

13 中心投影，射影平面的线向模型

13.1 Desargues 定理与中心投影

定理 13.1 (Desargues). 如图 22, 若三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的对应顶点连线共点于 O ,

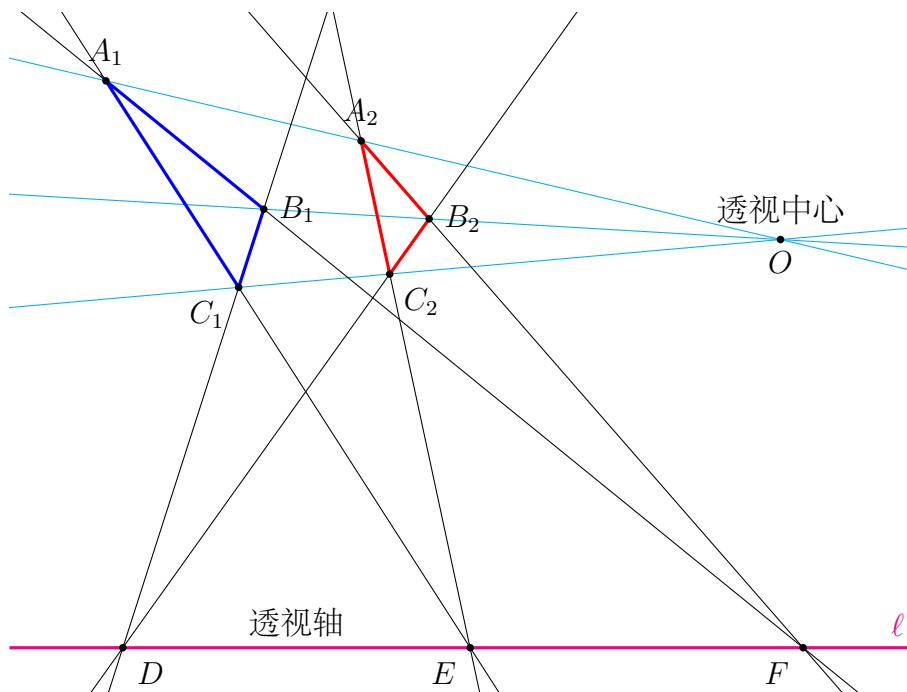


图 22: Desargues 定理

则其对应边之交点必共线于某直线 ℓ 。

定理 14.4 中的点 O 称为透视中心 (center of perspectivity), 直线 ℓ 称为透视轴 (axis of perspectivity)。定理 14.4 的逆定理亦成立。满足定理 14.4 的两个三角形称为透视的。

Desargues 定理有两个平行的情形。

定理 13.2. 如图 23, 若三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 对应顶点的连线共点于 O , 并且 $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, 直线 A_1B_1 与 A_2B_2 交于 E , 直线 C_1B_1 与 C_2B_2 交于点 F , 则直线 EF 与 A_1C_1 或 A_2C_2 平行。

定理 13.3. 如图 24, 若三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 对应顶点的连线共点于 O , 并且 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, 则 $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ 。

