基础拓扑学, 2025 年秋

作业 3

上交时间：10 月 28 日

1. (a) 给出 $\mathbb{E}^1$ 的没有有限子覆盖的开覆盖。对 $[0,1)$ 和 $(0,1)$ 给出同样的构造。
   (b) 证明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 的任意子集都是紧致的，这里 $\mathcal{T}_f$ 是 $\mathbb{R}$ 上的余有限拓扑。证明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ 不是紧致的，这里 $\mathcal{T}_c$ 是 $\mathbb{R}$ 上的余可数拓扑。
   (c) 应用 Heine-Borel 定理证明闭区间 $[a,b]$ 上的任意无穷子集都有聚点。

2. 证明紧致的度量空间都是第二可数的。证明一个度量空间 X 是紧致的当且仅当任意连续函数 $f: X \to \mathbb{E}^1$ 有界。

3. (a) 给出一个拓扑空间和它的一个紧致子集，使得该紧致子集的闭包不紧致。
   (b) 设 X 是一个拓扑空间，它的任意不相交的点 x 和闭子集 E 都有不相交的邻域。证明 X 的紧致子集的闭包紧致。

4. 证明从紧致空间到 Hausdorff 空间的连续单射都是嵌入。

5. 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为*局部紧的*，如果每个点都有一个闭包紧致的开邻域。设 X 是一个拓扑空间，定义 X 的*一点紧致化*为 $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$，其上拓扑定义为
$$\widetilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\widetilde{X}\} \cup \{\widetilde{X} \setminus K \mid K\text{是}X\text{中紧致闭集}\}$$
   (a) 验证 $\widetilde{T}$ 是 $\widetilde{X}$ 上的一个拓扑。
   (b) 证明 $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ 是紧致的拓扑空间。
   (c) 如果 X 是局部紧的 Hausdorff 空间，证明 $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ 是 Hausdorff 的。
   (d) 证明平面的一点紧致化空间同胚于二维球面。
   (e) 如果 X 与 Y 同胚，证明它们的一点紧致化空间同胚。

6. 如果 X 是连通的 Hausdorff 空间，如果 X 的任意两个不相交的闭集有不相交的开邻域，证明 X 是不可数的。

7. 证明或者举出反例
   (a) 如果 X_1 与 X_2 是连通空间 X 的两个开子集，满足 $X_1 \cup X_2 = X$，并且 $X_1 \cap X_2$ 是非空连通的，则 X_1 与 X_2 均连通。
   (b) 如果拓扑空间 X 是连通的，并且每个点都包含在一个道路连通的开子集内，则 X 道路连通。

8. (a) 证明 $[0,1)$ 与 $[0,1]$ 不同胚，但 $[0,1] \times [0,1)$ 与 $[0,1) \times [0,1)$ 同胚。
   (b) 证明 $\mathbb{E}^1$ 与 $\mathbb{E}^n$ $(n > 1)$ 不同胚。

9. 如果 $f: S^1 \to \mathbb{E}^1$ 连续，证明 f 既不是单射也不是满射。如果 $f: S^2 \to \mathbb{E}^1$ 连续，证明存在 $t \in \mathbb{E}^1$ 使得 $f^{-1}(t)$ 不可数，并且至多存在两个 $\mathbb{E}^1$ 中的点，其逆像非空但可数。

10. (a) 证明欧式空间,从而任何局部欧氏的空间(例如球面),是局部连通的。赋予 $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 作为 $\mathbb{E}^1$ 子空间的拓扑，证明 X 不是局部连通的。
    (b) 证明局部连通性为同胚所保持，但不一定为连续映射所保持。
    (c) 证明空间 X 局部连通当且仅当 X 的每个开集的每个连通分支是开集。

11. 构造一个空间的道路连通子集，使得其闭包不是道路连通的。（拓扑学家的正（余）弦曲线除外。）