第五章 射影几何初步

如果我们将在空中对地球（设想为平面）进行拍摄，则在不同的点所拍摄的照片并不相同。问：两张照片的对应点所构成的映射是什么映射？

局部上看，它将直线变成直线，其实它不是仿射映射！它是比仿射映射更广的一类映射，称为射影映射。仿射映射被三个不共形的三点及其对应点所唯一决定，而射影映射是被四个一般位置的点及其对应点所唯一决定。这个性质可以用于地图的拼接。

§1 射影平面

设 Σ 和 Σ' 是空间中的两张不同的平面，O 是平面外一个点光源. 从 O 点出发的每条光线将一张平面上的点投射到另一张平面上，我们称它为以 O 为中心的投影.

如果 Σ 和 Σ' 平行，则上述中心投影 $O:\Sigma\to\Sigma'$ 建立了两个平面间的 1-1 对应. 容易看出，映射 $O:\Sigma\to\Sigma'$ 将直线映成直线，它是从 Σ 到 Σ' 的一个仿射映射。

如果 Σ 和 Σ' 不平行（参见图 1.1 ），这时大部分光线依然将 Σ 上的点投射到 Σ' 上，并将 Σ 上的直线映成 Σ' 上的直线，但这时有例外事情发生。如果我们过 O 点作 Σ' 的平行平面交 Σ 于直线 l, 过 O 点作 Σ 的平行平面交 Σ' 于直线 l', 则发现 l 上的点没有被投射到平面 Σ' 上，而且 l' 上的点在平面 Σ 上没有投射点.

通过进一步的观察, 我们发现, 所有平面 Σ 上过直线 l 上一点 P 的直线被映成平面 Σ' 上的平行线. 而平面 Σ 上的一组平行线被投射成平面 Σ' 上的一组直线, 它们相交于直线 l' 上的一点 P'（参见图 1.2 ）.

定理 1.1(Desarques) 如果两个三角形的对应顶点连线交于一点，则它们对应边的交点共线。

为了证明 Desarques 定理，我们应用一个射影变换 ϕ ，它将图 1.3 中的直线 EF 映成无穷远直线 ℓ_∞. 这时上述图形变成以下图形

我们用 P' 代表点 P 在 ϕ 下的像点. 因为 $E', F' \in \ell_\infty$, 即 $B_1'C_1'$ 平行于 $B_2'C_2'$ ， $A_1'C_1'$ 平行于 $A_2'C_2'$, 所以有

$$\frac{d(O', A_1')}{d(O', A_2')} = \frac{d(O', C_1')}{d(O', C_2')} = \frac{d(O', B_1')}{d(O', B_2')}.$$

故 $A_1'B_1'$ 也平行于 $A_2'B_2'$ ，即 $D' \in \ell_\infty$. 于是 D', E', F' 落在无穷远直线 ℓ_∞ 上，由此推出 D, E, F 落在直线 $EF = \phi^{-1}(\ell_\infty)$ 上. 定理证毕.

定理 1.2 (Pappus 定理) 设 A_1, B_1, C_1 和 A_2, B_2, C_2 为共线的两组点. 设 A_1B_2 和 A_2B_1 的交点为 M, A_1C_2 和 A_2C_1 的交点为 N, B_1C_2 和 B_2C_1 的交点为 P, 则 M, N, P 三点共线.

通过中心投影，问题可化为：如果 A_1B_2 与 A_2B_1 平行，且 A_1C_2 与 A_2C_1 平行，则必有 B_1C_2 与 B_2C_1 平行。

为了使得中心投射成为平面间的 1-1 对应，我们需要在每张平面上增加一些"无穷远点"，使之成为"射影平面"。具体的做法如下：

(i) 在平面 Σ 每个直线方向 $[\mathbf{a}(l)]$ 上增加一个无穷远点 $\infty(l)$;

(ii) 如果 l 与 l' 平行，则有 $\infty(l) = \infty(l')$, 即平行的直线有相同的无穷远点;

(iii) 如果 l 与 l' 不平行，则有 $\infty(l) \neq \infty(l')$, 即不平行的直线有不同的无穷远点.

