11 横截定理和管状邻域定理

问题 11.1. 设 $f:X\to Y$ 是光滑映射，$Z\subset Y$ 是子流形，f 是否与 Z 横截？

定理 11.2 (横截定理)**.** 设 $F:X\times S\to Y$ 是光滑映射，$\partial S=\partial Y=\emptyset$。设 Z 是 Y 的子流形，$\partial Z=\emptyset$。如果 F 和 ∂F 都与 Z 横截，则对几乎所有的 $s\in S$，f_s 和 ∂f_s 都与 Z 横截，这里 $f_s(x)=F(x,s)$。

证明. 由定理5.5, $W=F^{-1}(Z)$ 是 $X\times S$ 的带边子流形，边界为 $\partial W=W\cap\partial(X\times S)$。设 $p:X\times S\to S$ 是自然投射，记 $f_s=F(\cdot,s):X\to Y$。

断言. 若 s 是 $p:W\to S$ 的正则值，则 $f_s\pitchfork Z$；若 s 是 $\partial p=p\big|_{\partial W}:\partial W\to Z$ 的正则值，则 $\partial f_s\pitchfork Z$。

断言的证明. 设 $f_s(x)=F(x,s)=z\in Z$。对切向量 $a\in\mathcal{T}_zZ$，往证存在切向量 $v\in\mathcal{T}_xX$ 使得 $\mathrm{d}f_s(v)-a\in\mathcal{T}_zZ$。因 $F\pitchfork Z$，故

$$\mathrm{d}F_{(x,s)}\mathcal{T}_{(x,s)}(X\times S)+\mathcal{T}_zZ=\mathcal{T}_zY$$

故存在切向量 $b=(w,e)\in\mathcal{T}_xX\times\mathcal{T}_sS=\mathcal{T}_{(x,s)}(X\times S)$ 使得 $\mathrm{d}F_{(x,s)}(b)-a\in\mathcal{T}_zZ$。若 $e=0$，则

$$\mathrm{d}f_s(w)-a=\mathrm{d}F_{(x,s)}(w,0)-a=\mathrm{d}F_{(x,s)}(b)-a\in\mathcal{T}_zZ$$

现设 $e\neq 0$。$\mathrm{d}p:\mathcal{T}_xX\times\mathcal{T}_sS\to\mathcal{T}_sS$ 是到第二个因子的投射。因 s 是 p 的正则值，故存在切向量 $(u,e)\in\mathcal{T}_{(x,s)}W$。但 $F:W\to Z$，故 $\mathrm{d}F_{(x,s)}(u,e)\in\mathcal{T}_zZ$。令 $v=w-u$，则

$$\mathrm{d}f_s(v)-a=\mathrm{d}F_{(x,s)}\left[(w,e)-(u,e)\right]-a=\big(\mathrm{d}F_{(x,s)}(w,e)-a\big)-\mathrm{d}F_{(x,s)}(u,e)\in\mathcal{T}_zZ$$

因此 $f\pitchfork Z$。类似可得 ∂f 与 Z 的横截性。断言得证。 □

由 Sard 定理，几乎所有的 $s\in S$ 都是 p 和 ∂p 的共同的正则值，定理得证。 □

在定理11.2中设 $Y=\mathbb{R}^M$。若 $f:X\to\mathbb{R}^M$ 是光滑映射，取 S 为 $\mathbb{R}^M$ 中的开球，定义为 $F:X\times S\to\mathbb{R}^M$ 为

$$F(x,s)=f(x)+s$$

则对 $\forall x\in X$，$F(x,\cdot)$ 是开球 S 的平移，从而是淹没映射。故 F 是淹没映射，与 $\mathbb{R}^M$ 的任何子流形横截。由横截定理11.2，对几乎所有的 $s\in S$，映射 $f_s(x)=f(x)+s$ 与 Z 横截。

11.1 ε-邻域定理

定理 11.3 (ε-邻域定理)**.** 对任何无边界的流形 $Y\subset\mathbb{R}^M$，存在 Y 上的正值光滑函数 $\varepsilon:Y\to\mathbb{R}$ 使得

$$Y^\varepsilon=\left\{x\in\mathbb{R}^M\,\middle|\,\text{存在}\,y\in y\,\text{使得}\,d(x,Y)<\varepsilon(y)\right\}$$

中的任何点 w 都存在 Y 中唯一的距离最小的点 $\pi(w)$，并且映射 $\pi:Y^\varepsilon\to Y$ 是淹没映射。如果 Y 紧致，函数 ε 可取为常值。

设 $Y\subset\mathbb{R}^M$，Y 在 $y\in Y$ 点的法空间，记为 $\mathcal{N}_yY$，是 $\mathcal{T}_yY$ 在 $\mathbb{R}^M$ 中的正交补空间

$$\mathcal{N}_yY=\left\{v\in\mathbb{R}^M\,\middle|\,\text{对}\,\forall w\in\mathcal{T}_yY\,\text{有}\,v\cdot w=0\right\}$$