证明. 因 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, 故

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2}$$

因 $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, 故

$$\frac{OB_1}{OB_2} = \frac{OC_1}{OC_2}$$

由此有

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OC_1}{OC_2}$$

故 $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ 。

□

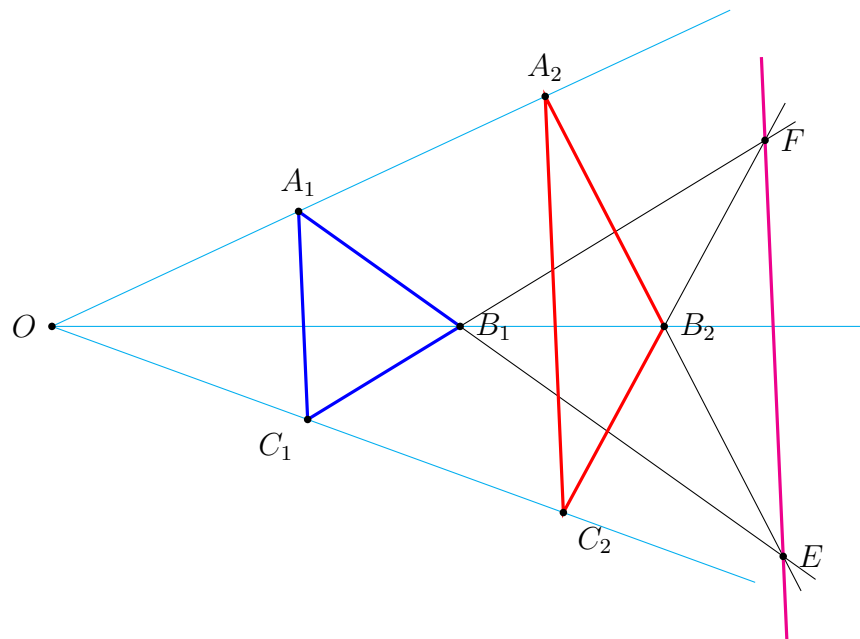


图 23: Desargues 定理: 一组对应边平行

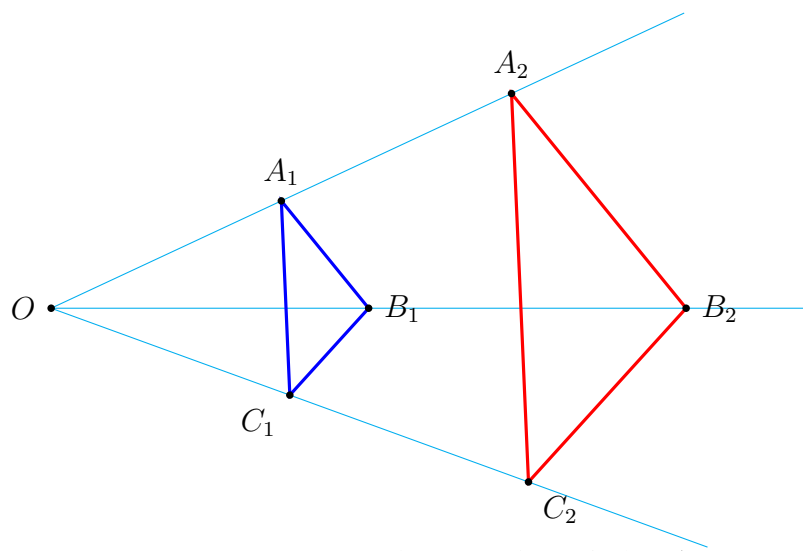


图 24: Desargues 定理: 两组对应边平行

13.2 中心投影

设 Σ 与 Σ' 是空间中两张不同的平面， O 是两平面外一点，从 O 出发的每条直线将 Σ 中的点映到 Σ' 上，记此映射为 ϕ ，称 ϕ 是以 O 为中心的中心投影，如图25所示。

