几何学实验班, 2022 年秋季

作业 9

上交时间：11 月 16 日

1. 给定线射影直线 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$，其齐次坐标分别为

$$[(1,2,3)], \qquad [(2,-1,-1)], \qquad [(0,1,1)], \qquad [(-1,1,0)], \qquad [(1,5,3)]$$

设 ℓ_1 与 ℓ_2 的交点为 A，ℓ_3 与 ℓ_4 的交点为 B。

(a) 计算直线 AB 与 ℓ_5 的交点 C。

(b) 计算点 A, B, C 的第四调和点 D。

2. 每一个三阶可逆实矩阵 $A \in GL(3,\mathbb{R})$ 给出一个射影变换 $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$，在齐次坐标上形如

$$[X] \mapsto [AX]$$

(a) 求证：可逆数量矩阵构成 $GL(3,\mathbb{R})$ 的正规子群。把商群记作 $PGL(3,\mathbb{R})$。

(b) 求证：上述变换诱导了一个 $PGL(3,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}P^2$ 上的群作用。

(c) 求证：$\mathbb{R}P^2$ 的每一个射影变换都能够并且唯一地由 $PGL(3,\mathbb{R})$ 中的元素实现。

3. 分别求满足以下要求的 $\mathbb{R}P^2$ 的射影变换，用一个矩阵 $S \in GL(3,\mathbb{R})$ 写出。

(a) 要求把四点

$$A_1 = \left[(1,0,0)^T\right], \qquad A_2 = \left[(0,1,0)^T\right], \qquad A_3 = \left[(0,0,1)^T\right], \qquad A_4 = \left[(1,1,1)^T\right]$$

相应地变换到

$$B_1 = \left[(1,0,1)^T\right], \qquad B_2 = \left[(1,2,2)^T\right], \qquad B_3 = \left[(-1,1,2)^T\right], \qquad B_4 = \left[(7,0,2)^T\right]$$

(b) 要求把四点

$$P_1 = \left[(1,0,0)^T\right], \qquad P_2 = \left[(1,1,0)^T\right], \qquad P_3 = \left[(1,1,1)^T\right], \qquad P_4 = \left[(4,2,1)^T\right]$$

相应地变换到

$$Q_1 = \left[(1,-1,-1)^T\right], \qquad P_2 = \left[(0,1,-1)^T\right], \qquad Q_3 = \left[(0,0,1)^T\right], \qquad P_4 = \left[(1,-2,1)^T\right]$$

(提示: 参考 [尤，第五章第 5.1 小节]，命题 5.7 的证明与例 5.7。)

4. [尤] §5.4：7, 9, 10；§5.5：6, 8；§5.6：4, 8, 10；