第六章 双曲几何初步

§1 Möbius 变换群

定义 1.1 在平面 $\mathbb{E}^2$ 上给定一个圆 σ ，圆心为 O ，半径为 r. 则 σ 诱导一个映射 $\sigma : \mathbb{E}^2\backslash\{O\} \to \mathbb{E}^2\backslash\{O\}$ ：

(i) $\{O, P, \sigma(P)\}$ 共线;

(ii) $d(O, \sigma(P))d(O, P) = r^2$.

我们记增广平面 $\overline{\mathbb{E}}^2 = \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$, 并规定 $\sigma(O) = \infty, \sigma(\infty) = O$ ，则 $\sigma : \overline{\mathbb{E}}^2 \to \overline{\mathbb{E}}^2$ 为增广平面上的一个一一对应，称为圆 σ 的反演变换.

命题 1.1 设 σ 是平面上一个圆.

(i) 反演变换 σ 满足 $\sigma^2 = id$, 并保持 σ 上的每个点不动;

(ii) 反演变换 σ 将每个过圆心 O 的直线变成它自身;

(iii) 反演变换 σ 将每个过圆心 O 的圆周变成不过圆心 O 的直线;

(iv) 反演变换 σ 将每个不过圆心 O 的直线 l 变成过圆心 O 的圆 σ', 并且 σ' 在 O 点的切线与 l 平行;

(v) 反演变换 σ 将每个与 σ 正交的圆变成它自身;

(vi) 反演变换 σ 将不过圆心 O 的一个圆 σ_1 变成一个圆 σ_2;

(vii) 反演变换 σ 是反定向的变换.

平面上的一条直线 σ 可以看成是半径为无穷大的圆，它过 ∞ 点. 这时我们规定它的反演变换 $\sigma : \overline{\mathbb{E}}^2 \to \overline{\mathbb{E}}^2$ 为关于 σ 的直线反射，并且 $\sigma(\infty) = \infty$. 它是反定向的变换.

于是，增广平面上的圆由平面上的圆和直线组成. 增广平面上的每个圆 σ 均对应反演变换 $\sigma : \overline{\mathbb{E}}^2 \to \overline{\mathbb{E}}^2$.

命题 1.2 反演变换 σ 将圆变成圆，并保持相交圆的交角不变.

定义 1.2 我们定义增广平面 $\overline{\mathbb{E}}^2$ 上的 Möbius 群为

$$\mathcal{M}_2 = \{\phi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \cdots \circ \sigma_r : \overline{\mathbb{E}}^2 \to \overline{\mathbb{E}}^2\},$$

其中 $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r\}$ 为圆的反演变换. 我们称 $\mathcal{M}_2$ 中的元素为 Möbius 变换.

命题 1.3 平面上的直线反射、平移和旋转均为特殊的 Möbius 变换，它们均以 ∞ 为不动点. 于是，平面上的等距变换群为 Möebius 群的一个子群.

命题 1.4 平面上一个点 O 处的伸缩变换为 Möbius 变换，它以 O 和 ∞ 为不动点.

定义 1.3 我们在 $\mathbb{E}^2$ 中建立右手的单位直角坐标系 Oxy. 则平面上每个点 (x, y) 对应一个复数 $z = x + iy$. 于是， $(x, -y)$ 对应共轭复数 $\bar{z}$, $(-y, x)$ 对应复数 iz. 我们记

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{E}}^2.$$

命题 1.5 平面上的直线可以表成

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0,\ \ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \ c \in \mathbb{R}.$$

命题 1.6 平面上的中心在 z_0, 半径为 r 的圆可以表成

$$|z - z_0|^2 = r^2;$$

或可以表成

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0,\ \ \alpha = -z_0,\ \ c = |z_0|^2 - r^2.$$

命题 1.7

(i) 平面上的等距变换可以表成 $w = e^{i\theta}z + z_0$, 或 $w = e^{i\theta}\bar{z} + z_0$;

(ii) 平面上在 z_0 点处的伸缩变换可表成 $w = \lambda z + (1-\lambda)z_0$, 其中 $\lambda \neq 0$ 为伸缩常数;

