第三章 空间解析几何

§1 平面与直线

1.1 坐标与方程

在空间中取定右手系的单位正交标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. 设 P 为空间中一点，我们称 $\overrightarrow{OP}$ 为 P 点的位置向量. 通过向量分解 $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2 + ze_3$, 空间的每个点 P 均唯一对应它的坐标 (x, y, z). 通常，我们将点 P 和它的坐标 (x, y, z) 等同起来，记为 $P = (x, y, z)$.

定义 1.1 我们称过 O 点且平行于 e_1, e_2, e_3 的直线分别为 $x-$ 轴，$y-$ 轴，$z-$ 轴, 统称为坐标轴; 称向量 e_1, e_2, e_3 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向; 称 $\{O; e_1, e_2\}$ 生成的平面为 xy 平面; 称 $\{O; e_2, e_3\}$ 生成的平面为 yz 平面; 称 $\{O; e_1, e_3\}$ 生成的平面为 xz 平面. 这三个平面统称为坐标平面.

如图 1.1, 三个坐标平面将空间分割成八个区域. 每个区域称为一个卦限. 满足 $z > 0$ 的卦限有四个，依照 xy 平面四个区域的传统顺序分别为卦限 I,II,III,IV; 满足 $z < 0$ 的卦限有四个，依照 xy 平面四个区域的传统顺序分别为卦限 V,VI,VII,VIII.

图 1.1

向量空间 $\mathbb{V}$ 中的每个向量 $\mathbf{a}$ 均可唯一表示成 $\mathbf{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. 我们将 $\mathbf{a}$ 和它在基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标 (a_1, a_2, a_3) 等同起来，记为 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. 于是,

$$e_1 = (1, 0, 0), \ \ e_2 = (0, 1, 0), \ \ e_3 = (0, 0, 1).$$

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 和 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 为空间中的三个向量. 因为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是一个右手系的单位正交标架，则向量内积,

外积和体积公式分别为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3; \tag{1.1.1}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right); \tag{1.1.2}$$

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{1.1.3}$$

通常，空间中的图形可以通过图形中点的坐标所满足的方程来刻画. 例如：中心在 (x_0,y_0,z_0) 点，半径为 r 的球面是由满足方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-r^2=0 \tag{1.1.4}$$

的点 (x,y,z) 所构成. 以 $z-$ 轴为轴心半径为 r 的圆柱面则是由满足方程

$$x^2+y^2-r^2=0 \tag{1.1.5}$$

的点 (x,y,z) 所构成. 我们称方程 (1.1.4) 为球面方程，称 (1.1.5) 为柱面方程.

一般地，一张曲面上所有的点可以用一个方程 $F(x,y,z)=0$ 的所有解来表示. 我们称 $F(x,y,z)=0$ 为这张曲面的方程. 空间中的一条曲线则可以用两个联立的方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 来表示，它可视为曲面 $F(x,y,z)=0$ 和曲面 $G(x,y,z)=0$ 的交线.

此外, 曲面还可以用两个参数的参数方程来表示. 例如, 方程 (1.1.4) 所代表的球面可以用以下的参数方程来表示：

$$\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta\cos\varphi\\ y=y_0+r\sin\theta\cos\varphi\\ z=z_0+r\sin\varphi\end{cases},\quad \theta\in[0,2\pi],\varphi\in[0,\pi]; \tag{1.1.6}$$

而方程 (1.1.5) 所代表的柱面可以用以下的参数方程来表示：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=\varphi\end{cases},\quad \theta\in[0,2\pi],\varphi\in\mathbb{R}. \tag{1.1.7}$$

我们称 (1.1.6) 和 (1.1.7) 中的 θ 和 φ 称为曲面的两个参数.

空间中的一条曲线可以用一个参数的参数方程来表示：

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in (a,b), \tag{1.1.8}$$

其中 $f(t)$, $g(t)$ 和 $h(t)$ 为某个区间 (a,b) 上的连续函数．例如，圆柱面 (1.1.5) 上的一条螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1.9}$$

其中 c 为非零常数．几何上，当我们将一个三角形缠绕在圆柱面时，三角形的边在圆柱面上所形成的曲线就是一条螺旋线 (仅在特殊情况下为圆周).

1.2 平面与直线的方程

命题 1.1 空间中的平面所对应的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 其中 A,B,C,D 为常数，且 $\mathbf{n}=(A,B,C)\neq\mathbf{0}$.

证明 设 Σ 为平面．取非零向量 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 垂直于 Σ. 在 Σ 上取定一点 $Q=(x_0,y_0,z_0)$. 则 Σ 上的任意一点 $P=(x,y,z)$ 满足方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP}=0.$$

令 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 则平面 Σ 上的所有点满足方程 $Ax+By+Cz+D=0$. 反之，给定方程 $Ax+By+Cz=D$, 其中 $\mathbf{n}=(A,B,C)\neq\mathbf{0}$. 则存在 $Q=(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $Ax_0+By_0+Cz_0=D$. 则方程 $Ax+By+Cz=D$ 的任意解 $P=(x,y,z)$ 满足

$$\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{n}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)+(D-D)=0.$$

记 Σ 为过 Q 点且与 $\mathbf{n}$ 垂直的唯一平面．则方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的所有解落在平面 Σ 上． □

推论 1.1 在平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中， $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 代表平面的一个法向量.

设 Σ 为平面．在 Σ 上取定一点 $Q=(x_0,y_0,z_0)$ 和一组平行于 Σ 的不共线向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 和 $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 则空间中一点 $P=$

(x,y,z) 落在 Σ 上当且仅当存在实数 u,v 使得 $\overrightarrow{QP}=u\mathbf{a}+v\mathbf{b}$. 由于向量 $\overrightarrow{QP}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, 故平面 Σ 上点 (x,y,z) 所满足的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+ua_1+vb_1 \\ y=y_0+ua_2+vb_2 \\ z=z_0+ua_3+vb_3 \end{cases},\quad u,v\in\mathbb{R}. \tag{1.2.1}$$

因为 $\overrightarrow{QP}=u\mathbf{a}+v\mathbf{b}$ 当且仅当 $[\overrightarrow{QP},\mathbf{a},\mathbf{b}]=0$, 所以平面 Σ 的方程也可以写成

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & b_1 \\ y-y_0 & a_2 & b_2 \\ z-z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=0. \tag{1.2.2}$$

命题 1.2 设 $Ax+By+Cz+D=0$ 和 $A'x+B'y+C'z+D'=$ 分别是平面 Σ 和 Σ' 的方程. 则

(1) 两平面重合 $\Leftrightarrow A/A'=B/B'=C/C'=D/D'$;

(2) 两平面平行且不重合 $\Leftrightarrow A/A'=B/B'=C/C'\neq D/D'$;

(3) 两平面相交 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 与 $\mathbf{n}'=(A',B',C')$ 不平行;

(4) 两平面垂直 $\Leftrightarrow$ $AA'+BB'+CC'=0$.

证明 由推论 1.1 知，平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 和 $A'x+B'y+C'z+D'=0$ 的法向量分别为 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 与 $\mathbf{n}'=(A',B',C')$. 这两个平面平行当且仅当法向量 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 平行，即当且仅当 $A/A'=B/B'=C/C'=\lambda$. 这时两平面的方程分别为 $Ax+By+Cz+D=0$ 和 $Ax+By+Cz+\lambda D'=0$. 这两个平面重合当且仅当这两个方程有共同解，也就是 $D=\lambda D'$. 这两个平面平行且不重合当且仅当这两个方程没有共同解，即 $D\neq\lambda D'$. 故 (1) 和 (2) 成立. 显然，两平面不平行当且仅当它们的法向量 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 与 $\mathbf{n}'=(A',B',C')$ 不平行. 故 (3) 成立. 特别是，两平面垂直当且仅当它们的法向量 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 与 $\mathbf{n}'=(A',B',C')$ 垂直，即 $AA'+BB'+CC'=\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=0$. 故 (4) 成立. □

空间中一条直线由直线上一点和直线的方向向量所唯一确定. 设 $Q=(x_0,y_0,z_0)$ 是空间中的一点， $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 为非零向量. 记 l 是过 Q 并以 $\mathbf{a}$ 为方向向量的直线. 则 l 上的任意点 $P=(x,y,z)$ 满足

$\overrightarrow{QP}=t\,\mathbf{a}$, 其中 t 为实数．于是，直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+ta_1 \\ y=y_0+ta_2 \\ z=z_0+ta_3 \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{1.2.3}$$

从直线的参数方程 (1.2.3) 中消去 t, 得到

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}. \tag{1.2.4}$$

我们称 (1.2.4) 为直线的标准方程.

