第二章 等距变换和仿射变换

仿射变换是空间中的保线变换，它含有空间等距变换作为特例．从代数上看，仿射变换可以看成一个线性变换和一个平移变换的复合．从仿射变换的保线性诱导向量空间的一个线性变换，进而推导出仿射变换的代数表示，是几何代数化又一个完美的例子，其中的桥梁正是向量代数．而各具特性的变换群，形成了几何的丰富内涵．

§1 等距变换

1.1 平面等距变换

设 Σ 为一张平面．我们称 Σ 到自身的一一对应为平面的一个 **变换**. 换言之，平面的一个变换是满足以下条件的映射 $\phi:\Sigma\to\Sigma$: 任给 $P'\in\Sigma$, 存在唯一点 $P\in\Sigma$, 使得 $\phi(P)=P'$. 我们称 P' 点为 P 在变换 ϕ 下的 **象**, 称 P 为 P' 关于变换 ϕ 的 **原象**.

定义 1.1 如果平面上的一个变换保持任意两点的距离不变，我们就称这个变换为平面的 **等距变换**.

我们用 $d(P,Q)$ 来表示 P,Q 两点之间的距离，则 $\phi:\Sigma\to\Sigma$ 为一个等距变换，当且仅当对 Σ 上任意两点 P, Q, 总有

$$d(\phi(P),\phi(Q))=d(P,Q).$$

平面上最平凡的等距变换是 **恒同变换**$id:\Sigma\to\Sigma$, 它将平面上每个点映成它自己．换言之，它保持平面上的每个点不动.

平面上的每条直线 l 将平面分割成两个不相交的半平面 Σ^+ 和 Σ^-. 这时， $\Sigma=\Sigma^+\cup l\cup\Sigma^-$. 每条直线 l 唯一确定平面上的一个 **反射变换**（直线反射） $l:\Sigma\to\Sigma$, 它保持直线 l 上的每一点不动，并将 Σ^+ 中的点 P 映成它在 Σ^- 中的对称点 P'. 这里，我们用 l 同时表示直线和关于此直线的反射变换.

图 1-1

反射变换是平面上最为简单的一类等距变换. 反射变换的另一个重要性质是：它将每个逆时针定向的圆周 Γ 映成一个顺时针定向的圆周 Γ', 即当动点 X 沿圆周 Γ 作逆时针运动时，它的对称点 X' 沿 Γ' 作顺时针运动．于是，反射变换是平面上的一个 **反定向的变换**.

定义 1.2 设 ϕ 和 ψ 是平面 Σ 上的两个变换．设 P 为 Σ 上一点，ϕ 将 P 映成 P', 而 ψ 又将 P' 映成 P''. 我们称由对应 $P \to P''$ 所给出的平面变换为 ϕ 和 ψ 的 **复合变换**, 记为 $\psi \circ \phi$.

设 l_1 和 l_2 为平面上两条直线，它们定义了平面上的两个直线反射 $l_1, l_2 : \Sigma \to \Sigma$. 我们考察它们的复合变换 $l_2 \circ l_1 : \Sigma \to \Sigma$.

如果 l_1 和 l_2 是平面上两条平行的直线，我们称复合变换 $l_2 \circ l_1$ 是一个 **平移变换**. 设 l_1 和 l_2 的间距为 d, 则由图 1-2 可见， $l_2 \circ l_1$ 将平面上的每一点沿 l_1 到 l_2 的垂直方向平移 $2d$ 的距离．显然，变换 ϕ 为平移变换的充要条件是对任何 P 来说 $\overrightarrow{P\phi(P)}$ 与 P 无关，为常向量.

图 1-2

如果 l_1 和 l_2 是平面上两条相交直线，我们称复合变换 $l_2 \circ l_1$ 是一个 **旋转变换**. 设 l_1 和 l_2 交点为 O, 且 l_1 绕 O 点逆时针旋转到 l_2 的旋转角度为 θ ，则由图 1-3 可见， $l_2 \circ l_1$ 将平面上的每一点绕 O 点从 l_1 到 l_2 的方向旋转 2θ 角.

图 1-3

由于平移变换或旋转变换是两个反射变换的复合，它总将逆时针定向的圆周映成逆时针定向的圆周，所以平移变换或旋转变换是 **保定向的变换**.

定义 1.3 设 ϕ 为平面 Σ 上的一个变换. 对 Σ 上的任意点 P', 存在唯一点 P, 使得 $\phi(P) = P'$. 我们称由对应 $P' \to P$ 给出的平面变换为 ϕ 的 **逆变换**, 记为 ϕ^{-1}.

根据平面变换的定义，容易得到

命题 1.1 设 ϕ, ψ 和 ρ 为平面上的变换. 则有

(1) $(\rho \circ \psi) \circ \phi = \rho \circ (\psi \circ \phi)$;

(2) $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = id$

(3) $(\phi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \phi^{-1}$.

命题 1.2 如果 ϕ 和 ψ 为平面上的等距变换，则它们的逆变换 ϕ^{-1}, ψ^{-1} 和复合变换 $\psi \circ \phi$ 也是等距变换.

证明：设 P, Q 为平面上任意两点. 因为 ϕ 和 ψ 均为等距变换，则有

$$d(\phi^{-1}(P), \phi^{-1}(Q)) = d(\phi(\phi^{-1}(P)), \phi(\phi^{-1}(Q))) = d(P, Q);$$

$$d(\psi(\phi(P)), \psi(\phi(Q))) = d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P, Q).\square$$

我们可以通过直线反射的多次复合来得到更多的等距变换. 显然，奇数个直线反射的复合变换是反定向的，偶数个直线反射的复合变换是保定向的.

命题 1.3 等距变换 $\phi : \Sigma \to \Sigma$ 将直线映成直线.

证明 设 P, Q, R 为平面上共线的三点，且 Q 落在线段 $\overline{PR}$ 上. 则有

$$d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R).$$

因为 ϕ 为等距变换，由上式得到

$$d(\phi(P), \phi(Q)) + d(\phi(Q), \phi(R)) = d(\phi(P), \phi(R)).$$

由平面几何中的三角不等式推出，$\phi(Q)$ 必定落在线段 $\overline{\phi(P)\phi(R)}$ 上.
$\square$

定义 1.4 设 $\phi : \Sigma \to \Sigma$ 为平面上的一个变换. 如果 $P \in \Sigma$ 满足 $\phi(P) = P$, 我们称 P 为变换 ϕ 的一个不动点.

我们知道，平面上所有点均是恒同变换 $id:\Sigma\to\Sigma$ 的不动点；直线反射 $l:\Sigma\to\Sigma$ 的不动点为直线 l 上的所有点；旋转变换 ϕ 有唯一的不动点，它恰是 ϕ 的旋转中心．平移变换则没有不动点 (除非它是恒同变换).

命题 1.4 如果一个平面等距变换拥有三个不共线的不动点，则为恒同变换.

证明 设 ϕ 是一个等距变换，它拥有三个不共线的不动点 P,Q 和 R. 记 l 为直线 PQ. 由命题 1.3 知， ϕ 将 l 映成 l. 于是对任何 $X\in l$, 我们有 $\phi(X)\in l$, 并且

$$d(\phi(X),P)=d(\phi(X),\phi(P))=d(X,P);$$

$$d(\phi(X),Q)=d(\phi(X),\phi(Q))=d(X,Q).$$

故有 $\phi(X)=X$. 这说明，直线 l 上的所有点必为 ϕ 的不动点．同理，直线 PR 和 QR 上的所有点均为 ϕ 的不动点．现设 X 是平面上的任意一点，过点 X 作一直线 l' 分别交直线 PQ 和直线 PR 于 Y 和 Z. 因为 Y 和 Z 为 ϕ 的不动点，所以直线 YZ 上的所有点均是 ϕ 的不动点，故 X 也是 ϕ 的不动点．这样，所有平面上的点均为 ϕ 的不动点，ϕ 为恒同映射． □

命题 1.5 如果一个平面等距变换至少有两个不动点，则它或是恒同变换，或是一个直线反射.

证明 设 ϕ 是一个等距变换，它拥有两个不共线的不动点 P 和 Q. 设 l 为直线 PQ. 如果在直线 l 外有 ϕ 的不动点，则由命题 1.4 知 ϕ 为恒同映射．如果在直线 l 外没有 ϕ 的不动点，则对任何 l 外的一点 X 有

$$d(l(X),P)=d(X,P)=d(\phi(X),\phi(P))=d(\phi(X),P);$$

$$d(l(X),Q)=d(X,Q)=d(\phi(X),\phi(Q))=d(\phi(X),Q).$$

故 $X,l(X)$ 和 $\phi(X)$ 三点到 P,Q 的距离相等. 因为 $\phi(X)\neq X,l(X)\neq X$, 所以 $\phi(X)=l(X)$. 这时 ϕ 是直线反射． □

命题 1.6 如果一个平面等距变换只有一个不动点，则它必是一个旋转变换.

证明 设 O 为等距变换 ϕ 的唯一不动点. 任取另一个点 P, 则 $\phi(P)\neq P$. 设 l 为角 $\angle PO\phi(P)$ 的角平分线．因为

$$d(O,\phi(P))=d(\phi(O),\phi(P))=d(O,P),$$

所以 $l\circ\phi(P)=P$. 于是， O 和 P 均是 $l\circ\phi$ 的不动点. 由命题 1.5, 我们知道，或者 (1) $l\circ\phi=id$ 成立，或者 (2) 存在直线 l', 使得 $l\circ\phi=l'$ 成立. 由 (1) 推出， $\phi=l$, 这与 ϕ 只有一个不动点矛盾. 于是 (2) 必须成立. 故 $\phi=l'\circ l$. 由于 ϕ 只有一个不动点，而平移变换或是没有不动点，或为恒同变换，所以两直线 l 和 l' 必只交于一点，它是 ϕ 的不动点，即为 O 点. 于是， ϕ 为旋转变换. $\square$

定理 1.1 任何一个平面等距变换可以表成至多三个的直线反射的复合.

