

15 交比

15.1 简单比与中心投影

如图34，我们考虑如下的中心投影

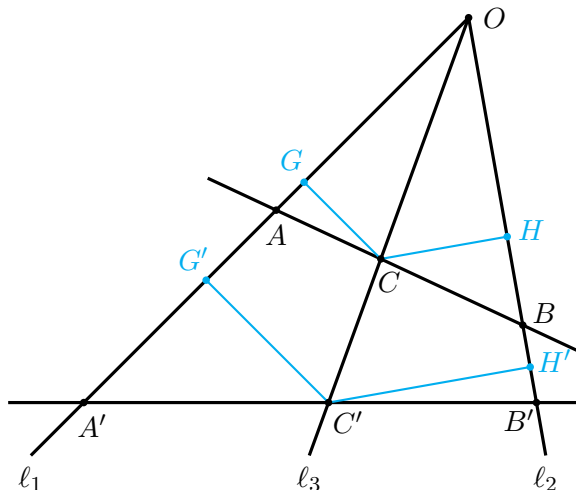


图 34: 中心投影下共线四点的简单比

简单比 (A, B, C) 与 (A', B', C') 相等当且仅当 $AB \parallel A'B'$ 。特别地，若 AB 与 $A'B'$ 不平行时，中心投影不保持简单比。

容易发现，简单比 (A, B, C) 与 (A', B', C') 的比值与 C 无关，若 D 为直线 AB 上另一点，则

$$\frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}$$

在中心投影下不变。

定义 15.1. 如图35，对共线的四点 A, B, C, D ，它们的交比 (cross-ratio) 定义为

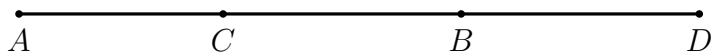


图 35: 共线四点的分比

$$(A, B; C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \bigg/ \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}} \quad (15.1)$$

点偶 A, B 叫做基点对，点偶 C, D 叫做分点对。

图34中，考虑共点于 O 的直线 l_1, l_2, l_3 ，共点于 O 的直线 l_1, l_2, l_3 的简单比 (ratio) 定义为

$$(l_1, l_2; l_3) = \frac{\sin \angle(l_1, l_3)}{\sin \angle(l_3, l_2)}$$

这里的角度是定向角，按逆时针为正向。

练习 15.2. 简单比 $(l_1, l_2; l_3)$ 与 l_3 的方向向量的选取无关。

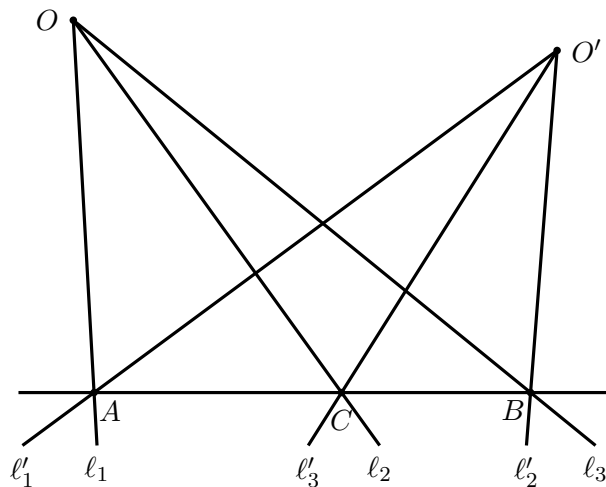


图 36: 中心投影下共点四线的简单比

共点的三条直线的简单比是否在中心投影下不变呢? 如图36, 则

$$(\ell_1, \ell_2; \ell_3) \cdot \frac{OA}{OB} = (A, B; C) = (\ell'_1, \ell'_2; \ell'_3) \cdot \frac{O'A}{O'B}$$

若 D 为直线 AB 上一点, $\ell_4 = OD, \ell'_4 = O'D$, 则

$$\frac{(\ell_1, \ell_2; \ell_3)}{(\ell_1, \ell_2; \ell_4)} = \frac{(A, B; C)}{(A, B; D)} = \frac{(\ell'_1, \ell'_2; \ell'_3)}{(\ell'_1, \ell'_2; \ell'_4)} \quad (15.2)$$

在中心投影下不变。

定义 15.3. 若 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 是共点的四线, 并且其中任何三条直线不同, 对每条直线选择一个定向, 则它们的交比 (cross ratio) 定义为

$$(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = \frac{(\ell_1, \ell_2; \ell_3)}{(\ell_1, \ell_2; \ell_4)} = \frac{\sin \angle(\ell_1, \ell_3)}{\sin \angle(\ell_3, \ell_2)} \bigg/ \frac{\sin \angle(\ell_1, \ell_4)}{\sin \angle(\ell_4, \ell_2)} = \frac{\sin \angle(\ell_1, \ell_3) \sin \angle(\ell_2, \ell_4)}{\sin \angle(\ell_1, \ell_4) \sin \angle(\ell_2, \ell_3)} \quad (15.3)$$