空间中一条直线也可以视为两个相交平面的交线, 它的方程可表为

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D=0' \end{cases}, \tag{1.2.5}$$

其中平面的法向量 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 和 $\mathbf{n}'=(A',B',C')$ 不平行．这时，交线的方向向量 $\mathbf{a}$ 同时与 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 垂直．故可取

$$\mathbf{a}=\mathbf{n}\times\mathbf{n}'=\left(\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}\right). \tag{1.2.6}$$

由于 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 和 $\mathbf{n}'=(A',B',C')$ 不平行，方程 (1.2.5) 有解 (x_0,y_0,z_0). 由此我们容易得到交线的参数方程和标准方程.

命题 1.3 设直线 l 过点 P, 方向向量为 $\mathbf{a}$; 直线 l' 过点 Q, 方向向量为 $\mathbf{a}'$. 则

(1) l 平行于 $l' \Leftrightarrow$ $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}'$ 平行;

(2) l 与 l' 重合 $\Leftrightarrow$ 三向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ 和 $\overrightarrow{PQ}$ 相互平行;

(3) l 与 l' 平行且不相交 $\Leftrightarrow \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 平行，但 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 不平行;

(4) l 与 l' 相交于一点 $\Leftrightarrow \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}'$ 不共线，且 $[\overrightarrow{PQ},\mathbf{a},\mathbf{a}']=0$;

(5) l 与 l' 既不相交也不平行 (称为异面直线)$\Leftrightarrow[\overrightarrow{PQ},\mathbf{a},\mathbf{a}']\neq 0$;

证明 两直线 l 与 l' 平行当且仅当它们的方向向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}'$ 平行．两直线重合当且仅当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 平行，并且 P 和 Q 落在同一直线上，即 $\overrightarrow{PQ}$ 和 $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ 也平行．故 (1) 和 (2) 成立．两直线 l 与 l' 平行且不相交当且

仅当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 平行，而 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 不平行，故 (3) 成立．两直线 l 与 l' 相交于一点当且仅当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 不平行，并且 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 共面，即 $[\overrightarrow{PQ},\mathbf{a},\mathbf{a}']=0$, 故 (4) 成立．两直线 l 与 l' 为异面直线，则 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 不共面 (否则 l 与 l' 必相交或平行). 故 $[\overrightarrow{PQ},\mathbf{a},\mathbf{a}']\neq 0$, (5) 成立．　□

1.3 平面与直线的位置关系

命题 1.4 设平面 Σ 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 直线 l 过点 $P=(x_0,y_0,y_0)$, 方向向量为 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$. 则

(1) l 平行于 $\Sigma \Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$;

(2) l 落在 Σ 上 $\Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$, 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$;

(3) l 与 Σ 不相交 $\Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$, 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$;

(4) l 与 Σ 相交于一点 $\Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3\neq 0$;

(5) l 与 Σ 垂直 $\Leftrightarrow \mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 与 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 平行.

证明　直线 l 与平面 Σ 平行当且仅当直线的方向向量 $\mathbf{a}$ 与平面的法向量 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 垂直，即 $Aa_1+Ba_2+Ca_3=\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}=0$. 这时，$l$ 落在 Σ 上当且仅当 $P=(x_0,y_0,y_0)$ 落在 Σ 上，即 $Ax_0+By_0+Cz_0=D$. 故 (1) 和 (2) 成立．直线 l 与平面 Σ 不相交，则平行，且 $P=(x_0,y_0,y_0)$ 不落在 Σ 上．故有 $Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$, 且 $Ax_0+By_0+Cz_0\neq D$, (3) 成立．直线 l 与平面 Σ 相交于一点当且仅当 l 与 Σ 不平行，即 l 的方向向量 $\mathbf{a}$ 与 Σ 的法向量 $\mathbf{n}$ 不垂直．故 $Aa_1+Ba_2+Ca_3\neq 0$, (4) 成立．直线 l 与平面 Σ 垂直当且仅当直线的方向向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 与平面法向量 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 平行．　□

图 1.2　　　　图 1.3

例 1.1 设平面 Σ 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$. 设 $Q=(x_0,y_0,z_0)$ 为空间中一点. 过 Q 引平面 Σ 的垂线, 垂足为 $P=(x_1,y_1,z_1)$(参见图 1.2). 则有 $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$. 记 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 为 Σ 的法向量. 则 Q 到平面 Σ 的距离 $d=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}|/|\mathbf{n}|$. 因为

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}=(Ax_1+By_1+Cz_1)-(Ax_0+By_0+Cz_0)=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D),$$

所以有距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{1.3.1}$$

例 1.2 设直线 l 过 $P=(\lambda,\mu,\nu)$, 并以 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 为方向向量. 设 $Q=(x,y,z)$ 为空间中一点. 过 Q 引直线 l 的直线, 垂足为 P'(参见图 1.3). 则有 $\overrightarrow{PP'}\parallel\mathbf{a}$. 故 Q 到直线 l 的最短距离

$$d=|\overrightarrow{P'Q}|=\frac{|\overrightarrow{P'Q}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}=\frac{|(\overrightarrow{P'P}+\overrightarrow{PQ})\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}.$$

于是有距离公式

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}x-\lambda & y-\mu\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y-\mu & z-\nu\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x-\lambda & z-\nu\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \tag{1.3.2}$$

图 1.4

例 1.3 设 l 和 l' 是异面直线, 分别过 $P=(x,y,z)$ 和 $P'=(x',y',z')$ 点, 它们的方向向量分别为 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 和 $\mathbf{a}'=(a_1',a_2',a_3')$. 因为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 不共线, 所以 $\mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{a}'$ 分别和两直线 l 和 l' 垂直. 过直线 l' 并以 $\mathbf{n}$ 为法向量作平面 Σ'. 由于直线 l 的方向向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{n}$ 垂直, 故 l 平

行于平面 Σ'. 过直线 l 作平面 Σ 与平面 Σ' 垂直，记 l'' 为 Σ 与 Σ' 的交线. 则两直线 l'' 与 l' 交于一点 Q'. 过 Q' 点作平面 Σ' 的法线，交直线为 Q(参见图 1.4). 则线段 $\overline{QQ'}$ 同时与两直线 l 和 l' 垂直，称为两直线的公垂线段. 这时，两直线 l 和 l' 之间的最短距离

$$d = |\overrightarrow{QQ'}| = \frac{|\overrightarrow{QQ'} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}.$$

因为 $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P'}$, $\overrightarrow{PQ} \parallel \mathbf{a}$ 和 $\overrightarrow{Q'P'} \parallel \mathbf{a}'$, 且 $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}, \mathbf{a}'$, 故有 $\overrightarrow{PP'} \cdot \mathbf{n} = \overrightarrow{QQ'} \cdot \mathbf{n}$. 于是有

$$d = \frac{|\overrightarrow{PP'} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \mathbf{a}, \mathbf{a}']|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{a}'|}.$$

代入坐标计算，得到两直线间的距离公式

$$d = \frac{\left\| \begin{matrix} x - x' & a_1 & a_1' \\ y - y' & a_2 & a_2' \\ z - z' & a_3 & a_3' \end{matrix} \right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a_1' \\ a_2 & a_2' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_2' \\ a_3 & a_3' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_1' \\ a_3 & a_3' \end{vmatrix}^2}}. \tag{1.3.3}$$

定义 1.2 设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 分别是两直线 l 和 l' 的方向向量. 我们称 $\theta = \arccos(|\cos < \mathbf{a}, \mathbf{a}' > |)$ 为两直线间的夹角. 几何上，通过平移 l' 可使它与直线 l 相交，则 θ 恰为这两相交直线交角中小的那个夹角 (参见图 1.5).