证明 设 ϕ 是一个等距变换. 如果 $\phi=id$, 则 $\phi=l\circ l$, 命题成立. 如果 ϕ 不是恒同变换，则存在 P 使得 $\phi(P)\neq P$. 令 l 为线段 $\overline{P\phi(P)}$ 的垂直平分线，则有 $l\circ\phi(P)=P$. 于是 $l\circ\phi$ 至少有一个不动点. 如果 $l\circ\phi$ 只有一个不动点，则由命题 1.6 知它是一个旋转变换，故 $l\circ\phi=l_2\circ l_1$, 故 $\phi=l\circ l_2\circ l_1$. 如果 $l\circ\phi$ 至少有两个不动点，则由命题 1.5 推出，或者 $l\circ\phi=id$, 即 $\phi=l$; 或者 $l\circ\phi=l'$, 即 $\phi=l\circ l'$. $\square$

由于奇数个直线反射的复合变换一定是反定向的，定理 1.1 推出

定理 1.2 平面上保定向等距变换一定是平移变换或旋转变换.

我们注意到，如果我们将两平行直线 l_1 和 l_2 同时进行一个平移，得到与它们平行的直线 l_3 和 l_4（参见图 1-4a ），则 $l_2\circ l_1$ 和 $l_4\circ l_3$ 是平面上的同一个平移变换。同样，如果我们将两条相交于 O 点的直线 l_1 和 l_2 同时进行一个绕 O 点的旋转，得到直线 l_3 和 l_4（参见图 1-4b ），则 $l_2\circ l_1$ 和 $l_4\circ l_3$ 是平面上的同一个绕 O 点的旋转变换.

图 1-4a　　　　图 1-4b

定理 1.3（三反射定理）设三直线 l_1, l_2 和 l_3 两两平行或相交于同一点，则存在直线 l 使得 $l_3\circ l_2\circ l_1=l$.

证明 将直线 l_1 和 l_2 平移或旋转，使得 l_2 与直线 l_3 重合. 这时 l_1 成为直线 l. 由于 $l_2\circ l_1=l_3\circ l$, 故 $l_3\circ l_2\circ l_1=l$. $\square$

定义 1.5 设直线 l 垂直于两平行线 l_1 和 l_2. 则 $l_2 \circ l_1$ 是沿直线 l 方向的一个平移，且等距变换 $\phi = l \circ (l_2 \circ l_1)$ 是先沿直线 l 作一个平移，然后再对直线 l 作反射．显然，有 $l \circ (l_2 \circ l_1) = (l_2 \circ l_1) \circ l$. 我们称 $\phi = l \circ (l_2 \circ l_1)$ 为沿直线 l 的一个滑动反射（参见图 1-5 ）.

图 1-5

定理 1.4 平面上的所有等距变换是由直线反射，平移，旋转和沿某个直线的滑动反射构成的.

证明 设平面等距变换 ϕ 不是直线反射，也不是平移或旋转．由定理 1.2 知 ϕ 一定可以写成 $\phi = l_3 \circ l_2 \circ l_1$ ，并且由定理 1.3 知， l_1, l_2 和 l_3 不能两两平行，也不能相交于同一点．不妨设 l_2 与 l_3 相交于一点 O ，且 O 不落在 l_1 上.

图 1-6a　　图 1-6b

将 l_2 和 l_3 同时作一个绕 O 的旋转，得到 l_2' 和 l ，使得 l_2' 与 l_1 垂直（参见图 1-6a ）．则有 $l_3 \circ l_2 = l \circ l_2'$. 设 l_2' 与 l_1 交于 O' 点．而 l_2' 与 l_1 再绕 O' 进行一个旋转，得到 l_2^* 和 l_1' ，使得 l_1' 与 l_3' 也垂直（参见图 1-6b ）．则有 $l_2' \circ l_1 = l_2^* \circ l_1'$. 于是得到

$$\phi = l_3 \circ l_2 \circ l_1 = l \circ l_2' \circ l_1 = l \circ l_2^* \circ l_1'.$$

这时， l_1' 和 l_2^* 垂直于 l. 故 ϕ 是沿直线 l 的一个滑动反射． □

1.2 空间等距变换

我们称 $\mathbb{E}^3$ 到它自身的一一对应为空间的一个变换. 如果空间中的一个变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 保持任意两点的距离不变，我们就称 ϕ 为等距变换.

我们同样用 $d(P,Q)$ 表示 $\mathbb{E}^3$ 中两点 P, Q 之间的距离，用 id 表示 $\mathbb{E}^3$ 到它自身的恒同变换. 容易验证，两个空间等距变换的复合还是等距变换；等距变换的逆变换仍是等距变换.

空间中的每张平面 Σ 将空间分割成两个互不相交的半空间 $\mathbb{E}^3_+$ 和 $\mathbb{E}^3_-$. 这时 $\mathbb{E}^3=\mathbb{E}^3_+\cup\Sigma\cup\mathbb{E}^3_-$. 平面 Σ 诱导一个空间等距变换 $\Sigma:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$, 称为 **平面反射** , 它保持平面 Σ 上的每一点不动，并将 $\mathbb{E}^3_+$ 中的点 P 映成它在 $\mathbb{E}^3_-$ 中的对称点 P'. 我们用同一个记号 Σ 来表示平面和关于此平面的平面反射.

平面反射 $\Sigma:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 是空间中最简单的等距变换，它将平面映成平面，将直线映成直线，将向量 (有向线段) 映成向量. 此外，平面反射将空间中每个右手系的标架映成左手系的标架 (参见图 1-7), 故它是空间中一个反定向的等距变换.

图 1-7

设 Σ_1 和 Σ_2 是两张平行的平面，间距为 d. 则平面反射 Σ_1 和 Σ_2 的复合映射 $\Sigma_2\circ\Sigma_1:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 是空间中的一个平移变换，它将空间中的每个点沿 Σ_1 至 Σ_2 的垂直方向平移 $2d$ 的距离 (参见图 1-8).

图 1-8

设 Σ_1 和 Σ_2 是两张相交的平面，交线为 l. 我们选定 l 的一个方向，用右手拇指指向这个选定的方向，沿右手其它四指自然弯曲的方向从 Σ_1 至 Σ_2 可以确定两平面的一个夹角 θ. 容易验证，平面反射 Σ_1 和 Σ_2 的复合映射 $\Sigma_2 \circ \Sigma_1 : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是空间中绕直线 l 的一个旋转，旋转方向为四指自然弯曲的方向，旋转的角度为 2θ(参见图 2-10).

图 1-9

假如我们先前选定的是 l 的另一个方向，则所确定的 Σ_1 与 Σ_2 的夹角为 $180^\circ - \theta$, 这时， $\Sigma_2 \circ \Sigma_1 : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是空间中绕直线 l 的一个反方向的旋转，旋转角度为 $360^\circ - 2\theta$. 我们注意到，只要 $\theta_1 + \theta_2$ 是 360° 的整数倍，则空间中的任意点 P 绕直线 l 旋转 θ_1 角所得到的点和 P 点绕直线 l 反方向旋转 θ_2 角所得到的点相同.

由于平面反射是反定向的，所以奇数个平面反射的复合变换是反定向的；偶数个平面反射的复合变换是保定向的．由此得到，空间中的平移变换和旋转变换均是保定向的变换：它们将每个右手系的标架映成右手系的标架.

命题 1.7 空间等距变换将直线映成直线，将平面映成平面，并且诱导直线到直线，平面到平面的等距对应.

证明 设 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 为等距变换．参照命题 1.3 的证明方法，我们容易验证， ϕ 将直线映成直线．设 Σ 是空间中的一张平面．在 Σ 上取两条相交的直线 l_1 和 l_2, 交点为 O. 则 $l_1' = \phi(l_1)$ 和 $l_2' = \phi(l_2)$ 也是两条相交直线，交点为 $O' = \phi(O)$. 令 Σ' 为 l_1' 和 l_2' 张成的平面．过 Σ 上的任意一个 X 作直线 l 分别交 l_1, l_2 与 P 和 Q. 则 $\phi(l)$ 是一条直线，它分别交直线 l_1' 和 l_2' 于 $\phi(P)$ 和 $\phi(Q)$. 故 $\phi(l)$ 落在平面 Σ' 上．特别地， $\phi(X)$ 落在平面 Σ' 上．由此得到， $\phi : \Sigma \to \Sigma'$. 由于 ϕ^{-1} 也是等距变换，它将 l_1' 和 l_2' 分别映成 l_1 和 l_2, 故有 $\phi^{-1} : \Sigma' \to \Sigma$. 这样， $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ 为一一对应，并保持两点间的距离不变． □

命题 1.8 如果一个空间等距变换拥有三个不共线的不动点，则它或是恒同变换，或是一个平面反射.

证明 设 ϕ 是一个等距变换，它拥有三个不共线的不动点 P, Q, R. 记 Σ 为这三个不动点所确定的平面．则 $\phi: \Sigma \to \Sigma$ 为等距变换．由命题 1.3 知， Σ 上的所有点为 ϕ 的不动点．平面 Σ 将空间分割成两个不相交的半空间 $\mathbb{E}^3_+$ 和 $\mathbb{E}^3_-$.

如果存在平面 Σ 外一点 O, 使得 O 和 $O' = \phi(O)$ 落在同一个半空间中，则由等式

$$d(O,P) = d(\phi(O), \phi(P)) = d(O', P);$$

$$d(O,Q) = d(\phi(O), \phi(Q)) = d(O', Q);$$

$$d(O,R) = d(\phi(O), \phi(R)) = d(O', R).$$

因为 O 和 O' 到平面 Σ 上不共线三点 P, Q, R 的距离相等，所以 $O = O' = \phi(O)$. 记 Σ' 为 ϕ 的三个不共线不动点 O, P, Q 所确定的平面．同样， Σ' 上的所有点为 ϕ 的不动点．由于 Σ 和 Σ' 为两个相交的平面，过空间中的任意点 X 可以作直线 l, 它与 Σ 和 Σ' 分别交于 A 和 A'. 由于 A 和 A' 均为 ϕ 的不动点， X 和 $\phi(X)$ 均落在直线 l 上，并且它们到 A 和 A' 的距离相等．由此推出 $\phi(X) = X$. 故 $\phi = id$.

