

作业二

题1 推导第一类基本量 $E(u), F(u), G(u)$ 在正则参数代换 $u = u(\tilde{u})$ 下的变换公式（即 $\tilde{E}(\tilde{u}), \tilde{F}(\tilde{u}), \tilde{G}(\tilde{u})$ 通过它们和Jacobi矩阵元素的表达式）。

题2 计算参数曲面片（螺旋面）的第一基本形式：

$$\phi(s, t) = (t \cos s, t \sin s, s)$$

题3 设 $a \geq b \geq c > 0$ 。计算椭球面上任何点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

题4 计算空间曲面（马鞍面）上任何点 (x_0, y_0, z_0) 处的法线方程（写成点斜式）：

$$z = 2xy$$

题5 考虑参数曲面片 $\phi(s, t) = (t \cos s, t \sin s, s)$ 和参数曲线 $\gamma(r) = \phi(s(r), t(r)) = \phi(\sqrt{2}r, e^r)$ 。求证： $\gamma(r)$ 的切向平分切向量 $\phi_s(s(r), t(r))$ 与 $\phi_t(s(r), t(r))$ 所夹的角（在参数正则的位置）。

题6 设 $a > b > 0$ 。计算空间曲面（轮胎面）的面积：

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2$$

题7 关于地球经纬网，求：经过博雅塔的俯视中心点（坐标自寻），保持北偏东 30° 的地面曲线的参数方程。

题8 计算参数曲面片（旋转抛物面）的第二基本形式：

$$\phi(s, t) = \left(s, t, \frac{s^2 + t^2}{2}\right)$$

题9 设 $c > 0$ 。设参数曲面片 $\phi(u) = (x(u), y(u), z(u))$ 在参数值 $u \in U$ 处的平均曲率和 Gauss 曲率分别是 $H(u)$ 和 $K(u)$ 。求：参数曲面片 $\psi(u) = (cx(u), cy(u), cz(u))$ 在 $u \in U$ 处的平均曲率和 Gauss 曲率。

题10 设 $a > b > 0$ 。若 \mathbf{E}^3 中半径为 a 的球 S 与距离球心 b 的平面交于圆 C 。求： C 上各处关于 S 的测地曲率和法曲率。

题11 计算参数曲面片（马鞍面）上各点的主方向：

$$\phi(s, t) = (s + t, s - t, 2st)$$

题 12 计算参数曲面片（悬链面）的各点平均曲率和 Gauss 曲率：

$$\phi(s, t) = (\sqrt{s^2 + 1} \cos t, \sqrt{s^2 + 1} \sin t, \log(s + \sqrt{s^2 + 1}))$$

（其中， $\log x$ 表记 x 的自然对数）。