图 1.5

图 1.6

定义 1.3 设直线 l 和平面 Σ 交于一点 P. 记 $\mathbf{a}$ 为 l 的方向向量，$\mathbf{n}$ 是 Σ 的法向量. 我们称 $\theta = \arccos(\sin < \mathbf{a}, \mathbf{n} >)$ 为直线 l 与平面 Σ

的夹角. 几何上, 将直线 l 沿法向量 $\mathbf{n}$ 投影到平面 Σ 上, 得到直线 l'. 则 l 和 Σ 之间的夹角 θ 即为两直线 l 和 l' 之间的夹角 (参见图 1.6).

图 1.7

例 1.4 设 $\mathbb{P}$ 为顶点在单位圆周上的正八面体, 它的六个顶点为 $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$(参见图 1.7). 求:

(1) 点 A_1 到三角形 $A_2A_3A_6$ 所在平面的距离;

(2) 异面直线 A_1A_3 与 A_2A_6 之间的夹角和距离;

(3) 直线 A_1A_5 与三角形 $A_1A_3A_6$ 所在平面之间的夹角.

解 令 O 为正八面体的重心. 则 $\{O; \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_4}, \overrightarrow{OA_6}\}$ 构成右手系的单位正交标架. 这时 $A_1 = (-1, 0, 0)$, $A_2 = (1, 0, 0)$, $A_3 = (0, -1, 0)$, $A_4 = (0, 1, 0)$, $A_5 = (0, 0, -1)$, $A_6 = (0, 0, 1)$.

(1) 因为 $\overrightarrow{A_3A_2} = (1, 1, 0)$ 和 $\overrightarrow{A_3A_6} = (0, 1, 1)$ 构成三角形 $A_2A_3A_6$ 所在平面 Σ 上两个不共面的向量, 平面的法向量 $\mathbf{n} = \overrightarrow{A_3A_2} \times \overrightarrow{A_3A_6} = (1, -1, 1)$. 故平面 Σ 的方程为 $x - y + z + D = 0$. 将 A_3 点的坐标代入方程, 得到 $D = -1$. 由 (1.3.1) 得到 A_1 到 Σ 的距离 $d = 2/\sqrt{3}$.

(2) 直线 A_1A_3 的方向向量为 $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_3} = (1, -1, 0)$. 直线 A_2A_6 的方向向量为 $\mathbf{a}' = \overrightarrow{A_2A_6} = (-1, 0, 1)$. 由于 $\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle = -1/2$, 故两直线夹角 $\theta = \arccos|\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle| = \pi/3$. 因为 $\overrightarrow{A_1A_2} = (2, 0, 0)$, 所以两直线距离 $d = |[\overrightarrow{A_1A_2}, \mathbf{a}, \mathbf{a}']|/|\mathbf{a} \times \mathbf{a}'| = 2/\sqrt{3}$.

(3) 直线 A_1A_5 的方向向量为 $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_5} = (1, 0, -1)$. 三角形 $A_1A_3A_6$ 所在平面的法向量 $\mathbf{n} = \overrightarrow{A_3A_1} \times \overrightarrow{A_6A_1} = (-1, -1, 1)$. 由于 $\sin < \mathbf{a}, \mathbf{n} >= |\mathbf{a} \times \mathbf{n}|/|\mathbf{a}||\mathbf{n}| = 1/\sqrt{3}$, 所以直线 A_1A_5 与三角形 $A_1A_3A_6$ 所在平面之间的夹角为 $\arccos 1/\sqrt{3}$. $\square$

习题 III-1

1.

§2 坐标变换

2.1 空间坐标变换

设 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 和 $\{O';e_1',e_2',e_3'\}$ 是空间中的两个仿射坐标系．则空间中一点 P 在坐标系 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 下的坐标 (x,y,z) 定义为

$$\overrightarrow{OP}=xe_1+ye_2+ze_3=(e_1,e_2,e_3)X,\ \ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\tag{2.1.1}$$

而 P 在另一个坐标系 $\{O';e_1',e_2',e_3'\}$ 下的坐标 (x',y',z') 定义为

$$\overrightarrow{O'P}=x'e_1'+ye_2'+z'e_3'=(e_1',e_2',e_3')X',\ \ X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.\tag{2.1.2}$$

因为 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 和 $\{e_1',e_2',e_3'\}$ 均为向量空间 $\mathbb{V}$ 的基，故存在可逆矩阵 A 满足

$$(e_1',e_2',e_3')=(e_1,e_2,e_3)A,\ \ A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.\tag{2.1.3}$$

我们记

$$\overrightarrow{OO'}=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3=(e_1,e_2,e_3)C,\ \ C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}.\tag{2.1.4}$$

因为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{O'P}+\overrightarrow{OO'}$, 由以上公式得到

$$(e_1,e_2,e_3)X=(e_1',e_2',e_3')X'+(e_1,e_2,e_3)C=(e_1,e_2,e_3)(AX'+C).$$

由于 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是空间的一组基，则有 $X=AX'+C$ 成立，故有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}.\tag{2.1.5}$$

我们称 (2.1.3) 中的矩阵 A 为从坐标系 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 到坐标系 $\{O';e_1',e_2',e_3'\}$ 的 **过渡矩阵**.

我们记

$$\begin{pmatrix}c_1'\\c_2'\\c_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},$$

则有新坐标与旧坐标的变换公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix}. \tag{2.1.6}$$

设 $(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3)A$ 和 $(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1', e_2', e_3')B$, 则有

$$(e_1, e_2, e_3) = (e_1', e_2', e_3')A^{-1}, \ \ (e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1, e_2, e_3)AB.$$

于是，以下的命题成立：

命题 2.1 设 A 是从坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 到坐标系 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 的过渡矩阵， B 是从坐标系 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 到坐标系 $\{O''; e_1'', e_2'', e_3''\}$ 的过渡矩阵. 则 A^{-1} 是从坐标系 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 到坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 的过渡矩阵； AB 是从坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 到坐标系 $\{O''; e_1'', e_2'', e_3''\}$ 的过渡矩阵.

命题 2.2 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 是一个右手系的单位正交标架， A 是一个三阶矩阵. 令 $(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3)A$. 则 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 是右手系的单位正交标架当且仅当 A 为行列式为 1 的正交矩阵.

证明 因为 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 是一个右手系的单位正交标架，所以有

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3) = I, \ \ [e_1, e_2, e_3] = 1.$$

由 $(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3)A$, 我们得到

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} \cdot (e_1', e_2', e_3') = A' \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3)A = A'A;$$

$$[e_1', e_2', e_3'] = [e_1, e_2, e_3]|A| = |A|.$$

故 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 是右手系的单位正交标架当且仅当 A 为行列式为 1 的正交矩阵. □

推论 2.1 设空间中一点 P 在两个右手系的单位正交标架下的坐标分别为 (x, y, z) 和 (x', y', z'). 则坐标变换公式可表成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \tag{2.1.7}$$

其中 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为行列式为 1 的正交矩阵.

2.2 平面坐标变换

设 $\{O; e_1, e_2\}$ 和 $\{O'; e_1', e_2'\}$ 是平面 Σ 上的两个仿射坐标系. 则空间中一点 P 在坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$ 下的坐标 (x, y) 定义为

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2 = (e_1, e_2)X, \ \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \tag{2.2.1}$$

而 P 在另一个坐标系 $\{O'; e_1', e_2'\}$ 下的坐标 (x', y') 定义为

$$\overrightarrow{O'P} = x'e_1' + ye_2' = (e_1', e_2')X', \ \ X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

因为 $\{e_1, e_2\}$ 和 $\{e_1', e_2'\}$ 均为平面 Σ 上两组不共线的向量, 故存在可逆 2 阶矩阵 A 满足

$$(e_1', e_2') = (e_1, e_2)A, \ \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.2.3}$$

我们记

$$\overrightarrow{OO'} = c_1e_1 + c_2e_2 = (e_1, e_2)C, \ \ C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{2.2.4}$$

因为 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{OO'}$, 由以上公式得到

$$(e_1, e_2)X = (e_1', e_2')X' + (e_1, e_2)C = (e_1, e_2)(AX' + C).$$

由于 $\{e_1, e_2\}$ 是空间的一组基, 则有 $X = AX' + C$ 成立, 故有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{2.2.5}$$

我们称 (2.2.3) 中的矩阵 A 为从坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$ 到坐标系 $\{O'; e_1', e_2'\}$ 的 **过渡矩阵**.