设 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 是空间中共面的向量, 且两两不同线。则 $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 对 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 有唯一的分解式

$$\mathbf{v}_3 = s_1 \mathbf{v}_1 + t_1 \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_4 = s_2 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \quad (15.4)$$

定义 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 的分比为

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) := \frac{t_1}{s_1} \bigg/ \frac{t_2}{s_2} = \frac{s_2 t_1}{s_1 t_2}$$

练习 15.4. 设 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 是平面上共点的向量, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 是它们的方向向量, 则

$$(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$$

定理 15.5 (交比的基本定理). 若 A, B, C, D 四点共线, 任何三点不相同, E 是线外一点, 则

$$(EA, EB; EC, ED) = (A, B; C, D). \quad (15.5)$$

定理在 [1] 里称为点线交比的协调性。证明由(15.2)给出。

命题 15.6. 设 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 是射影平面上共线的四点, 则有

$$1. (A_2, A_1; A_3, A_4) = (A_1, A_2; A_4, A_3) = \frac{1}{(A_1, A_2; A_3, A_4)};$$

$$2. (A_3, A_3; A_2, A_4) = 1 - (A_1, A_2; A_4, A_3);$$

$$3. (A_3, A_4; A_1, A_2) = (A_1, A_2; A_3, A_4)。$$

若 ∞ 是直线 AB 上的无穷远点，定义交比

$$(A, B; C, \infty) = (A, B; C) = -\frac{AC}{CB} \quad (15.6)$$

若 A, B, C, D 是对应于斜率为 a, b, c, d 的无穷远点，定义它们的交比为

$$(a, b; c, d) = \frac{c-a}{b-c} \bigg/ \frac{d-a}{b-d} \quad (15.7)$$

定义 15.7. 对射影平面 $P(\Sigma)$ 中共线的四点 A, B, C, D ，选取仿射平面中的点 O ，不在 A, B, C, D 所决定的直线上，定义 A, B, C, D 的交比 (cross ratio) 为

$$(A, B; C, D) = (OA, OB; OC, OD) \quad (15.8)$$

练习 15.8. 验证公式(15.6)及(15.7)在定义15.7下成立。

练习 15.9. 证明定义15.7与 O 的选取无关。

如图37所示，完全四边形是欧氏平面上由任意四条直线组成的图形，其中任意三条都不共点，且相交

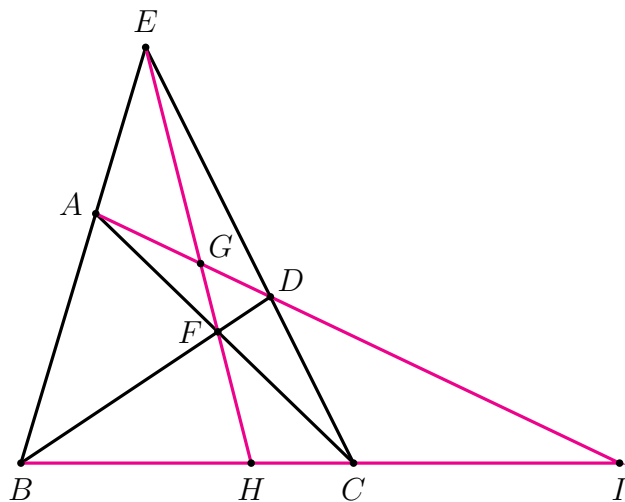


图 37: 完全四边形的调和点列

于六个点。则完全四边形的一条对角线与其他两条对角线的交点，调和地分开这条对角线的顶点。

命题 15.10. 如图37，直线 AC, BD, BE, CE 构成一个完全四边形，直线 AD, BC, EF 为对角线，则有

$$(E, F; G, H) = (B, C; H, I) = (A, D, G, I) = -1$$

证明. 根据交比的不变性，由 A 点的投影，有 $\lambda = (E, F; G, H) = (B, C; I, H)$ ；由 D 点的投影，有 $(F, E; G, H) = (B, C; I, H)$ 。根据定义，有 $(F, E; G, H) = \frac{1}{(E, F; G, H)} = \frac{1}{\lambda}$ 。因此， $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ 。由 E, F, G, H 四点的相对位置，可知 $\lambda < 0$ ，故