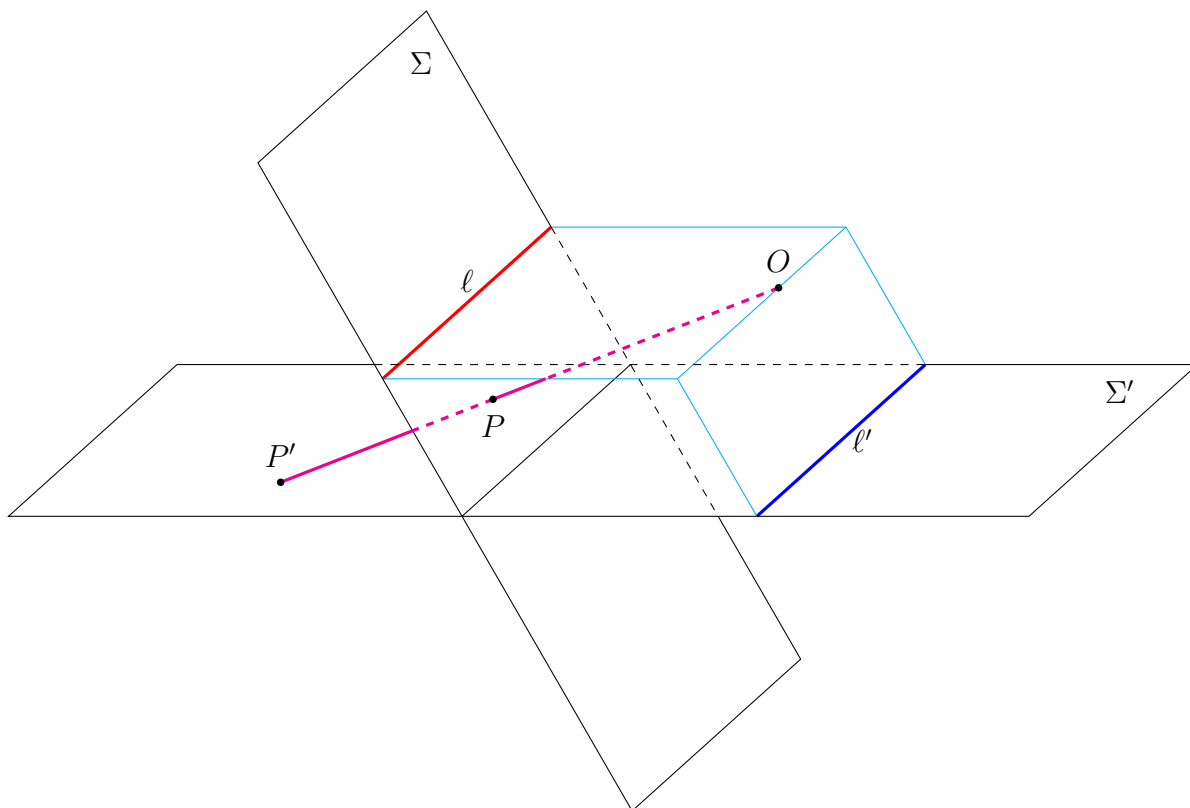


图 25: 中心投影

对中心投影，从局部看，直线的投影仍是直线，并且（平面）二次曲线的投影仍是二次曲线。但是，如图26所示，平行的直线经过投影后不一定是平行线；反之，不平行的直线经过投影后可能成为平行线（图26中交换 Σ 与 Σ' 即可）。圆在投影下的像可以是椭圆、抛物线或双曲线。一组相互平行的直线的投影可能是相交于同一点的一组直线，反之亦然。

若 Σ 与 Σ' 平行，则上述投影 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 是双射，并且把直线映为直线，从而 ϕ 是 Σ 到 Σ' 的仿射变换。

若 Σ 与 Σ' 不平行（如图25所示），这时大部分过 O 点的直线将 Σ 上的点投射到 Σ' 上，并将 Σ 中的直线映为 Σ' 中的直线。但也有例外的情况发生：过 O 点做与 Σ' 的平行平面交 Σ 于直线 ℓ ，过 O 点做与 Σ 的平行平面交 Σ' 于直线 ℓ' ，则 ℓ 中的点没有被投射到平面 Σ' 上，而没有 Σ 中的点被投射到 ℓ' 上。所以， Σ 与 Σ' 不平行时，以两平面外点 O 为中心的中心投影给出的映射是

$$\phi: \Sigma \setminus \ell \rightarrow \Sigma' \setminus \ell'.$$

通过进一步的观察，不难发现，所有平面 Σ 上过直线 ℓ 上一点 P 的直线被映为平面 Σ' 上的平行线，而平面 Σ 上的平行线被投射成平面 Σ' 上的一组直线，它们相交于 ℓ' 上的一点 P' ，参看图26。