定义 1.1 记所有无穷远点构成的集合为 l_∞. 我们称集合 $P(\Sigma) = \Sigma \cup l_\infty$ 为射影平面，称 l_∞ 为无穷远直线。

根据以上的定义，我们得到以下的

命题 1.1

(i) 射影平面上任何两点确定唯一一条直线；

(ii) 射影平面的任何两条不同直线有唯一的交点；

(iii) 中心投影是 $P(\Sigma)$ 到 $P(\Sigma')$ 的 1-1 对应，它将 $P(\Sigma)$ 中的直线映成 $P(\Sigma')$ 中的直线.

射影平面的几何实现：

§2 射影变换

定义 2.1 设 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma')$ 为射影平面间的一个 1-1 对应. 如果 ϕ 将 $P(\Sigma)$ 中的直线映成 $P(\Sigma')$ 中的直线，则称 ϕ 是一个射影映射. 特别当 $\Sigma = \Sigma'$ 时，我们称射影映射为射影变换。

设 Σ 和 Σ' 是空间中两张不同的平面，则平面外一点 O 的中心投影 $O : P(\Sigma) \to P(\Sigma')$ 是一个射影映射.

命题 2.1 设 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma')$ 为射影映射, 则 $\phi^{-1} : P(\Sigma') \to P(\Sigma)$ 也是射影映射.

证明 如果存在 $P(\Sigma')$ 某条直线 l' 上的三点 $\{P', Q', R'\}$，使得 $P = \phi^{-1}(P')$,$Q = \phi^{-1}(Q')$ 和 $R = \phi^{-1}(R')$ 在 $P(\Sigma)$ 上不共线. 则 $\{P, Q, R\}$ 中必有一个非无穷远点. 不妨设此点为 P 点. 则直线 PQ 和 PR 是两条不同的直线，交点为 P. 因为 ϕ 为射影映射，它将直线映成直线，所以 $\phi(PQ) = l'$ 和 $\phi(PR) = l'$. 设 X 是 $P(\Sigma)$ 上的任意点. 过 X 可引直线 l 交直线 PQ 于 Y, 交 PR 于 $Z(Y \neq P,\ Z \neq P)$. 这时有

$\phi(l) = \phi(YZ) = l'$. 于是推出 $\phi(X) \in l'$, 即 $\phi(P(\Sigma)) \subset l'$, 这与 ϕ 为 1-1 对应相矛盾. 故 ϕ^{-1} 一定将直线映成直线. $\square$

推论 2.1 射影平面上的所有射影变换构成一个群，称为射影变换群，记为 $PGL(3)$.

设 $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ 是一个仿射映射. 则 ϕ 将 Σ 上的每条直线 l 映成 Σ' 上的一条直线 l'. 我们规定 $\phi(\infty(l)) = \infty(l')$. 因为仿射变换 ϕ 将与 l 平行的映成与 l' 平行的直线，所以这个规定是合理的. 于是，仿射映射 $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ 可以唯一地扩充成为一个射影映射 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma')$.

反之，如果一个射影映射 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma')$, 它将无穷远直线 ℓ_∞ 点映成无穷远直线 ℓ'_∞. 由于 ϕ^{-1} 也是射影映射，它将直线 ℓ'_∞ 映成直线 ℓ_∞. 故 ϕ 将平面 Σ 的点 1-1 对应到 Σ' 内的点，并将直线映成直线，为 Σ 到 Σ' 的一个仿射映射. 而射影映射 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma')$ 是由这个仿射映射扩充而成的.

定义 2.2 我们称

$$\mathcal{A}_2 = \{\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma) \mid \phi \in PGL(3), \phi(\ell_\infty) = \ell_\infty\}$$

为 $P(\Sigma)$ 上射影变换群的仿射子群.

命题 2.2 设 l 是射影平面 $P(\Sigma)$ 上的一条直线. 则存在射影变换 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma)$, 它将 l 映成无穷远直线 ℓ_∞.