(iii) 平面上关于直线 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0$ 的反射可以表成

$$w = -\frac{1}{\bar{\alpha}}(\alpha\bar{z} + c).$$

(iv) 设 σ 为中心在 z_0 点，半径为 r 的圆周．则反演变换 $\sigma : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ 可以表成

$$w = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}.$$

定理 1.1

(i) 增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的保定向的 Möbius 变换 ϕ 可以表成分式线性变换

$$w = \phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},\ \ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

(ii) 增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的反定向的 Möbius 变换 ϕ 可以表成共轭分式线性变换

$$w = \phi(z) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta},\ \ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

定理 1.2

(i) 增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的分式线性变换

$$w=\phi(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\ \ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

或是正伸缩变换和保定向等距变换的复合，或是一个反演变换和反定向等距变换的复合；

(ii) 增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的共轭分式线性变换

$$w=\phi(z)=\frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta},\ \ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

或是反定向的等距变换，或是正伸缩变换和直线反射的复合，或是一个反演变换和保定向等距变换的复合.

证明： 我们先证明 (i). 如果 $\gamma=0$, 可不妨设 $\delta=1$. 记 $\alpha=|\alpha|e^{i\theta}$. 则有

$$\phi(z)=\alpha z+\beta=\phi_1\circ\phi_2(z),$$

其中 $\phi_1(z)=|\alpha|z$ 为正伸缩，而 $\phi_2(z)=e^{i\theta}z+\frac{\beta}{|\alpha|}$ 为保定向的等距变换. 如果 $\gamma\neq 0$, 可不妨设 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. 我们令 $z_0=\phi(\infty)=\alpha/\gamma$, $r=1/|\gamma|$. 令 σ 是中心在 z_0, 半径为 r 的圆. 则有

$$\sigma\circ\phi(z)=z_0+\frac{r^2}{\overline{\phi(z)}-\bar{z}_0}=-\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\bar{z}+\frac{\alpha-\bar{\delta}}{\gamma},$$

于是， $\sigma\circ\phi=\phi_1$ 是一个反定向的等距变换. 故 $\phi=\sigma\circ\phi_1$ 是一个反演变换和反定向等距变换的复合，为 Möbius 变换.

以下证明 (ii). 如果 $\gamma=0$, 可不妨设 $\delta=1$. 于是 $\phi(z)=\alpha\bar{z}+\beta$. 当 $|\alpha|=1$ 时，它是一个反定向的等距变换. 当 $|\alpha|\neq 1$ 时，记 $\alpha=|\alpha|e^{i\theta}$, 并令 ϕ_1 为中心在 $z_0=\beta/(1-|\alpha|)$ ，伸缩常数为 $|\alpha|$ 的伸缩，而 σ 为直线 $(-ie^{-i\theta/2})z+(ie^{i\theta/2})\bar{z}=0$ 的反射变换. 则有

$$\phi_1(z)=|\alpha|z+\beta,\ \ \sigma(z)=e^{i\theta}\bar{z}.$$

容易验证 $\phi=\phi_1\circ\sigma$ ，为一个正伸缩和一个直线反射的复合. 如果 $\gamma\neq 0$, 可不妨设 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. 我们令 $z_0=\phi(\infty)=\alpha/\gamma$, $r=1/|\gamma|$. 令 σ 是中心在 z_0, 半径为 r 的圆. 则有

$$\sigma\circ\phi(z)=z_0+\frac{r^2}{\overline{\phi(z)}-\bar{z}_0}=-\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}z+\frac{\alpha-\bar{\delta}}{\gamma},$$

为保定向的等距变换. 于是, ϕ 是反演变换和保定向等距变换的复合.
□

定理 1.4 增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的所有分式线性变换和共轭分式线性变换构成 Möbius 变换群.

定理 1.5 任意 Möbius 变换可以写成至多四个反演变换的复合.

定义 1.4 以 ∞ 为不动点的 Möbius 变换称为平面上的相似变换. 平面上所有相似变换构成一个群, 称为相似变换群, 它是 Möbius 群的一个子群.

定理 1.6 平面上的相似变换可以表成正伸缩和等距变换的复合.

