=map(primpart,dd)
end:

discr1:=proc(poly,var)
local f,h,d,bz,i,ar,j,mm,dd:
    f:=expand(poly):
    d:=degree(f,var):
    h:=expand(var*diff(f,var)):
    bz:=bezout(h,f,var):
    ar:=[ ]:
    for i to d do ar:=[op(ar),row(bz,d+1-i..d+1-i)] od:
    mm:=matrix(ar):
    dd:=[1]:
```

```
    for j to d do dd:=[op(dd),det(submatrix(mm,1..j,1..j))] od:
    dd:=map(primpart,dd)
end:

nrd:=proc(poly,var)
local uu,vv,dd,i,d:
    uu:=discr(poly,var):
    vv:=discr1(poly,var):
    d:=nops(uu):
    dd:=[ ]:
    for i to d do
    dd:=[op(dd),vv[i]*uu[i],uu[i]*vv[i+1]]
    od:
end:
```

References

[1] Mishra, B., *Algorithmic Algebra*, New York: Springer-verlag, 1993.

[2] 杨 路，张景中，侯晓荣，非线性代数方程组与定理机器证明，上海科技教育出版社， 1996.

[3] Yang, L., Hou, X. R., Zeng, Z. B., A complete discrimination system for Polynomials, *Science in China, Series E*, 1996, 39(6): 628-646.

[4] Wang, Z. H. and Hu, H. Y., Delay-independent stability of retarded dynamic systems of multiple degrees of freedom, *J. of Sound and Vibration*, **226**:1(1999), 57-81.

[5] Wang, Z. H. and Hu, H. Y., Stability switches of time-delayed dynamic systems with unknown parameters, *J. of Sound and Vibration*, **233**:2(2000), 215-233.

[6] 王龙，郁文生，严格正实域的完整刻画和鲁棒严格正实综合方法，中国科学，E 辑， 1999,29(6):532-545

[7] 朱思铭，伍小明．计算机在常微分方程和孤立子理论研究中的应用，见：面向 21 世纪的数学技术 (杨 路等主编), 广东经济出版社， 1999. pp. 32-39.

[8] 杨 路，侯晓荣，夏壁灿，自动发现不等式型定理的一个完备算法，中国科学 **E**, **31**:3(2001), 273-288.

[9] Yang, L. and Xia, B. C., Explicit criterion to determine the number of positive roots of a polynomial, MM Research Prints, **15**, 134-145. 数学机械化研究中心，北京， 1997.

[10] Yang, L., Recent Advances on Determining the Number of Real Roots of Parametric Polynomials. J. Symb. Comput. **28:** 225-242, 1999

[11] Wyman, J., The Binding Potential, A Neglected Linkage Concept, *J. Mol. Biol.* **11:** 631-644, 1965.

[12] Briggs, W.E., Zeros and factors of polynomials with positive coefficients and protein-ligand binding, *Rocky Mount. J. Math.* **15**(1) 75-89, 1985.

[13] Bardsley, W.G., Factorability of the allosteric binding polynomial and graphical manifestations of cooperativity in third degree saturation functions, *J. Theor. Biol.* **67:** 407-431, 1977.

[14] Bardsley, W.G., Woolfson, R., Mazat, J.-P. Relationships between the magnitude of Hill plot slopes, apparent binding constants and factorability of binding polynomials and their Hessians, *J. Theor. Biol.* **85:** 247-284, 1980.