Y 在 $\mathbb{R}^M$ 中的法丛 $\mathcal{N}(Y)$ 定义为

$$\left\{(y,v)\in Y\times\mathbb{R}^M\,\middle|\,v\in\mathcal{N}_yY\right\}$$

有自然投射 $\sigma:\mathcal{N}(Y)\to Y$，定义为 $\sigma(y,v)=y$。

命题 11.4. 设 $X^k \subset \mathbb{R}^M$ 是光滑流形，则法丛 $\mathcal{N}(X)$ 是 M 维光滑流形，并且投射 $\sigma : \mathcal{N}(X) \to X$ 是淹没映射。

证明. 令 $\ell = M - k$。由定理4.1，对 $\forall x \in X$，存在开集 $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^M$ 和淹没映射 $\varphi : U \to \mathbb{R}^\ell$，使得 $U = X \cap \widetilde{U} = \varphi^{-1}(0)$。$\mathcal{N}(U) = \sigma^{-1}(U) = \mathcal{N}(X) \cap (U \times \mathbb{R}^M)$ 是 $\mathcal{N}(Y)$ 中开集。对 $\forall x \in U$，$\mathrm{d}\varphi_x : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^\ell$ 是线性满射，且 $\ker(\mathrm{d}\varphi_x) = \mathcal{T}_x X$，$\mathrm{d}\varphi_x$ 作为矩阵的转置给出同构

$$\mathbb{R}^\ell \xrightarrow{\quad (\mathrm{d}\varphi_x)^T \quad} \mathcal{N}_x(X) \subset \mathbb{R}^M$$

故映射

$$\Psi : U \times \mathbb{R}^\ell \to \mathcal{N}(U), \qquad \Psi(x, v) = \Big(x, (\mathrm{d}\varphi_x)^T(v)\Big)$$

□

引理 11.5. 设 (Y, d) 是度量空间，X 是闭子集，则对 X 的任何开邻域 U，存在 X 上的正值光滑函数 $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$，使得 $X^\varepsilon \subset U$，其中

$$X^\varepsilon = \big\{ y \in Y \,\big|\, \text{存在 } x \in X \text{ 使得 } d(x, y) < \varepsilon(x) \big\}$$

如果 X 是紧致的，则 ε 可取为常值。

证明. 定义函数 $\eta : X \to \mathbb{R}$ 为

$$\eta(x) = d(x, Y \setminus U)$$

则我们有 $|\eta(x_1) - \eta(x_2)| \leqslant d(x_1, x_2)$，故 η 连续。因 $Y \setminus U$ 闭，η 处处非零。由命题2.2，存在光滑函数 $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$，对 $\forall x \in X$ 满足 $0 < \varepsilon(x) < \eta(x)$。显然有 $X^\epsilon \subset U$。

若 X 紧致，则 $\varepsilon(x)$ 取得它在 X 上的最小值，并且非负。 □

引理 11.6. 设 $f : X \to Y$ 是光滑映射，Z 是 X 的子流形。若对 $\forall x \in Z$，$\mathrm{d}f_x : \mathcal{T}_x X \to \mathcal{T}_{f(x)} Y$ 是同构，并且 $f : Z \to f(Z)$ 是微分同胚，则存在 Z 的开邻域 U 和 $f(Z)$ 的开邻域 V，使得 $f : U \to V$ 是微分同胚。

证明. 对 $\forall z \in Z$，$\mathrm{d}f_z$ 是同构，故由反函数定理3.3，存在 z 的开邻域 U_z，使得 $f : U_z \to f(U_z)$ 是微分同胚。$\{f(U_z) \,|\, z \in Z\}$ 构成 $\bigcup_{z \in Z} f(U_z) \supset f(Z)$ 的开覆盖，这是 Y 的开子流形，所以有可数的局部有限的加细开覆盖 $\mathcal{V} = \{V_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$（命题1.9）。设 $V_n \subset f(U_{z_n})$，令 $U_n = f^{-1}(V_n) \cap U_{z_n}$。则 $\{U_n\}$ 构成 Z 的开覆盖，且 $f : U_n \to V_n$ 是微分同胚。令 $g_n : V_n \to U_n$ 为 $f : U_n \to V_n$ 的逆。

定义

$$\widetilde{W} = \left\{ y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \,\middle|\, \text{对} \forall y \in V_i \cap V_j \text{有} g_i(y) = g_j(y) \right\}$$

