11 群的定义与简介

定义 11.1. 设 G 是一个集合，G 上的一个群结构 (group structure) 包含如下信息

1. 一个特定的元素 $e \in G$，称为*恒等元*；
2. 一个二目运算 $G \times G \to G$ 称作*乘法*，记作 $(g,h) \mapsto gh$；
3. 以及一个单目运算 $G \to G$ 称作*取逆*，记作: $g \mapsto g^{-1}$。

满足如下条件：

1. 恒等元是乘法的左右*单位*，即对于任意 $g \in G$，有 $eg = ge = g$；
2. 乘法满足结合律，即对于任意 $g, h, k \in G$，有
$$(gh)k = g(hk) \tag{11.1}$$
3. 取逆运算给出乘法的左右*逆元*，即对于任意 $g \in G$，有
$$g^{-1}g = gg^{-1} = e.$$

指定了群结构的集合 G 就称为一个抽象的*群* (group)。

例 11.2. 整数群，仿射变换群，保距变换群。

练习 11.3. *验证就任何群而言，其乘法的左右单位必须唯一，其乘法的左右逆元必须唯一，乘积的取逆等于取逆的反序乘积，取逆再取逆等于恒同。*

例 11.4. 设 X 是一个集合，则全体可逆映射 $\sigma : X \to X$ 组成一个群 $\mathrm{Perm}(X)$，即 X 的*置换群* (group of permutations)：恒同变换是其恒等元，映射的复合是其乘法，映射的取逆是取逆运算。特别地，有限集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的置换群称为*n 元对称群* (symmetric group on n elements)，通常记作 S_n。S_n 中的元素常常记作
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$
的形式，下边行是上边行的一个排列，意思是 $\sigma(k) = i_k$。因为我们的映射遵循左式记号，即 $(\sigma\tau)(k) = \sigma(\tau(k))$，所以，记号的乘法形如:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

例 11.5. 设 X 是一个集合，A 是其子集，则所有保持 A 不变的置换 (即满足 $\sigma(A) = A$ 者) 构成也一个群，称为置换群 $\mathrm{Perm}(X)$ 的关于 A 的*稳定化子群* (stabilizer)。这个构造给出置换群的许多子群的例子，但不是全部。比如轮换 (rotation)
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$
生成的群实际上由置换 $\mathbb{1}, \tau, \tau^2, \cdots, \tau^{n-1}$ 构成，它却没有非平凡的不变子集合。和它同构的群称为*n 阶循环群* (cyclic group of order n)，通常记作 C_n。

定义 11.6. 两个群 G、H 之间的一个*同态* (homomorphism) 就是一个保持乘法的映射 $\phi: G \to H$，即对于任意 $g_1, g_2 \in G$，有

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) \tag{11.2}$$

若群同态 $\phi: G \to H$ 既单又满，则称 ϕ 为*群同构* (isomorphism)。

例 11.7. 仿射变换诱导的向量变换给出同态

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3) \to GL(\mathbb{V}(\mathbb{E}^3)), \qquad \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3) \to GL(\mathbb{V}(\mathbb{E}^3))$$

练习 11.8. *验证群同态把恒等元映到恒等元，互逆元素映到互逆元素。*

群 G 到自身的同态称为 G 的*自同态* (endomorphsim)，群 G 到自身的同构称为*自同构* (automorphism)。群 G 上所有自同态的集合记为 $\mathrm{End}(G)$，所有自同构的集合记为 $\mathrm{Aut}(G)$。$\mathrm{Aut}(G)$ 在映射的复合下，本身也构成一个群，称为 G 的*自同构群* (automorphism group)。

定义 11.9. 设 G 是一个群，X 是一个集合。群 G 在 X 上的一个*作用* (action) 是指一个映射 $\alpha: G \times X \to X$，写作 $(g, x) \mapsto \alpha_g(x)$，要求满足

$$\alpha_e(x) = x, \qquad \alpha_{gh}(x) = \alpha_g(\alpha_h(x)).$$

对每个 g，α_g 可看做 X 到 X 的映射 $x \mapsto \alpha_g(x)$。因

$$\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} = \alpha_{gg^{-1}} = \alpha_e = \mathbb{1}$$

故 α_g 是单射，同理，α_g 也是满射，故是 X 到自身的双射。若对所有的 $g \in G$，$\alpha_g: X \to X$ 是恒同映射，则称该作用是*平凡的*。

群在集合上的每个作用可以等价地刻画为一个同态 $\phi: G \to \mathrm{Perm}(X)$：给定群作用，定义置换 $\phi(g): X \to X$ 为 $x \mapsto \alpha_g(x)$；反过来，任何同态 $\phi: G \to \mathrm{Perm}(X)$ 也唯一地给出群作用 $(g, x) \mapsto \phi(g)(x)$。这个两个过程是自然而且互逆的。