证明 取与直线 l 平行且与平面 Σ 相交的平面 Σ'. 在空间中取一点 O 使得它与 l 张成的平面与 Σ' 平行. 其中我们可以使得 l 不落在 Σ' 上, 且 O 点不落在 l 和 Σ 上. 则中心投影 $O : P(\Sigma) \to P(\Sigma')$ 将直线 l 映成 $P(\Sigma')$ 上的无穷远直线 ℓ'_∞. 取定一个仿射变换 $\psi : P(\Sigma') \to P(\Sigma)$ ，它将 ℓ'_∞ 映成 ℓ_∞. 则射影变换 $\phi = \psi \circ O : P(\Sigma) \to P(\Sigma)$ 将直线 l 映成无穷远直线 ℓ_∞. $\square$

记 $\mathbb{R}P^2$ 为空间中所有过 O 点的直线构成的集合. 因为 $\mathbb{R}P^2$ 中的每条直线交射影平面 $P(\Sigma)$ 于唯一的一点，其中过 O 点且平行于平面 Σ 的一条直线恰对应到 $P(\Sigma)$ 的一个无穷远点 (图 1.3) ，于是射影平面 $P(\Sigma)$ 与可以 $\mathbb{R}P^2$ 等同起来. 我们记这个 1-1 对应为 $\sigma : P(\Sigma) \to \mathbb{R}P^2$.

定义 2.3 设 $P(\Sigma)$ 是一个射影平面. 记 $P^*(\Sigma)$ 是 $P(\Sigma)$ 上所有直线构成的集合. 取定平面 Σ 外一点 O , 我们定义 1-1 对应 $P(\Sigma) \to P^*(\Sigma)$ 如下：对任何 $A \in P(\Sigma)$, 记过 O 点且垂直于直线 OA 的平面与平面 Σ 截出的直线为 $A^* \in P^*(\Sigma)$. 我们称映射 $A \leftrightarrow A^*$ 为射影平面的一个对偶对应.

命题 2.3 对偶对应将落在直线 A^* 上的点 $\{B_1, B_2, \cdots, B_r\}$ 对应成交于点 A 的直线 $\{B_1^*, B_2^*, \cdots, B_r^*\}$. 特别地，两点连线变成对应两线的交点.

推论 2.2(Desarques 对偶定理) 如果两个三角形对应边交点共线, 则它们对应顶点的连线交于一点.

推论 2.3(Pappus 对偶定理) 设 l_1, l_2, l_3 和 l_1', l_2', l_3' 为两组共点直线。 l_1 与 l_2' 的交点和 l_1' 与 l_2 交点的连线为 l_3'', l_3 与 l_2' 的交点和 l_3' 与 l_2 交点的连线为 l_1'', l_1 与 l_3' 的交点和 l_1' 与 l_3 交点的连线为 l_2'', 则 l_1'', l_2'', l_3'' 过同一个点.

几何直观 I 给定射影平面 $P(\Sigma)$ 上任意两组处于一般位置的四点 $\{A, B, C, D\}$ 和 $\{A', B', C', D'\}$，存在射影变换 ϕ，它将 $\{A, B, C, D\}$ 分别对应到 $\{A', B', C', D'\}$.

几何直观 II 射影平面上椭圆、双曲线和抛物线射影等价.

我们记 $GL(3)$ 为所有以 O 为不动点的空间仿射变换构成的变换群. 任何一个 $\Phi \in GL(3)$ 诱导映射 $\Phi : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$，并且对任何实数 $\lambda \neq 0$ 有 $\lambda\Phi = \Phi : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$

命题 2.4 对任何 $\Phi \in GL(3)$ 来说，$\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi \circ \sigma : P(\Sigma) \to P(\Sigma)$ 是一个射影变换.

命题 2.5 任给一个仿射变换 $\phi : \Sigma \to \Sigma$, 存在唯一仿射变换 $\Phi \in GL(3)$，使得 $\Phi(\Sigma) = \Sigma$，并且 $\Phi = \phi : \Sigma \to \Sigma$. 于是，有 $\sigma^{-1} \circ \Phi \circ \sigma = \phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma)$.

命题 2.6 设 l 是射影平面 $P(\Sigma)$ 上的一条直线. 则存在 $\Phi \in GL(3)$，使得 $\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi \circ \sigma : P(\Sigma) \to P(\Sigma)$ 将直线 l 变成无穷远直线 l_∞.

定理 2.1 任给射影变换 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma)$, 存在唯一（除一个非零因子外）一个 $\Phi \in GL(3)$, 使得 $\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi \circ \sigma$.