命题 1.8 设 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 为增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的三个不同点. 则

(i) 存在唯一一个保定向的 Möbius 变换 ϕ , 使得 $\phi(z_1) = 0, \phi(z_2) = 1, \phi(z_3) = \infty$;

(ii) 存在唯一一个反保定向的 Möbius 变换 ϕ , 使得 $\phi(z_1) = 0, \phi(z_2) = 1, \phi(z_3) = \infty$.

证明 (i) 和 (ii) 中的 ϕ 分别可以唯一写成

$$\phi(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}; \ \ \phi(z) = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_3}.$$

定理 1.7 任给增广平面上两个三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 和 $\{w_1, w_2, w_3\}$, 存在唯一的保定向 Möbius 变换 ϕ(反定向的 Möbius 变换 ϕ) , 使得

$$w_1 = \phi(z_1), \ \ w_2 = \phi(z_2), \ \ w_2 = \phi(z_2).$$

定义 1.5 在空间 $\mathbb{E}^3$ 上给定一个球面 σ , 球心为 O , 半径为 r. 则 σ 诱导一个映射 $\sigma : \mathbb{E}^3 \cup \{\infty\} \to \mathbb{E}^3 \cup \{\infty\}$, 满足条件

(i) $\{O, P, \sigma(P)\}$ 共线;

(ii) $d(O, \sigma(P))d(O, P) = r^2$;

(iii) 并规定 $\sigma(O) = \infty$ 和 $\sigma(\infty) = O$.

我们记增广空间 $\overline{\mathbb{E}}^3 = \mathbb{E}^3 \cup \{\infty\}$, 并称 $\sigma : \overline{\mathbb{E}}^3 \to \overline{\mathbb{E}}^3$ 为球面 σ 的反演变换.

命题 1.9 设 σ 是空间中的一个球面.

(i) 反演变换 σ 满足 $\sigma^2 = id$, 并保持球面 σ 上的每个点不动;

(ii) 反演变换 σ 将每个过球心 O 的直线 (平面) 变成它自身;

(iii) 反演变换 σ 将每个过球心 O 的球面 (圆周) 变成不过圆心 O 的平面 (直线);

(iv) 反演变换 σ 将每个不过球心 O 的平面 Σ(直线 l) 变成过圆心 O 的球面 (圆)σ', 并且 σ' 在 O 点的切平面 (切线) 与 $\Sigma(l)$ 平行;

(v) 反演变换 σ 将每个与 σ 正交的球面 (圆) 变成它自身;

(vi) 反演变换 σ 将不过球心 O 的一个球面 (圆)σ_1 变成一个球面 (圆)σ_2;

(vii) 反演变换 σ 是反定向的变换.

定义 1.6 (球极投影)设 S^2 为空间中一个球面, Σ 是空间中的一张平面. $O \in S^2$ 是球面到平面 Σ 的最远点(北极点). 对任何 $P \in S^2 \backslash \{O\}$ 存在唯一 $P' \in \Sigma$ 使得 $\{O, P, P'\}$ 共线. 我们称 1-1 对应

$$\sigma : S^2 \to \Sigma \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{E}}^2, \ \ P \to P', \ \ \sigma(O) = \infty$$

为球面 S^2 到平面 Σ 的球极投影.

命题 1.10 存在空间以 O 为中心的一个球面 σ, 使得关于 σ 的空间反演变换 $\sigma : \overline{\mathbb{E}}^3 \to \overline{\mathbb{E}}^3$ 给出球极投影 $\sigma : S^2 \to \overline{\mathbb{E}}^2$.

命题 1.11 球极投影 $\sigma : S^2 \to \overline{\mathbb{E}}^2$ 将 S^2 上过 O 点的圆映成直线, 将 S^2 上不过 O 点的圆映成圆, 并保持两圆的交角不变.