如果存在平面 Σ 外一点 O, 使得 O 和 $O' = \phi(O)$ 落在不同的半空间中，则 $\Sigma \circ \phi$ 同样保持 Σ 上的所有点不动，且 O 和 $\Sigma \circ \phi(O)$ 落在同一个半空间中．由上面的证明推出 $\Sigma \circ \phi = id$. 这时， $\phi = \Sigma$ 为平面反射． □

命题 1.9 如果一个空间等距变换至少拥有两个不动点，则它或是一个平面反射，或是一个旋转变换.

证明 设 ϕ 为空间等距变换．如果 ϕ 拥有三个不共线的不动点，则由命题 1.8 得知， ϕ 是恒同变换（特殊的旋转变换）或平面反射．以下设 ϕ 拥有两个不动点 P 和 Q, 并且所有不动点共线．设 l 为直线 PQ. 则 $\phi(l) = l$, 并且 l 上的所有点均为 ϕ 的不动点．除此之外， ϕ 不再有其它的不动点．我们在 l 外任取一点 R, 则对 l 上的任意点 X 恒有

$$d(\phi(R), X) = d(\phi(R), \phi(X)) = d(R, X).$$

从 R 点引直线 l 的垂线，垂足为 O. 于是，对 l 上的任意点 X, 有

$$d(\phi(R), O) = d(R, O) \leq d(R, X) = d(\phi(R), X).$$

所有，直线 $\phi(R)O$ 也垂直于直线 l. 由此推出，线段 $\overline{\phi(R)R}$ 垂直于直线 l. 过线段 $\overline{\phi(R)R}$ 的中点 M 和直线 l 作平面 Σ(参见图 1-10), 则平面反射 $\Sigma: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 保持 l 上的点不动，并将 R 映成 $\phi(R)$.

图 1-10

这样，等距变换 $\Sigma\circ\phi$ 以直线 l 和 R 为不动点. 由命题 1.8, 或者 (1) $\Sigma\circ\phi=id$, 或者 (2) $\Sigma\circ\phi=\Sigma'$. 如果 (1) 成立，则 $\phi=\Sigma$, 这时 ϕ 的不动点为整个平面 Σ, 矛盾. 所以，(2) 必须成立，这样 $\phi=\Sigma\circ\Sigma'$. 因为平移变换没有不动点 (除非为恒同映射), 故 Σ 和 Σ' 必相交. 由此推出，ϕ 是一个旋转变换. □

命题 1.10 如果一个空间等距变换至少有一个不动点，则它可以表成至多三个平面反射的复合.

证明 设 O 是等距变换 ϕ 的不动点. 如果 ϕ 是恒同映射, 则 $\phi=\Sigma\circ\Sigma$. 如果 ϕ 不是恒同映射，则存在 P 使得 $\phi(P)\neq P$. 由于

$$d(O,P)=d(\phi(O),\phi(P))=d(O,\phi(P)),$$

所以 $\Delta OP\phi(P)$ 是一个等腰三角形. 令 Σ 是与此三角形垂直，并过 O 点及线段 $\overline{P\phi(P)}$ 中点的平面. 则有 O 和 P 是等距变换 $\Sigma\circ\phi$ 的两个不动点. 由命题 1.8 知，$\Sigma\circ\phi$ 至多可以表成两个平面反射的复合. 故 ϕ 可以表成至多三个平面反射的复合. □

因为奇数个平面反射的复合是反定向的等距变换, 所以从命题 1.10 我们得到

定理 1.5 空间中保定向的等距变换如果有不动点，则它必为空间中以某个直线为轴的旋转变换.

定理 1.6 任何空间等距变换可以表成不超过四个平面反射的复合.

证明 不妨设 ϕ 不是恒同变换. 则存在 P 使得 $\phi(P)\neq P$. 设 Σ 是线段 $\phi(P)P$ 的垂直平分面，则 $\Sigma\phi$ 拥有不动点 P, 它是不超过三个平面反射的复合. 故 ϕ 可表成不超过四个平面反射的复合. □

1.3 图形的对称群

设 $\mathbb{G}$ 是由平面 (空间) 到它自身的部分变换构成的集合. 如果 $\mathbb{G}$ 满足以下性质：

(1) $id \in \mathbb{G}$;

(2) 对任何 $\phi, \psi \in \mathbb{G}$ 恒有 $\psi \circ \phi \in \mathbb{G}$;

(3) 对任何 $\phi \in \mathbb{G}$, 有 $\phi^{-1} \in \mathbb{G}$;

我们就称 $\mathbb{G}$ 是平面上 (空间中) 的一个变换群. 如果 G 中的任意两个变换满足 $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$, 则称 $\mathbb{G}$ 是一个交换群.

以下是平面上一些变换群的实例：

(1) $\mathbb{G} = \{id\}$ 是一个平凡的变换群，它只有一个元素；

(2) $\mathbb{G} = \{id, l\}$ 是平面上最为简单的 (非平凡的) 变换群，它只有两个元素，一个是恒同变换，一个是直线反射；

(3) 平面上的所有变换构成一个变换群.

(4) 平面 Σ 上所有的等距变换构成一个变换群 $Iso(\Sigma)$, 称为平面等距群；

(5) 平面 Σ 上所有保定向的等距变换构成一个变换群 $Iso^+(\Sigma)$, 称为平面刚体运动群；

(6) 平面上以 P 为旋转中心的所有旋转变换构成一个变换群 $O_P(2)$, 称为 P 点处的正交群；

(7) 平面上以 P 为旋转中心的所有旋转变换构成一个交换群 $SO_P(2)$, 称为 P 点处的旋转群；

(8) 平面上所有平移变换构成一个交换群，称为平面平移变换群.

请读者验证 (1) 至 (6). 以下我们只对 (7) 和 (8) 进行验证.

设 ϕ 和 ψ 是平面上以 O 点为旋转中心的两个旋转变换，它们的旋转角分别是 θ 和 θ'. 则 $\psi \circ \phi$ 和 $\phi \circ \psi$ 均是以 O 点为旋转中心的旋转变换，它们的旋转角同为 $\theta + \theta'$, 故 $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$. 而 ϕ^{-1} 也是以 O 点为旋转中心的旋转变换，它的旋转角为 $-\theta$. 这样，平面上以 O 为旋转中心的所有旋转变换构成一个交换群.

设 ϕ 和 ψ 是平面上的两个平移变换. 则对任何 P 来说

$$\overrightarrow{P\phi(P)} = \mathbf{a},\ \ \overrightarrow{P\psi(P)} = \mathbf{b}$$

是一个与 P 无关的常向量. 由此推出

$$\overrightarrow{P\psi(\phi(P))} = \overrightarrow{P\phi(P)} + \overrightarrow{\phi(P)\psi(\phi(P))} = \overrightarrow{P\phi(P)} + \overrightarrow{P'\psi(P')} = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{P\phi(\psi(P))} = \overrightarrow{P\psi(P)} + \overrightarrow{\psi(P)\phi(\psi(P))} = \overrightarrow{P\psi(P)} + \overrightarrow{P''\phi(P'')} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{P\phi^{-1}(P)} = \overrightarrow{\phi(P^*)P^*} = -\overrightarrow{P^*\phi(P^*)} = -\mathbf{a};$$

其中 $P' = \phi(P)$, $P'' = \psi(P)$, $P^* = \phi^{-1}(P)$. 于是 $\psi \circ \phi$, $\phi \circ \psi$ 和 ϕ^{-1} 均为平移变换，并且 $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$. 故平面上所有平移变换构成一个交换群.

我们称平面 Σ 上的子集为平面上的一个图形. 设 M 为平面上的一个图形. 我们定义图形 M 的等距对称群 $Iso(M)$ 为

$$Iso(M) = \{\phi \in Iso(\Sigma) \mid \phi(M) = M\}.$$

请读者自行验证，图形的等距对称群是平面上的一个变换群. 我们记 $|Iso(M)|$ 为对称群 $Iso(M)$ 的元素个数.

显然，一个三边不等的三角形 M 的等距对称群没有非恒同元素. 一个等腰而不等边的三角形的等距对称群只有一个非恒同元素 l, 它是关于顶角平分线的直线反射.

一个等边三角形 Δ_3 可以绕其重心逆时针旋转 $120°$ 和 $240°$, 而将三角形变成它自己；还可以关于三角形的三条高作直线反射，将三角形表成它自己. 故等边三角形的等距对称群 $Iso(\Delta_3)$ 拥有 5 个非恒同元素.

圆是无穷对称的, 每个过圆心的直线所对应的直线反射均将圆变成它自己；每个绕圆心的旋转也将圆变成它自己.

在空间中我们有以下一些变换群的实例：

(1) $\mathbb{G} = \{id, \Sigma\}$ 是空间中最为简单的 (非平凡) 变换群，它只有两个元素，一个是恒同变换，一个是平面反射；

(2) 空间中以直线 l 为旋转轴的所有旋转变换构成一个交换群；

(3) 空间中所有平移变换构成一个交换群，称为空间平移群；

(4) 空间中所有的等距变换构成一个变换群 $Iso(\mathbb{E}^3)$, 称为空间等距变换群;

(5) 空间中所有保定向的等距变换构成一个变换群 $Iso^+(\mathbb{E}^3)$, 称为空间刚体运动群;

(6) 空间中以 P 为不动点的等距变换构成一个变换群 $O_P(3)$, 称为 P 点处的正交群;

(7) 空间中以 P 为不动点的保定向等距变换构成一个变换群 $SO_P(3)$, 称为 P 点处的旋转群.

