

几何学实验班, 2022 年秋季

作业 5

上交时间: 10 月 19 日, 可适当晚交

1. 考虑空间中直线

$$\ell_0 : \begin{cases} 3x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

使其绕直线

$$k : x = y = z$$

旋转一周, 获得圆锥面 S 。

(a) 写出曲面 S 的方程并画图。

(b) 描述所有保持 S 不变 (作为点集) 的空间保距变换, 并说明理由。

2. 曲面 $S : x^2 + y^2 + xy - 2xz - yz = 0$ 是否是正圆锥? 说明理由。

3. 空间中单位立方体 $ABCD - A'B'C'D'$, (其中 $ABCD$ 是一个侧面正方形, 而 $A'B'C'D'$ 是其对侧正方形, 对应顶点相邻)。

(a) 考虑所有与边 AA' , $B'C'$, CD 所在的三条直线同时相交的直线。它们的并集构成哪种 (仿射) 二次曲面? 请说明理由。

(b) 决定并描述包含直线 AA' 的那一族直母线。

4. 给定空间中的单位立方体 P (作为包含全体顶点、边、面、内部点的点集), 所有保持 P 不变的空间保距变换总共有多少个? 用比较简明的语言枚举它们全部。

5. 平面旋转变换 ϕ_1, ϕ_2 分别以 O_1, O_2 为中心, 问 $\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_2 \circ \phi_1$ 何时成立? 说明理由。

6. 假设 $A, B, C, D \in \mathbb{E}^3$ 是处于一般位置 (即不共面) 的四个点, 用 $L_A : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 表示一个线性函数, 满足

$$L_A(A) = 1, L_A(B) = L_A(C) = L_A(D) = 0$$

L_B, L_C, L_D 类似定义。试找出所有保持四点 A, B, C, D (作为集合) 不变的空间仿射变换, 使得由方程

$$L_A + 2L_B + L_C + 2L_D = 0$$

定义的平面也保持不变。说明理由。

尤 §4.1: 7、11; §4.2: 10、13; §4.3: 15、16