显然 $f(Z) \subset \widetilde{W}$，并且函数族 $\{g_i\}$ 拼接给出光滑映射 $g : \widetilde{W} \to X$。下证每个点 $y \in f(Z)$ 都是 $\widetilde{W}$ 的内点。如若不然，则存在点 $z_* \in Z$ 和序列 $y_n \to y_* := f(z_*)$，使得任何 y_n 有 $i_n, j_n \in \mathbb{N}$ 使得 $y_n \in V_{i_n} \cap V_{j_n}$ 且 $g_{i_n}(y_n) \neq g_{j_n}(y_n)$。因 $\{V_n\}$ 局部有限，通过取子序列，我们可以设 $i_n \equiv i$ 及 $j_n \equiv j$ 为常值。令 $a_n = g_i(y_n)$，$b_n = g_j(y_n)$。则 $a_n \to z_*$，$b_n \to z_*$ 并且 $f(a_n) = f(b_n) = y_n$，这与 f 在 z_* 附近是微分同胚矛盾。所以每个点 $y \in F(Z)$ 都是 $\widetilde{W}$ 的内点。

令 $W = \mathrm{int}(\widetilde{W})$，则 W 开并且 $f(Z) \subset W$，所以 W 是 $f(Z)$ 的开邻域。g 限制在 W 上是光滑映射（仍记为 g），并且 $f \circ g = \mathrm{id}_W$。只要证明 f 在 $U = g(W)$ 是单射即可。若 f 不单，则存在 $x_1, x_2 \in U$，使得 $x_1 \neq x_2$ 但 $f(x_1) = f(x_2)$。 □

定理11.3的证明. 考虑映射 $h : \mathcal{N}(Y) \to \mathbb{R}^M$，定义为 $h(y, v) = y + v$。

步骤 1. h 将 $Y \times \{0\}$ 在 $\mathcal{N}(Y)$ 中的某个开邻域 U 微分同胚地映为 Y 在 $\mathbb{R}^M$ 中的开邻域 V。

我们先证明 h 在 $Y\times\{0\}\subset\mathcal{N}(Y)$ 上正则。设 $(y,0)\in\mathcal{N}(Y)$，则 $Y\times\{0\}$ 是 $\{y\}\times\mathcal{N}_yY$ 是 $\mathcal{N}(Y)$ 的两个子流形。$\mathrm{d}h_{(y,0)}$ 将 $\mathcal{T}_{(y,0)}(Y\times\{0\})$ 映满 $\mathcal{T}_yY$，将 $\mathcal{T}_{(y,0)}(\{y\}\times\mathcal{N}_yY)$ 映满 $\mathcal{N}_y(Y)$，所以有

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}f)\supset\mathcal{T}_yY+\mathcal{N}_yY=\mathbb{R}^M=\mathcal{T}_y\mathbb{R}^M$$

这说明所有点 $(y,0)\in\mathcal{N}(Y)$ 都是 h 的正则点。

因 h 将 $Y\times\{0\}$ 微分同胚的映为 $Y\subset\mathbb{R}^M$，故由引理11.6，h 将 $Y\times\{0\}$ 在 $\mathcal{N}(Y)$ 中的某个开邻域 U 微分同胚地映为 Y 在 $\mathbb{R}^M$ 中的某个开邻域 V。

步骤 2. 存在正值光滑函数 $\varepsilon:Y\to\mathbb{R}$ 使得 $Y^\varepsilon\subset V$。

若 Y 紧致，则它是 $\mathbb{R}^M$ 的闭子流形，故由引理11.5，存在光滑的正值函数 $\varepsilon:Y\to\mathbb{R}$ 使得 $Y^\varepsilon\subset V$。对于一般情形，设 $y\in Y$，因 V 开，故存在 $\varepsilon_y>0$ 使得 $B^M(y,3\varepsilon_y)\subset V$。令 $U_y=B^M(y,\varepsilon_y)$，则 $U_y^{\varepsilon_y}\subset V$. $\{U_y\cap Y\,|\,y\in Y\}$ 构成 Y 的开覆盖，所以有可数的从属单位分解 $\{\lambda_i:Y\to[0,1]\,|\,i\in\mathbb{N}\}$。对 $i\in\mathbb{N}$，设 $\mathrm{supp}(\lambda_i)\subset U_{y_i}$，令 $\varepsilon_i=\varepsilon_{y_i}$ 及 $U_i=U_{y_i}=B^M(y_i,\varepsilon_{y_i})$。定义函数 $\varepsilon:Y\to\mathbb{R}$ 为

$$\varepsilon(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\lambda_i(x)$$

则对所有 $y\in Y$ 有 $\varepsilon(y)>0$。给定 $y\in Y$，$\lambda_i(y)>0$ 只对有限多个 $i\in\mathbb{N}$ 成立。设 $\lambda_j(y)>0$ 并且对任何使 $\lambda_i(y)>0$ 的 $i\in\mathbb{N}$ 有 $\varepsilon_j\geqslant\varepsilon_i$，则有 $\varepsilon(y)\leqslant\varepsilon_j$ 且 $d(y,y_j)<\varepsilon_j$。于是

$$B^M(y,\varepsilon(y))\subset B^M(y,\varepsilon_j)\subset B^M(y_j,2\varepsilon_j)\subset V$$

这表明 $Y^\varepsilon\subset V$.