证明 设 $\phi(l_\infty) = l$. 取 $\Psi \in GL(3)$ 使得 $\sigma^{-1} \circ \Psi_1 \circ \sigma(l) = l_\infty$. 于是，有 $\sigma^{-1} \circ \Psi_1 \circ \sigma \circ \phi$ 将无穷远直线变成无穷远直线. 于是，存在 $\Phi \in GL(3)$ 使得 $\sigma^{-1} \circ \Psi_1 \circ \sigma \circ \phi = \sigma^{-1} \circ \Psi_2 \circ \sigma$. 故 $\phi = \sigma^{-1} \circ \Psi_1^{-1}\Psi_2 \circ \sigma$.

定义 2.4 如果射影平面上四点中任意三点不共线，我们称它们是处于一般位置上。

定理 2.2 任给射影平面上处于一般位置上的两组点 $\{A, B, C, D\}$, 存在唯一一个射影变换 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma)$, 使得 $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$, $\phi(C) = C'$,$\phi(D) = D'$.

§3 交比

定义 3.1 设 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ 是 $\mathbb{R}P^2$ 中共线的四个不同点（即空间中过 O 点且共面的四直线）. 分别取这些直线的方向向量 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$, 则这些共面向量中的任何两个向量均线性无关. 我们记

$$\mathbf{a}_3 = s_1\mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{a}_2, \ \ \mathbf{a}_4 = s_2\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2,$$

并定义 $\mathbb{R}P^2$ 中共线四点 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ 的交比为

$$(l_1 l_2; l_3 l_4) = \frac{s_2 t_1}{s_1 t_2}.$$

命题 3.1 交比 $(l_1 l_2; l_3 l_4)$ 的定义与直线方向向量 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ 的选取无关.

证明 设 $\{\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_3', \mathbf{a}_4'\}$ 分别是 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ 另一组直线方向向量，且

$$\mathbf{a}_3' = s_1'\mathbf{a}_1' + t_1'\mathbf{a}_2',\ \ \mathbf{a}_4' = s_2'\mathbf{a}_1' + t_2'\mathbf{a}_2'.$$

则存在非零实数 $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ ，使得

$$\mathbf{a}_1' = k_1\mathbf{a}_1,\ \ \mathbf{a}_2' = k_2\mathbf{a}_2,\ \ \mathbf{a}_3' = k_3\mathbf{a}_3,\ \ \mathbf{a}_4' = k_4\mathbf{a}_4.$$

代入上式，我们得到

$$s_1 = \frac{k_1}{k_3}\,s_1',\ \ t_1 = \frac{k_2}{k_3}\,t_1',\ \ s_2 = \frac{k_1}{k_4}\,s_2',\ \ t_2 = \frac{k_2}{k_4}\,t_1'.$$

故有

$$\frac{s_2t_1}{s_1t_2} = \frac{s_2't_1'}{s_1't_2'}.$$

□

设上述共面四直线 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ 交射影平面 $P(\Sigma)$ 于共线的四点 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. 则有

$$l_1 = [\overrightarrow{OA_1}],\ \ l_2 = [\overrightarrow{OA_2}],\ \ l_3 = [\overrightarrow{OA_3}],\ \ l_4 = [\overrightarrow{OA_4}].$$

令

$$\overrightarrow{OA_3} = s_1\overrightarrow{OA_1} + t_1\overrightarrow{OA_2},\ \ \overrightarrow{OA_4} = s_2\overrightarrow{OA_1} + t_2\overrightarrow{OA_2}.$$

则容易得到

$$\frac{t_1}{s_1} = (A_1, A_2; A_3),\ \ \frac{t_2}{s_2} = (A_1, A_2; A_4).$$

于是，有

$$(l_1l_2; l_3l_4) = \frac{s_2t_1}{s_1t_2} = \frac{(A_1, A_2; A_3)}{(A_1, A_2; A_4)}.$$

定义 1.6 射影平面 $P(\Sigma)$ 上共线四点 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 的交比定义为

$$(A_1A_2; A_3A_4) = \frac{(A_1, A_2; A_3)}{(A_1, A_2; A_4)} = \frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_2A_3}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_2A_4}}{\overrightarrow{A_1A_4}}.$$

于是，我们有 $(l_1l_2; l_3l_4) = (A_1A_2; A_3A_4)$.

命题 3.2 $\mathbb{R}P^2$ 中共面四线（ $P(\Sigma)$ 中共线四点）交比的交比是在射影变换下不变量.