请读者自行验证以上断言.

我们称空间中不落在任何平面上的子集为一个立体图形. 设 M 为空间中的一个立体图形. 我们定义

(i) 图形 M 的等距对称群 $Iso(M)$ 为

$$Iso(M) = \{\phi \in Iso(\mathbb{E}^3) \mid \phi(M) = M\}.$$

(ii) 图形 M 的以 P 为中心的旋转对称群 $SO_P(M)$ 为

$$SO_P(M) = \{\phi \in SO_P(3) \mid \phi(M) = M\}.$$

球面是无穷对称的, 每个过球心的平面所对应的平面反射均将球面变成它自己; 每个以过球心直线为旋转轴的旋转变换也将球面映成自己.

我们常在生活中遇到以下高度对称的多面体, 它们是正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体（参见图 1-11 ）.

这些正多面体有如下的性质:

(i) 它的每个面是有相同边数的正多边形;

(ii) 它的每个顶点出发的棱的个数相同;

(iii) 它的所有顶点落在同一个球面上。

正多面体的每个面是一个正多边形。我们称每个正多边形的外接圆圆心为正多边形的重心。正多面体每个面的重心连线又构成一个正多面体，称为它的对偶正多面体。于是，正四面体是自对偶的；正六面体的对偶是正八面体；而正十二面体的对偶是正二十面体。

设 $\mathbb{P}$ 是一个正多面体. 我们来确定 $\mathbb{P}$ 的关于它的重心的旋转对称群 $SO(\mathbb{P})$. $SO(\mathbb{P})$ 中非恒同的元素称为 $\mathbb{P}$ 的一个旋转对称.

正四面体可以以每个顶点与其对面重心的连线为轴旋转 $120°$ 和 $240°$，而将正四面体变成自己。这样的旋转对称有 8 个。也可以以每对对边的中点连线为轴旋转 $180°$，而将正四面体变成自己。这样的旋转对称有 3 个。所以，正四面体共有 11 个不同的旋转对称（参见图 1-12).

正六面体可以以每对对面的重心连线为轴，旋转 $90°$ 、 $180°$ 和 $270°$，而保持自己不变。这样的旋转对称有 9 个。也可以以每对对顶点为轴旋转 $120°$ 和 $240°$，而将正六面体变成自己。这样的旋转对称有 8 个。还可以以每对对棱的中点连续为轴，旋转 $180°$，而将正六面体变成自己。这样的旋转对称有 6 个。所以，正六面体共有 23 个不同的旋转对称（参见图 1-13).

正八面体和正六面体是相互对偶的。由于旋转对称将重心映成重心，所以正八面体的旋转对称与正六面体的旋转对称相同，它共有 23 个不同的旋转对称。故正八面体的对称度为 47.

正二十面体有 20 个面， 30 个棱和 12 个顶点。它可以以每对对顶点的连线为轴旋转 $72°$， $144°$， $216°$ 和 $288°$，而将正二十面体变成自己。这样的旋转对称有 24 个。也可以以每对对面的重心连线为轴旋转 $120°$ 和 $240°$，而将正二十面体变成自己。这样的旋转对称有 20 个。还可以以每对对边的中点连线为轴旋转 $180°$，而保持自己不变。这样的旋转对称有 15 个。所以，正二十面体共有 59 个不同的旋转对称（参见图 1-14).

正十二面体和正二十面体是相互对偶的。所以，它共有 59 个不同的旋转对称。

设 $\mathbb{P}$ 是一个正多面体。我们用 m 来表示正多边形的边数，用 n 来表示从顶点出发的棱的个数。从图 1-11 可见，(m,n) 可以取到以下的数值：$(3,3)$，$(4,3)$，$(3,4)$，$(3,5)$ 和 $(5,3)$。

定理 1.7 正多面体只有正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体这五种类型.

证明 正多面体的每个面是一个正 m 边形，它的内角为 $(m-2)\pi/m$. 由于每个顶点处的锥面有 n 个这样的角，这些角加起来小于 2π, 故

$$n\frac{(m-2)\pi}{m} < 2\pi.$$

这样便有

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

由 m 和 n 的几何意义，必须 $m \geq 3$ 和 $n \geq 3$. 这样，不等式推出 $m \leq 6$ 和 $n \leq 6$. 如果 m 为 4 或 5, 则 n 只能取 3. 如果 $m = 3$, 则由不等式，n 可以取 3, 4 或 5. 于是，(m,n) 只能 $(3,3)$，$(4,3)$，$(3,4)$，$(3,5)$ 和 $(5,3)$ 这五种数值。□

习题 II-1

1. 求两条平面直线 l_1 和 l_2 满足 $l_1 \circ l_2 = l_2 \circ l_1$ 的条件.

2. 设 ϕ_1 和 ϕ_2 分别是绕 O_1 和 O_2 点的平面旋转变换. 问：何时 $\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_2 \circ \phi_1$?

3. 设 l 和 l' 为平面 Σ 上的两条直线. 证明：存在一个平面等距变换 $\phi : \Sigma \to \Sigma$，使得 $\phi(l) = l'$.

4. 证明：偶数个直线反射的复合为旋转变换或平移变换.

5. 设锐角三角形 ABC 的三高 AD, BE, CF 的垂足分别为 D, E 和 F. 证明：在 ABC 的所有内接三角形中，三角形 DEF 的周长最短.

6. 设 ϕ 和 ψ 为两个平面等距变换. 设存在平面上不共线的三点 P, Q, R, 使得 $\phi(P) = \psi(P), \phi(Q) = \psi(Q), \phi(R) = \psi(R)$. 证明：$\phi = \psi$.

6. 设 O 为平面 Σ 上一点，λ 为非零实数. 对任何 $X \in \Sigma$, 定义 $X' \in \Sigma$ 满足 $\overrightarrow{OX'} = \lambda\overrightarrow{OX}$. 我们称由 $X \to X'$ 所给出的平面变换为位似变换，称 O 为位似中心，称 λ 为位似常数. 证明：

(1) 平面位似变换是保定向的变换；

(2) 位似变换将直线变成与之平行的直线；

(3) 所有以 O 为位似中心的位似变换构成一个交换的变换群.

6. 设 ϕ 和 ψ 为两个空间等距变换. 设存在不共面的三点 P, Q, R, S, 使得 $\phi(P)=\psi(P), \phi(Q)=\psi(Q), \phi(R)=\psi(R), \phi(S)=\psi(S)$. 证明: $\phi=\psi$.

6. 证明: 空间等距变换 ϕ 只有一个不动点 O 的充要条件是存在过 O 点的三张平面 Σ_1, Σ_2 和 Σ_3, 使得 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \{O\}$, 并且 $\phi = \Sigma_3 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_1$.

7. 证明: 以过定点 O 的直线为旋转轴的所有空间旋转变换构成一个变换群. 这个变换群是否可交换?

8. 设平面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 过直线 l. 证明: 存在唯一过 l 的平面 Σ_4, 使得 $\Sigma_3 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_1 = \Sigma_4$.

9. 设 O 为空间 $\mathbb{E}^3$ 上一点, λ 为非零实数. 对任何 $X \in \mathbb{E}^3$, 定义 $X' \in \mathbb{E}^3$ 满足 $\overrightarrow{OX'} = \lambda \overrightarrow{OX}$. 我们称由 $X \to X'$ 所给出的空间变换为位似变换, 称 O 为位似中心, 称 λ 为位似常数.

(1) 问: 空间位似变换是否保定向, 何时保定向?

(2) 证明: 位似变换将向量变成向量, 并保持两向量间的夹角不变;

(3) 证明: 所有以 O 为位似中心的位似变换构成一个交换的变换群.

5. 设平面等距变换 ϕ 满足 $\phi \circ \phi = id$. 证明: ϕ 或是恒同变换, 或是直线反射, 或是一个中心对称.

10. 设 Σ 和 Σ' 为空间中的两个平面. 证明: 存在空间中的一个等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, 使得 $\phi(\Sigma) = \Sigma'$.

11. 设 l 和 l' 为空间中的两条直线. 证明: 存在空间中的一个等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, 使得 $\phi(l) = l'$.

12. 设 Σ 和 Σ' 为空间中的两个平面. $\varphi: \Sigma \to \Sigma'$ 是一个等距映射 (即保距离的一一对应). 证明: 存在空间中的一个等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, 使得 $\phi = \varphi: \Sigma \to \Sigma'$.

13. 设 l 和 l' 为空间中的两条直线. $\varphi: l \to l'$ 是一个等距映射. 证明: 存在空间中的一个等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, 使得 $\phi = \varphi: l \to l'$.

14. 设 $\mathbb{P}$ 是一个凸多面形, A 为 $\mathbb{P}$ 的一个顶点。记 $\theta(A)$ 为所有以 A 为顶点的面在 A 点处的角的总和 (以弧度计算)。我们定义多面形在 A 点处的曲率

$$K(A) = 2\pi - \theta(A).$$

显然, 曲率越大, $\theta(A)$ 越小, 顶点 A 越"尖"。问:

(i) 五种正多面形在顶点处的曲率各是多少？

(ii) 五种正多面形所有顶点处的曲率之和各是多少？

15. 设 $\mathbb{P}$ 是一个凸多面形。证明：它在所有顶点处的曲率之和为 4π 。

§2 仿射变换

2.1 仿射变换诱导的线性变换

定义 2.1 设 Σ 和 Σ' 为两张平面， $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ 是一个一一对应，它将直线映成直线，我们就称 ϕ 为平面仿射映射. 当 $\Sigma = \Sigma'$ 时，我们称 $\phi : \Sigma \to \Sigma$ 为平面仿射变换.

定义 2.2 设 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是空间的一个变换，它将直线变成直线，我们就称 ϕ 为空间仿射变换.

由命题 1.3 和命题 1.7 知，等距变换是特殊的仿射变换.

命题 2.1 设 $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ 是一个平面间的仿射映射，则 $\phi^{-1} : \Sigma' \to \Sigma$ 也是一个仿射映射.