定义 $\pi=\sigma\circ g:Y^\varepsilon\to Y$，则 π 是微分同胚与淹没映射的复合，故 π 是淹没映射。

步骤 3. 对任何 $w\in Y^\varepsilon$，$\pi(w)$ 是 Y 中距离 w 最近的唯一的点。

定义 $d_w:Y\to\mathbb{R}$ 为 $d_w(y)=d(w,y)$。往证 d_w 在 Y 上取得最小值。取 $y_*\in Y$ 使得 $d(w,y_*)<\varepsilon(y_*)$。取 y_j 使得 $\lambda_j(y_*)>0$ 并且对任何满足 $\lambda_i(y_*)>0$ 的 $i\in\mathbb{N}$ 有 $\varepsilon_j\geqslant\varepsilon_i$。我们有 $d(y_*,y_j)<\varepsilon_j$，$\varepsilon(y_*)<\varepsilon_j$ 且 $d(w,y_j)\leqslant d(w,y_*)+d(y_*,y_j)<2\varepsilon_j$。令 $\delta=2\varepsilon_j+\frac{1}{2}d(w,y_j)$，则

$$\varepsilon_j+d(w,y_j)<\delta<3\varepsilon_j$$

$\overline{B(y_j,\delta)}\subset V$ 紧致，从而 $h^{-1}(\overline{B(y_j,\delta)}\subset V)$ 在 $\mathcal{N}(Y)$ 中紧致。因 $Y\times\{0\}$ 在 $\mathcal{N}(Y)$ 中闭，故 $h^{-1}(\overline{B(y_j,\delta)}\cap(Y\times\{0\}$ 紧致，从而 $\overline{B(y_j,\delta)}\cap Y$ 紧致。所以当 d_w 限制到 $\overline{B(y_j,\delta)}\cap Y$ 上，取到它的最小值。对 $y\in Y\setminus B(y_j,\delta)$，我们有

$$d(y,w)>d(y,y_j)-d(y_j,w)\geqslant\delta-d(w,y_j)>\varepsilon_j\geqslant\varepsilon(y)>d(w,y_*)$$

所以 d_w 在 $B(y_j,\delta)$ 中某点 y_w 取得它在 Y 中的最小值。对从 w 到 y_w 的线段上的任何点 x，我们有

$$d(y_j,x)<d(y_j,w)+d(w,x)<2\varepsilon_j+d(w,y_w)\leqslant 2\varepsilon_j+d(w,y_*)<2\varepsilon_j+\varepsilon(y_*)<3\varepsilon_j$$

从而 $x\in V$.

现证 $w-y_w\in\mathcal{N}_yY$。设对某个 $v\in\mathcal{T}_yY$ 有 $(w-y_w)\cdot v>0$。由切空间的构造，存在 y_w 附近的参数化 $\varphi:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^M$ 和向量 $u\in\mathbb{R}^k$ 使得 $\varphi(0)=y_w$ 及 $d\varphi_0(u)=v$。定义曲线 $c:\mathbb{R}\to Y$ 为 $c(t)=\varphi(tu)$，定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $f(t)=|w-c(t)|^2$。则 0 是 $f(t)$ 的最小值点。f 的导数为

$$f'(t)=2(w-c(t))\cdot(-v)$$

特别地，在 0 处有 $f'(0)=-2(w-y_w)\cdot v<0$，这与 Fermat 定理矛盾。所以有 $w-y_w\in\mathcal{N}_nY$。

下证唯一性。设 $y_w \neq \pi(w)$。由 h 和 V 的构造，有 $w = h(\pi(w), y - \pi(w))$。因 $h: U \to V$ 是微分同胚，故 $w \notin h(\{y_w\} \times \mathcal{N}_{y_w}Y)$。令

$$t_0 = \inf\left\{t \in (0,1] \,\middle|\, y_w + t(w - y_w) \notin h(\{y_w\} \times \mathcal{N}_{y_w}Y)\right\}$$