我们记

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

则有新坐标与旧坐标的变换公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix}. \tag{2.2.6}$$

同空间的情形类似，我们可以证明

命题 2.3 设 $\{O; e_1, e_2\}$ 是一个右手系的单位正交标架， A 是一个 2 阶矩阵．令 $(e_1', e_2') = (e_1, e_2)A$. 则 $\{O'; e_1', e_2'\}$ 是右手系的单位正交标架当且仅当 A 为行列式为 1 的正交矩阵.

我们知道，每个 2 阶正交矩阵可以用第二章的 (3.2.2) 式表出．因为 $|A| = 1$, 我们得到

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

这样，我们有

推论 2.2 设平面 Σ 上一点 P 在两个右手系的单位正交标架 $\{O; e_1, e_2\}$ 和 $\{O'; e_1', e_2'\}$ 下的坐标分别为 (x, y) 和 (x', y'). 则坐标变换公式可表成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{2.2.7}$$

其中 θ 是向量 e_1 和 e_1' 之间的夹角.

习题 III-2

1.

§3 二次曲线的分类

3.1 圆锥曲线

在平坦的地面 F 点处放置一个直径为 d 的球面. 在球面外高度为 $h>0$ 的点 Q 处放置一个点光源. 光照射球面并在地面形成一个阴影区域，它的边界曲线记为 Γ. 从 Q 点出发的光线照亮了球面上一个圆形区域，它的边界是球面上一个小圆周 γ. γ 所在平面 Σ 与地面有一条交线 l, 称为曲线 Γ 的 **准线**. 我们称 F 为曲线 Γ 的焦点.

图 3.1a　　　　图 3.1b　　　　图 3.1c

当 $h>d$ 时， γ 含有球面的最高点 T 在其内部. 如果光源 Q 在球面的正上方，则 Γ 为一圆周，这时准线 l 不存在. 如果光源 Q 在球面的斜上方，则阴影区域依然是一个有限的区域. 这时我们称 Γ 为 **椭圆**, 称 l 为椭圆 Γ 的准线，称 T 为椭圆 Γ 的一个焦点 (参见图 3.1a).

当 $h=d$ 时，球面的最高点 T 落在小圆周 γ 上，并且光线 QQ' 平行于地面. 这时我们称曲线 Γ 为 **抛物线**, 称 l 为抛物线 Γ 的准线，称 F 为抛物线 Γ 的焦点 (参见图 3.1b).

当 $h<d$ 时，球面的最高点 T 落在小圆周 γ 的外部. 这时我们称曲线 Γ 为 **双曲线**, 称 l 为双曲线 Γ 的准线，称 F 为双曲线 Γ 的一个焦点 (参见图 3.1c).

我们注意到，所有与球面相切的光线构成一个圆锥，而 Γ 恰是不过圆锥顶点的平面 (即地面) 截这个圆锥而生产的曲线. 于是，椭圆，抛物线和双曲线是圆锥与平面的截线，统称 **圆锥曲线**.

图 3.2

设 α 为这个圆锥的底角， β 为小圆周 γ 所在平面 Σ 与地面的夹角. 过 Q, F 点和球心 O 点作一平面，交准线于 P'. 记 QE 和 QF 为切线，切点为 E 和 F. QE 交 TP' 于 G. 过 Q 作地面的垂线 l'. 过 O 引 l' 的垂线，垂直为 D(参见图 3.2). 则 $\measuredangle GEP' = \alpha$, $\measuredangle EP'G = \beta$. 由此得到 $\measuredangle FGQ = \alpha + \beta$. 因为四边形 $OFGQ$ 的内角和为 2π, 而 $\measuredangle OQG = \pi/2 - \alpha$, 故有 $\measuredangle QOD = \pi/2 - \beta$. 这样，从直角三角形 ODQ 和 OEQ 我们得到

$$h - \frac{d}{2} = d(Q,D) = d(Q,O)\sin(\pi/2 - \beta), \ \ \frac{d}{2} = d(Q,O)\cos\alpha.$$

消去 $d(Q,O)$, 得到

$$\frac{h}{d} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \tag{3.1.1}$$

故当 $\alpha > \beta$ 时， $h > d$, 截线为椭圆； $\alpha = \beta$ 时， $h = d$, 截线为抛物线，这时截平面与圆锥的某条母线平行； $\alpha < \beta$ 时， $h < d$, 截线为双曲线，它的两个分支分别落在锥面的上下两个部分上.

以下我们研究圆锥曲线的性质.

图 3.3

任取 Γ 上一点 P. 从 P 分别引平面 Σ 和准线 l 的垂线，垂足为分别为 P^* 和 P'(参见图 3.3). 由于向量 $\overrightarrow{PP^*}$ 与圆锥轴线 QO 平行，而 QO 与准线 l 垂直，故 $\overrightarrow{PP^*}$ 也与准线 l 垂直. 又由于直线 PP' 是准线 l 的垂线，故 P^*P' 也与 l 垂直. 故有

$$\measuredangle P^*PQ = \measuredangle PQO = \frac{\pi}{2} - \alpha, \ \ \measuredangle P^*P'P = \beta.$$

因为 PT 和 PM 同为 P 点出发的球面的切线，所以 $d(P,T) = d(P,M)$. 在直角三角形 PP^*M 和 PP^*P' 中，我们有

$$d(P,P^*) = d(P,M)\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = d(P,T)\sin\alpha, \ \ d(P,P^*) = d(P,P')\sin\beta.$$

由此得到，

$$\frac{d(P,T)}{d(P,l)}=\frac{d(P,T)}{d(P,P')}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=e$$

是一个与 P 无关的常数．我们称 e 为圆锥曲线的 **离心率**. 显然，离心率 $e<1$ 时为椭圆；离心率 $e=1$ 时为抛物线；离心率 $e>1$ 时为双曲线．这样我们证明了

定理 3.1 圆锥曲线上点到它焦点和到它准线的距离比为常数.

图 3.4a　　　　图 3.4b

定理 3.2

(1) 椭圆上点到两定点的距离和为常数;

(2) 抛物线上点到一定点的和到一定直线的距离相等;

(3) 双曲线上点到两定点的距离差为常数.

证明 (1) 设平面 Σ 截圆锥得一椭圆 Γ. 在圆锥被截断的两个部分中各放一个最大的球体．这两个球体分别与平面 Σ 切于两点 F 和 F'(称为椭圆的焦点), 并分别与圆锥交于两个圆周 γ 和 γ'. 任取 Γ 上的一点 P, 记母线 PQ 与 γ,γ' 的交点为 T 和 T'(参见图 3.4a). 因为球外一点到球面的切线长度相等，故

$$d(P,F)+d(P,F')=d(P,T)+d(P,T')=d(T,T')$$

为介于两个圆周 γ 和 γ' 之间母线段的长度，这个长度与 P 无关，是常数． (2) 是 (3.1.1) 的推论． (3) 设平面 Σ 截圆锥得一双曲线 Γ. 在圆锥上下部分中各放一个最大的球体．这两个球体分别与平面 Σ 切于两点 F 和 F'(称为双曲线的焦点), 并分别与圆锥交于两个圆周 γ 和 γ'. 任取 Γ 上的一点 P, 记母线 PQ 与 γ,γ' 的交点为 T 和 T'(参见图 3.4b). 因为球外一点到球面的切线长度相等，故

$$d(P,F')-d(P,F)=d(P,T')-d(P,T)=d(T,T')$$

为介于两个圆周 γ 和 γ' 之间母线段的长度，这个长度与 P 无关，是常数. $\square$

以下我们计算圆锥曲线所满足的代数方程.