证明 设 $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ 是一个仿射映射，它将直线映成直线. 我们需要证明： ϕ^{-1} 也将直线映成直线. 我们用反证法. 假如 ϕ^{-1} 将某条线 l' 的三点 A', B', C' 分别对应到不共线的三点 A, B, C. 由于 $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$, $\phi(C) = C'$, 而 ϕ 将直线映成直线. 所以 ϕ 将两条不同的直线 AB 和 AC 均映成直线 l'. 任给 $X \in \Sigma$, 存在过 X 的直线 l_X 分别交直线 AB,AC 于不同的两点 P,Q. 由于 $\phi(P)$ 和 $\phi(Q)$ 落在直线 l' 上，ϕ 将直线 l_X 映成直线 $\phi(PQ) = l'$. 故 $\phi(X) \in l'$. 由此得到： $\phi(\Sigma) \subset l'$. 这样， ϕ 不是一一对应. 矛盾. 这说明 $\phi^{-1} : \Sigma' \to \Sigma$ 也将直线映成直线. □

命题 2.2 设 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换，则 $\phi^{-1} : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 也是一个仿射变换.

证明 用反证法. 设 ϕ^{-1} 将某条线 l' 的三点 A', B', C' 分别对应到不共线的三点 A, B, C. 设 Σ 是相交直线 AB 和 AC 张成的平面. 利用命题 2.1 的证明同样得到 $\phi(\Sigma) \subset l'$. 取直线 l, 它与平面 Σ 仅交一点 O. 我们记 $\phi(l) = l''$. 则 l' 和 l'' 有公共点 $\phi(O)$. 设 Σ' 是一张含有直线 l' 和 l'' 的平面. 对任何 $Y \in \mathbb{E}^3$, 存在过 Y 的直线 l_Y 分别交 l, Σ 于不同的两点 R, S. 由于 $\phi(R) \in l''$, $\phi(S) \in l'$, 且 ϕ 将直线 l_Y 映成平面 Σ' 上的一条直线. 故 $\phi(Y) \in \Sigma'$. 这样，我们得到 $\phi(\mathbb{E}^3) \subset \Sigma'$. 这与 ϕ 是空间的变换相矛盾. 于是， ϕ^{-1} 也将直线映成直线，即 ϕ^{-1} 也是一个仿射变换. □

由此，我们容易得到以下的

推论 2.1

(1) 仿射变换将相交直线映成相交直线;

(2) 仿射变换将平行的直线映成平行的直线;

(3) 仿射变换将平行四边形映成平行四边形;

(3) 仿射变换将平面映成平面;

(4) 仿射变换将相交平面映成相交平面;

(5) 仿射变换将平行平面映成平行平面;

(6) 所有空间仿射变换构成一个变换群 (称为空间仿射变换群).

(7) 平面 Σ 上的所有仿射变换构成一个变换群 (称为平面仿射变换群).

定义 2.3 设 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 为仿射变换. 设 $\mathbb{V}$ 是 $\mathbb{E}^3$ 中的所有向量构成的空间. 对任何 $\mathbf{a}\in\mathbb{V}$, 我们取两点 $A,B\in\mathbb{E}^3$, 使得 $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$. 我们定义仿射变换 ϕ 所诱导的向量变换 $\phi:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ 为

$$\phi(\mathbf{a})=\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

这里，我们用同样的记号 ϕ 来表示仿射变换和它所诱导的向量空间的变换.

设 C,D 为另外两点，满足 $\mathbf{a}=\overrightarrow{CD}$. 由于 $\{A,B,C,D\}$ 为平行四边形的四个顶点，则 $\{\phi(A),\phi(B),\phi(C),\phi(D)\}$ 为平行四边形的四个顶点，故

$$\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}=\overrightarrow{\phi(C)\phi(D)}.$$

于是，向量变换 $\phi:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ 的定义是合理的.

命题 2.3 仿射变换 ϕ 诱导的向量变换 $\phi:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ 满足以下性质:

(1) $\phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ ，并且 $\phi(\mathbf{a})=0$ 当且仅当 $\mathbf{a}=0$;

(2) $\phi(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\phi(\mathbf{a})+\phi(\mathbf{b})$;

(3) $\phi(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\phi(\mathbf{a})-\phi(\mathbf{b})$;

(4) 对任何有理数 q 及 $\mathbf{a}\in\mathbb{V}$ 有 $\phi(q\mathbf{a})=q\phi(\mathbf{a})$.

(5) 对任何非零实数 λ ，存在唯一非零实数 μ ，使得对任何向量 $\mathbf{a}$ ，恒有 $\phi(\lambda\mathbf{a})=\mu\phi(\mathbf{a})$.

证明 (1). 由定义，有 $\phi(\mathbf{0})=\phi(\overrightarrow{AA})=\overrightarrow{\phi(A)\phi(A)}=\mathbf{0}$. 如果 $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ 使得 $\phi(\mathbf{a})=0$, 则有 $\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}=\mathbf{0}$ ，所以 $\phi(A)=\phi(B)$. 因为 ϕ 是一个变换，故 $A=B$ ，即 $\mathbf{a}=0$.

(2) 取空间中三点 $A,B,C\in\mathbb{E}^3$ ，使得 $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ 和 $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$. 由定义，有

$$\phi(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\phi(\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{\phi(A)\phi(C)}=\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}+\overrightarrow{\phi(B)\phi(C)},$$

故 $\phi(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\phi(\mathbf{a})+\phi(\mathbf{b})$. 于是对任何正整数 m 有 $\phi(m\mathbf{a})=m\phi(\mathbf{a})$.

(3) 由性质 (2) 得到 $\phi(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\phi(\mathbf{b})=\phi(\mathbf{a})$, 故 $\phi(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\phi(\mathbf{a})-\phi(\mathbf{b})$. 特别取 $\mathbf{a}=0$ 时, 得到 $\phi(-\mathbf{b})=-\phi(\mathbf{b})$. 于是对任何整数 m 有 $\phi(m\mathbf{a})=m\phi(\mathbf{a})$.

(4) 设 $q=m/n$ ，其中 m 和 n 为整数，且 $n\neq 0$. 因为 $\phi(\mathbf{a})=\phi(n(\mathbf{a}/n))=n\phi(\mathbf{a}/n)$, 所以 $\phi(\mathbf{a}/n)=\phi(\mathbf{a})/n$. 故有

$$\phi(q\mathbf{a})=\phi(m\mathbf{a}/n)=m\phi(\mathbf{a}/n)=m\phi(\mathbf{a})/n=q\phi(\mathbf{a}).$$

(5) 任给一个非零实数 λ. 取空间中的一个非零向量 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$. 令 $\lambda\mathbf{a}=\overrightarrow{OA'}$ ，则 O ， A 和 A' 三点共线. 因为 ϕ 是一个仿射变换，所以 $\phi(O)$ ， $\phi(A)$ 和 $\phi(A')$ 也三点共线. 于是存在非零实数 μ ，使得 $\overrightarrow{\phi(O)\phi(A')}=\mu\overrightarrow{\phi(O)\phi(A)}$ ，即 $\phi(\lambda\mathbf{a})=\mu\phi(\mathbf{a})$. 设 $\mathbf{b}$ 是与 $\mathbf{a}$ 不共线的一个向量. 令 $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ 和 $\lambda\mathbf{b}=\overrightarrow{OB'}$.

图 2-1

因为两直线 AA' 和 BB' 平行，ϕ 为仿射变换，所以直线 $\phi(A)\phi(A')$ 与 $\phi(B)\phi(B')$ 也平行 (参见图 2-1), 并且也有 $\overrightarrow{\phi(O)\phi(B')}=\mu\overrightarrow{\phi(O)\phi(B)}$ ，即 $\phi(\lambda\mathbf{b})=\mu\phi(\mathbf{b})$. 若 $\tilde{\mathbf{a}}$ 是一个与 $\mathbf{a}$ 共线的非零向量，由于 $\tilde{\mathbf{a}}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线，同理由 $\phi(\lambda\mathbf{b})=\mu\phi(\mathbf{b})$ 可以推出 $\phi(\lambda\tilde{\mathbf{a}})=\mu\phi(\tilde{\mathbf{a}})$. 于是，对任何

非零向量 $\mathbf{b}$ ，有 $\phi(\lambda\mathbf{b}) = \mu\phi(\mathbf{b})$. 因为 $\phi(\mathbf{b}) \neq 0$ ， μ 由 λ 所唯一确定. 显然，等式 $\phi(\lambda\mathbf{b}) = \mu\phi(\mathbf{b})$ 对 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{b} = 0$ 也自然成立. 故性质 (5) 成立. $\square$

定理 2.1 设 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换，则 ϕ 诱导的向量变换 $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ 为线性变换，即对任何 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 和向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ 均有 $\phi(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\phi(\mathbf{a}) + \mu\phi(\mathbf{b})$.