等式右边集合包含 1，故非空。因 U 包含 0 在 $\mathcal{N}_{y_w}Y$ 中的一个开邻域，故 $t_0 > 0$。因 U 开，有 $y_w + t_0(w - y_w) \notin h(\{y_w\} \times \mathcal{N}_{y_w}Y)$。设 $y_w + t_0(w - y_w) = h(y, u)$，则 $y \neq y_w$ 从而存在 y 的不包含 y_w 的邻域 U_1。于是 $\sigma^{-1}(U_1)$ 是 (y, u) 在 U 中与 $\{y_w\} \times \mathcal{N}_{y_w}Y$ 不交的开邻域，$h(\sigma^{-1}(U_1)$ 是 $y_w + t_0(w - y_w)$ 在 V 中与 $h(\{y_w\} \times \mathcal{N}_{y_w}Y)$ 不交的开邻域。这与 t_0 的构造矛盾。所以由 $y_w = \pi(w)$，从而 $\pi(w)$ 是 Y 中与 w 距离最近的唯一的点。 □

命题 11.7. *设 X 和 Y 都是光滑流形，其中 $Y \subset \mathbb{R}^N$ 紧致。则对任何连续函数 $f: X \to Y$ 和 $\varepsilon > 0$，存在同伦于 f 的光滑函数 $h: X \to Y$ 使得对 $\forall x \in X$ 有*

$$\|h(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

若 f 在 X 的闭子集 E 的开邻域 $U \supset E$ 上光滑，则可要求在 E 的某个邻域上有 $h = f$。

证明. 由定理11.3，存在 $\delta: Y \to \left(0, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 及映射 $\pi: Y^\delta \to Y$，使得 $\pi(w)$ 为 Y 中距离 w 最近的点。由命题2.1，存在光滑映射 $g: X \to \mathbb{R}^N$，使得对 $\forall x \in X$ 有 $\|f(x) - g(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$。令 $h = \pi \circ g$，则 h 为光滑映射，并且对 $\forall x \in X$，有

$$\|f(x) - h(x)\| \leqslant \|f(x) - g(x)\| + \|g(x) - \pi(g(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

若 f 在 U 上光滑，则由命题2.1，可以选择 $g: X \to \mathbb{R}^N$，使得在 E 的某个开邻域 V 上有 $g = f$，而 π 在 X 为恒同映射，故 $h = f$ 在 V 上成立。 □

11.2 横截同伦与延拓

命题 11.8. *设 $f: X \to Y$ 是光滑映射，$\partial Y = \emptyset$。则存在某欧氏空间中的开球 S 和光滑映射 $F: X \times S \to Y$，使得 $F(x, 0) = f(x)$，并且对任何 $x \in X$，映射 $f_s: S \to Y$，$s \mapsto F(x, s)$ 是淹没映射，特别地，F 和 ∂F 均为淹没映射。*

证明. 设 $\mathbb{R}^M$ 是 Y 所在的欧氏空间，S 是 $\mathbb{R}^M$ 中的单位开球，定义函数 $F: X \times S \to Y$ 为

$$F(x, s) = \pi(f(x) + \varepsilon(f(x))s)$$

因 $\pi: Y^\varepsilon \to Y$ 限制在 Y 上是恒同映射，故对 $\forall x \in X$ 有 $F(x, 0) = f(x)$。对固定的 $x \in X$，映射 $s \to f(x) + \varepsilon(f(x))s$ 是平移和数乘，从而是 S 到 Y^ε 的淹没映射。映射 $s \mapsto F(x, s)$ 是两个淹没映射的复合，故是淹没映射。F 和 ∂F 限制在 $\{x\} \times S$ 是淹没，故本身是淹没映射。 □

定理 11.9 (横截同伦定理)**.** *设 $f: X \to Y$ 是光滑映射，$Z \subset Y$ 是 Y 的子流形，且 $\partial Y = \partial Z = \emptyset$，则存在同伦于 f 的光滑函数 $g: X \to Y$ 使得 $g \pitchfork Z$ 且 $\partial g \pitchfork Z$。*

证明. 设 $\mathbb{R}^M$ 是 Y 所在的欧氏空间，S 是 $\mathbb{R}^M$ 中的单位开球，定义函数 $F: X \times S \to Y$ 为

$$F(x, s) = \pi(f(x) + \varepsilon(f(x))s)$$

由命题11.8，F 和 ∂F 是淹没映射。由横截定理11.2，对几乎所有 $s \in S$，有 $f_s \pitchfork Z$ 且 $\partial f_s \pitchfork Z$。映射 $H: X \times [0,1] \to Y, H(x, t) = f_{ts}(x)$ 给出 f 到 f_s 的同伦。 □