图 3.5a　　图 3.5b　　图 3.5c

设 Γ 是平面上一个椭圆，它的两焦点为 F 和 F'. 如图 3.5a, 我们在平面上建立右手正交坐标系，使得 $F=(c,0)$, $F'=(-c,0)$. 设 $P=(x,y)$ 为椭圆上任意点. 记 $d(P,F)+d(P,F')$ 为常数 $2a$. 由三角不等式知 $2c=d(F,F')<2a$. 令 $b=\sqrt{a^2-c^2}$. 则由

$$d(P,F)+d(P,F')=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

推出

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2,$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x.$$

由此得到椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{3.1.2}$$

设椭圆准线的方程为 $x=p$. 由于椭圆上任意 P 点到焦点 $F=(c,0)$ 和准线 $x=p$ 的距离比为常数 e, 分别令 $P=(a,0)$ 及 $P=(-a,0)$, 我们得到

$$\frac{a+c}{p+a}=\frac{a-c}{p-a}=e.$$

从中得到 $e=c/a$ 和 $p=a^2/c$. 故椭圆 (3.1.2) 的准线方程为 $x=a^2/c$. 同理，椭圆的另一个焦点 $F'=(-c,0)$ 对应有另一条准线 $x=-a^2/c$.

设 Γ 是平面上一个抛物线，它的焦点为 F, 准线为 F'. 如图 3.5b, 我们在平面上建立右手正交坐标系，使得 $F=(0,c)$, 准线方程为 $y=-c$.

设 $P=(x,y)$ 为抛物线上任意点．由于

$$y+c=d(P,F)=\sqrt{x^2+(y-c)^2},$$

我们得到抛物线的标准方程

$$x^2-4cy=0. \tag{3.1.3}$$

设 Γ 是平面上一个双曲线，它的两焦点为 F 和 F'. 如图 3.5c, 我们在平面上建立右手正交坐标系，使得 $F=(c,0)$, $F'=(-c,0)$. 设 $P=(x,y)$ 为椭圆上任意点．记 $|d(P,F)-d(P,F')|$ 为常数 $2a$. 由三角不等式知 $2c=d(F,F')>2a$. 令 $b=\sqrt{c^2-a^2}$. 则有

$$d(P,F)-d(P,F')=\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

由此得到双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{3.1.4}$$

同理求得，双曲线 (3.1.4) 的离心率 $e=c/a$, 且两个焦点 $F=(c,0)$ 和 $F'=(-c,0)$ 所对应的两条准线方程分别为为 $x=a^2/c$ 和 $x=-a^2/c$.

3.2 二次曲线的代数不变量

从代数上看，圆锥曲线的方程 $F(x,y)=0$ 是一个二次的代数方程. 在上节中，我们利用圆锥曲线的特殊几何性质来建立右手直角坐标系，得到了椭圆，抛物线和双曲线标准方程.

假如我们取了其它的右手直角坐标系，则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.1}$$

于是，圆锥曲线的方程变成

$$F(\cos\theta x'+\sin\theta y'+c_1,-\sin\theta x'+\cos\theta y'+c_2)=0,$$

它依然是一个二次的方程.

定义 3.1 平面上由一个二次方程

$$F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

所定义的图形 Γ 称为二次曲线，其中 A,B,C 不全为零.

我们的目的是研究二次曲线 Γ 所有可能的形状. 为了方便研究，我们将上述方程写成矩阵形式

$$(x,y,1)\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.2.2}$$

显然，当二次曲线 $F(x,y)=0$ 的所有系数乘上一个非零常数时，它所定义的图形 Γ 不变. 以下我们试图通过重新选取右手直角坐标系，使得二次方程得以简化，并从简化的方程中分析二次曲线的形状. 当我们取新的右手直角坐标系后，则坐标变换公式 (3.2.1) 可以写成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & c_1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2.3}$$

其中 θ 和 c_1, c_2 为待定的常数. 将方程 (3.2.3) 代入方程 (3.2.2), 得到二次曲线 Γ 在新坐标系下的方程

$$(x',y',1)\begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{3.2.4}$$

其中

$$\begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & c_1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此得到

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.2.5}$$

从 (3.2.5) 直接得到

$$A' = A\cos^2\theta - 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta; \tag{3.2.6}$$

$$C' = A\sin^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta; \tag{3.2.7}$$

$$B' = \frac{1}{2}(B\cos 2\theta + (A-C)\sin 2\theta). \tag{3.2.8}$$

由 (3.2.6), (3.2.7) 和以上两个矩阵方程，我们得到

$$A' + C' = A + C;$$

$$\begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix};$$
$$\begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

定义 3.2 设 Γ 是平面上由二次方程

$$F(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

定义的二次曲线. 我们定义它的三个代数不变量 I_1, I_2, I_3 分别为

$$I_1 = A + C, \quad I_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}. \tag{3.2.9}$$

因为 A, B, C 不全为零，所有 I_1, I_2 不全为零.

于是我们有

定理 3.3 平面上二次曲线 Γ 的代数不变量 I_1, I_2 和 I_3 在坐标变换下不变.

3.3 二次曲线的分类

设二次曲线 Γ 的方程为

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

为了研究 Γ 所有可能的形状，我们试图通过坐标变换，将上述方程变为最简单的形式.

如果 $B \neq 0$, 我们取 θ 满足

$$\cot 2\theta = -\frac{A - C}{B}.$$

由 (3.2.8) 得 $B' = 0$. 于是，通过坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

我们总可以将二次曲线的方程简化成

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \tag{3.3.1}$$

的形式. 这时, 我们有 $I_1 = A' + C'$ 和 $I_2 = A'C'$.

我们首先考虑 $I_2 \neq 0$ 的情形. 这时 A', C' 均非零, (3.3.1) 可以写成

$$A'(x' + \frac{D'}{A'})^2 + C'(y' + \frac{E'}{C'})^2 + F' - \frac{D'^2}{A'} - \frac{E'^2}{C'} = 0. \tag{3.3.2}$$

我们再作坐标变换

$$x^* = x' + \frac{D'}{A'}, \;\; y^* = y' + \frac{E'}{C'},$$

并令

$$\lambda = A', \;\; \mu = C', \;\; F^* = F' - \frac{D'^2}{A'} - \frac{E'^2}{C'},$$

得到新方程

$$\lambda x^{*2} + \mu y^{*2} + F^* = 0. \tag{3.3.3}$$

由于不变量 I_1, I_2, I_3 在坐标变换下不变, 由 (3.3.3) 得到

$$I_1 = \lambda + \mu, \;\; I_2 = \lambda\mu, \;\; I_3 = \lambda\mu F^*.$$

故 λ, μ 是二次方程

$$t^2 - 2I_1 t + I_2 = 0 \tag{3.3.4}$$

的根, 且 $F^* = I_3/I_2$. 这样方程 (3.3.3) 变成

$$\lambda x^{*2} + \mu y^{*2} + \frac{I_3}{I_2} = 0. \tag{3.3.5}$$

当 $I_2 < 0$ 时, λ 和 μ 异号. 如果 $I_3 \neq 0$, 由 (3.3.5) 知, 二次曲线为双曲线. 如果 $I_3 = 0$, 则方程 (3.3.5) 变成 $\lambda x^{*2} + \mu y^{*2} = 0$, 它的图形是由两相交直线

$$\sqrt{|\lambda|}x^* + \sqrt{|\mu|}y^* = 0, \;\; \sqrt{|\lambda|}x^* - \sqrt{|\mu|}y^* = 0$$

上的所有点组成.

当 $I_2 > 0$ 时, λ, μ 和 I_1 均同号. 如果 $I_3 \neq 0$, 且与 I_1 异号, 则由 (3.3.5) 知, 二次曲线为椭圆; 如果 $I_3 \neq 0$, 且与 I_1 同号, 则方程 (3.3.5) 无解, 二次曲线是空集. 如果 $I_3 = 0$, 则 (3.3.5) 的解为 $(x^*, y^*) = (0, 0)$, 为平面上一点.