例 11.10. 空间的仿射变换群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3)$ 作用在 $\mathbb{E}^3$ 上，通过取相应的向量变换，$\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3)$ 也作用在向量空间 $\mathbb{V}(\mathbb{E}^3)$ 上。保距变换群 $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)$ 也作用在 $\mathbb{E}^3$ 和 $\mathbb{V}(\mathbb{E}^3)$ 上。平移变换群 $\mathrm{Transl}(\mathbb{E}^3)$ 在 $\mathbb{E}^3$ 上的作用是非平凡的，但在 $\mathbb{V}(\mathbb{E}^3)$ 上的作用是平凡的。

设 G 是一个群。它在自己上有三个自然的作用：

1. 左作用 $L_h(g) = hg$，
2. 右作用 $R_h(g) = gh^{-1}$，
3. 共轭作用 $\sigma_h(g) = hgh^{-1}$(conjugation)。

练习 11.11. *证明：群的共轭作用给出群的自同构，即 $\sigma_h: G \to G, \sigma_h(g) = hgh^{-1}$ 是群同构。*

练习 11.12. *对于任意群同态 $\phi: G \to H$，验证它的核*

$$\ker(\phi) = \{ g \in G \,|\, \phi(g) = e \in H \}$$

构成一个群，且它在共轭作用下不变，即对于任意 $g \in G$，有 $\sigma_g(\ker(\phi)) = \ker(\phi)$；它的像

$$\mathrm{Im}(\phi) = \{ \phi(g) \in H \,|\, g \in G \}$$

也构成一个群。

定义 11.13. 给定群 N、H 及群 H 在 N 上的作用 $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N)$，我们可以定义抽象的*半直积* (semi-direct product) $N \rtimes_\alpha H$ 为集合 $N \times H$ 并赋予乘积

$$(n, h)(n', h') = (n\alpha_h(n'), hh')$$

如果同态 $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N)$ 是平凡的，则是直积（笛卡尔积），这时乘积为

$$(n, h)(n', h') = (nn', hh')$$

例 11.14. 对于保距变换群 $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)$，取定点 $O \in \mathbb{E}^3$，由命题10.9，每个保距变换 ϕ 有分解 $\phi = \tau \circ \psi$，其中 $\tau \in \mathrm{Transl}(\mathbb{E}^3)$，$\psi \in \mathrm{Stab}_O(\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3))$。对 $\phi = \tau\psi, \phi' = \tau'\psi' \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)$，有 $\phi\phi' = \tau\sigma_\psi(\tau')\psi\psi'$。若定义 $\mathrm{Stab}_O(\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3))$ 在 $\mathrm{Transl}(\mathbb{E}^3)$ 上的作用为在 $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)$ 中的共轭，即

$$\alpha : \mathrm{Stab}_O(\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)) \to \mathrm{Aut}\left(\mathrm{Transl}(\mathbb{E}^3)\right), \qquad \alpha_\psi(\tau) = \psi\tau\psi^{-1}$$

其中等式右边是在 $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)$ 中保距变换的复合。则有如下的半直积分解

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3) = \mathrm{Transl}(\mathbb{E}^3) \rtimes \mathrm{Stab}_O(\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)) \cong \mathbb{R}^3 \rtimes O(3, \mathbb{R}) \tag{11.3}$$

例 11.15. 类似地，对于仿射变换群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3)$，有如下的半直积分解

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3) = \mathrm{Transl}(\mathbb{E}^3) \rtimes \mathrm{Stab}_O(\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3)) \cong \mathbb{R}^3 \rtimes GL(3, \mathbb{R}) \tag{11.4}$$

定义 11.16. 给定群 G，若 G 的子集合 H 在 G 的乘法和取逆下封闭，则 H 有从 G 继承而来的群结构，称为 G 的*子群* (subgroup)，记为 $H < G$。

对每个群 G，$\{e\}$ 和 G 是 G 的*平凡子群*。

练习11.12中，$\ker(\phi)$ 是 G 的子群，$\mathrm{Im}(\phi)$ 是 H 的子群。

练习11.11说明，群的共轭作用给出 $\mathrm{Aut}(G)$ 的子群，称为 G 的*内自同构群* (inner automorphism group)。

若群 G 有子群 H，则 H 的一个*左陪集* (coset) 是群 G 关于等价关系

$$g \sim g' \iff \exists\, h \in H : g = g'h$$

的等价类，它们形如子集 $gH = \left\{gh \in G \,\middle|\, h \in H\right\}$。右陪集的定义类似，形如 $Hg = \left\{hg \in G \,\middle|\, h \in H\right\}$。

定义 11.17. 如果 G 的一个子群 N 在 G 的共轭作用下不变，就称之为一个*正规子群* (normal subgroup)，记为 $N \trianglelefteq G$。

练习 11.18. *验证正规子群的左陪集都是同样代表元素的右陪集：若 $N \trianglelefteq G$，则对 $\forall g \in G$，有 $gN = Ng$。*