定义 11.10. 设 $f: X \to Y$ 是光滑映射，C 是 X 的子集，Z 是 Y 的子流形。称 f 在 C 上与 Z 横截，若对任何 $x \in C \cap f^{-1}(Z)$，如下的横截性条件成立

$$\mathrm{d}f_x \mathcal{T}_x X + \mathcal{T}_{f(x)}(Z) = \mathcal{T}_{f(x)} Y$$

定理 11.11 (横截扩张定理)**.** 设 C 是光滑流形 X 的闭子集，Z 是光滑流形 Y 的闭子流形，满足 $\partial Y = \partial Z = \emptyset$。设 $f: X \to Y$ 是光滑映射，在 C 上有 $f \pitchfork Z$，在 $C \cap \partial X$ 上有 $\partial f \pitchfork Z$，则存在同伦于 f 的光滑映射 $g: X \to Y$，使得 $g \pitchfork Z$，$\partial g \pitchfork Z$，并且在 C 的某个开邻域上有 $g = f$。

引理 11.12. 设 C 是光滑流形 X 的闭子集，U 是 C 的开邻域，则存在光滑函数 $\gamma: [0,1]$，使得在 $X \setminus U$ 上有 $\gamma \equiv 1$，在 C 的某个开邻域上有 $\gamma \equiv 0$。

证明. 因 X 是正规空间，故存在 C 的开邻域 V，使得 $\overline{V} \subset U$。$\{U, X \setminus \overline{V}\}$ 是 X 的开覆盖，故有从属的可数的单位分解 $\{\lambda_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$。对 $\forall i \in \mathbb{N}$，有 $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subset U$ 或 $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subset X \setminus \overline{V}$ 成立。令 $\mathcal{I} = \{i \in \mathbb{N} \,|\, \operatorname{supp}(\lambda_i) \subset X \setminus \overline{V}\}$。定义函数 $\gamma: X \to [0,1]$ 和 $\delta: X \to [0,1]$ 为

$$\gamma(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i(x), \qquad \delta(x) = \sum_{i \in (N \setminus \mathcal{I})} \lambda_i(x)$$

则在 X 上，$\gamma(x) + \delta(x) \equiv 1$。对任何 $x \in V$ 和 $i \in \mathcal{I}$，因 $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subset X \setminus \overline{V}$，有 $\lambda_i(x) = 0$，从而 $\gamma(x) = 0$。同样，对任何 $x \in X \setminus U$ 和 $i \in (\mathbb{N} \setminus \mathcal{I})$，有 $\delta(x) = 0$，故 $\gamma(x) = 1$。 □

定理11.11的证明. 我们首先证明在 C 的某个开邻域 U 上有 $f \pitchfork Z$。若 $x \in C \setminus f^{-1}(Z)$，因 Z 闭，所以 $f^{-1}(Z)$ 闭，故存在。若 $x \in C \cap f^{-1}(Z)$，则存在 $f(x)$ 在 Y 中的邻域 W 和淹没映射 $\varphi: W \to \mathbb{R}^k$，使得在 $x_1 \in f^{-1}(W \cap Z)$ 有 $f \pitchfork Z$ 当且仅当 x_1 是 $\varphi \circ f$ 的正则点。因在 x 处 $f \pitchfork Z$，故 x 是 $\varphi \circ f$ 的正则点，故 $\varphi \circ f$ 在 x 的某个开邻域上正则。因而，对 $\forall x \in C$，在 x 的某个邻域上有 $f \pitchfork Z$，在 C 的某个邻域 U 上有 $f \pitchfork Z$。

由引理11.12，存在函数 $\gamma: X \to [0,1]$ 及 C 的开邻域 V，使得 $V \subset \overline{V} \subset U$，并且在 $X \setminus U$ 上 $\gamma \equiv 1$，在 V 上有 $\gamma \equiv 0$。令 $\tau(x) = (\gamma(x))^2$。则有 $\mathrm{d}\tau_x = 2\gamma(x)\,\mathrm{d}\gamma_x$，故当 $\tau(x) = 0$ 时有 $\mathrm{d}\tau_x = 0$。定义函数 $G: X \times S \to Y$ 为

$$G(x,s) = F(x, \tau(x)s) = \pi(f(x) + \varepsilon(f(x))\tau(x)s)$$

下证 $G \pitchfork Z$。任取 $(x,s) \in G^{-1}(Z)$，根据 $\tau(x)$ 是否为 0 分情况讨论

1. 设 $\tau(x) \neq 0$。则函数 $\delta(s) = G(x,s)$ 是微分同胚 $s \mapsto \tau(x)s$ 和淹没映射 $s \mapsto F(x,s)$ 的复合映射，故 δ 是 S 到 Y 的淹没映射。于是 (x,s) 是 G 的正则点，所以在 (x,s). 处有 $G \pitchfork Z$。
2. 设 $\tau(x) = 0$。我们计算 $\mathrm{d}G_{(x,s)}$。定义函数 $m: X \times S \to X \times S$ 为 $m(x,s) = (x, \tau(x)s)$，则有 $G = F \circ m$。对 $(v,w) \in \mathcal{T}_x X \times \mathcal{T}_s S = \mathcal{T}_x X \times \mathbb{R}^M$，有

   $$\mathrm{d}m_{(x,s)}(v,w) = (v, \tau(x)w + \mathrm{d}\tau_x(v)s) = (v,0)$$

   又因 $F(x,0) = f(x)$，我们有

   $$\mathrm{d}G_{(x,s)}(v,w) = \mathrm{d}F_{(x,\tau(x)s)} \circ \mathrm{d}m_{(x,s)}(v,w) = \mathrm{d}F_{(x,0)}(v,0) = \mathrm{d}f_x(v)$$