为使得中心投影成为平面间的双射，在每张平面上增加一些“无穷远点”，使之成为“射影平面”。具体做法如下：

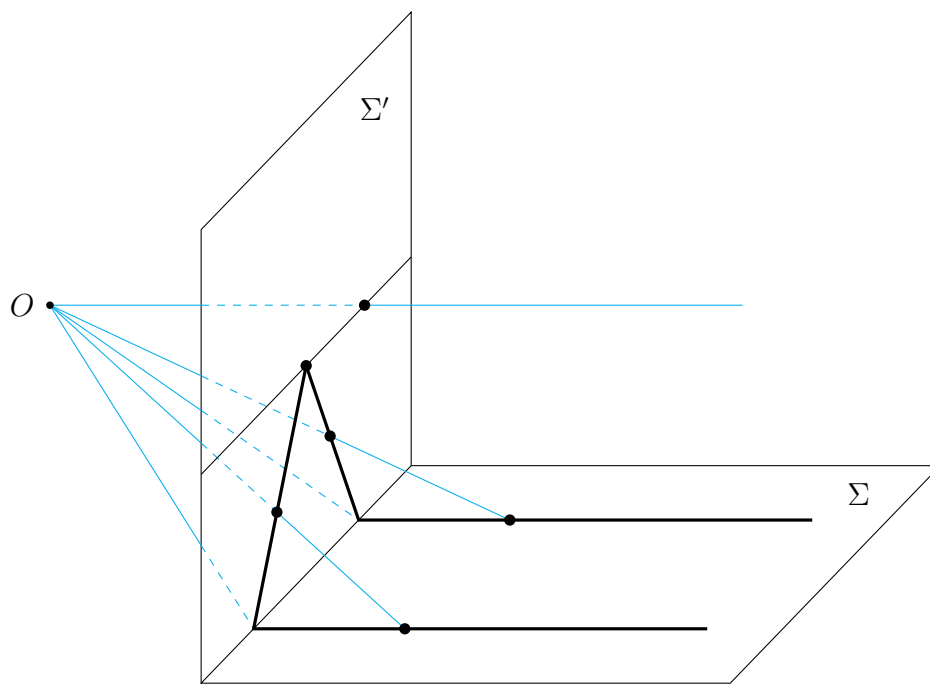


图 26: 平行直线的投影

1. 在平面 Σ 的每个直线方向 $v(l)$ 上增加一个无穷远点 $\infty(l)$ 。
2. 若直线 l 与 l' 平行, 则 $\infty(l) = \infty(l')$, 即平行的直线有相同的无穷远点。
3. 若直线 l 与 l' 相交, 则 $\infty(l) \neq \infty(l')$, 即不平行的直线有不同的无穷远点。

定义 13.4. 记所有无穷远点构成的集合为 ℓ_∞ , 称集合 $P(\Sigma) = \Sigma \cup \ell_\infty$ 为射影平面, 称 ℓ_∞ 为无穷远直线。

Σ 的射影平面 $P(\Sigma)$ 中有两类直线: 无穷远直线 ℓ_∞ , Σ 中直线 l 添加无穷远点 $\infty(l)$ 所得的 $l \cup \{\infty(l)\}$ 。

中心投影 $\phi: \Sigma \setminus \ell \rightarrow \Sigma' \setminus \ell'$ 可以扩充为 $P(\Sigma)$ 到 $P(\Sigma')$ 的映射:

1. 若 Σ 与 Σ' 平行, 则扩充后的中心投影 ϕ 将无穷远点 $\infty(l)$ 映为 Σ' 中平行于 l 的直线所对应的无穷远点。
2. 若 Σ 与 Σ' 相交, 则中心投影给出 $\phi: \Sigma \setminus \ell \rightarrow \Sigma' \setminus \ell'$ 的一一映射。扩充后, ϕ 将 $P(\Sigma)$ 的无穷远点 $\infty(l)$ 映为 $P(\Sigma')$ 中平行于 l 的直线对应的无穷远点; 当 P 从 l 的一端到另一端, 对应于 Σ' 中的无穷远点, 其线向从平行于 l 旋转 π 到平行于 l 。

练习 13.5. 思考 l 上的点与 Σ' 上平行线线向的关系。

Desargues 定理的证明. 设 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 所在平面为 Σ 。设直线 B_1C_1 与 B_2C_2 交于 D , 直线 A_1C_1 与 A_2C_2 交于 E , 直线 A_1B_1 与 A_2B_2 交于 F 。记过 D, E 的直线为 l 。

取射影映射 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$, 使得 ϕ 将 l 映为射影平面 $P(\Sigma')$ 的无穷远直线 ℓ_∞ 。对点 $P \in P(\Sigma)$, 记 $P' = \phi(P)$ 。则 $D', E' \in \ell_\infty$, 即 $B'_1C'_1 \parallel B'_2C'_2$, $A'_1C'_1 \parallel A'_2C'_2$ 。由定理 13.3 有 $A'_1B'_1 \parallel A'_2B'_2$, 即 $F \in \ell_\infty$ 。故 $D, E, F \in \phi^{-1}(\ell_\infty) = l \cup \{\infty(l)\}$ 。□