证明 由命题 2.2 的性质 (5) 知，对任何非零实数 λ ，存在唯一非零实数 μ ，使得对任何向量 $\mathbf{a}$ ，恒有 $\phi(\lambda\mathbf{a}) = \mu\phi(\mathbf{a})$. 如果 $\lambda > 0$, 则对 $\sqrt{\lambda}$, 存在非零实数 ν , 使得对任何非零向量 $\mathbf{a}$, 均有 $\phi(\sqrt{\lambda}\mathbf{a}) = \nu\phi(\mathbf{a})$. 由此得到

$$\phi(\lambda\mathbf{a}) = \phi(\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda}\mathbf{a})) = \nu\phi(\sqrt{\lambda}\mathbf{a}) = \nu^2\phi(\mathbf{a}).$$

于是我们知道, 如果 $\lambda > 0$, 则它所对应的 $\mu > 0$. 由 $\phi(-\lambda\mathbf{a})) = -\mu\phi(\mathbf{a})$ 知，如果 $\lambda < 0$ ，则它对应的 $\mu < 0$. 这样我们总有 $\lambda\mu > 0$. 以下我们用反证法证明： $\lambda = \mu$. 若不然，则存在一个有理数 q ，使得 $\lambda - q$ 和 $\mu - q$ 异号. 这时，利用命题 1.13 的性质 (iv) 有

$$\phi((\lambda - q)\mathbf{a}) = \phi(\lambda\mathbf{a}) - q\phi(\mathbf{a}) = (\mu - q)\phi(\mathbf{a}).$$

但这时却有 $(\lambda - q)(\mu - q) < 0$ ，我们得到一个矛盾. 这样我们证明了，对任何非零实数 λ 和非零向量 $\mathbf{a}$ ，恒有 $\phi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\phi(\mathbf{a})$. 于是，对任何 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 和向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ ，均有

$$\phi(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \phi(\lambda a) + \phi(\mu\mathbf{b}) = \lambda\phi(\mathbf{a}) + \mu\phi(\mathbf{b}). \ \square$$

定义 2.4 设 $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ 为平面仿射映射. 设 $\mathbb{V}_\Sigma$ 和 $\mathbb{V}_{\Sigma'}$ 分别是平面 Σ 和 Σ' 上的所有向量构成的空间. 对任何 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}_\Sigma$, 我们取两点 $A, B \in \Sigma$, 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. 我们定义仿射变换 ϕ 所诱导的向量变换 $\phi : \mathbb{V}_\Sigma \to \mathbb{V}_{\Sigma'}$ 为

$$\phi(\mathbf{a}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

同样，这个定义是合理的.

与空间仿射变换的情形一样，我们有

定理 2.2 设 $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ 是一个仿射映射，则 ϕ 诱导的向量变换 $\phi : \mathbb{V}_\Sigma \to \mathbb{V}_{\Sigma'}$ 为线性变换，即对任何 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 和向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ 均有 $\phi(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\phi(\mathbf{a}) + \mu\phi(\mathbf{b})$.

定理 2.3 仿射映射或变换将共线的三点变成共线的三点，并保持分比不变.

证明 设 A, B 和 C 为共线三点. 因为仿射变换 ϕ 将直线变成直线，所以 $\phi(A)$, $\phi(B)$ 和 $\phi(C)$ 也是共线的三点. 设 A, B 和 C 三点的分比 $(A,B;C)=\lambda$ ，则有 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$. 于是，由定理 2.1 或定理 2.2 知

$$\overrightarrow{\phi(A)\phi(C)}=\phi(\overrightarrow{AC})=\lambda\,\phi(\overrightarrow{CB})=\lambda\,\overrightarrow{\phi(C)\phi(B)}.$$

故 $\phi(A)$, $\phi(B)$ 和 $\phi(C)$ 三点的分比也是 λ. □

命题 2.4 如果仿射变换 ϕ 有两个不动点 A 和 B, 则 ϕ 保持直线 AB 上的所有点不动.

证明 设 C 为直线 AB 上异于 B 的点，且 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$. 由定理 2.2 知 $\overrightarrow{\phi(A)\phi(C)}=\lambda\overrightarrow{\phi(C)\phi(B)}$. 因为 $\phi(A)=A$ 和 $\phi(B)=B$, 所以 $\overrightarrow{A\phi(C)}=\lambda\,\overrightarrow{\phi(C)B}$. 由此得到

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C\phi(C)}=\lambda\,\overrightarrow{\phi(C)C}+\lambda\,\overrightarrow{CB}.$$

故 $(1+\lambda)\overrightarrow{\phi(C)C}=0$. 由于 $C\neq B$, 所以 $\lambda+1\neq 0$, 故 $\phi(C)=C$. □

命题 2.5 如果仿射变换 ϕ 有三个不共线的不动点 A, B 和 C, 则 ϕ 保持此三点所确定的平面 Σ 上的所有点不动.

证明 设仿射变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 有三个不共线的不动点 A, B 和 C, 则由命题 2.3 知， ϕ 保持三直线 AB, BC 和 AB 上的所有点不动. 现设 X 是 A, B 和 C 所确定平面 Σ 上的任一点. 过 X 且在平面 Σ 上的一直线 l 必与三直线 AB, BC 和 AB 交两点 P 和 Q. 由于 P 和 Q 是 ϕ 的不动点，故由命题 2.3 知， l 上的所有点不动. 于是 X 也是 ϕ 的不动点. □

命题 2.6 如果仿射变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 有四个不共面的不动点 A, B, C 和 D, 则 ϕ 必为恒同变换.

证明 设 Σ_1, Σ_2, Σ_3 和 Σ_4 为 $\{A,B,C,D\}$ 四点所构成的四面体的四个面. 因为每个面均有 ϕ 的三个不共线的不动点，所有四个面上的所有点为 ϕ 的不动点. 现设 X 是空间中的任意一点，则过 X 的直线 l 至少与四面体的面交于两点 P 和 Q. 由于 P 和 Q 是 ϕ 的不动点，由命题 2.3 知， l 上的所有点均是 ϕ 的不动点. 故 X 是 ϕ 的不动点. □

定理 2.4 任给空间中两组不共面的四点 $\{A,B,C,D\}$ 和 $\{A',B',C',D'\}$, 存在唯一一个仿射变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$, 使得

$$\phi(A)=A',\ \ \phi(B)=B',\ \ \phi(C)=C',\ \ \phi(D)=D'.$$

证明 先证存在性. 设 $\{A,B,C,D\}$ 和 $\{A',B',C'D'\}$ 是两组不共面的四点. 则
$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$ 是空间中不共面的向量. 于是, 对任何 $P\in\mathbb{E}^3$, 存在唯一实数 x, y 和 z, 使得

$$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AC}. \tag{2.2.1}$$

我们定义 $\phi(P)\in\mathbb{E}^3$ 是满足以下方程的唯一点:

$$\overrightarrow{A'\phi(P)}=x\overrightarrow{A'B'}+y\overrightarrow{A'C'}+z\overrightarrow{A'C'}. \tag{2.2.2}$$

任给 $P'\in\mathbb{E}^3$, 存在唯一 (x,y,z) 满足

$$\overrightarrow{A'P'}=x\overrightarrow{A'B'}+y\overrightarrow{A'C'}+z\overrightarrow{A'C'}. \tag{2.2.3}$$

将此 (x,y,z) 代入 (2.2.1) 右边, 则存在唯一 $P\in\mathbb{E}^3$ 满足 (2.2.1). 由 $\phi(P)$ 的定义和 (2.2.3) 我们得到 $\phi(P)=P'$. 故 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 是一个空间变换. 因为 A 点对应 (2.2.1) 中的 $(x,y,z)=(0,0,0)$, 由 (2.2.2) 知 $\overrightarrow{A'\phi(A)}=\mathbf{0}$, 故 $\phi(A)=A'$. 因为 B 对应 (2.2.1) 中的 $(x,y,z)=(1,0,0)$, 由 (2.2.2) 知 $\overrightarrow{A'\phi(B)}=\overrightarrow{A'B'}$, 故 $\phi(B)=B'$. 同理得到 $\phi(C)=C'$ 和 $\phi(D)=D'$. 这样, $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 是一个空间变换, 它将 $\{A,B,C,D\}$ 分别映成 $\{A',B',C',D'\}$.

以下还需证明: $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 将共线三点映成共线的三点. 设 P, Q 和 R 是共线的三点. 则存在 $t\in\mathbb{R}$ 使得

$$\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AP}+(1-t)\overrightarrow{AR}.$$

现设

$$\overrightarrow{AP}=x_1\overrightarrow{AB}+y_1\overrightarrow{AC}+z_1\overrightarrow{AC},\ \ \overrightarrow{AQ}=x_2\overrightarrow{AB}+y_2\overrightarrow{AC}+z_2\overrightarrow{AC}.$$

则有

$$\overrightarrow{AR}=(tx_1+(1-t)x_2)\overrightarrow{AB}+(ty_1+(1-t)y_2)\overrightarrow{AC}+(tz_1+(1-t)z_2)\overrightarrow{AC}.$$

由定义得到

$$\overrightarrow{A'\phi(R)} = (tx_1+(1-t)x_2)\overrightarrow{A'B'}+(ty_1+(1-t)y_2)\overrightarrow{A'C'}+(tz_1+(1-t)z_2)\overrightarrow{A'C'}$$

$$= t(x_1\overrightarrow{A'B'} + y_1\overrightarrow{A'C'} + z_1\overrightarrow{A'C'}) + (1-t)(x_1\overrightarrow{A'B'} + y_1\overrightarrow{A'C'} + z_1\overrightarrow{A'C'})$$

$$= t\overrightarrow{A'\phi(P)} + (1-t)\overrightarrow{A'\phi(Q)}.$$

故 $\phi(P)$, $\phi(Q)$ 和 $\phi(R)$ 也共线.

以下证明唯一性. 如果 $\psi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换，它也将 $\{A, B, C, D\}$ 分别映成 $\{A', B', C', D'\}$. 令 $\sigma = \psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$. 则 σ 是一个仿射变换，它以不共面的四点 $\{A, B, C, D\}$ 为不动点. 由命题 2.5 知， σ 为恒同映射. 故 $\psi = \phi$, 唯一性成立. □

参照定理 2.4 的证明，容易得到

定理 2.5 任给平面 Σ 和 Σ' 上不共线的三点 $\{A, B, C\}$ 和 $\{A', B', C'\}$, 存在唯一一个仿射映射 $\phi : \Sigma \to \Sigma'$, 使得

$$\phi(A) = A', \ \phi(B) = B', \ \phi(C) = C'.$$

定义 2.5 设 M 和 M' 是平面（或空间）中的两个图形. 如果存在平面（或空间）的仿射变换 ϕ, 使得 $\phi(M) = M'$, 我们称图形 M 和 M' 是仿射等价的.

推论 2.2

(1) 平面上任意两个三角形仿射等价；

(2) 空间中任意两个四面体仿射等价.