§2 复交比

考查实射影直线 $\mathbb{R}P^1$, 它是平面 $\mathbb{E}^2$ 上所有过 O 点的直线构成的集合. 通过在 $\mathbb{E}^2$ 上建立坐标系 Oxy, 则有

$$\mathbb{R}P^1 = \{[(x,y)] \mid x,y \in \mathbb{R}, (x,y) \neq (0,0)\}.$$

射影变换 $\Phi : \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$ 对应一个 2 阶非退化矩阵 A, 使得

$$\left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right] = \Phi([(x,y)]) = \left[A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right].$$

我们设 $\ell_1 = \{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ，并记 $\infty = [(1,0)]$. 则有

$$\mathbb{R}P^1 = \ell_1 \cup \{\infty\}.$$

在 ℓ_1 上作射影变换 Φ, 我们得到

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right] \to \left[\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix}\right],$$

于是，在实轴上的射影变换可以写成

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \;\; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R}).$$

射影变换的基本不变量为四点的交比

$$(x_1x_2; x_3x_4) = \frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}.$$

我们将增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 等同于复射影直线 $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. 则保定向的 Möbius 变换群便等同于 $\mathbb{C}P^1$ 上的射影变换

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \;\; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C}).$$

定义 2.1 设 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 为增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上四点，我们定义它们的复交比为

$$(z_1z_2; z_3z_4) = \frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_4-z_1)}.$$

定理 2.1 设 $\phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ 为 Möbius 变换， $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 为 $\overline{\mathbb{C}}$ 上四点.

(i) 如果 ϕ 保定向，则 $(\phi(z_1)\phi(z_2);\phi(z_3)\phi(z_4)) = (z_1z_2;z_3z_4)$;

(ii) 如果 ϕ 反定向，则 $(\phi(z_1)\phi(z_2);\phi(z_3)\phi(z_4)) = \overline{(z_1z_2;z_3z_4)}$.

因为每个圆周均与实轴 Möbius 等价，故有

定理 2.2 增广平面上 $\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$ 四点共圆的充要条件是 $(z_1z_2;z_3z_4)$ 为实数.

§3 双曲几何的 Poincare 模型

定义 3.1 设 $D = \{z \mid |z| < 1\}$ 为平面上的单位圆盘，它的边界圆 $\partial D = \{z \mid |z| = 1\}$. 我们定义：

(i) 双曲平面由 D 中的所有点构成;

(ii) 双曲平面中的双曲直线是与 ∂D 正交的圆周 (或直线) 与 D 的交集组成;

定义 3.2 每个与 ∂D 正交的圆 (或直线)σ 的反演 (反射) 诱导变换 $\sigma : D \to D$, 称为关于双曲直线 σ 的直线反射. 有限个双曲直线的反射构成的群称为双曲变换群.

命题 3.1 任给非零的 $a \in D$, 存在唯一一个直线反射 σ, 使得 $\sigma(a) = 0$. 这个反演有表达式

$$\sigma(z) = \frac{a}{\bar{a}} \cdot \left(\frac{\bar{z} - \bar{a}}{a\bar{z} - 1} \right).$$

命题 3.2

(i) 给定两点 $a, b \in D$, 存在唯一过此两点的一条双曲直线;

(ii) 过双曲直线 l 外一点，存在无穷多条与 l 不交（即平行）的双曲直线.

命题 3.3 任给一条双曲直线 l ，存在一个双曲变换 $\phi : D \to D$, 使得 $\phi(l)$ 是 D 中的实直线.

定义 3.1 任给双曲平面中两点 $z_1, z_2 \in D$，恰有一条过此两点的直线 σ，它与 ∂D 交于两点 ξ_1, ξ_2，其中 ξ_1 与 z_1 相邻，ξ_2 与 z_2 相邻. 我们定义 z_1 至 z_2 的双曲距离为

$$d(z_1, z_2) = -\log(z_1 z_2; \xi_1 \xi_2) = \log \frac{|z_2 - \xi_1||z_1 - \xi_2|}{|z_1 - \xi_1||z_2 - \xi_2|}.$$

命题 3.4

(i) $d(z_1, z_2) \geq 0$, 并且 $d(z_1, z_2) = 0$ 当且仅当 $z_1 = z_2$;

(ii) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;

(iii) 若 z_2 落在 $\{z_1, z_3\}$ 所决定的双曲线段上，则有

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) = d(z_1, z_3);$$

(iv) 双曲变换为等距变换.