$$(E, F; G, H) = \lambda = -1.$$

□

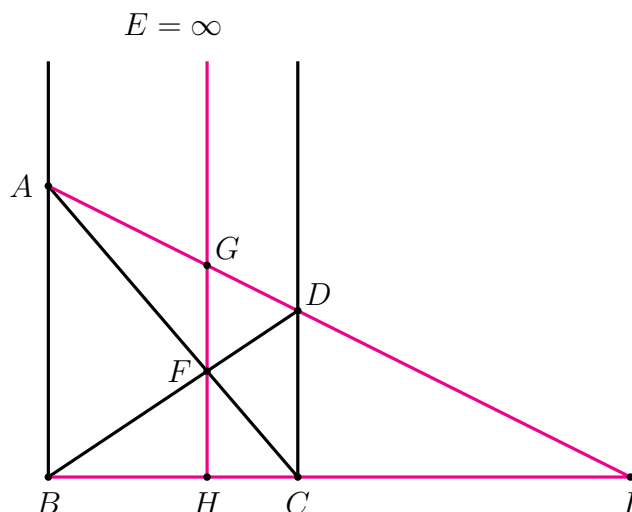


图 38: 完全四边形的调和点列特殊情形

完全四边形中有无穷远点的情形如图38所示。

定义 15.11. 若 $(A, B; C, D) = -1$, 则称四点 A, B, C, D 是调和的 (harmonic), 称 D 是 C 关于点 A, B 的调和共轭点 (harmonic conjugate), 或称 D 是 A, B, C 的第四调和点。

例 15.12 (调和第四点的取法). 设 A, B, C 是仿射平面 Σ 中直线 ℓ 上的三点, 求 A, B, C 的第四调和点。

若 C 是 A, B 的中点, 则 $(A, B; C) = 1$, 故 $(A, B; \infty) = -1$, 第四调和点为无穷远点 $\infty(\ell)$ 。

若 C 不是无穷远点, 则第四调和点 D 不是无穷远点。取不在直线 ℓ 上的点 O , 在线段 OC 上取点 G , 设 BG 交 OA 于 E , AG 交 OB 于 F , 则直线 EF 与 AB 的交点 D 即为 A, B, C 的第四调和点。这是命题15.10的直接推论。

定理 15.13. 交比是射影不变量: 若 A, B, C, D 是射影平面 $P(\Sigma)$ 中共线四点, $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$ 是射影变换, 则

$$(A, B; C, D) = (\phi(A), \phi(B); \phi(C), \phi(D))$$

证明. 如图39, 在中心投影之下, 若投影中心为仿射平面中的点, 则由定理15.5, 有

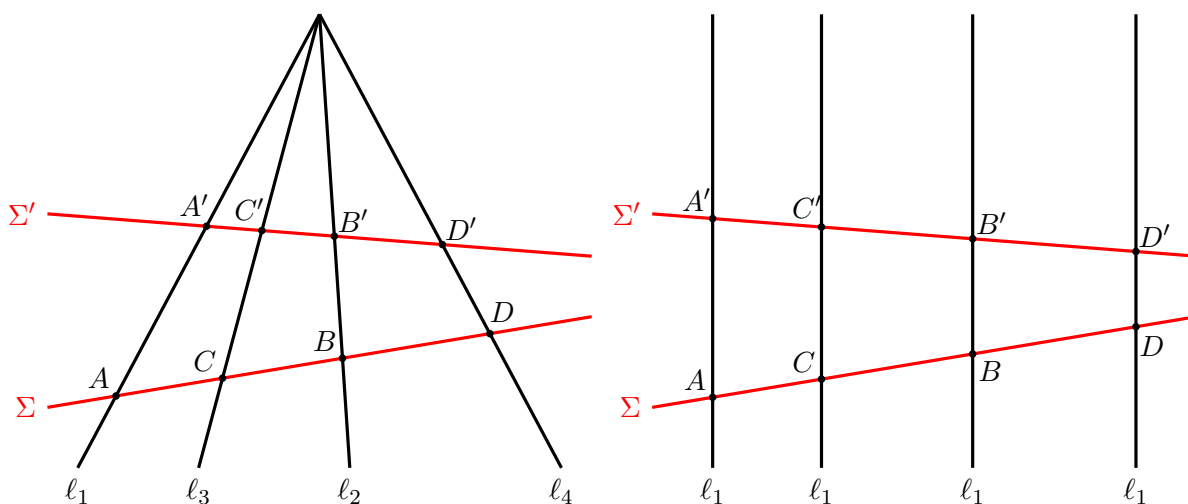


图 39: 射影变换保持交比

$$(A, B; C, D) = (\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = (A', B'; C', D')$$

若投影中心为无穷远点，则四直线平行，也有 $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ 。故中心投影保持交比不变。

在 $\Sigma \setminus \phi^{-1}(\ell^\infty)$ 中取一般位置的四点 P_1, P_2, P_3, P_4 ，则 $\phi(P_1), \phi(P_2), \phi(P_3), \phi(P_4)$ 也是 Σ 中处于一般位置的四点。由命题14.7，存在中心投影的复合 $\psi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$ ，使得 $\psi(P_i) = \phi(P_i)$ ，由定理14.13的唯一性，可知 ϕ 是中心投影的复合。而中心投影保持交比不变，故射影变换 ϕ 保持交比不变。 $\square$