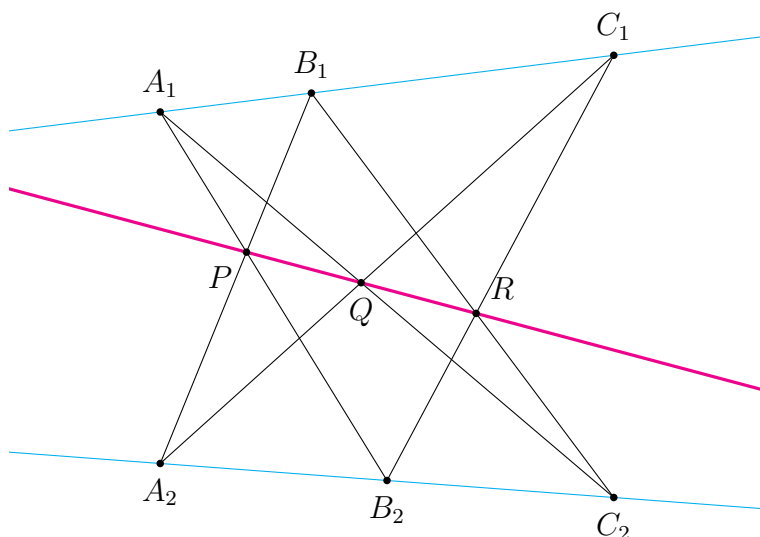


图 27: Pappus 定理

定理 13.6 (Pappus). 如图27, 设直线 ℓ_1 上依次有点 A_1, B_1, C_1 , 直线 ℓ_2 上依次有点 A_2, B_2, C_2 , 设 A_1B_2, A_2B_1 交于 P , A_1C_2, A_2C_1 交于 Q , B_1C_2, B_2C_1 交于 R , 则 P, Q, R 共线。

定理13.6中过 P, Q, R 的直线称为 Pappus 直线。

证明. 与 Desargues 定理的证明类似, 取射影映射 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$, 使得 ϕ 将 $P(\Sigma)$ 中过 P, Q 的直线 ℓ 映为射影平面 $P(\Sigma')$ 的无穷远直线 ℓ_∞ 。则 $P', Q' \in \ell_\infty$, 即 $A'_1B'_2 \parallel A'_2B'_1$, $A'_1C'_2 \parallel A'_2C'_1$, 只要证 $B'_1C'_2 \parallel B'_2C'_1$ 即可, 如图28所示, 其中 (a) 和 (b) 分别是 ℓ'_1 与 ℓ'_2 相交和平行的情形。