命题 3.5

(i) 对任意 $z \in D$ 有

$$d(0, z) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|};$$

(ii) 对任意两点 $a, z \in D$ 有

$$d(a, z) = \log \frac{|\bar{a}z - 1| + |z - a|}{|\bar{a}z - 1| - |z - a|}.$$

定理 3.1 设双曲三角形 ABC 三个角为 A, B 和 C, 它们的对应边长度分别为 a, b 和 c, 则有

(i) 正弦定理：

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C};$$

(ii) 余弦定理：

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C;$$

(iii)
$$\cosh c = \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin A \sin B}.$$

证明　首先我们证明上述余弦定理 I. 通过一个双曲变换，我们不妨设三角形 ABC 的顶点分别对应复数 $z=\rho e^{iC}$ 实数 r, 0 和．于是，

$$a = \log\frac{1+r}{1-r},\ \ b = \log\frac{1+\rho}{1-\rho},\ \ c = \log\frac{1+\delta}{1-\delta},\ \ \delta = \frac{|z-r|}{|rz-1|}.$$

由此得到

$$r = \tanh\frac{a}{2},\ \ \rho = \tanh\frac{b}{2},\ \ \delta = \tanh\frac{c}{2};$$
$$\frac{\delta^2}{1-\delta^2} = \frac{|z-r|^2}{(1-r^2)(1-\rho^2)} = \frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos C}{(1-r^2)(1-\rho^2)}.$$

故有

$$\cosh c = 2\frac{\delta^2}{1-\delta^2}+1 = \cosh a\cosh b - \sinh a \sinh b \cos C.$$

其次我们利用余弦定理 I 来证明正弦定理．由于

$$\cos C = \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b},$$

我们得到

$$\frac{\sin^2 C}{\sinh^2 c} = \frac{1-\cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2\cosh a\cosh b\cosh c}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c},$$

由对称性推出正弦定理．最后，我们令

$$R^2 = 1-\cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2\cosh a \cosh b \cosh c > 0,\ \ R>0,$$

则有

$$\sin A = \frac{R}{\sinh b \sinh c},\ \ \sin B = \frac{R}{\sinh a \sinh c},\ \ \sin C = \frac{R}{\sinh a \sinh b}.$$

于是，利用余弦定理直接计算，我们得到

$$\frac{\cos A\cos B + \cos C}{\sin A \sin B} = \frac{1}{R^2}(\sinh a \sinh b \sinh^2 c)(\cos A \cos B + \cos C) = \cosh c.$$

我们称两个三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 全等，如果存在双曲变换 $\phi : D \to D$, 使得

$$A' = \phi(A),\ \ B' = \phi(B),\ \ C' = \phi(C).$$

定理 3.2 双曲平面中两个三角形全等当且仅当

(i) 边边边：它们对应三边的边长相等;

(ii) 角角角：它们对应三角的角度相等;

(iii) 边角边：它们的两个对应边的边长度及其夹角的角度相等;

(iii) 角边角：它们的两个对应夹角的角度及其共同边的边长相等.

命题 3.6 对双曲平面中任意三点 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 有

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \le d(z_1, z_3);$$

且等式成立当且仅当 z_2 落在 $\{z_1, z_3\}$ 所决定的双曲线段上.

命题 3.7 对任何 $a \in D$ 有

$$\lim_{z \to a} \frac{d(z,a)}{|z-a|} = \frac{2}{1-|a|^2}.$$

定理 3.3 双曲半径为 r 的双曲圆的周长为 $2\pi \sinh r$.

命题 3.8 任给圆周 ∂D 上的两个三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 和 $\{w_1, w_2, w_3\}$, 存在至多三个双曲直线反射，使得它们的复合变换 ϕ 满足

$$\phi(z_1) = w_1,\ \ \phi(z_2) = w_2,\ \ \phi(z_3) = w_3.$$

定理 3.4 任何一个双曲变换 $\phi : D \to D$ 可表成

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{\bar{a}z-1},\ \ |a| < 1$$

或

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{\bar{z}-\bar{a}}{a\bar{z}-1},\ \ |a| < 1$$

的形式.