定义 2.6 设 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换，它诱导向量空间的线性映射 $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. 任取 $\mathbb{V}$ 中的一组基 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 我们定义仿射变换 ϕ 的仿射常数 $C(\phi)$ 为

$$C(\phi) = \frac{[\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)]}{[e_1, e_2, e_3]}.$$

定理 2.6 仿射变换 ϕ 的仿射常数 $C(\phi)$ 的与 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的选取无关，并对任何两个仿射变换 $\phi, \psi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, 有 $C(\phi \circ \psi) = C(\phi)C(\psi)$.

证明 设 $\{e_1', e_2', e_3'\}$ 是向量空间的另一组基. 则存在实数 $\{a_i, b_i, c_i, 1 \le i \le 3\}$ 使得

$$e_1' = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,$$
$$e_2' = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,$$
$$e_3' = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3.$$

因为 $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ 为线性变换，所以有

$$\phi(e_1') = a_1\phi(e_1) + a_2\phi(e_2) + a_3\phi(e_3),$$
$$\phi(e_2') = b_1\phi(e_1) + b_2\phi(e_2) + b_3\phi(e_3),$$
$$\phi(e_3') = c_1\phi(e_1) + c_2\phi(e_2) + c_3\phi(e_3).$$

由向量体积的性质直接计算，得到

$$[e_1', e_2', e_3'] = [e_1, e_2, e_3] \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$[\phi(e_1'), \phi(e_2'), \phi(e_3')] = [\phi(e_1'), \phi(e_2'), \phi(e_3')] \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

于是，有

$$\frac{[\phi(e_1'), \phi(e_2'), \phi(e_3')]}{[e_1', e_2', e_3']} = \frac{[\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)]}{[e_1, e_2, e_3]}.$$

故仿射常数 $C(\phi)$ 的与 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的选取无关.

令 $\{e_1', e_2', e_3'\} = \{\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(e_3)\}$, 则有

$$C(\phi \circ \psi) = \frac{[\phi(\psi(e_1)), \phi(\psi(e_2)), \phi(\psi(e_3))]}{[e_1, e_2, e_3]}$$

$$= \frac{[\phi(e_1'), \phi(e_2'), \phi(e_3')]}{[e_1', e_2', e_3']} \cdot \frac{[\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(e_3)]}{[e_1, e_2, e_3]} = C(\phi)C(\psi). \ \square$$

以下我们给出仿射常数 $C(\phi)$ 的几何意义. 由定义和向量体积的几何意义知， $C(\phi) > 0$ 当且仅当 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是一个保定向的变换，即它将右手系标架映成右手系标架；而 $C(\phi) < 0$ 当且仅当 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是一个反定向的变换，即它将右手系标架映成左手系标架. 以下我们解释 $|C(\phi)|$ 的含义.

设仿射变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 将空间中一个封闭的容器 S 映成令一个封闭的容器 $S'=\phi(S)$(参见图 2-2).

图 2-2

为了计算容器 S 的体积，我们取许多长度为 $1/n$ 的小方块 c_n 尽可能地叠放到容器中，直到放不下为止．这时，所有小方块的体积总和 V_n 与容器 S 的体积 V 将非常接近．更准确地说，我们可以使得 $\lim_{n\to\infty}S_n=V$. 因为仿射变换 ϕ 将 S 中的每个小方块 c_n 映成容器 S' 中的小平行六面体 $c'_n=\phi(c_n)$. 设小方块 c_n 是由三个向量 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 所构成的，则 c'_n 是由向量 $\{\phi(e_1),\phi(e_2),\phi(e_3)\}$ 所构成的．因为

$$|C(\phi)|=\frac{|[\phi(e_1),\phi(e_2),\phi(e_3)]|}{|[e_1,e_2,e_3]|},$$

所以 c'_n 的体积和 c_n 之间的体积比为仿射常数 $|C(\phi)|$, 即 $|c'_n|=|C(\phi)||c_n|$. 故容器 S' 中所有小平行六面体的体积总和 $V'_n=|C(\phi)|V_n$. 这样容器 S' 的体积 $V'=|C(\phi)|V$. 于是，我们证明了以下的

定理 2.7 设仿射变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 将空间中的一个容器 S 映成另一个容器 S', 则 S' 与 S 的体积比 V'/V 是常数 $|C(\phi)|$, 它与容器 S 的选取无关.

习题 II-2

1. 平面上两组共线三点 $\{A,B,C\}$ 和 $\{A',B',C'\}$ 仿射等价，当且仅当 $(A,B;C)=(A',B';C')$.

1. 设 Σ 和 Σ' 是空间中的两张平面．如果 $\phi:\Sigma\to\Sigma'$ 是一个一一对应, 它将 Σ 中的直线映成 Σ' 中的直线, 我们就称 ϕ 为平面 Σ 到平面 Σ' 的仿射映射．证明：任给平面 Σ 上的不共线三点 $\{A,B,C\}$ 和 Σ' 上的不共线三点 $\{A',B',C'\}$, 存在唯一仿射映射 $\phi:\Sigma\to\Sigma'$, 使得 $\phi(A)=A'$, $\phi(B)=B'$ 和 $\phi(C)=C'$.

1. 设 $\phi:\Sigma\to\Sigma$ 是平面上的一个仿射变换. 任取向量空间 $\mathbb{V}$ 中的一组基 $\{e_1,e_2,e_3\}$, 使得 $\{e_1,e_2\}$ 落在平面上. 我们定义平面仿射变换 ϕ 的仿射常数为

$$C(\phi)=\frac{[\phi(e_1),\phi(e_2),e_3]}{[e_1,e_2,e_3]}.$$

证明: $C(\phi)$ 的定义与这种基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 的选取无关, 并对任何两个平面仿射变换 $\phi,\psi:\Sigma\to\Sigma$, 有 $C(\phi\circ\psi)=C(\phi)C(\psi)$.

1. 设平面仿射变换 $\phi:\Sigma\to\Sigma$ 将平面上的一个有限区域 D 映成另一个有限区域 D', 则 D' 与 D 的面积比 $|D'|/|D|$ 是常数 $|C(\phi)|$, 它与有限区域 D 无关.

§3 仿射变换和等距变换的坐标表示

3.1 仿射变换的坐标表示

定义 3.1 设 O 是空间中的一点，$\{e_1, e_2, e_3\}$ 是向量空间 $\mathbb{V}$ 的一组基. 我们称 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中的一个仿射坐标系 (仿射标架).

定理 3.1 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中的一个仿射坐标系， $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换，则 $\{\phi(O); \phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是空间的一个仿射坐标系；反之，任给空间中的两个仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$, 存在唯一的仿射变换 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, 它将 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 映成 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$.

证明 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中的一个仿射坐标系， $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换. 由于 $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是向量空间 $\mathbb{V}$ 的一组基, 故 $\{\phi(O); \phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是空间的一个仿射坐标系.

反之，设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 为空间中的两个仿射坐标系. 则存在唯一两组不共面的四点 $\{O, A, B, C\}$ 和 $\{O', A', B', C'\}$, 使得

$$e_1 = \overrightarrow{OA},\ \ e_2 = \overrightarrow{OB},\ \ e_3 = \overrightarrow{OC},\ \ e_1' = \overrightarrow{O'A'},\ \ e_2' = \overrightarrow{O'B'},\ \ e_3' = \overrightarrow{O'C'}.$$

由定理 2.4 知，存在唯一仿射变换 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, 它将 $\{O, A, B, C\}$ 分别映成 $\{O', A', B', C'\}$. 故有

$$\phi(O) = O',\ \ \phi(e_1) = e_1',\ \ \phi(e_2) = e_2',\ \ \phi(e_3) = e_3'.\ \square$$

我们在空间中取定一个坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. 则任给 $P \in \mathbb{E}^3$, 存在唯一的三元数组 (x, y, z), 使得

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

我们称 (x, y, z) 为 P 点在坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标. 显然，空间中的点和点的坐标是一一对应的.

设 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换. 则它诱导向量空间的线性变换 $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. 因为 $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是 $\mathbb{V}$ 的一组基，我们可以找到实数 $\{a_{ij}\}$, 使得

$$\phi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3;$$

$$\phi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3;$$

$$\phi(e_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3.$$

为了方便起见，我们将上式写成矩阵的乘积形式：

$$(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.1.1}$$

设 $\phi(O)$ 对应的坐标为 (c_1, c_2, c_3). 任取一点 P, 它的坐标为 (x, y, z). 我们记 $\phi(P)$ 的坐标为 (x', y', z'). 则有

$$\overrightarrow{O\phi(P)} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{O\phi(O)} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

由于 $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ 为线性变换，我们有

$$\phi(\overrightarrow{OP}) = \phi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x\phi(e_1) + y\phi(e_2) + z\phi(e_3)$$

$$= (\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

因为

$$\overrightarrow{O\phi(P)} = \overrightarrow{\phi(O)\phi(P)} + \overrightarrow{O\phi(O)} = \phi(\overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{O\phi(O)},$$

通过比较 e_1, e_2 和 e_3 的系数，我们得到

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \tag{3.1.2}$$

于是，仿射变换 ϕ 将坐标为 (x, y, z) 的点映成坐标为 (x', y', z') 的点，(3.2) 给出这两个坐标之间的关系式. 我们称 (3.1.2) 为仿射变换 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 在仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标表示。

我们记

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \phi(X) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

由 (3.1) 知,

$$[\phi(e_1),\phi(e_2),\phi(e_3)]=[e_1,e_2,e_3]\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=[e_1,e_2,e_3]|A|,$$

其中 $|A|$ 是矩阵 A 的行列式. 由此推出，仿射变换 ϕ 的体积比为

$$C(\phi)=\frac{[\phi(e_1),\phi(e_2),\phi(e_3)]}{[e_1,e_2,e_3]}=|A|.$$

因为仿射变换的体积比 $C(\phi)\neq 0$, 由矩阵理论知，矩阵 A 是可逆矩阵. 于是，仿射变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 在仿射坐标系 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 下可表成

$$\phi(X)=AX+C,$$

其中 A 是一个可逆矩阵.