命题 3.3 交比不变：

命题 3.4 设 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 是射影平面上共线的四点，则有

(i) $(A_2A_1; A_3A_4) = (A_1A_2; A_4A_3) = (A_1A_2; A_3A_4)^{-1}$;

(ii) $(A_1A_3; A_2A_4) = 1 - (A_1A_2; A_3A_4)$;

(iii) $(A_3A_4; A_1A_2) = (A_1A_2; A_3A_4)$.

于是,如果设 $(A_1A_2; A_3A_4) = c$,则对 24 种不同的四点组合 $\{A_i, A_j, A_k, A_l\}$,交比 $(A_iA_j; A_kA_l)$ 可取六种不同的值：

$$\{c, 1-c, \frac{1}{c}, 1-\frac{1}{c}, \frac{1}{(1-c)}, \frac{c}{c-1}\}.$$

命题 3.5 任给两组共线的三点 $\{A, B, C\}$ 和 $\{A', B', C'\}$，存在射影变换 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma)$, 使得 $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$ 和 $\phi(C) = C'$.

命题 3.6 给定两组共线的四点 $\{A, B, C, D\}$ 和 $\{A', B', C', D'\}$，存在射影变换 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma)$, 使得 $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$, $\phi(C) = C'$ 和 $\phi(D) = D'$ 的充要条件是 $(AB; CD) = (A'B'; C'D')$.

§4 圆锥曲线的射影理论

命题 4.1 任意两个圆锥曲线均射影等价。

命题 4.2 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ 的交比

$$(l_1 l_2; l_3 l_4) = \frac{\sin\theta_{13}\sin\theta_{24}}{\sin\theta_{23}\sin\theta_{14}},$$

其中 θ_{ij} 为 l_i 旋转到 l_j 的夹角，逆时针为正，顺时针为负。

定理 4.1(Steiner) 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是圆锥曲线 Γ 上不同的四个点. 则对任何点 $P \in \Gamma$ 有 $(PA_1, PA_2; PA_3, PA_4) = c$，其中 c 为常数. （当 P 与 A_i 重合时，令 PA_i 为 A_i 点的切线.）

定理 4.2(Pascal) 圆锥曲线的任意内接六边形的三对对边交点共线。

命题 4.3 如果圆锥曲线 Γ 内部一点 P, 存在射影变换 ϕ, 使得 $\phi(\Gamma) = \Gamma'$ 为一个圆，并且 $P' = \phi(P)$ 为圆 Γ' 的中心.

命题 4.4 任给圆锥曲线 Γ 上的两点 Q_1,Q_2, 以及 Γ 内部的一点 P, 存在以 P 为不动点的射影变换 ϕ, 使得 $\phi(\Gamma) = \Gamma$, 并且 $\phi(Q_1) = Q_2$.

定义 4.1 设 Γ 是一条圆锥曲线. 如果两点 $P, Q \in P(\Sigma)$ 使得 PQ 连线交 Γ 于 A_1, A_2, 并且 $(A_1A_2; PQ) = -1$ ，我们称 P, Q 为关于 Γ 的一个调和共轭.

命题 4.5 如果 P 落在 Γ 的内部，则所有与 P 调和共轭的点 Q 构成 Γ 外部的一条直线 $\ell(P)$（称为 P 点的极线）.

命题 4.6 如果 P 落在 Γ 的外部，过 P 作 Γ 的切线，切点为 Q_1 和 Q_2. 则所有与 P 调和共轭的点 Q 构成 Γ 内部的弦 Q_1Q_2.

命题 4.7 圆锥曲线的焦点 F 的极线是它所对应的准线.

定义 4.2 如果 $P \in \Gamma$ ，我们定义它所对应的极线 $\ell(P)$ 为 P 点处的切线.

定义 4.3 我们称 $P(\Sigma)$ 上由 $P \to \ell(P)$ 定义的点线对偶为关于圆锥曲线 Γ 的配极映射.

命题 4.5 配极映射将两点连线变成两线交点。

定理 4.3(Brianchon) 圆锥曲线的任一外切六边形的三对对顶点的连线共点.