证明 令 $a \in D$ 满足 $\phi(a)=0$. 令存在唯一的双曲直线反射

$$\sigma(z)=\frac{a}{\bar{a}}\cdot\left(\frac{\bar{z}-\bar{a}}{a\bar{z}-1}\right),$$

使得 $\sigma(0)=a$. 则 $\phi_1=\phi\circ\sigma$ 是一个双曲变换，使得 $\phi_1(0)=0$. 令 $\phi_1(1)=e^{i\varphi}$. 因为 ϕ_1 将双曲直线 $(-1,1)$ 表成 0 和 $e^{i\varphi}$ 所在的双曲直线, 故有 $\phi_1(-1)=-e^{i\varphi}$. 由于 $\phi_2(z)=e^{i\varphi}\bar{z}$ 是反定向的 Möbius 变换, 它将 $\{0,1,-1\}$ 映成 $\{0,e^{i\varphi},-e^{i\varphi}\}$; 而 $\phi_3(z)=e^{i\varphi}z$ 是保定向的 Möbius 变换, 它将 $\{0,1,-1\}$ 映成 $\{0,e^{i\varphi},-e^{i\varphi}\}$; 故 $\phi\circ\sigma=\phi_2$, 或者 $\phi\circ\sigma=\phi_3$. 于是,

$$\phi(z)=\phi_2(\sigma(z))=e^{i\theta}\frac{z-a}{\bar{a}z-1},\ \ e^{i\theta}=e^{i\varphi}\frac{\bar{a}}{a};$$

或者

$$\phi(z)=\phi_3(\sigma(z))=e^{i\theta}\frac{\bar{z}-\bar{a}}{a\bar{z}-1},\ \ e^{i\theta}=e^{i\varphi}\frac{a}{\bar{a}}.$$

命题 3.9 黎曼度量

$$g=\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

在双曲变换下保持不变.

定理 3.6 任何两个双曲极限三角形是双曲等价的.

双曲面积的定义需要用到积分，我们略去不讲。双曲变换保持任意两点的双曲距离。于是从直观上说，我们可以断定：任意两个双曲极限三角形有相同的面积。并且，通过计算，我们知道：极限三角形的面积为 π.

命题 3.10 设三角形 ABC, A 为内点， B 和 C 为边界点. 则三角形面积

$$\Delta=\pi-A.$$

定理 3.7 设双曲三角形 ABC 的顶角角度为 A, B, C, 则三角形面积

$$\Delta=\pi-A-B-C.$$

§4 双曲几何的半平面模型

定义 4.1 将双曲几何中的 Poincare 圆盘 D 的中心放在 $z = -1$ 点. 设 σ 是中心在 $z_0 = -2$, 半径为 2 的圆. 则反演变换 $\sigma : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ 将 D 映成上半平面

$$\mathbb{H} = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid y > 0\}.$$

命题 4.1 双曲平面 $\mathbb{H}$ 中的双曲直线是与实轴正交的圆或直线.

命题 4.2 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. 设 ℓ 是过它们的双曲直线.

(i) 如果 ℓ 是与实轴正交的直线，且 $Imz_1 > Imz_2$ ，则有

$$d(z_1, z_2) = \log \frac{z_1}{z_2}.$$

(ii) 如果 ℓ 是与实轴正交于 ξ_1 和 ξ_2 的圆周，其中 ξ_1 与 z_1 邻近， ξ_2 与 z_2 邻近，则有

$$d(z_1, z_2) = -\log(z_1 z_2; \xi_1 \xi_2) = \log \frac{|z_2 - \xi_1||z_1 - \xi_2|}{|z_1 - \xi_1||z_2 - \xi_2|}.$$

命题 4.3 双曲平面 $\mathbb{H}$ 中的

(i) 保定向双曲变换可写成

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ \ ad - bc > 0.$$

(ii) 反定向双曲变换可写成

$$\phi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ \ ad - bc < 0.$$

命题 4.4 黎曼度量

$$g = \frac{|dz|^2}{Imz^2}$$

在双曲变换下保持不变.