综上所述, 我们得到

定理 3.4 设二次曲线 Γ 的方程为

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

I_1, I_2 和 I_3 为 Γ 的代数不变量, 且 $I_2 \neq 0$. 则

(1) 当 $I_2<0$ 和 $I_3\neq 0$ 时， Γ 为双曲线;

(2) 当 $I_2<0$ 和 $I_3=0$ 时， Γ 为两条相交的直线;

(3) 当 $I_2>0$ 和 $I_1I_3<0$ 时， Γ 为椭圆;

(4) 当 $I_2>0$ 和 $I_1I_3>0$ 时， Γ 为空集;

(5) 当 $I_2>0$ 和 $I_3=0$ 时， Γ 为平面上一个点;

以下我们考虑 $I_2=0$ 的情形. 由 (3.3.1) 得 $I_2=A'C'=0$, 即 $A'=0$ 或 $C'=0$. 我们不妨设 $C'=0$. 这时 $A'\neq 0$. 由 (3.3.1) 我们得到

$$A'x'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0. \tag{3.3.6}$$

从二次曲线方程 (3.3.6) 计算不变量，我们得到

$$I_1=A'\neq 0,\ \ I_2=0,\ \ I_3=-A'E'^2. \tag{3.3.7}$$

如果 $I_3\neq 0$, 则由 (3.3.7) 知 $E'\neq 0$, 并且 I_3 与 I_1 异号. 这时，方程 (3.3.7) 可以写成

$$A'(x'+\frac{D'}{A'})^2+2E'(y'+\frac{F'}{2E'}-\frac{D'^2}{2A'E'})=0. \tag{3.3.8}$$

作坐标变换

$$x^*=x'+\frac{D'}{A'},\ \ y^*=y'+\frac{F'}{2E'}-\frac{D'^2}{2A'E'},$$

并将

$$I_1=A',\ \ E'=\pm\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}$$

代入方程 (3.3.8), 我们得到

$$I_1x^{*2}\pm\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}y^*=0.$$

这时，二次曲线为抛物线.

如果 $I_3=0$, 则由 (3.3.7) 知 $E'=0$. 这时方程 (3.3.6) 变成

$$A'x'^2+2D'x'+F'=0. \tag{3.3.9}$$

这是一个二次方程，它的判别式 $\Delta=4(D'^2-A'F')$. 当 $\Delta>0$ 时，方程 (3.3.9) 等价于两条平行直线 $x'=\lambda$ 和 $x'=\mu$, 其中 λ,μ 为二次方程的两个不同的实根；当 $\Delta=0$ 时，方程 (3.3.9) 等价于一条直线 $x'=\lambda$, 其中

λ 是二次方程的唯一实根；当 $\Delta < 0$ 时，无解，这时方程 (3.3.9) 的解为空集.

综上所述，我们得到

定理 3.5 设二次曲线 Γ 的方程为

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

I_1, I_2 和 I_3 为 Γ 的代数不变量，且 $I_2 = 0$. 则

(1) 当 $I_3 \neq 0$ 时，Γ 为抛物线;

(2) 当 $I_3 = 0$ 时，Γ 为两条平行线，一条直线或空集.

由定理 3.4 和定理 3.5, 我们得到以下的二次曲线分类定理：

定理 3.6 平面上二次曲线

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

所有可能的形状为：椭圆，双曲线，抛物线，两条直线，一条直线，一点或空集.

利用圆锥曲线的标准方程，定理 3.4 和定理 3.5 我们得到

定理 3.7 设二次曲线 Γ 的方程为

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

I_1, I_2 和 I_3 为 Γ 的代数不变量. 则

(1) Γ 为椭圆当且仅当 $I_2 > 0$ 和 $I_1 I_3 < 0$;

(2) Γ 为双曲线当且仅当 $I_2 < 0$ 和 $I_3 \neq 0$;

(3) Γ 为抛物线当且仅当 $I_2 = 0$ 和 $I_3 \neq 0$.

习题 III-3

1.

§4 二次曲面分类

4.1 二次曲面的例子

例子 4.1 设 l 和 l' 是空间中的两条直线. 如果 l 和 l' 平行，则 l' 绕 l 旋转所得到的曲面称为 **圆柱面**(参见图 4.1a); 如果 l 和 l' 相交于一点

O, 则 l' 绕 l 旋转所得到的曲面称为以 O 为顶点的 **圆锥面**(参见图 4.1b); 如果 l 和 l' 为互不垂直的异面直线，则 l' 绕 l 旋转所得到的曲面称为**单叶双曲面**(参见图 4.1c).

图 4.1a　　图 4.1b　　图 4.1c

我们以圆柱面的旋转轴 l 为 z 轴建立坐标系. 则圆柱面上一点 (x,y,z) 到旋转轴 l 上的点 $(0,0,z)$ 的距离为圆柱面的半径 R, 为常数．故圆柱面的方程为

$$x^2+y^2=R^2. \tag{4.1.1}$$

我们以圆锥面的顶点为原点，以旋转轴 l 为 z 轴建立坐标系．设 $P=(x,y,z)$ 为圆锥面上一点．则 $P'=(0,0,z)$ 是 P 点到旋转轴 l 垂直投影的垂足．令 θ 为圆锥面的中心角．则在直角三角形 OPP' 中有 $d(P,P')=\tan\theta\, d(O,P')$. 故圆锥面的方程为

$$x^2+y^2-\tan^2\theta z^2=0. \tag{4.1.2}$$

设 l 和 l' 为异面直线，夹角为 $\theta\neq\pi/2$. 直线 l' 绕 l 旋转得到单叶双曲面 S. 设 O 和 P 分别是 l 和 l' 上的点，使得线段 $\overline{OP}$ 是公垂线．记 $R=d(O,P)$. 我们以 O 为原点，l 为 z 轴，以直线 OP 为 x 轴建立右手直角坐标系．则 $P=(R,0,0)$. 设直线 l' 的方向向量为 $\mathbf{a}$. 则 $\mathbf{a}$ 与 x 轴垂直，并与 z 轴的交角为 θ. 故可取 $\mathbf{a}=(0,\sin\theta,\cos\theta)$. 设 $Q=(x,y,z)$ 为 S 上任意点，它是由直线 l' 上的点 $Q'=(x',y',z')$ 绕 z 轴旋转而得到. 于是有

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2,\ \ z=z'. \tag{4.1.3}$$

因为 Q' 落在 l' 上，所以存在参数 t, 使得 $\overrightarrow{Q'P}=t\mathbf{a}$, 即

$$(x',y',z')=(R,t\sin\theta,t\cos\theta). \tag{4.1.4}$$

将 (4.1.4) 代入方程 (4.1.3), 得到 $x^2+y^2=R^2+t^2\sin^2\theta$ 和 $t=z/\cos\theta$. 故单叶双曲面的方程为

$$x^2+y^2-\tan^2\theta\, z^2=R^2. \tag{4.1.5}$$

设 P 为单叶双曲面上一点. 由于单叶双曲面是由直线旋转而成，所以至少有一个直线 l_1 通过 P 点. 设 Σ 是由旋转轴 l 和 P 点张成的平面. 由于平面反射 $\Sigma:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 将旋转面映成自己，并且将直线映成直线，所以 l_P 的平面反射象 l'_P 也是单叶双曲面上的一条直线，并且 l_P 和 l'_P 相交于点 P. 故单叶双曲面上每一点均有两条曲面上的直线通过此点.

例子 4.2 将抛物线 $x^2=4cy\,(c\neq 0)$ 绕它的对称轴 (y 轴) 旋转，得到的曲面称为 **旋转抛物面**. 我们注意到，如果旋转抛物面上点 (x,y,z) 是由抛物线上的点 $(x',y,0)$ 旋转而来，则有 $x^2+z^2=x'^2=4cy$. 故旋转抛物面的方程为

$$x^2+z^2=4cy. \tag{4.1.6}$$

我们常在手电筒头部看到旋转抛物面. 一个小灯泡被安置在抛物面的焦点 $(0,c,0)$ 上. 从焦点出发的光线经抛物面反射后形成平行光束 (参见图 4.2a).

图 4.2a　　图 4.2b　　图 4.2c

例子 4.3 将双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 绕它的主轴 (x 轴) 旋转，得到的曲面称为 **双叶双曲面**(参见图 4.2b), 它的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{4.1.7}$$

如果将 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 绕它的副轴 (y 轴) 旋转，得到的将是一个单叶双曲面 (参见图 4.2c).

