

几何学 I (实验班), 2022 年秋季

作业 10

上交时间: 11 月 23 日

1. 观看视频“Möbius Transformations Revealed”(链接在课程主页), 培养对 Möbius 变换的感觉。
2. 考虑分式线性变换 $f(z) = \frac{1+z}{z}$,
 - (a) 写出 $f(z)$ 在实坐标 (x, y) 下的坐标表达式。
 - (b) 写出 $f(z)$ 的任意 n 次迭代的表达式。(函数迭代定义与数学分析中一样。)
3. 求证: 除恒同而外, 分式线性变换在扩充复平面上总是只有一个或者两个不动点。
4. 平面上给定不相似的两个三角形 (作为顶点与边的并集), 是否存在一个 Möbius 变换把一个变成另一个? 证明你的结论。
5. 考虑所有这样的扩充复平面的 Möbius 变换: 它保持圆心在 0、半径为 1 的圆不变, 且把 0 映到 0。决定所有这样的变换, (用分式线性变换或共轭分式线性变换表示)。
6. 考虑所有这样的扩充复平面的 Möbius 变换: 它保持圆心在 2、半径为 2 的圆不变, 但把 2 映到 1。求证: 1 的所有可能的像都落在同一个圆上。
7. 把题 2 中的 $f(z)$ 写成尽可能少的反演的复合。
8. 求 $f(z) = \frac{z}{z+1}$ 的不动点。
9. 证明每个 Möbius 变换都是平移、缩放、旋转和反演的复合。
10. 求 $f(z) = \frac{z+i}{2z+3i}$ 的逆映射。
11. 求以 $3i$ 和 $1+i$ 为不动点的 (非平凡的) Möbius 变换。更一般地, 求以两个点 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 为不动点的 (非平凡的) Möbius 变换