反之，给定一个可逆矩阵 A 和常数组 (c_1,c_2,c_3), 我们定义映射 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$, 它将坐标为 X 的点 P, 映成坐标为 $AX+C$ 的点 $\phi(P)$. 对 $\mathbb{E}^3$ 中的任意一点 P', 它的坐标为 X', 我们通过解线性方程 $AX+C=X'$, 求得唯一的坐标为 $X=A^{-1}(X'-C)$ 的点 P, 使得 $\phi(P)=P'$. 这样 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 是一一对应. 现设 $\{P,Q,R\}$ 三点共线，它们对应的坐标分别是 $\{X,Y,Z\}$. 则存在 $t\in\mathbb{R}$, 使得 $Z=tX+(1-t)Y$. 因为 $\{\phi(P),\phi(Q),\phi(R)\}$ 的坐标分别是 $X'=AX+C$, $Y'=AY+C$ 和 $Z'=AZ+C$, 所以有

$$Z'=AZ+C=A(tX+(1-t)Y)+C$$

$$=t(AX+C)+(1-t)(AY+C)=tX'+(1-t)Y'.$$

故 $\{\phi(P),\phi(Q),\phi(R)\}$ 也三点共线. 这样, 由坐标映射 $X\to X'=AX+C$ 给出点的变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 将直线映成直线，为仿射变换.

综上所述，我们得到

定理 3.2 取定仿射坐标系 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$. 则空间中的任何一个仿射变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 有坐标表示

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},$$

其中 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 的行列式非零， $C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ 是常数组，而 ϕ 将坐标为 (x,y,z) 的点映成坐标为 (x',y',z') 的点.

定义 3.2 设 O 是平面 Σ 中的一点， $\{e_1,e_2\}$ 是向量空间 $\mathbb{V}_\Sigma$ 的一组基. 我们称 $\{O;e_1,e_2\}$ 为空间中的一个仿射坐标系 (仿射标架).

由定理 2.5 我们可以得到

定理 3.3 设 $\{O;e_1,e_2\}$ 为空间中的一个仿射坐标系，$\phi:\Sigma\to\Sigma'$ 是一个两个平面间的仿射映射, 则 $\{\phi(O);\phi(e_1),\phi(e_2)\}$ 是平面 Σ' 上的一个仿射坐标系; 反之, 任给平面 Σ 和 Σ' 上的两个仿射坐标系 $\{O;e_1,e_2\}$ 和 $\{O';e_1',e_2'\}$, 存在唯一的仿射映射 $\phi:\Sigma\to\Sigma'$, 它将 $\{O;e_1,e_2\}$ 映成 $\{O';e_1',e_2'\}$.

取定平面 Σ 上的一个仿射坐标系. 则给 $P\in\mathbb{E}^3$, 存在唯一的数对 (x,y), 使得

$$\overrightarrow{OP}=xe_1+ye_2=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

我们称 (x,y) 为 P 点在坐标系 $\{O;e_1,e_2\}$ 下的坐标. 显然，平面 Σ 中的点和点的坐标是一一对应的. 同理可证,

定理 3.4 在平面 Σ 上取定仿射坐标系 $\{O;e_1,e_2\}$. 则任何一个仿射变换 $\phi:\Sigma\to\Sigma$ 有坐标表示

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix},$$

其中矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ 的行列式非零， $C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ 是一个常数组.

3.2 等距变换的坐标表示

定义 3.3 设 O 是空间中一点， $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是向量空间 $\mathbb{V}$ 的一个单位正交标架. 我们称 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 为空间中的一个单位正交坐标系.

由定义知， $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是单位正交标架当且仅当

$$\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}\cdot(e_1,e_2,e_3)=I,\ \ I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

其中，等式左边可以理解为 3×1 矩阵和 1×3 矩阵的乘积，只是元素 e_i 和 e_j 之间的乘积为内积而已.

设 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 是一个等距变换. 因为 ϕ 将直线映成直线，所以 ϕ 也是一个仿射变换，它诱导向量空间的一个线性变换 $\phi:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$.

定理 3.5 设 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 是一个等距变换. 则它诱导的线性变换 $\phi:V\to\mathbb{V}$ 使得对应任何 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{V}$, 有

$$|\phi(\mathbf{a})|=|\mathbf{a}|,\ \ \phi(\mathbf{a})\cdot\phi(\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

证明 由于 ϕ 保持 $\mathbb{E}^3$ 中任意两点的距离不变，故对任何 $\mathbf{a}=\overrightarrow{PQ}\in\mathbb{V}$ 有

$$|\phi(\mathbf{a})|=|\phi(\overrightarrow{PQ})|=|\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)}|=d(\phi(P),\phi(Q))=d(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|=|\mathbf{a}|.$$

由 $\phi:V\to\mathbb{V}$ 的线性性得到

$$\phi(\mathbf{a})\cdot\phi(\mathbf{b})=\frac{1}{4}(|\phi(\mathbf{a}+\mathbf{b})|^2-|\phi(\mathbf{a}-\mathbf{b})|^2)$$

$$=\frac{1}{4}(|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.\ \square$$

定理 3.6 设 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 为空间中的一个单位正交标架，$\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ 是一个等距变换，则 $\{\phi(O);\phi(e_1),\phi(e_2),\phi(e_3)\}$ 也是空间的一个单位正交标架；反之，任给空间中的两个单位正交标架 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 和 $\{O';e_1',e_2',e_3'\}$, 存在唯一的等距变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$, 它将 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 映成 $\{O';e_1',e_2',e_3'\}$.

证明 由定理 3.5 知，如果 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 为空间中的一个单位正交标架，则 $\{\phi(e_1),\phi(e_2),\phi(e_3)\}$ 也是一个单位正交标架.

反之, 由定理 3.1 知, 任给空间中的两个单位正交标架 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 和 $\{O';e_1',e_2',e_3'\}$, 存在唯一一个仿射变换 $\phi:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$, 使得

$$\phi(O)=O',\ \ \phi(e_1)=e_1',\ \ \phi(e_2)=e_2',\ \ \phi(e_3)=e_3'.$$

以下证明 ϕ 是一个等距变换. 任取 $P,Q\in\mathbb{E}^3$, 记 $\overrightarrow{PQ}=xe_1+ye_2+ze_3$, 则由 $\phi:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ 的线性性得到

$$\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)}=\phi(\overrightarrow{PQ})=xe_1'+ye_2'+ze_3'.$$

因为 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 均为单位正交标架，故有

$$d(\phi(P), \phi(Q)) = |\phi(\overrightarrow{PQ})| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\overrightarrow{PQ}| = d(P, Q).$$

这样，$\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 为等距变换． $\square$

现设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间中一个单位正交标架，$\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 是一个等距变换．则 $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是一个单位正交标架．我们记

$$(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)) = (e_1, e_2, e_3)A,$$

其中 A 是一个 3×3 矩阵．通过对上述矩阵乘积作转置运算，得到

$$\begin{pmatrix} \phi(e_1) \\ \phi(e_2) \\ \phi(e_3) \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

其中，A' 是 A 的转置矩阵．于是，$\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也为单位正交基，当且仅当

$$I = \begin{pmatrix} \phi(e_1) \\ \phi(e_2) \\ \phi(e_3) \end{pmatrix} \cdot (\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)) = A' \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3)A = A'IA = A'A.$$

这样 A 是满足 $A'A = I$ 的矩阵，称为 **正交矩阵**．由 $A'A = I$, 推出 $A' = A^{-1}$, 进而得到 $AA' = I$.

由以上讨论和定理 3.2, 我们得到

定理 3.7 取定仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$．则空间中的任何一个等距变换 $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ 有坐标表示

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正交矩阵，$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ 是常数组，而 ϕ 将坐标为 (x, y, z) 的点映成坐标为 (x', y', z') 的点.

通常，我们称 $O(3) = \{A \mid AA' = I\}$ 为 3 阶正交群，称 $SO(3) = \{A \mid AA' = I, |A| = 1\}$ 为 3 阶旋转群.

定义 3.4 设 O 是平面 Σ 上一点，$\{e_1, e_2\}$ 是平面上相互正交的两个向量．我们称 $\{O; e_1, e_2\}$ 为平面上的一个单位正交标架．

设 Σ 为平面．在平面上取定单位正交坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$．同样我们可以证明：空间中的任何一个等距变换 $\phi : \Sigma \to \Sigma$ 可唯一表成

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是一个 2 阶正交矩阵，$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 是一个常数组．

由于 A 满足 $AA' = I$, 我们有

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \;\; a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \;\; a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} = 0. \tag{3.2.1}$$

取实数 θ 使得 $(a_{11}, a_{12}) = (\cos\theta, \sin\theta)$, 则由 (3.2.1) 可得到 $(a_{21}, a_{22}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$, 其中 $\varepsilon = \pm 1$. 故有

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\varepsilon\sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon = |A| = \pm 1. \tag{3.2.2}$$

这样我们有

定理 3.8 设 Σ 为平面．在平面上取定单位正交坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$．则平面上的每个等距变换 $\phi : \Sigma \to \Sigma$ 有坐标表示

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\varepsilon\sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon = \pm 1,$$

其中 $\varepsilon = 1$（$\varepsilon = -1$）表示 ϕ 是保定向（反定向）的等距变换，θ 是 $\phi(e_1)$ 和 e_1 之间的夹角，而 ϕ 将坐标为 (x, y) 的点映成坐标为 (x', y') 的点．

习题 II-3

1. 设 $\{O; e_1, e_2\}$ 和 $\{O'; e_1', e_2'\}$ 分别为两平面 Σ 和 Σ' 上两个单位正交标架．证明：存在唯一的等距映射 $\phi : \Sigma \to \Sigma$, 它将 $\{O; e_1, e_2\}$ 映成 $\{O'; e_1', e_2'\}$.