§5 射影坐标系

定义 5.1 设 $\mathbb{R}P^2$ 是过 O 点的所有直线构成的射影平面. 我们取 $\mathbb{E}^3$ 中的仿射标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. 令 $\mathbb{V}$ 是所有以 O 点为起点的向量构成的向量空间。则任何一个非零向量 $\mathbf{a}$ 有坐标 (a_1, a_2, a_3). 对任何实数 $\lambda \neq 0$ ，向量 $\lambda\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}$ 决定唯一的过 O 点的直线. 我们记向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 所决定的直线 l 为 $[(a_1, a_2, a_3)] \in \mathbb{R}P^2$. 则有

$$[\lambda(a_1, a_2, a_3)] = [(a_1, a_2, a_3)].$$

我们称 $[(a_1, a_2, a_3)]$ 为 $l \in \mathbb{R}P^2$ 的齐次坐标.

于是，有

$$\mathbb{R}P^2 = \{[(x, y, z)] \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}\}.$$

射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 中过点 $A = [(a_1, a_2, a_3)]$ 和 $B = [(b_1, b_2, b_3)]$ 的射影直线 l 可以表成

$$l = \{[\lambda(a_1, a_2, a_3) + \mu(b_1, b_2, b_3)] \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}\}.$$

所有向量 $(x,y,z)=\lambda(a_1,a_2,a_3)+\mu(b_1,b_2,b_3)$ 落在一张过 O 点的平面上，它的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,$$

或写成

$$ax+by+cz=0,$$

其中

$$a=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ b=-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix},\ c=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

于是， $\mathbb{R}P^2$ 中的一条射影直线可以表成

$$l=\{[(x,y,z)]\mid ax+by+cz=0\}.$$

我们记射影直线 l 的齐性坐标为 $[(a,b,c)]$.

命题 5.1 设 $P=[(x,y,z)]$ 是射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 中的一个点，而射影直线 l 的齐性坐标为 $[(a,b,c)]$. 则 P 落在 l 上当且仅当 $ax+by+cz=0$.

命题 5.2 射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 中三点 $A=[(a_1,a_2,a_3)]$, $B=[(b_1,b_2,b_3)]$ 和 $C=[(c_1,c_2,c_3)]$ 三点共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

命题 5.3 射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 中三射影直线 $a_1x+a_2y+a_3z=0$, $b_1x+b_2y+b_3z=0$ 和 $c_1x+c_2y+c_3z=0$ 交于一点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

命题 5.4 $\mathbb{R}P^2=\Sigma_1\cup l_\infty$, 其中

$$\Sigma_1=\{[(x,y,z)]\mid z\neq 0\}=\{(\hat{x},\hat{y},1)\mid(\hat{x},\hat{y})=(\frac{x}{z},\frac{y}{z})\in\mathbb{R}^2\}$$

为过 e_3 终点且平行于 $\{e_1,e_2\}$ 的平面，而

$$l_\infty=\{[(x,y,0)]\mid(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}\}.$$

命题 5.5 任何射影变换 $\Phi:\mathbb{R}P^2\to\mathbb{R}P^2$ 有坐标表示

$$\left[\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right],\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0.$$

命题 5.6 Σ_1 上的任何仿射变换 $\Phi:\Sigma_1\to\Sigma_1$ 有坐标表示

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix},\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

命题 5.7 任给射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 上处于一般位置上的四点 $\{l_1,l_2,l_3,l_4\}$, 存在 $\mathbb{E}^3$ 中的仿射坐标系 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$, 使得

$$l_1=[(1,0,0)],\ \ l_2=[(0,1,0)],\ \ l_3=[(0,0,1)],\ \ l_4=[(1,1,1)].$$

命题 5.8 设 Σ 为 $\mathbb{E}^3$ 中的一张平面, O 为平面 Σ 外一点. 则任给射影平面 $P(\Sigma)$ 上处于一般位置上的四点 $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, 存在 $\mathbb{E}^3$ 中的仿射坐标系 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$, 使得

$$A_1=[(1,0,0)],\ \ A_2=[(0,1,0)],\ \ A_3=[(0,0,1)],\ \ A_4=[(1,1,1)].$$

例子 用齐次坐标法证明 Desargues 定理. 令

$$A=[(1,0,0)],\ \ B=[(0,1,0)],\ \ C=[(0,0,1)],\ \ P=[(1,1,1)].$$

则直线方程

$$AB=\{z=0\},\ \ BC=\{y=0\},\ \ AC=\{x=0\}.$$

由于 $\{A',A,P\}$, $\{B',B,P\}$ 和 $\{C',C,P\}$ 共线, 可设 $A'=[(a,1,1)]$, $B'=[(1,b,1)]$ 和 $A'=[(1,1,c)]$. 于是 $A'B'$, $B'C'$ 和 $C'A'$ 的方程分别为

$$(1-b)x+(1-a)y+(ab-1)z=0;$$
$$(bc-1)x+(1-c)y+(1-b)z=0;$$
$$(1-c)x+(ac-1)y+(1-a)z=0.$$