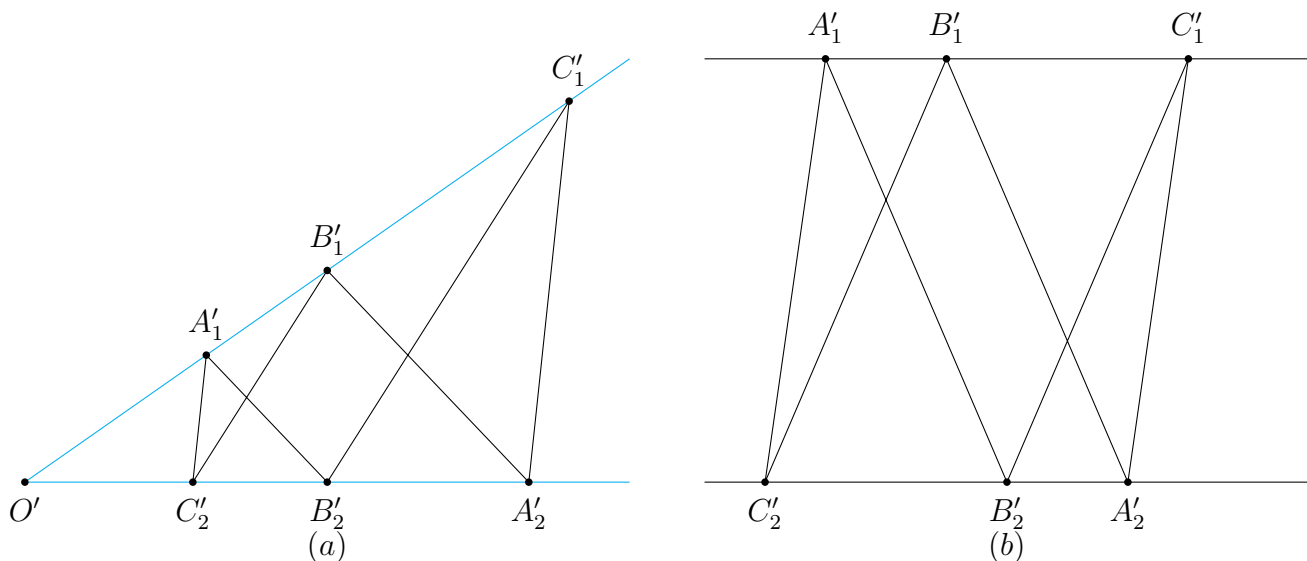


图 28: Pappus 定理的平行情形

若 ℓ'_1 与 ℓ'_2 相交于点 O' , 如图28(a), 则有

$$A'_1B'_2 \parallel A'_2B'_1 \implies O'A'_1 \cdot O'A'_2 = O'B'_1 \cdot O'B'_2, \quad A'_1C'_2 \parallel A'_2C'_1 \implies O'A'_1 \cdot O'A'_2 = O'C'_1 \cdot O'C'_2.$$

故有 $O'B'_1 \cdot O'B'_2 = O'C'_1 \cdot O'C'_2$, 从而 $B'_1C'_2 \parallel B'_2C'_1$ 。

若 $\ell'_1 \parallel \ell'_2$, 如图28(b), 则有

$$A'_1B'_2 \parallel A'_2B'_1 \implies A'_1B'_1 = A'_2B'_2, \quad A'_1C'_2 \parallel A'_2C'_1 \implies A'_1C'_1 = A'_2B'_2.$$

故 $B'_1C'_1 = B'_2C'_2$, 从而 $B'_1C'_2 \parallel B'_2C'_1$ 。

因此 $R' \in \ell_\infty$ 。故 $P, Q, R \in \phi^{-1}(\ell_\infty) = \ell \cup \{\infty(\ell)\}$ 。

□

命题 13.7. 设 Σ, Σ' 是空间中的平面, 则有

1. 射影平面 $P(\Sigma)$ 上任何两点确定唯一一条直线。
2. 射影平面 $P(\Sigma)$ 上任何两条不同直线有唯一交点。
3. 中心投影是 $P(\Sigma)$ 到 $P(\Sigma')$ 的双射, 将 $P(\Sigma)$ 中的直线映为 $P(\Sigma')$ 中的直线。

设 Σ 是空间中的平面, 取平面外一点 O 。记 $\mathbb{RP}^2$ 为空间中所有过 O 点的直线构成的集合。因 $\mathbb{RP}^2$ 中的每条直线 ℓ 交 $P(\Sigma)$ 于唯一的一点: 若 ℓ 与 Σ 相交, 则交点为 ℓ 与 $P(\Sigma)$ 的唯一交点; 若 ℓ 与 Σ 平行, 则 ℓ 与 $P(\Sigma)$ 的唯一交点为 Σ 中平行于 ℓ 的直线对应的无穷远点。于是射影平面 $P(\Sigma)$ 可以与 $\mathbb{RP}^2$ 等同, 记这个一一对应为 $\sigma: P(\Sigma) \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 。

$\mathbb{RP}^2$ 中的直线与以 O 点为中心的单位球面 S^2 的对径点一一对应, 故 σ 给出 $P(\Sigma)$ 到 S^2 的对径点的双射。在此映射下, $P(\Sigma)$ 的直线与 S^2 的大圆一一对应。 $P(\Sigma)$ 的无穷远直线 ℓ_∞ 对应于 S^2 与 Σ 平行的大圆上的对径点, 此大圆的对径点可被 S^1 参数化。