例子 4.4 我们称由方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{4.1.8}$$

给出的图形为 **双曲抛物面** (**马鞍面**)(参见图 4.3a).

我们注意到，对任何参数 $\lambda \neq 0$, 直线 l_λ

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\lambda^{-1} z \end{cases} \tag{4.1.9}$$

的所有解满足 (4.1.8); 直线 l_μ

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\mu^{-1} z \end{cases} \tag{4.1.10}$$

的所有解满足 (4.1.8). 故直线 l_λ 和 l_μ 落在双曲抛物面上. 当非零实数 λ(或 μ) 变动时，直线 l_λ (或直线 l_μ) 随着变动，并描绘出整个双曲抛物面. 对双曲抛物面上任意点 $P = (x_0, y_0, z_0)$, 我们取定 $\lambda = x_0/a - y_0/b$ 和 $\mu = x_0/a + y_0/b$. 则 l_λ 和 l_μ 是双曲抛物面上过 P 点的两条直线.

图 4.3a　　　　图 4.3b

例子 4.5 设 $\mathbb{S}^2$ 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 为仿射变换

$$\phi(x, y, z) = (ax, by, cz). \tag{4.1.11}$$

如果 (x, y, z) 为 $\phi(\mathbb{S}^2)$ 上一点，则 $(x/a, y/b, z/c) = \phi^{-1}(x, y, z)$ 为单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的点. 故 $\phi(\mathbb{S}^2)$(参见图 4.3b) 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.1.12}$$

我们称方程 (4.1.12) 所定义的图形的 **椭球面**.

例子 4.6 将这些例子一般化，我们得到一些特殊曲面，它们是由以下的二次方程定义的图形：

(1) 椭球面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$;

(2) 单叶双曲面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$;

(3) 双叶双曲面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$;

(4) 椭圆抛物面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z$;

(5) 双曲抛物面 (马鞍面) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z$;

(6) 椭圆锥面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$;

(7) 椭圆柱面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;

(8) 双曲柱面 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$;

(9) 抛物柱面 $x^2/a^2 = 2z$.

4.2 二次曲面的分类

我们称由以下一般二次方程定义的图形为 **二次曲面**:

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz$$

$$+2B_1x + 2B_2y + 2B_3z + C = 0,$$

其中至少有一个 $A_{ij} \neq 0$. 在这一节中，我们将对所有可能的二次曲面进行分类.

我们记

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

则有 $X^t = (x, y, z)$, $B^t = (B_1, B_2, B_3)$ 和 $A^t = A$. 这样一般二次曲面的方程可写成

$$(X^t, 1) \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.2.1}$$

由推论 2.1 可知，空间两个右手直角坐标系的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.2.2}$$

其中 T 为行列式为 1 的正交矩阵， $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ 为常数， $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ 是点 X 在新右手直角坐标系下的坐标.

我们将 (4.2.2) 代入方程 (4.2.1), 得到

$$(X'^t, 1) \begin{pmatrix} T^t & 0 \\ a^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.2.3}$$

这样，我们得到二次曲面在新坐标系下的方程

$$(X'^t, 1) \begin{pmatrix} A' & B' \\ B'^t & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{4.2.4}$$

其中方程系数满足

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B'^t & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^t & 0 \\ a^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.2.5}$$

特别地，我们有

$$A' = T^t A T. \tag{4.2.6}$$

定义 4.1 设 S 是一个二次曲面，它的方程为

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz$$

$$+2B_1x + 2B_2y + 2B_3z + C = 0.$$

我们定义

$$I_1 = A_{11} + A_{22} + A_{33};\ \ I_2 = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{13} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix};$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix};\ \ I_4 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 & C \end{vmatrix}.$$

定理 4.1 I_1, I_2, I_3 和 I_4 在坐标变换下不变.

证明 在坐标变换 (4.2.2) 下我们有变换公式 (4.2.6). 由于两矩阵乘积的行列式等于两矩阵行列式的乘积，我们得到 $I_4 = I_4'$. 因为对任何实数 t 有公式

$$|tI - A| = \begin{vmatrix} t - A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{12} & t - A_{22} & -A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & t - A_{33} \end{vmatrix} = t^3 - I_1t^2 + I_2t - I_3. \tag{4.2.7}$$

由 (4.2.6) 知对任何 t 有 $(tI - A') = T^t(tI - A)T$, 故有

$$|tI - A'| = |T^t||tI - A||T| = |tI - A|.$$

由 (4.2.7) 知对任何 t 有

$$t^3 - I_1't^2 + I_2't - I_3' = t^3 - I_1t^2 + I_2t - I_3.$$

从而得到

$$I_1' = I_1,\ \ I_2' = I_2,\ \ I_3' = I_3.\ \square$$

我们称 I_1, I_2, I_3, I_4 为二次曲面的代数不变量.

以下我们要确定二次曲面所有可能的图形. 为此，我们希望选择坐标变换公式 (4.2.2) 中的 T 和 $\mathbf{a}$, 使得二次曲面在新坐标系下的方程 (4.2.4) 有最简单的形式.

命题 4.1 存在行列式为 1 的 3 阶正交矩阵 T, 使得

$$T^t AT = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

证明 由于 A 是一个对称矩阵，所以对任何向量 X 和 Y 有

$$AX \cdot Y = X \cdot AY. \tag{4.2.8}$$

令 $p(t) = |tI - A|$. 则 $p(t)$ 是一个三次多项式，它至少有一个实根 λ. 因为 $|\lambda I - A| = p(\lambda) = 0$, 所以存在非零向量 v 使得 $(\lambda I - A)v = 0$. 令 $e_1 = v/|v|$, 则有 $Ae_1 = \lambda e_1$. 取向量 e_2, e_3, 使得 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为右手系的单位正交基．因为

$$Ae_1 \cdot e_2 = 0, \quad Ae_1 \cdot e_3 = 0, \quad Ae_2 \cdot e_3 = e_2 \cdot Ae_3,$$

所以存在实数 $\{a, b, c\}$, 使得

$$A(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}.$$

如果 $b = 0$, 则令 $T = (e_1, e_2, e_3)$, $a = \mu$ 和 $c = \nu$, 命题成立．如果 $b \neq 0$, 则令

$$e_2^* = \cos\theta e_2 + \sin\theta e_3, \quad e_3^* = -\sin\theta e_2 + \cos\theta e_3,$$

其中 θ 待定．这时，有

$$A(e_1, e_2^*, e_3^*) = A(e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= (e_1, e_2^*, e_3^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

取 θ 满足方程 $\cot 2\theta = (a - c)/2b$, 则有

$$A(e_1, e_2^*, e_3^*) = (e_1, e_2^*, e_3^*) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix},$$

其中 μ 和 ν 为实数．令 $T=(e_1,e_2^*,e_3^*)$, 则命题也成立． □

取命题 4.1 中的 T 作坐标变换 $X=TX'$, 则二次曲面在新坐标系下的方程可写成

$$\lambda x'^2+\mu y'^2+\nu z^2+2B_1'x'+2B_2'y'+2B_3'z'+C'=0. \tag{4.2.8}$$

这时有

$$I_1=\lambda+\mu+\nu,\ \ I_2=\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\nu,\ \ I_3=\lambda\mu\nu, \tag{4.2.9}$$

其中 λ,μ,ν 不全为零.

