几何学 I（实验班），2022 年秋季

作业 11

上交时间：11 月 30 日，可适当晚交

1. 双曲三角形是否总有内切圆？是否总有外接圆？

2. 当 $h \to +\infty$ 时，问上半平面的点 $1+hi$ 和 $-1+hi$ 之间的双曲距离如何变化？当 $h \to 0+$ 时又如何变化？

3. 写出双曲余弦函数和双曲正弦函数的倍角、半角公式。约定双曲反三角函数的定义域和值域分别为

$$\mathrm{arccosh}:[1,+\infty)\to[0,+\infty), \qquad \mathrm{arcsinh}:(-\infty,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$$

   用基本初等函数写出它们的表达式。

4. 双曲正多边形是以测地线段为边的凸多边形，且其边长都相等，内角也都相等。当双曲正八边形的内角都为 $\frac{\pi}{4}$ 时，计算其边长的双曲余弦值。

5. 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 上，有序的相异的两点 A,B 决定的*双曲平移* $\tau_{AB}:\mathbb{H}\to\mathbb{H}^2$ 是如下定义的保距变换：它保持 A,B 所在的测地线不变，没有不动点，并且把点 A 变到点 B。如果 A,B,C 是双曲三角形的顶点，求证：复合变换 $\tau_{CA}\circ\tau_{BC}\circ\tau_{AB}$ 以点 A 为唯一的不动点。(提示：对于任意点 P，考虑测地线段 AP 的运动。)

6. 证明：双曲半径为 r 的双曲圆的周长为 $2\pi\sinh(r)$。

7. 在上半平面模型中，直接证明欧氏圆也是双曲圆，双曲圆都是欧氏圆。并给出双曲圆心和欧氏圆心之间的关系。

8. 证明：上半平面模型中的三点 $P_1=(-2,1), P_2=(0,1)$ 和 $P_3=(2,1)$ 不在任何双曲圆上，也不在任何双曲直线上。故在双曲几何中，不共线的三点不一定共圆。何时不同线的三点在一个双曲圆上？

9. 给定双曲直线 ℓ 和 ℓ 外的一点 z_0，证明存在经过 z_0 的与 ℓ 垂直的双曲直线。这样的垂直直线是否唯一？

10. 在圆盘模型中，考虑顶点分别在 $0, \frac{1}{2}$, 和 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$ 的双曲三角形。计算该三角形的面积。

11. 设双曲三角形 ABC 的边长分别为 a,b,c，则 ABC 的面积 S 满足

$$\cos(S)=\frac{\left(\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta\gamma\right)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} \tag{1}$$

$$\tan\left(\frac{S}{2}\right)=\frac{\Delta}{1+\alpha+\beta+\gamma} \tag{2}$$

$$\sin\left(\frac{S}{2}\right)=\frac{\Delta}{4\cosh\left(\frac{a}{2}\right)\cosh\left(\frac{b}{2}\right)\cosh\left(\frac{c}{2}\right)} \tag{3}$$

   其中

$$\alpha=\cosh(a),\beta=\cosh(b),\gamma=\cosh(c), \qquad \Delta=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\gamma}$$

   （提示：用正弦定理、余弦定理和 Gauss-Bonnet 公式）