几何学实验班, 2024 年秋季

作业 2

上交时间: 10 月 30 日

1. 尤 §1.3: 5, 10, 13, 14; §1.4: 6, 7, 11; §1.5: 1, 4, 7, 10, 12, 13
2. 曲面 $S: x^2 + y^2 + xy - 2xz - yz = 0$ 是否是正圆锥? 说明理由。
3. 用向量代数证明三角形的三条高交于一点。能否从顶点确定其位置?
4. 阅读关于 Jacobi 恒等式与三角形的三高的文章, 弄懂等价性。
5. 尤 §3.2: 3, 10, 11; §3.3: 1 (2) (4) (6) (7), 3, 6, 7; §3.4: 4, 7, 14, 20, 23
尤 §3.5: 4, 5; §2.3: 12; §2.4: 11; §2.5: 14 (6)、17 (3); §2.6: 6; §2.7: 6

6. 考虑空间中直线

$$\ell_0: \begin{cases} 3x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

使其绕直线

$$k: x = y = z$$

旋转一周, 获得圆锥面 S 。

- (a) 写出曲面 S 的方程并画图。
 - (b) 描述所有保持 S 不变 (作为点集) 的空间保距变换, 并说明理由。
7. 曲面 $S: x^2 + y^2 + xy - 2xz - yz = 0$ 是否是正圆锥? 说明理由。
 8. 空间中单位立方体 $ABCD - A'B'C'D'$, (其中 $ABCD$ 是一个侧面正方形, 而 $A'B'C'D'$ 是其对侧正方形, 对应顶点相邻)。
 - (a) 考虑所有与边 AA' , $B'C'$, CD 所在的三条直线同时相交的直线。它们的并集构成哪种 (仿射) 二次曲面? 请说明理由。
 - (b) 决定并描述包含直线 AA' 的那一族直母线。
 9. 给定空间中的单位立方体 P (作为包含全体顶点、边、面、内部点的点集), 所有保持 P 不变的空间保距变换总共有多少个? 用比较简明的语言枚举它们全部。
 10. 平面旋转变换 ϕ_1, ϕ_2 分别以 O_1, O_2 为中心, 问 $\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_2 \circ \phi_1$ 何时成立? 说明理由。
 11. 假设 $A, B, C, D \in \mathbb{E}^3$ 是处于一般位置 (即不共面) 的四个点, 用 $L_A: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 表示一个线性函数, 满足

$$L_A(A) = 1, L_A(B) = L_A(C) = L_A(D) = 0$$

L_B, L_C, L_D 类似定义。试找出所有保持四点 A, B, C, D (作为集合) 不变的空间仿射变换, 使得由方程

$$L_A + 2L_B + L_C + 2L_D = 0$$

定义的平面也保持不变。说明理由。

12. 尤 §4.1: 7, 11; §4.2: 10, 13; §4.3: 15, 16