我们首先考虑 $I_3=\lambda\mu\nu\neq 0$ 的情形．这时二次曲面方程可以进一步写成

$$\lambda x^{*2}+\mu y^{*2}+\nu z^{*2}+C^*=0, \tag{4.2.9}$$

其中

$$x^*=x'+\frac{B_1'}{\lambda},\ \ y^*=y'+\frac{B_2'}{\mu},\ \ z^*=z'+\frac{B_3'}{\nu}.$$

由 (4.2.9) 得到 $I_4=C^*I_3$. 如果 λ,μ,ν 同号，则 I_1, I_3 也与 λ,μ,ν 有相同的符号．当 $I_4<0$ 时， C^* 与 λ,μ,ν 有不同的符号，这时二次曲面为椭球面；当 $I_4>0$ 时， C^* 与 λ,μ,ν 有相同的符号，这时二次曲面为空集；当 $I_4=0$ 时，二次曲面为一个点．如果 λ,μ,ν 异号，我们可不妨设 λ,μ 的符号为 ε, 而 ν 的符号为 $-\varepsilon$. 这时 I_3 的符号为 $-\varepsilon$. 当 $I_4<0$ 时，$C^*=I_4/I_3$ 的符号为 ε, 这时二次曲面为单叶双曲面；当 $I_4>0$ 时，$C^*=I_4/I_3$ 的符号为 $-\varepsilon$, 这时二次曲面为双叶双曲面；当 $I_4=0$ 时，$C^*=0$, 这时二次曲面为椭圆锥面．

其次我们考虑 λ,μ,ν 中恰有一个为零的情形．我们不妨设 $\nu=0$, $I_2=\lambda\mu\neq 0$. 这时有 $I_4=-I_2B'^2{}_3$. 如果 $I_4\neq 0$, 二次曲面方程 (4.2.8) 可以进一步写成

$$\lambda x^{*2}+\mu y^{*2}+2B_3'z^*=0, \tag{4.2.10}$$

其中

$$x^*=x'+\frac{B_1'}{\lambda},\ \ y^*=y'+\frac{B_2'}{\mu},\ \ z^*=z'+(\frac{C'}{2B_3'}-\frac{{B_1'}^2}{2\lambda B_3'}-\frac{{B_2'}^2}{2\mu B_3'}).$$

于是，当 $I_2>0$ 时，二次曲面为椭圆抛物面；当 $I_2<0$ 时，二次曲面为双曲抛物面．如果 $I_4=0$, 则 $B_3'=0$, 这时二次曲面方程 (4.2.8) 可以进一步写成

$$\lambda x^{*2}+\mu y^{*2}+C^*=0, \tag{4.2.11}$$

其中

$$x^* = x' + \frac{B_1'}{\lambda},\ \ y^* = y' + \frac{B_2'}{\mu}.$$

于是，当 $I_2 > 0$ 且 I_1 与 C^* 异号时，二次曲面为椭圆柱面；当 $I_2 > 0$ 且 I_1 与 C^* 同号时，二次曲面为空集；当 $I_2 > 0$ 且 $C^* = 0$ 时，二次曲面为直线 $x^* = y^* = 0$(即 z^* 轴). 当 $I_2 < 0$ 且 $C^* \neq 0$ 时，二次曲面为双曲柱面；当 $I_2 < 0$ 且 $C^* = 0$ 时，二次曲面为两个相交的平面 $\sqrt{|\lambda|}x^* \pm \sqrt{|\mu|}y^* = 0$.

最后我们考虑 λ, μ, ν 中只有一个是非零的情形. 我们不妨设 $I_1 = \lambda \neq 0$ 且 $\mu = \nu = 0$. 这时有 $I_2 = I_3 = I_4 = 0$. 方程 (4.2.8) 可以写成

$$\lambda(x' + \frac{B_1'}{\lambda})^2 + 2B_2'y' + 2B_3'z' + C' - \frac{{B_1'}^2}{\lambda} = 0. \tag{4.2.12}$$

如果 $B_2' = B_3' = 0$, 则方程可进一步写成

$$\lambda {x^*}^2 + C^* = 0,$$

其中

$$x^* = x' + \frac{B_1'}{\lambda},\ \ C^* = C' - \frac{{B_1'}^2}{\lambda}.$$

这时, 当 I_1 与 C^* 异号时, 二次曲面为两个平行平面; 当 I_1 与 C^* 同号时，二次曲面为空集；当 $C^* = 0$ 时，二次曲面为平面 $x^* = 0$. 如果 B_2' 和 B_3' 不全为零，可设 $(B_2', B_3') = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, 其中 $r = \sqrt{{B_2'}^2 + {B_3'}^2}$. 作坐标变换

$$x^* = x' + \frac{B_1'}{\lambda},\ \ y^* = (\cos\theta y' + \sin\theta y' + \frac{C'}{2r} - \frac{{B_1'}^2}{2r\lambda}), z^* = -\sin\theta y' + \cos\theta z',$$

则方程 (4.2.12) 变成

$$\lambda {x^*}^2 + 2ry^* = 0.$$

这时一个抛物柱面.

综上所述，我们得到二次曲面的分类定理：

定理 4.2 由二次方程

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz$$
$$+2B_1x + 2B_2y + 2B_3z + C = 0$$

定义的二次曲面只可能是以下的图形：椭球面，单叶双曲面，双叶双曲面，椭圆抛物面，双曲抛物面，椭圆锥面，椭圆柱面，双曲柱面，抛物柱面，两个相交平面，两个平行平面，一条直线，一个点，空集.

定理 4.3 设 S 是二次方程

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz$$

$$+2B_1x + 2B_2y + 2B_3z + C = 0$$

定义的二次曲面， I_1, I_2, I_3 和 I_4 是它的代数不变量. 则 3 次方程 $t^3 - I_1t^2 + I_2t - I_3 = 0$ 的三个根 λ, μ, ν 均为实数，并且

(1) S 为椭球面当且仅当 λ, μ, ν 非零同号，且 $I_4 < 0$;

(2) S 为单叶双曲面当且仅当 λ, μ, ν 非零不同号，且 $I_4 > 0$;

(3) S 为双叶双曲面当且仅当 λ, μ, ν 非零不同号，且 $I_4 < 0$;

(4) S 为椭圆抛物面当且仅当 λ, μ, ν 恰有一个为零，且 $I_2 > 0$, $I_4 < 0$;

(5) S 为双曲抛物面当且仅当 λ, μ, ν 恰有一个为零，且 $I_2 < 0$, $I_4 > 0$;

(6) S 为椭圆锥面当且仅当 λ, μ, ν 非零不同号，且 $I_4 = 0$;

(7) S 为椭圆柱面当且仅当 λ, μ, ν 恰有一个为零，且 $I_2 > 0$, $I_4 = 0$;

(8) S 为双曲柱面当且仅当 λ, μ, ν 恰有一个为零，且 $I_2 < 0$, $I_4 = 0$;

我们已经由例子 4.5 知道，椭球面是球面在某个仿射变换下的像. 以下我们证明，球面在任意一个仿射变换下的像为椭球.

设 S^2 为单位球面 $x^2+y^2+z^2 = 1$, ϕ 是任意一个仿射变换. 则由第二章的定理 3.2 知， ϕ 有坐标表示 $X^* = BX + \mathbf{b}$, 其中 B 的行列式非零, $\mathbf{b}$ 为常向量，而 ϕ 将坐标为 X 的点变成坐标为 X^* 的点. 令 $C = B^{-1}$, $\mathbf{c} = -B^{-1}\mathbf{b}$, 则有 $X = CX^* + \mathbf{c}$. 我们将这个方程写成

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^* \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这时，对任何 $X \in S^2$ 有

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = (X^t, 1) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (X^{*t}, 1) \begin{pmatrix} C^t & 0 \\ \mathbf{c}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^* \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $X^* \in \phi(S^2)$ 满足上述二次方程，所以 $\phi(S^2)$ 是一个二次曲面. 由上式可见，它的主矩阵 $A = C^tC$, 并且代数不变量

$$I_4 = \begin{vmatrix} C^t & 0 \\ \mathbf{c}^t & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -|C|^2 < 0.$$

由于 $A=C^tC$ 为对称矩阵，由命题 4.1 得知，存在正交矩阵 T, 使得

$$T^tAT=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \nu\end{pmatrix}.$$

故对任何非零 $X=(x,y,z)^t$ 有

$$\lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2=(x,y,z)\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$=X^tT^tATX=(CTX)^t(CTX)=|CTX|^2>0.$$

故 λ,μ,ν 均为正数. 于是，定理 4.3 的 (1) 推出，$\phi(S^2)$ 是一个椭球面. 这样，我们证明了

定理 4.4 球面在仿射变换下的像为椭球面.

习题 III-4

1.