

几何学 I (实验班), 2022 年秋季

作业 12

上交时间: 12 月 7 日, 可适当晚交

1. 证明 $\mathbb{R}^4$ 上的标准度量按如下方式诱导 $PSL(2, \mathbb{R})$ 上的度量: 对 $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad-bc=1$), 定义

$$\|T\| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$\|T\|$ 在 $PSL(2, \mathbb{R})$ 上是良定的。定义 $PSL(2, \mathbb{R})$ 上的度量为

$$d(T, S) := \|T - S\|, \quad \forall T, S \in PSL(2, \mathbb{R}) \quad (2)$$

2. 证明实数上所有形如 (a, ∞) 和 $[a, \infty)$ 的集合 ($a \in \mathbb{R}$), 与全集 $\mathbb{R}$ 和空集 $\emptyset$ 给出实数 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑。进一步地, 证明在该拓扑之下, 一个函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的, 当且仅当 f 是递增函数, 也就是说, 当 $x \geq y$ 时有 $f(x) \geq f(y)$ 。
3. 构造某个空间 (例如 $\mathbb{R}$) 上两个不可比较的拓扑。
4. 设 $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位实心球。明确写出下面空间之间的同胚
- (a) D^n 与 $\mathbb{R}^n$ 。
 - (b) $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ 与 $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D^n}$ 这里 O 是原点。
5. 在这个问题里我们将给出素数有无穷多个的拓扑证明。(一个大于 1 的自然数称为素数, 如果它只能被 1 和自身整除。)
- (a) 考虑所有的算术数列集合

$$S_{a,b} = a + b\mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

用这些集合 $S_{a,b}$ 构造 $\mathbb{Z}$ 上的一个拓扑, 证明他们满足拓扑公理。证明每个集合 $S_{a,b}$ 既是开集又是闭集。

- (b) 证明 $\{\pm 1\}$ 是闭集。
 - (c) 证明如果仅有有限多个素数, 那么集合 $\{\pm 1\}$ 是开集。证明集合 $\{\pm 1\}$ 不是开集, 从而素数有无穷多个。
6. 是否存在满的连续映射 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$? 为什么?
7. 构造从 $[0, 1]$ 到 S^2 的连续满映射。
8. 若 X, Y 可分, 证明 $X \times Y$ 可分。
9. 设 Y 是 Hausdorff 空间, $f: X \rightarrow Y$ 连续, 则 f 的图像 $G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ 是 $X \times Y$ 的闭子集。
10. 令 $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$ 。证明 $\mathcal{B}$ 所生成的 $\mathbb{R}$ 上的拓扑不是第二可数的。