几何学 I（实验班），2022 年秋季

作业 13

上交时间：12 月 16 日

1. 记 S 为所有无理数的集合，在 $\mathbb{R}$ 上，定义 $\mathcal{T}$ 为所有形如 $U \setminus A$ 的子集组成的集合，其中 U 为 $\mathbb{E}^1$ 中的开集，A 是 S 的子集。
   (a) 证明 $\mathcal{T}$ 给出了 $\mathbb{R}$ 上可分的拓扑；
   (b) 证明 $\mathcal{T}$ 满足 C_1 公理但不满足 C_2 公理；
   (c) 证明 $\mathcal{T}$ 满足 T_2 公理但不满足 T_3 公理；
   (d) 证明 $\mathcal{T}$ 在 S 上的子空间拓扑 $\mathcal{T}_S$ 是离散拓扑，从而 $(S, \mathcal{T}_S)$ 是不可分的。
2. 证明度量空间的任意闭子集都是可数多个开集的交。
3. 设 S^n 是 $\mathbb{E}^{n+1}$ 的单位球面。设 X 是度量空间，A 是 X 的闭子集。证明任意连续函数 $f : A \to S^n$ 可以连续延拓到 A 的一个开邻域（即连续延拓到 X 中某个包含 A 的开子集）。
4. 证明紧致的度量空间都是第二可数的。证明一个度量空间 X 是紧致的当且仅当任意连续函数 $f : X \to \mathbb{E}^1$ 有界。
5. 考虑平面的两个子集:$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$ 和 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$。证明它们互相同胚 (关于平面点集拓扑的子空间拓扑)。
6. 关于三维仿射空间的点集拓扑及其子空间拓扑，证明: 椭球面和单位球面相互同胚; 马鞍面、双叶双曲面和平面相互同胚; 单叶双曲面和圆柱面相互同胚。
7. 证明双曲平面和欧氏平面关于它们各自的度量拓扑相互同胚。但说明它们互不等距同构。
8. 通过球极投影，把扩充复平面等同为欧氏空间的单位球面，并用后者的点集拓扑定义前者的拓扑。证明：扩充复平面的 Möbius 变换都是同胚。
9. 考虑扩充复平面的自映射
$$f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$
   对于 $z \in \mathbb{C}, f(z) = z^2$，而 $f(\infty) = \infty$。用题 5 的拓扑定义证明: f 是连续映射但不是同胚。
10. 通过等同欧氏空间单位球面的对径点，在射影平面定义拓扑如下: 它的一个子集是开集，当且仅当这个子集在球面的原像是点集拓扑的开集。证明: 射影平面的射影变换都是同胚。
11. 证明：射影直线和射影圆锥曲线都是射影平面的闭子集。进一步，证明它们 (关于诱导的子空间拓扑) 相互同胚。
12. 证明圆锥面 $(x^2 + y^2 - z^2 = 0)$ 和任何非退化仿射二次曲面 (见题 3) 都不同胚。
13. 证明不存在射影平面的自同胚，而将射影直线变成射影圆锥曲线。
14. 如果 $f : S^1 \to \mathbb{E}^1$ 连续，证明 f 既不是单射也不是满射。如果 $f : S^2 \to \mathbb{E}^1$ 连续，证明存在 $t \in \mathbb{E}^1$ 使得 $f^{-1}(t)$ 不可数，并且至多存在两个 $\mathbb{E}^1$ 中的点，其逆像非空但可数。