   $\tau(x) = 0$ 时，有 $x \in U$，且在 x 处有 $f \pitchfork Z$，故在 (x,s) 处有 $G \pitchfork Z$。

类似可证 $\partial G \pitchfork Z$。由定理11.9，可取 $s_0 \in S$ 使得映射 $g(x) = G(x, s_0)$ 满足 $g \pitchfork Z$ 及 $\partial g \pitchfork Z$。g 与 f 同伦，并且对任何 $x \in V$，有 $\tau(x) = 0$，从而

$$g(x) = G(x, s_0) = F(x,0) = f(x)$$

□

推论 11.13. 设 $f: X \to Y$ 是光滑映射，Z 是 Y 的闭子流形，$\partial f: \partial X \to Y$ 满足 $(\partial f) \pitchfork Z$，则存在同伦于 f 的光滑映射 $g: X \to Y$，使得 $\partial g = \partial f$ 且 $g \pitchfork Z$。

推论 11.14. 若 $h: \partial X \to Y$ 与 Y 的子流形 Z 横截，并且 h 可扩张为映射 $X \to Y$，则 h 可扩张为与 Z 横截的映射 $X \to Y$。

11.3 管状邻域

设 $X \subset \mathbb{R}^N$ 是光滑流形，Z 是 X 的子流形，Z 在 X 中的法丛定义为

$$\mathcal{N}(Z,X) = \left\{(z,v) \in Z \times \mathbb{R}^N \,\middle|\, v \in \mathcal{T}_z X \text{ 且对 } \forall u \in \mathcal{T}_z Z \text{ 有 } v \cdot u = 0\right\}$$

练习 11.15. 设 Z 是光滑流形 X 的子流形，证明

1. $\mathcal{N}(Z,X)$ 是维数为 $\dim X$ 的光滑流形。
2. 映射 $\sigma : \mathcal{N}(Z,X) \to Z, \sigma(z,v) = z$ 是淹没映射，映射 $s : Z \to \mathcal{N}(Z,X), s(z) = (z,0)$ 是嵌入映射。
3. $\mathcal{N}(Z,X)$ 是一个向量丛。

定义 11.16. 设 Z^ℓ 是光滑流形 X^k 的闭子流形，Z 在 X 中的一个管状邻域 (tubular neighborhood) 是指一个对 (f,ξ)，其中 $\xi = (p,E,Z)$ 是 Z 上的纤维为 $\mathbb{R}^{k-\ell}$ 的向量丛，$f : E \to X$ 将 E 微分同胚地映为 Z 的开邻域，并且对 $\forall z \in Z$ 有 $f(z,0) = z$。

定理 11.17 (管状邻域定理)**.** 设 Z 是 $X \subset \mathbb{R}^M$ 的子流形，则存在 Z 在 X 中的管状邻域。

证明. 设 $\pi : X^\varepsilon \to X$ 是由定理11.3给出的 X 在 $\mathbb{R}^M$ 中的一个 ε-邻域。定义映射

$$h : \mathcal{N}(Z,X) \to \mathbb{R}^M, \qquad h(z,v) = z + v$$

则 $W = h^{-1}(X^\varepsilon)$ 是 $Z \times \{0\}$ 在 $\mathcal{N}(Z,X)$ 中的开邻域，复合映射 $f = \pi \circ h : W \to X$ 在 Z 上的限制是恒同映射。

练习 11.18. 证明 $f : W \to f(W)$ 是微分同胚。

则存在光滑函数 $\rho : Z \to \mathbb{R}_+$，使得若 $\|v\| < \rho(z)$，则 $(z,v) \in W$。取微分同胚 $\lambda : [0,\infty) \to [0,1)$ 使得当 $t < \frac{1}{4}$ 时 $\lambda(t) = t$。定义 $g : \mathcal{N}(Z,X) \to \mathcal{N}(Z,X)$ 为

$$g(z,v) = \left(z, \rho(z)\lambda(\|v\|)\frac{v}{\|v\|}\right)$$

则 $g(\mathcal{N}(Z,X)) \subset W$，并且在 $Z \times \{0\}$ 的一个邻域上，g 为恒同映射。则 $(f \circ g, \mathcal{N}(Z,X))$ 给出管状邻域。 □