可以计算 AB 与 $A'B'$ 的交点 $M=[(a-1,1-b,0)]$, BC 与 $B'C'$ 的交点 $N=[(0,b-1,1-c)]$, AC 与 $A'C'$ 的交点 $D=[(1-a,0,c-1)]$. 由于

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1-b & 0 \\ 0 & b-1 & 1-c \\ 1-a & 0 & c-1 \end{vmatrix} = 0,$$

定理得证.

记 $\mathbb{R}P^2 = \Sigma_1 \cup l_\infty$. 则平面 Σ_1 上的直线

$$a\hat{x} + b\hat{y} + c = 0$$

在齐次坐标系下的方程为

$$ax + by + cz = 0;$$

平面 Σ_1 上的二次曲线

$$a_{11}\hat{x}^2 + 2a_{12}\hat{x}\hat{y} + a_{22}\hat{y}^2 + 2a_{13}\hat{x} + 2a_{23}\hat{y} + a_{33} = 0$$

在齐次坐标系下的方程为

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

记

$$X = (x,y,z), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则 $\mathbb{R}P^2$ 中的二次曲线 Γ 可表成

$$\Gamma = \{[X] \mid X'AX = 0.\}.$$

特别是， Σ_1 中的椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ 对应

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Σ_1 中的双曲线 $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ 对应

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Σ_1 中的双曲线 $x^2 - 2cy = 0$ 对应

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 5.1 射影平面上处于一般位置上的五点可唯一确定通过它们的一个圆锥曲线.

证明 任给射影平面上处于一般位置上的五点 $\{A, B, C, D, E\}$. 我们可以取齐次坐标系，使得

$$A = [(1,0,0)],\ \ B = [(0,1,0)],\ \ C = [(0,0,1)],\ \ D = [(1,1,1)],\ \ E = [(\lambda, \mu, \nu)].$$

代入二次曲线方程，得到

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0,\ \ a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0,\ \ \lambda a_{12} + \mu a_{13} + \nu a_{23} = 0.$$

因为 $D \neq E$, 得到

$$a_{12} : a_{13} : a_{23} = (\mu - \nu) : (\nu - \lambda) : (\lambda - \mu).$$

所以过 $\{A, B, C, D, E\}$ 的圆锥曲线 Γ 唯一存在，为

$$(\mu - \nu)xy + (\nu - \lambda)xz + (\lambda - \mu)yz = 0.$$

定理证毕.

设 Γ 是 $\mathbb{R}P^2$ 中的一条圆锥曲线. 我们在 $\mathbb{E}^3$ 中取定仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$，则圆锥曲线 Γ 的齐次方程可写成

$$\Gamma = \{[X] \mid X'AX = 0\},$$

其中 $X = (x, y, z)$, $[X]$ 表示向量 $\mathbf{u} = xe_1 + ye_2 + ze_3$ 所定义的直线，而 A 是一个对称的 3×3 矩阵，它的特征值非负.

定理 5.2 设 $\Gamma = \{[X] \mid X'AX = 0\}$ 为 $\mathbb{R}P^2$ 中的圆锥曲线，$P = [V]$ 和 $Q = [W]$ 是 Γ 外的两点，它们的连线交 Γ 于两点 A_1, A_2. 则 P, Q 关于 Γ 调和共轭当且仅当 $V'AW = 0$.

证明 我们记

$$A_1 = [t_1 V + W],\ \ A_2 = [t_2 V + W].$$

由于 A_1, A_2 在 Γ 上，则 t_1, t_2 满足方程 $(tV + W)'A(tV + W) = 0$, 即

$$(V'AV)t^2 + 2(V'AW)t + (W'AW) = 0.$$

因为 $(A_1A_2; PQ) = t_2/t_1$, 所以

$$(A_1A_2; PQ) = -1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0 \Leftrightarrow V'AW = 0.$$