$\mathrm{Transl}(\mathbb{E}^3)$ 是 $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)$ 的正规子群：若 $\tau \in \mathrm{Transl}(\mathbb{E}^3)$ 是平移，$\phi \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{E}^3}(O)$ 保持点 $O \in \mathbb{E}^3$ 不动，则 $\sigma_\phi(\tau)$ 是平移（练习10.10）；再由命题10.9，可知 $\mathrm{Transl}(\mathbb{E}^3)$ 在 $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)$ 的共轭作用下不变。类似地，$\mathrm{Transl}(\mathbb{E}^3)$ 也是 $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3)$ 的正规子群。可以验证，$\mathrm{Isom}_{\mathbb{E}^3}(O)$ 并不是 $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)$ 的正规子群，$\mathrm{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$ 也不是 $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3)$ 的正规子群。

若 $\phi : G \to H$ 是群同态，则 $\ker(\phi)$ 是 G 的正规子群，但 $\mathrm{Im}(\phi)$ 不一定是 H 的正规子群。

例 11.19. 记 B_n 为 $GL(n,\mathbb{R})$ 中的上三角矩阵的全体，C_n 为对角线全是 1 的上三角矩阵的全体，D_n 为 $GL(n,\mathbb{R})$ 中的对角矩阵的全体。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ & a_{22} & * & * \\ & & a_{33} & * \\ & & & a_{44} \end{pmatrix}$$

容易验证，在矩阵的乘法之下，B_n, C_n, T_n 均为 $GL(n,\mathbb{R})$ 的子群。C_n 是 B_n 的正规子群，因为对两个上三角矩阵，其乘积的对角元素等于它们相应的对角元素的乘积，故而在共轭下，对角元素不改变。容易看出

$$B_n \cong (\mathbb{R}^\times)^n \times \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}, \qquad C_n \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}, \qquad D_n \cong (\mathbb{R}^\times)^n.$$

有群的半直积

$$B_n = C_n \rtimes D_n \cong C_n \rtimes \left(\mathbb{R}^\times\right)^n \tag{11.5}$$

定义 11.20. 设 N 是 G 的正规子群，则 N-陪集 (coset) 的集合

$$G/N = \left\{gN \subset G \,\middle|\, g \in G\right\}$$

关于诱导的乘法

$$(gN)(hN) = (gh)N$$

构成的群称为 G 模 N 的*商群* (quotient group)。

练习 11.21. *验证商群的乘法定义是合理的，即与陪集代表元选取无关。*

群 G 到商群 G/N 有典范的同态

$$\phi : G \to G/N, \qquad \phi(g) = gN$$

ϕ 的核 $\ker(\phi)$ 恰好等于 N。

设 N 是 G 的正规子群，则存在自然的群同态*短正合列* (short exact sequence)

$$\{e\} \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/N \longrightarrow \{e\}$$

这里的意思是，在每一个同态接合处，前一同态的像都等于后一同态的核。具体来讲，即 ι 是单同态 (放入)，π 是满同态 (取模)，并且 $\mathrm{Im}(\iota) = \ker(\pi)$。

例 11.22. $C_n \cong \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$

$$\{e\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} C_n \longrightarrow \{e\}$$

例 11.23.

$$\{e\} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}/(mn\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}) \longrightarrow \{e\}$$

问题 **11.24.** 若群 G 有一个正规子群 H 同构于 C_4，其商群 G/H 同构于 C_2，即有如下的短正合列

$$\{e\} \longrightarrow C_4 \xrightarrow{\times n} G \xrightarrow{\pi} C_2 \longrightarrow \{e\}$$

能否确定群 G 的同构类型?

事实上，这个群 G 可能是 C_8，也可能是 $C_4 \times C_2$，或者二面体群 D_4(平面上正方形的保距对称群)。这三个群为何不同?

一种比较简单的情形是，如果 G 还有一个子群 H，它在模 N 的商同态下被同构地映满 G/N。这时 H 的元素作为代表元恰好不重复、不遗漏地枚举 N 的陪集，所以 G 中元素都可以唯一地写成 $g = nh$ 的形式，其中 $n \in N, h \in H$。这样，我们说 G 可以分解为一个半直积 (semi-direct product)，写作 $N \rtimes H$。作为集合，G 可以等同为集合的直积 $N \times H$，但等同之下乘法并非对应分量相乘。实际上，容易验证，

$$(n, h)(n', h') = (n\sigma_h(n'), hh')$$

这表明 N 分量的乘法要经受 H 的一次共轭作用。

C_4 的自同构只有两个，一个是恒同，另一个非平凡的 α 刚好是 C_4 的取逆，它们定义的抽象的半直积分别同构于直积 $C_4 \times C_2$ 和二面体群 D_4。注意 C_8 中没有这样的同构于 C_2 的子群。