定义 11.19. 设 $(f_i, \xi = (p_i, E_i, Z))(i = 0,1)$ 是 $Z \subset X$ 的两个管状邻域，设映射 $F : E_0 \times [0,1] \to X$ 是相对于 Z 的同痕，满足

$$F_0 = f_0, \quad F_1(E_0) = f_1(E_1)$$

并且 $f_1^{-1} \circ F_1 : E_0 \to E_1$ 是 ξ_0 到 ξ_1 的丛同构，则称 F 为 (f_0,ξ_0) 到 (f_1,ξ_1) 的管状邻域同痕。

管状邻域同痕是 Z 在 X 的管状邻域上的等价关系。

定理 11.20. 设 Z 是 X 的子流形，$\partial Z = \partial X = \emptyset$，则 Z 在 X 中的任何两个管状邻域同痕。

证明. 设 $(f_i, \xi_i = (p_i, E_i, Z))(i = 0,1)$ 是 Z 在 X 中的两个管状邻域。

步骤 1. 首先设 $f_0(E_0) \subset f_1(E_1)$。

ξ_0 和 ξ_1 的切丛在 Z 上的限制有自然的分解

$$\mathcal{T}_Z(E_0)=\mathcal{T}(Z)\oplus\xi_0,\qquad \mathcal{T}_Z(E_1)=\mathcal{T}(Z)\oplus\xi_1$$

定义映射 $g=f_1^{-1}\circ f_0:E_0\to E_1$，$g$ 的导数 $\mathrm{d}g:\mathcal{T}(E_0)\to\mathcal{T}(E_1)$ 给出映射 $\Phi:\xi_0\to\xi_1$ 如下

$$\xi_0 \xhookrightarrow{\text{含入}} \mathcal{T}_Z(E_0) \xrightarrow{\mathrm{d}g} \mathcal{T}_Z(E_1) \xrightarrow{\text{projection}} \xi_1$$

因 f_0 和 f_1 是微分同胚，易知 Φ 是向量丛的同构。

定义从 Φ 到 g 的同伦 $H:E_0\times[0,1]\to E_1$ 如下

$$H(z,v,t)=\begin{cases}\dfrac{g(z,tv)}{t}, & t\in(0,1],\\ \Phi(z,v), & t=0.\end{cases}$$

断言. *H 是光滑映射。*

选取 Z、ξ_0 和 ξ_1 局部坐标，在局部坐标下，g 可表示为

$$g:U\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k, g(z,v)=(g_1(z,v),g_2(z,v)), g(x,0)=(x,0)$$

这里 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集。局部上，Φ 是 g 的沿纤维方向的导数

$$\Phi:U\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k,\quad \Phi(z,v)=\left(z,\frac{\partial g_2}{\partial v}(z,0)v\right)$$

这里 $\dfrac{\partial g_2}{\partial v}$ 对 $U\times\mathbb{R}^k$ 中的每个点，给定了线性映射 $\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$。$H$ 的局部表示是映射 $H:(U\times\mathbb{R}^k)\times[0,1]\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$。由 Taylor 公式，存在函数 $s:U\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$，使得

$$g_2(z,v)=\frac{\partial g_2}{\partial v}(z,0)v+\langle s(z,v),v\rangle,\qquad s(z,0)=0$$

这里 $\langle,\rangle$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的内积。

易验证 H 的第一个坐标是光滑函数 $U\times\mathbb{R}^m\times[0,1]\to\mathbb{R}^m$。第二个坐标为

$$\frac{\partial g_2}{\partial v}(z,0)v+\langle s(z,tv),v\rangle,\quad t\in[0,1]$$

显然是关于 (z,v,t) 的光滑函数，所以 H 是光滑函数。已验证 H 是一个同痕。

定义同伦 $F:E_0\times[0,1]\to X$ 为

$$F(z,v,t)=f_1^{-1}(H(z,v,1-t))$$

则 F 满足定理要求。

步骤 2. 一般情形。

我们需要将 E_0 压进开集 $f_0^{-1}f_1(E_1)\subset E_0$。定义同痕 $G:E_0\times[0,1]\to E_0$ 为

$$G(z,v,t)=(z,(1-t)v+th(v))$$

这里 $h:E_0\to E_0$ 定义为

$$h(v)=\left(\frac{\delta(p(y))}{1+y^2}\right)y$$

$\delta:M\to\mathbb{R}_+$ 是某个使当小的光滑函数。 □

定理 11.21. *设 Z 是 X 的子流形，满足 $\partial Z=Z\cap\partial X$，则 Z 在 X 中有管状邻域。*

定理 11.22. *设 Z 是 X 的子流形，满足 $\partial Z=Z\cap\partial X$，$U$ 是 ∂Z 在 ∂X 中的管状邻域，则存在 Z 在 X 中的管状邻域 V，使得 $U=V\cap\partial X$。*