

作业 6

上交时间: 12 月 13 日

1. 给定仿射平面 Π , 那么 Π 的任何仿射变换都能唯一地延拓成射影平面 $P(\Pi)$ 的射影变换。讨论延拓的变换在无穷远线上可能的不动点个数。
2. 给定欧氏平面 Π , 是否存在一个射影平面 $P(\Pi)$ 的射影变换, 它保持 Π 中的一个给定圆不变, 但却不保持圆心不动?
3. 给定线射影直线 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$, 其齐次坐标分别为

$$[(1, 2, 3)], \quad [(2, -1, -1)], \quad [(0, 1, 1)], \quad [(-1, 1, 0)], \quad [(1, 5, 3)]$$

设 ℓ_1 与 ℓ_2 的交点为 A , ℓ_3 与 ℓ_4 的交点为 B 。

(a) 计算直线 AB 与 ℓ_5 的交点 C 。

(b) 计算点 A, B, C 的第四调和点 D 。

4. 每一个三阶可逆实矩阵 $A \in GL(3, \mathbb{R})$ 给出一个射影变换 $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, 在齐次坐标上形如

$$[X] \mapsto [AX]$$

- (a) 求证: 可逆数量矩阵构成 $GL(3, \mathbb{R})$ 的正规子群。把商群记作 $PGL(3, \mathbb{R})$ 。
 - (b) 求证: 上述变换诱导了一个 $PGL(3, \mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}P^2$ 上的群作用。
 - (c) 求证: $\mathbb{R}P^2$ 的每一个射影变换都能够并且唯一地由 $PGL(3, \mathbb{R})$ 中的元素实现。
5. 分别求满足以下要求的 $\mathbb{R}P^2$ 的射影变换, 用一个矩阵 $S \in GL(3, \mathbb{R})$ 写出。

(a) 要求把四点

$$A_1 = [(1, 0, 0)^T], \quad A_2 = [(0, 1, 0)^T], \quad A_3 = [(0, 0, 1)^T], \quad A_4 = [(1, 1, 1)^T]$$

相应地变换到

$$B_1 = [(1, 0, 1)^T], \quad B_2 = [(1, 2, 2)^T], \quad B_3 = [(-1, 1, 2)^T], \quad B_4 = [(7, 0, 2)^T]$$

(b) 要求把四点

$$P_1 = [(1, 0, 0)^T], \quad P_2 = [(1, 1, 0)^T], \quad P_3 = [(1, 1, 1)^T], \quad P_4 = [(4, 2, 1)^T]$$

相应地变换到

$$Q_1 = [(1, -1, -1)^T], \quad Q_2 = [(0, 1, -1)^T], \quad Q_3 = [(0, 0, 1)^T], \quad Q_4 = [(1, -2, 1)^T]$$

(提示: 参考 [尤, 第五章第 5.1 小节], 命题 5.7 的证明与例 5.7。)

6. 观看视频“Möbius Transformations Revealed” (链接在课程主页), 培养对 Möbius 变换的感觉。
7. 考虑分式线性变换 $f(z) = \frac{1+z}{z}$,

(a) 写出 $f(z)$ 在实坐标 (x, y) 下的坐标表达式。

(b) 写出 $f(z)$ 的任意 n 次迭代的表达式。(函数迭代定义与数学分析中一样。)

8. 求证: 除恒同而外, 分式线性变换在扩充复平面上总是只有一个或者两个不动点。
9. 平面上给定不相似的两个三角形 (作为顶点与边的并集), 是否存在一个 Möbius 变换把一个变成另一个? 证明你的结论。

10. 考虑所有这样的扩充复平面的 Möbius 变换: 它保持圆心在 0、半径为 1 的圆不变, 且把 0 映到 0。决定所有这样的变换, (用分式线性变换或共轭分式线性变换表示)。
11. 考虑所有这样的扩充复平面的 Möbius 变换: 它保持圆心在 2、半径为 2 的圆不变, 但把 2 映到 1。求证: 1 的所有可能的像都落在同一个圆上。
12. 把题 2 中的 $f(z)$ 写成尽可能少的反演的复合。
13. 求 $f(z) = \frac{z}{z+1}$ 的不动点。
14. 证明每个 Möbius 变换都是平移、缩放、旋转和反演的复合。
15. 求 $f(z) = \frac{z+i}{2z+3i}$ 的逆映射。
16. 求以 $3i$ 和 $1+i$ 为不动点的 (非平凡的) Möbius 变换。更一般地, 求以两个点 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 为不动点的 (非平凡的) Möbius 变换

[尤] §5.3: 5, 7, 10, 11, 12, 13

[尤] §5.4: 7, 9, 10; §5.5: 6, 8; §5.6: 4, 8, 10;