基础拓扑学, 2025 年秋

作业 1

上交时间：9 月 23 日

1. 证明实数上所有形如 (a,∞) 和 $[a,\infty)$ 的集合（$a\in\mathbb{R}$），与全集 $\mathbb{R}$ 和空集 $\emptyset$ 给出实数 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑。进一步地，证明在该拓扑之下，一个函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的，当且仅当 f 是递增函数，也就是说，当 $x\geq y$ 时有 $f(x)\geq f(y)$。
2. 构造某个空间（例如 $\mathbb{R}$）上两个不可比较的拓扑。
3. 设 $D^n := \{x\in\mathbb{R}^n \mid ||x||<1\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位实心球。明确写出下面空间之间的同胚
   (a) D^n 与 $\mathbb{R}^n$。
   (b) $\mathbb{R}^n\setminus\{O\}$ 与 $\mathbb{R}^n\setminus\overline{D^n}$ 这里 O 是原点。
4. 在这个问题里我们将给出素数有无穷多个的拓扑证明。（一个大于 1 的自然数称为*素数*，如果它只能被 1 和自身整除。）
   (a) 考虑所有的算术数列集合
   $$S_{a,b}=a+b\mathbb{Z},\quad a\in\mathbb{Z},\quad b\in\mathbb{Z}_{>0}.$$
   用这些集合 $S_{a,b}$ 构造 $\mathbb{Z}$ 上的一个拓扑，证明他们满足拓扑公理。证明每个集合 $S_{a,b}$ 既是开集又是闭集。
   (b) 证明 $\{\pm1\}$ 是闭集。
   (c) 证明如果仅有有限多个素数，那么集合 $\{\pm1\}$ 是开集。证明集合 $\{\pm1\}$ 不是开集，从而素数有无穷多个。
5. 沿莫比乌斯带的中心圆周剪开，会得到什么空间？沿距离边界三分之一（宽度）的圆周呢？
6. 设 A 是 X 的稠密子集，Y 是 X 的子空间，举例说明 $A\cap Y$ 不一定是 Y 的稠密子集。