拓扑学, 2025 年秋季

作业 2

上交时间：10 月 14 日

1. 是否存在满的连续映射 $f:[0,1]\to\mathbb{E}^2$？为什么?

2. 构造从 $[0,1]$ 到 S^2 的连续满映射。

3. 若 X,Y 可分，证明 $X\times Y$ 可分。

4. 设 Y 是 Hausdorff 空间，$f:X\to Y$ 连续，则 f 的图像 $G_f:=\big\{(x,f(x))\in X\times Y\,\big|\,x\in X\big\}$ 是 $X\times Y$ 的闭子集。

5. 证明 T_2 公理和 C_2 公理都有可乘性和遗传性。

6. 令 $\mathcal{B}=\{[a,b)\mid a<b\}$。证明 $\mathcal{B}$ 所生成的 $\mathbb{R}$ 上的拓扑不是第二可数的。

7. 记 S 为所有无理数的集合，在 $\mathbb{R}$ 上，定义 $\mathcal{T}$ 为所有形如 $U\setminus A$ 的子集组成的集合，其中 U 为 $\mathbb{E}^1$ 中的开集，A 是 S 的子集。
   (a) 证明 $\mathcal{T}$ 给出了 $\mathbb{R}$ 上可分的拓扑；
   (b) 证明 $\mathcal{T}$ 满足 C_1 公理但不满足 C_2 公理；
   (c) 证明 $\mathcal{T}$ 满足 T_2 公理但不满足 T_3 公理；
   (d) 证明 $\mathcal{T}$ 在 S 上的子空间拓扑 $\mathcal{T}_S$ 是离散拓扑，从而 $(S,\mathcal{T}_S)$ 是不可分的。

8. 设 X 满足 T_4 公理，A 是 X 的闭子集，证明连续映射 $f:A\to\mathbb{E}^n$ 可连续扩张到 X 上。

9. 证明度量空间的任意闭子集都是可数多个开集的交。

10. 设 S^n 是 $\mathbb{E}^{n+1}$ 的单位球面。设 X 是度量空间，A 是 X 的闭子集。证明任意连续函数 $f:A\to S^n$ 可以连续延拓到 A 的一个开邻域（即连续延拓到 X 中某个包含 A 的开子集）。